wölbes angenommen werden, deſto mehr nähert ſich das Reſultantenpolygon einer continuirlich verlaufenden Curve, der ſog. Seilcurve, die für dieſen ſpeciellen Fall identiſch mit der Stützlinie iſt.

Die Form des Reſultantenpolygons, ſo wie der Seilcurve iſt von der Lage der Angriffspunkte der Reactionen D und D_1 unabhängig. Denn, wenn man D um ein Stück verſchiebt, dabei jedoch die frühere Gröſse und Richtung beibehält, ſo ergiebt ſich ein neues Polygon, welches mit dem alten identiſch iſt und nur um ein beſtimmtes Stück höher oder tiefer liegt, als dieſes. Handelt es ſich demnach, wie häufig, nur um die Ermittelung der Form (nicht der Lage) der Seilcurve, ſo ſind nur 4 Unbekannte: D, D_1, α, α_1 vorhanden, mithin die Aufgabe bei Annahme einer dieſer Unbekannten ſtatiſch zu löſen.

Die Ermittelung der Form und Lage der Stützlinie auf ſtatiſchem Wege ſetzt nach Obigem die Kenntniſs der Kämpfer-Reactionen oder wenigſtens dreier von den ſechs Unbekannten voraus, welche die Kämpfer-Reactionen nach Gröſse, Richtung und Lage beſtimmen; denn alsdann ſind nur noch drei Unbekannte vorhanden, welche mit Hilfe der Statik ermittelt werden können. Mit Hilfe der Elaſticitätstheorie der Gewölbe hat *Winkler* folgenden wichtigen Satz gefunden, den wir hier nur angeben wollen, wegen des Beweiſes auf unten ſtehende Quellen[170]) verweiſend. 473. Ergebniſſe d. Elaſticitäts-theorie.

Bei conſtantem Querſchnitt iſt unter allen ſtatiſch möglichen Stützlinien nahezu diejenige die richtige, welche ſich der Bogenaxe durchſchnittlich am meiſten nähert, wenn man das Wort »durchſchnittlich« im Sinne der Methode der kleinſten Quadratſummen deutet. Es iſt alſo diejenige Stützlinie nahezu die richtige, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Bogenaxe ein Minimum iſt. Läſſt ſich demnach eine Stützlinie conſtruiren, welche mit der Mittellinie des Gewölbes zuſammenfällt, ſo wird dieſe die richtige ſein.

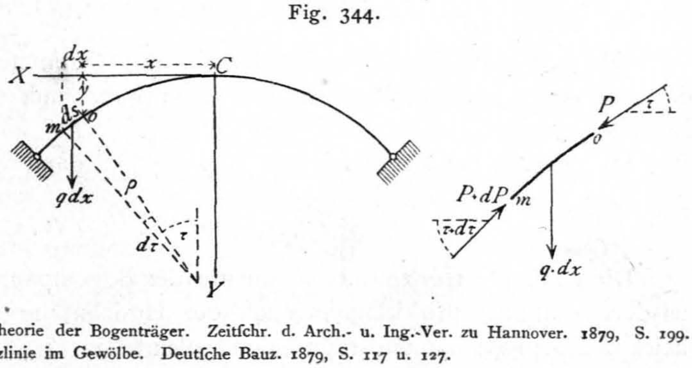
Man conſtruire alſo die Mittellinie des Bogens derart, daſs ſie für die gegebene Belaſtung mit der unter gewiſſen Annahmen conſtruirten Seilcurve übereinſtimmt; alsdann iſt dieſe Mittellinie die richtige Stützlinie — natürlich nur für die angenommene Belaſtung. Da es ſich aber im Hochbau meiſtens um conſtante Belaſtungen handelt, ſo iſt dieſe Ermittelung in der Regel genügend.

Wir werden ferner weiter unten ſehen, daſs es in vielen Fällen, in denen die Aufſuchung der genauen Stützlinie ſchwierig iſt, genügt, gewiſſe Grenzlagen der Stützlinie zu ermitteln; da aber die Stützlinie leicht aus dem Reſultantenpolygon conſtruirt werden kann, ſo wird für alle dieſe Fälle zunächſt das Reſultantenpolygon aufgeſucht.

b) Seilcurve und Reſultantenpolygon.

Aus der Erklärung des Begriffes der Seilcurve geht hervor, daſs an jeder Stelle die Tangente an die Seilcurve mit der auf dieſelbe wirkenden Reſultanten gleiche Richtung hat. Um nun die Gleichung der Seilcurve aufzuſtellen, betrachten wir ein Bogenſtück von der Länge ds (Fig. 344). Wir nehmen die Belaſtungen vertical und pro Längeneinheit der Horizontalprojection gleich q 474. Gleichung der Seilcurve.

Fig. 344.



170) Winkler, E. Beitrag zur Theorie der Bogenträger. Zeitſchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover. 1879, S. 199. Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutſche Bauz. 1879, S. 117 u. 127.

an, wobei q allgemein variabel ift. Alsdann wirken auf das Bogenftück mo von der Länge ds drei Kräfte: die Laft $q\,dx$ und die beiden Tangentialkräfte P, bezw. $P + dP$. Das Bogenftück ift unter Einwirkung diefer Kräfte im Gleichgewicht; mithin findet ftatt

$$0 = P \cos \tau - (P + dP) \cos (\tau + d\tau).$$

Führt man die Multiplication durch und läfft man die unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung fort, fo wird $0 = dP \cos \tau - P \sin \tau \, d\tau = d(P \cos \tau)$, d. h. $P \cos \tau$ ift eine Conftante. Nun ift $P \cos \tau$ die Horizontalcomponente der Bogenfpannung an beliebiger Stelle; wir bezeichnen diefelbe mit H; alsdann ift

$$P \cos \tau = H, \quad \ldots \ldots \quad 359.$$

und es heifst das gefundene Gefetz: Bei verticaler Belaftung ift die Horizontalcomponente der Bogenfpannung conftant. Man nennt H den Horizontalfchub des Gewölbes.

Die zweite Gleichgewichtsbedingung ergiebt

$$0 = q\,dx + P \sin \tau - (P + dP) \sin (\tau + d\tau),$$

und man findet in gleicher Weife, wie oben

$$0 = q\,dx - d(P \sin \tau) \quad \text{oder} \quad d(P \sin \tau) = q\,dx.$$

Nach Gleichung 359. ift jedoch $P = \frac{H}{\cos \tau}$, alfo

$$d(H \operatorname{tg} \tau) = q\,dx = d\left(H \frac{dy}{dx}\right) = H \frac{d^2 y}{dx};$$

daher

$$q = H \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H} \quad \ldots \ldots \quad 360.$$

Ift die Function q gegeben, fo erhält man durch zweimalige Integration die Gleichung der Seilcurve.

In vielen Fällen ift eine andere Form diefer Gleichung bequemer. Nennt man den Krümmungsradius der Seilcurve an der betrachteten Stelle ρ, fo ift nach Fig. 344 $ds = \rho\, d\tau$; ferner ift

$$\frac{q}{H} = d\,\frac{\frac{dy}{dx}}{dx} = d\,\frac{\operatorname{tg}\tau}{dx} = \frac{\frac{d\tau}{\cos^2 \tau}}{dx}, \text{ d. h. } \frac{q}{H}\,dx = \frac{d\tau}{\cos^2 \tau} \quad \text{und} \quad \cos \tau = \frac{dx}{ds},$$

d. h. $dx = ds \cos \tau = \rho\, d\tau \cos \tau$. Wird diefer Werth von dx in die Gleichung für $\frac{q}{H}\,dx$ eingeführt, fo ergiebt fich

$$\frac{q}{H}\,\rho\, d\tau \cos \tau = \frac{d\tau}{\cos^2 \tau} \quad \text{und} \quad \rho = \frac{H}{q \cos^3 \tau} \quad \ldots \ldots \quad 361.$$

Für gegebene Werthe von q, für ein angenommenes H, erhält man demnach die den verfchiedenen Werthen von τ entfprechenden Krümmungsradien durch Gleichung 361.

Im Scheitel der Curve fei $q = q_0$, $\rho = \rho_0$; alsdann wird, da $\tau_0 = 0$ ift,

$$\rho_0 = \frac{H}{q_0}, \quad \text{woraus} \quad H = q_0 \rho_0 \quad \ldots \ldots \quad 362.$$

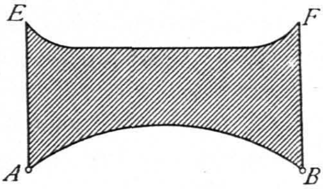
Die conftante Horizontalcomponente der Bogenfpannungen ift alfo das Product aus der Belaftung pro Längeneinheit der Horizontalprojection im Scheitel multiplicirt mit dem Krümmungsradius der Seilcurve im Scheitel.

Wird der Werth für H aus Gleichung 362. in Gleichung 361. eingeſetzt, ſo wird

$$\rho = \frac{q_0 \rho_0}{q \cos^3 \tau} \quad \text{und} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{q_0}{q \cos^3 \tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 362_a.$$

Gewöhnlich ſtellt man die Belaſtung des Bogens durch verticale Streifen von gleichem ſpecifiſchem Gewichte dar, ſo daſs alſo die verſchiedenen Belaſtungen der einzelnen Stellen durch verſchieden hohe Streifen repräſentirt werden. Man erhält ſo eine Fläche, deren untere Begrenzung die Seilcurve, deren obere Begrenzung die durch die Endpunkte der Streifen gelegte Linie iſt. Dieſe (in Fig. 345 ſchraffirte) Fläche wird die Belaſtungsfläche, die obere Grenzlinie die Belaſtungslinie genannt.

Fig. 345.



Die Differentialgleichung der Seilcurve $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{q}{H}$ ergiebt bei gegebener Belaſtung, alſo bei gegebener Function q, durch einmalige Integration den Ausdruck $\frac{d y}{d x} = \frac{1}{H} \int q \, d x + C$ und durch wiederholte Integration

$$y = \frac{1}{H} \int d x \int q \, d x + C x + C_1.$$

In dieſer Gleichung ſind drei Conſtante H, C und C_1, deren Annahme den Verlauf und die Lage der Seilcurve beſtimmt.

Handelt es ſich nur um die Form der Seilcurve, nicht um deren Lage, so kann man zwei Conſtante beliebig annehmen, da dieſe ja nur die Lage der Seilcurve beeinfluſſen. So kann man etwa $C = C_1 = 0$ annehmen und erhält als Gleichung der Seilcurvenform $y = \frac{1}{H} \int d x \int q \, d x$; dieſelbe giebt Auſſchluss über die gegenſeitige Lage der Curvenpunkte, nicht aber darüber, an welcher Stelle die Curve liegt.

Da es uns vorläufig nur auf die Form der Seilcurve ankommt, ſo werden wir zunächſt nur zwei Punkte der Seilcurve, nämlich die Kämpferpunkte vorſchreiben, und zwar ſollen dieſelben in gleicher Höhe liegen; damit ſind zwei Conſtante angenommen. Alsdann iſt für ſymmetriſch zu einer Verticalaxe angeordnete Belaſtung die Seilcurve gleichfalls zu dieſer Axe ſymmetriſch; die letztere wird am beſten als Y-Axe gewählt.

Hier ſind nun hauptſächlich zwei Aufgaben zu löſen. Einmal, wenn die Belaſtungslinie gegeben iſt, die zugehörige Seilcurve zu ermitteln, ſodann für eine gegebene Bogenform die zugehörige Belaſtungslinie zu finden. Was die erſt erwähnte Aufgabe anlangt, ſo iſt dieſelbe meiſtens in beſtimmterer Form ſo geſtellt, daſs die obere Grenzlinie der Belaſtungsfläche eine gerade horizontale Linie oder aus zwei geraden Linien zuſammengeſetzt iſt und die Seilcurve geſucht wird. Da dieſe Aufgabe eine etwas umſtändliche Rechnung erfordert, im Hochbau auch wohl in dieſer Form nur ausnahmsweiſe geſtellt wird und wir die graphiſche Ermittelung der Seilcurve für dieſen Fall zeigen werden, ſo können wir uns mit der Angabe der Quellen [171]), in welchen das Nähere darüber nachgeſehen werden kann, begnügen.

171) Schwedler, J. W. Theorie der Stützlinie. Ein Beitrag zur Form und Stärke gewölbter Bögen. Zeitſchr. f. Bauw. 1859, S. 109.

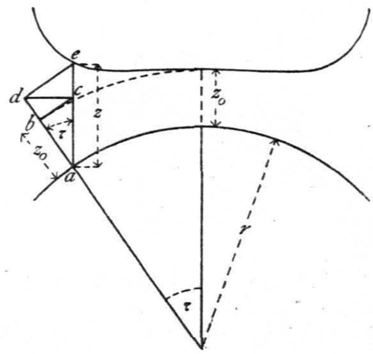
Ritter, A. Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik. Hannover 1876. S. 335.

Die zweite Aufgabe werden wir im folgenden Artikel behandeln, indem wir für den wichtigften Fall der Praxis, für den Kreisbogen die Belaftungslinie auffuchen.

475. Belaftungslinie für Kreisgewölbe.

Beim Kreife ift der Krümmungsradius conftant, d. h. $\rho = \rho_0 = r$; mithin übergeht die Gleichung 362a. der Seilcurve in $q = \frac{q_0}{\cos^3 \tau}$. Um in der Gleichung nur geometrifche Gröfsen zu behalten, nennen wir die Höhen der Belaftungsfläche im Scheitel, bezw. an einer beliebigen Stelle, die dem Centriwinkel τ entfpricht, z_0, bezw. z (Fig. 346); alsdann ift, wenn γ das fpecififche Gewicht des Belaftungsmaterials bedeutet, $q_0 = \gamma z_0$, $q = \gamma z$, $\gamma z = \frac{\gamma z_0}{\cos^3 \tau}$ und

Fig. 346.



$$z = \frac{z_0}{\cos^3 \tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 363.$$

Gleichung 363. ift die Gleichung der Belaftungslinie für den Kreis als Bogenaxe. Für $\tau = 0$ wird $z = z_0$, entfprechend der Annahme; für $\tau = 90^0$ wird $z = \frac{z_0}{0} = \infty$; demnach würde dem Halbkreis als Seilcurve am Widerlager eine unendlich grofse Belaftungshöhe entfprechen, mit anderen Worten: eine halbkreisförmige Seilcurve exiftirt nicht.

Die Gleichung 363. giebt ein bequemes Mittel an die Hand, die Belaftungslinie für den Kreisbogen zu conftruiren. Um die dem Punkte a entfprechende Belaftungshöhe z zu erhalten, trage man die gegebene Scheitelbelaftungshöhe $z_0 = \overline{ab}$ in der Richtung des Radius ab, ziehe durch a eine Verticale und durch b die Normale zum Radius, welche die erwähnte Verticale in c fchneidet, ferner durch c eine Horizontale cd und durch d eine Normale de zum Radius; alsdann ift $\overline{ae} = z$. Denn es ift

$$\overline{ac} = \frac{\overline{ab}}{\cos \tau}, \quad \overline{ad} = \frac{\overline{ab}}{\cos^2 \tau}, \quad \overline{ae} = \frac{\overline{ab}}{\cos^3 \tau} = \frac{z_0}{\cos^3 \tau}.$$

Wie man fieht, ift der Verlauf der Belaftungslinie von der angenommenen, refp. gegebenen Gröfse z_0 und der Gröfse des Radius abhängig. Man hat für das Verhältnifs $\frac{r}{z_0}$ eine befondere Bezeichnung eingeführt und nennt diefen Quotienten den Modulus. Bei kleinen Belaftungshöhen im Scheitel, etwa für $\frac{r}{z_0} = 10$, läuft die Belaftungslinie bis zu einem Centriwinkel von etwa 30 Grad jederfeits nahezu concentrifch mit dem Kreisbogen; bei gröfserer Belaftungshöhe, etwa für $\frac{r}{z_0} = 3$, ift fie in der Mitte bis zu einem Centriwinkel von beiläufig 30 Grad jederfeits nahezu horizontal. Für eine oben gerade abgegrenzte Belaftung, bei welcher $\frac{r}{z_0}$ nahezu gleich 3 ift, kann alfo der flache Stichbogen als Seilcurve betrachtet werden.

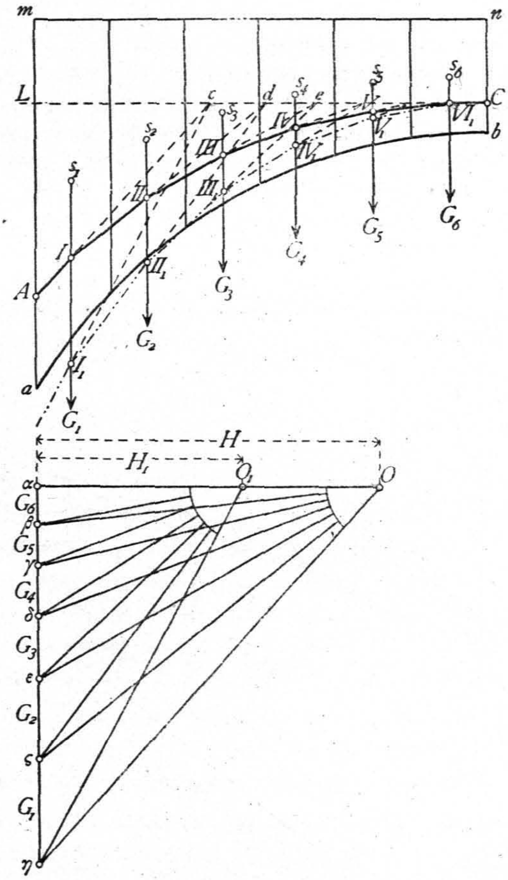
476. Conftruction der Seilcurve.

Die Seilcurve, bezw. das Refultantenpolygon ift nach Art. 474, S. 443 genau beftimmt, wenn drei Elemente für den Verlauf gegeben find; alsdann ift alfo auch eine graphifche Löfung der Aufgabe, d. h. eine Conftruction der Seilcurve möglich. Als diefe drei Elemente werden gewöhnlich drei Punkte angenommen, durch welche die Seilcurve verlaufen foll; ftatt deffen kann auch Gröfse, Richtung und Angriffspunkt einer Kämpfer-Reaction oder auch der Mittelkraft an beliebiger Stelle des Bogens angenommen werden. Wir werden weiter unten fehen, dafs die Annahme dreier Punkte, zweier in den Kämpfern und eines im Verlaufe der Curve, für viele

Fälle zweckmäfsig ift. Defshalb werden wir hier die Conftruction des Refultantenpolygons, welches durch drei vorgefchriebene Punkte geht, zeigen; aus dem Refultantenpolygon ergiebt fich dann leicht die Seilcurve, bezw. Stützlinie.

Bei einem zu einer Verticalaxe fymmetrifchen Bogen mit fymmetrifch zu diefer Axe disponirter Belaftung (Fig. 347) ift die Seilcurve nach Art. 474, S. 443 fymmetrifch zu diefer Axe, alfo bei continuirlichem Verlauf der Curve in der Mitte horizontal. Defshalb genügt die Verzeichnung nur einer Hälfte derfelben; für diefe Hälfte find die drei angenommenen Elemente: die beiden vorgefchriebenen Punkte C und A und die für den Scheitel vorgefchriebene horizontale Richtung der Seilcurve. Die Belaftungsfläche fei $a\,b\,n\,m$, und es folle das Refultantenpolygon durch A und C gehen, ferner in C horizontal fein.

Fig. 347.

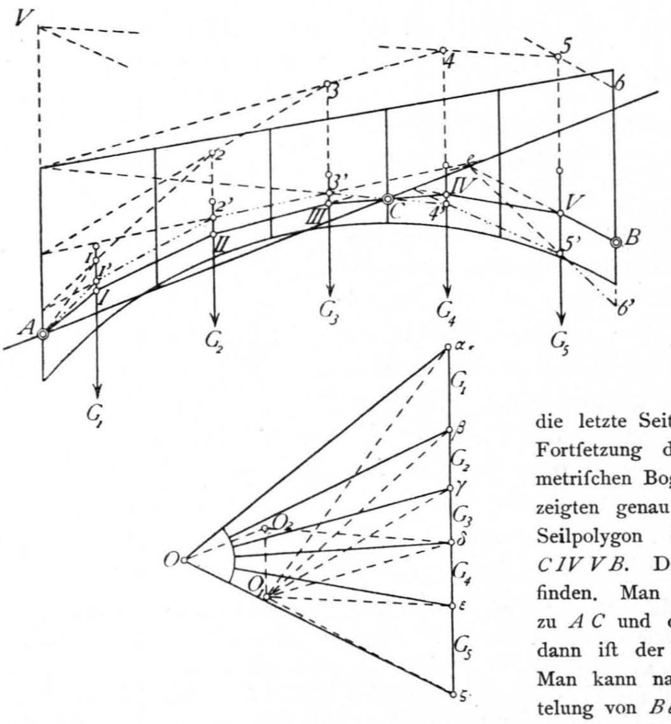


Man zerlege nun die Belaftungsfläche in eine Anzahl verticaler Lamellen, deren Gewichte G_6, G_5, G_4 ... G_1 leicht durch Multiplication der Flächengröfsen der einzelnen Lamellen mit der (normal zur Bildfläche gedachten) Einheit und dem fpecififchen Gewichte der Belaftung ermittelt werden. Diefe Gewichte haben ihre Angriffspunkte in den Schwerpunkten s_6, s_5 ... s_1 der einzelnen Lamellen. Die Gewichte G_6, G_5, G_4 ... G_1 werden nun zu einem Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma$ ... η an einander getragen und die im Punkte C wirkende Horizontalkraft zunächft beliebig mit $H_1 = O_1\,\alpha$ angenommen; die Zufammenfetzung derfelben mit G_6 ergiebt als Refultirende $O_1\,\beta$, welche Kraft durch den Schnittpunkt VI_1 von H_1 und G_6 geht. Die weitere Zufammenfetzung diefer und der folgenden Refultanten mit G_5, G_4 ... ergiebt das Polygon VI_1 V_1 IV_1 III_1 II_1 I_1, welches in Fig. 347 ftrichpunktirt ift. Daffelbe wird allgemein nicht durch A gehen, ift alfo noch nicht das richtige Refultantenpolygon. Um daffelbe aus dem verzeichneten zu finden, benutzen wir, da das Refultantenpolygon ein Seilpolygon ift, den in Art. 269, S. 240 bewiefenen Satz VII. Es liegen hier, da die Refultante in C horizontal ift, die zwei Pole, fowohl der zum richtigen, wie der zum unrichtigen Refultantenpolygon gehörige, auf der durch α gezogenen Horizontalen; die Verbindungslinie beider Pole ift alfo eine Horizontale; beide Refultantenpolygone gehen durch C. In diefem Punkte fchneiden fich alfo die beiden erften Seilpolygonfeiten. Alle gleichvielten Seilpolygonfeiten fchneiden fich demnach auf einer durch C gelegten Horizontalen CL. Die auf G_1 folgende Seite des richtigen Refultantenpolygons geht nach der Annahme durch A; aufserdem durch den Punkt c, in welchem die auf G_1 folgende Seite des unrichtigen Polygons die Linie CL fchneidet. Die Verbindungslinie Ac ergiebt alfo die richtige Seite. Diefelbe ift bis zur Verticalen von G_1 ausgezogen. Die Seilpolygonfeite zwifchen G_1 und G_2' geht einmal durch I, ferner nach obigem Satze durch d, ift alfo $I\,II\,d$. In diefer Weife erhält man das richtige Refultantenpolygon $A\,I\,II\,III\,IV\,V\,VI_1\,C$. Der zugehörige Werth von H wird erhalten, indem man durch η eine Linie parallel zu Ac zieht und den Schnittpunkt O derfelben mit der durch α gehenden Horizontalen auffucht. Es wird $O\alpha = H$; O ift aufserdem der Pol des Refultantenpolygons. Die Gröfsen der einzelnen Refultanten werden durch die Strahlen $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ ... dargeftellt.

Bei einem beliebig geftalteten Bogen mit beliebiger Belaftung (Fig. 348) genügt die Unterfuchung einer Hälfte nicht; vielmehr ift alsdann der ganze Bogen zu betrachten. Das Refultantenpolygon, welches durch drei vorgefchriebene Punkte verläuft, ergiebt fich alsdann, wie folgt.

Die Laften feien G_1, G_2, G_3, G_4, G_5; alsdann wird zunächft das Kraftpolygon $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$ und für einen beliebig angenommenen Pol O_1 ein Seilpolygon conftruirt, welches letztere durch einen der gegebenen Punkte, etwa *A* gehen möge *(A 1 2 3 4 5 6)*. Allgemein wird daffelbe nicht durch die beiden anderen vorgefchriebenen Punkte *B* und *C* gehen, ift alfo noch nicht das richtige. Wir conftruiren nun zunächft ein zweites Seilpolygon, welches durch *A* und *C* geht, indem wir einen neuen Pol O_2 annehmen, durch *A* eine Linie parallel zu $O_1\,O_2$ ziehen und nun diefes Seilpolygon nach dem Satze VII des Art. 269, S. 240 ermitteln. Der Einfachheit halber nehmen wir den Pol O_2 in der gleichen Verticalen mit O_1 an; alsdann ift die Schnittlinie der gleichvielten Seiten des bereits conftruirten und des gefuchten Seilpolygons die durch *A* gelegte Verticale *A V*. Man erhält, indem man zunächft diejenige Seite des neuen Seilpolygons ermittelt, welche durch *C* geht, das ftrichpunktirte Seilpolygon *A 1' 2' 3' 4' 5' 6'*, welches durch *A* und *C*, aber nicht durch *B* geht. Das endgiltig richtige Seilpolygon geht nun jedenfalls durch *A* und *C*; die gleichvielten Seiten des richtigen und des ftrichpunktirten Polygons fchneiden fich auf einer Linie, welche der Verbindungslinie des richtigen Poles mit dem Pol O_2 parallel ift. Diefe Linie geht jedenfalls durch *A*, weil fich in *A* zwei gleichvielte Seilpolygonfeiten fchneiden, und aus gleichem Grunde durch *C*; mithin ift *A C* diefe Linie. Man ziehe alfo *A C*, ermittele den Schnittpunkt der auf die letzte Laft G_5 folgenden Seite des ftrichpunktirten Seilpolygons mit *AC*, d. h. *e*, verbinde *e* mit *B*; alsdann ift *e B* die letzte Seite des richtigen Seilpolygons. Die Fortfetzung der Conftruction ift der für fymmetrifchen Bogen und fymmetrifche Belaftung gezeigten genau analog und ergiebt das richtige Seilpolygon oder Refultantenpolygon *A I II III C IV V B*. Der richtige Pol *O* ift nun leicht zu finden. Man ziehe durch O_2 eine Linie parallel zu *A C* und durch ζ eine Parallele zu *B e*; alsdann ift der Schnittpunkt beider der Punkt *O*. Man kann natürlich auch fofort nach der Ermittelung von *B e* diefen Pol auffuchen und dann das Refultantenpolygon in gewöhnlicher Weife conftruiren, wobei die erfte Seite durch *A* gelegt wird.

Fig. 348.



Betreff der praktifchen Conftruction ift noch Folgendes zu beachten. Die Belaftung wird durch eine Fläche von an allen Stellen gleichem fpecififchem Gewichte dargeftellt. Die gegebenen Belaftungen haben aber nicht das gleiche fpecififche Gewicht, müffen defshalb auf daffelbe fpecififche Gewicht, am bequemften auf dasjenige des Wölbmaterials reducirt werden; man erfetzt alfo die Laften durch eben fo fchwere Mauerwerkskörper.