3) Stabilität der Thurmdächer.

Durch die Windbelaftung werden die Sparren an der Windfeite auf Zug, diejenigen an der Unterwindfeite auf Druck beanfprucht; durch das Eigengewicht erhalten alle Sparren Druck. Wenn der in dem Sparren mögliche gröfste Zug in Folge des Winddruckes gröfser ift, als der durch das Eigengewicht erzeugte Druck, fo ift Gleichgewicht nur möglich, wenn auf den Sparren Seitens des Auflagers ein Zug ausgeübt wird, welcher wenigftens fo grofs ift, wie der gröfste im Sparren herrfchende refultirende Zug. Diefer Zug Seitens des Auflagers wird durch Verankerung der Sparren mit dem Thurmmauerwerk erzeugt, und es mufs das Gewicht des an den Anker gehängten Mauerwerkes, welches als Zug auf den Sparren wirkt, wenigftens fo grofs fein, wie der gröfstmögliche Zug in demfelben. Es empfiehlt fich, die Verankerung weiter hinabzuführen, etwa fo weit, dafs das Mauergewicht doppelt fo grofs ift, als der gröfste Zug im Sparren.

Literatur.

Bücher über »Statik der Dachftühle«.

UNWIN, W. *Wrought-iron bridges and roofs etc.* London 1870.

CORDIER, E. *Equilibre ftabile des charpentes en fer, bois et fonte.* Paris 1872.

RITTER, Dr. A. Elementare Theorie und Berechnung eiferner Dach- und Brücken-Conftructionen. 3. Aufl. Hannover 1873.

FABRÉ, V. *Théorie des charpentes, donnant des règles pratiques pour la conftruction des fermes et autres appareils en bois et en fonte.* Paris 1873.

CARGILL, Th. *The ftrains upon bridge girders and roof truffes etc.* London 1873.

SHREVE, S. *A treatife on the ftrength of bridges and roofs etc.* New-York 1873.

TETMAJER, L. Die äufseren und inneren Kräfte an ftatifch beftimmten Brücken- und Dachftuhl-Conftructionen. Zürich 1875.

NICOUR, Ch. *Calcul d'un comble en fer du fyftème Polonceau.* Paris 1875.

SCHWEDLER, W. Die Conftruction der Kuppeldächer. 2. Aufl. Berlin 1878.

TRÉLAT, E. *La rigidité dans les combles.* Paris 1878.

Deutfche bautechnifche Tafchenbibliothek. Heft 10: Berechnung der Dachwerke. Von W. Jeep. Leipzig 1876.

---

4. Abfchnitt.

Gewölbe.

469. Allgemeines.

Die Gewölbe find aus einzelnen, mehr oder weniger keilförmig geftalteten Elementen zufammengefetzte Bauconftructionen, welche bei verticalen Belaftungen fchiefe Drücke auf die fie ftützenden Conftructionstheile ausüben. Indem wir die verfchiedenen Gewölbearten hier als bekannt vorausfetzen, bemerken wir, dafs wir uns im vorliegenden Abfchnitt hauptfächlich mit den Tonnen-, bezw. Kappengewölben, den Kreuzgewölben und den Kuppelgewölben befchäftigen werden, auf welche alle anderen Gewölbearten leicht zurückgeführt werden können.

Der allgemeinen theoretifchen Unterfuchung foll das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe zu Grunde gelegt werden; dabei werden wir ftets, falls nichts Anderes bemerkt wird, ein Gewölbeſtück betrachten, deſſen Dimenſion normal zur Bildfläche gleich der Einheit, alſo gleich 1^m iſt. Alsdann fällt die Kraftebene mit der mittleren Verticalebene zuſammen.

---

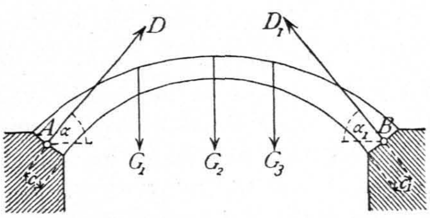
1. Kapitel.

Die Stützlinie und das Reſultantenpolygon.

a) Allgemeines.

Für die Ermittelung der im Gewölbe auftretenden inneren Kräfte und die Stabilitätsunterſuchung deſſelben iſt zunächſt — genau wie bei den früher behandelten Bauconſtructionen — die Kenntniſs der äuſseren auf das Gewölbe wirkenden Kräfte nöthig, alſo der Belaſtungen und der Auflager-Reactionen. Die Belaſtungen ſind in den meiſten Fällen gegeben, bezw. aus den Tabellen in Art. 359, S. 318 leicht zu beſtimmen. Schwieriger iſt hier die Ermittelung der Auflager-Reactionen oder, wie ſie hier heiſsen, der Kämpfer-Reactionen. Bei den bisherigen Conſtructionen genügten zu deren Beſtimmung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen; hier iſt dies nicht der Fall. Wird ein beliebiges Gewölbe (Fig. 341) betrachtet, ſo wird bei jedem Auflager — hier Kämpfer genannt — auf das Gewölbe eine Anzahl von Kräften übertragen, deren Mittelkraft eben die geſuchte Kämpfer-Reaction iſt; von dieſen Kämpfer-Reactionen iſt aber jederſeits weder Gröſse, noch Richtung, noch Angriffspunkt (A, bezw. B) bekannt. Wir haben demnach in den Kämpfer-Reactionen 6 Unbekannte: D, D_1, α, α_1, c, c_1 (wenn c und c_1 die Abſtände der Punkte A und B von den inneren Laibungspunkten der Widerlager bezeichnen). Da die Statik vermittels der Gleichgewichtsbedingungen nur 3 Gleichungen zur Verfügung ſtellt, ſo iſt die Ermittelung der Kämpfer-Reactionen auf rein ſtatiſchem Wege nicht möglich. Die Löſung der Aufgabe wird möglich, wenn man das Gewölbe als elaſtiſchen Bogen auffaſſt und annimmt, daſs bei den durch die Belaſtungen erfolgenden Deformationen die Widerlager und die anſchlieſsenden Bogenenden genau unveränderte Lage behalten. Dieſe mit der Wirklichkeit nahezu übereinſtimmende Annahme giebt weitere 3 Gleichungen, ſo daſs jetzt für die 6 Unbekannten 6 Gleichungen vorhanden ſind, die Aufgabe alſo gelöst werden kann. 470. Kämpfer-Reactionen.

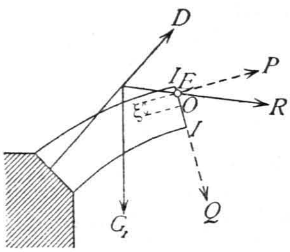
Fig. 341.



Wir werden ſehen, daſs für die einfachen Fälle des Hochbaues, bei denen faſt ſtets eine ruhende Belaſtung in Frage kommt, die Elaſticitätsgleichungen nicht aufgeſtellt zu werden brauchen. Vorläufig wollen wir annehmen, daſs die Kämpfer-Reactionen nach Gröſse, Richtung und Lage auf irgend welche Art gefunden und bekannt ſeien.

Iſt Letzteres der Fall, ſo ſind alle äuſseren, auf das Gewölbe wirkenden Kräfte bekannt; es können demnach für irgend einen beliebigen, normal zur Bildebene genommenen Querſchnitt II (Fig. 342) des Gewölbes die ſämmtlichen äuſseren Kräfte an der einen Seite deſſelben zu einer Reſultirenden vereinigt werden. 471. Stützlinie.

Fig. 342.



Betrachtet man etwa denjenigen Gewölbetheil, welcher zwiſchen dem linken Widerlager und dem Querſchnitte *II* liegt, ſo ſei dieſe Reſultirende gleich R. Damit Gleichgewicht vorhanden ſei, müſſen im Querſchnitt *II* eine Anzahl innerer Kräfte wirken, deren Reſultirende gleiche Gröſse, gleiche Richtung, gleichen Angriffspunkt und entgegengeſetzten Sinn hat, wie die Kraft R. Mit der Kraft R kennen wir alſo auch die Reſultirende der hier thätigen inneren Kräfte. Zerlegt man R in eine Componente P, welche parallel iſt zu der an die Bogenaxe im betrachteten Querſchnitte gezogenen Tangente, und in eine zu erſterer normale Componente Q, ſo heiſst die erſtere die Axialkraft, die zweite die Transverſalkraft (ſiehe Art. 295, S. 257). Die Transverſalkraft iſt für die hier zu betrachtenden Fälle von geringer Bedeutung; von weſentlicher Bedeutung dagegen iſt Gröſse und Lage von P. Die durch die Axialkraft in den einzelnen Faſern des Querſchnittes *II* erzeugten Druck-, bezw. Zugſpannungen können ohne merkbaren Fehler nach den im Art. 296, S. 261 für gerade Balken berechneten Gleichungen beſtimmt werden. Man erhält demnach die Spannung N in einer um z von der Mittellinie entfernten Faſer nach Gleichung 33. und 50.

$$N = \frac{P}{F} + \frac{Mz}{\mathcal{J}} = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F \xi z}{\mathcal{J}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 358.$$

M iſt das Moment der äuſseren Kräfte für den Punkt O, d. h. für denjenigen Punkt, in welchem die Mittellinie des Gewölbes den Querſchnitt *II* ſchneidet; es iſt alſo hier $M = P\xi$, da Q in Bezug auf O kein Moment hat. Die poſitiven Werthe für N ſind hier Druckbeanſpruchungen; die negativen Werthe bedeuten Zug.

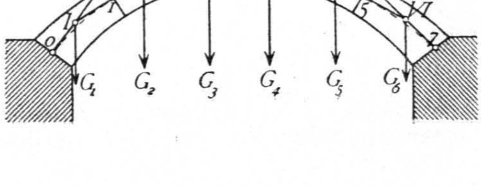
Von hervorragender Bedeutung für den Werth von N iſt die Gröſse von ξ oder, was daſſelbe iſt, die Lage des Punktes E, des Schnittpunktes der Reſultirenden R mit dem von ihr afficirten Querſchnitte. Man hat deſshalb für dieſe Punkte E eine beſondere Bezeichnung eingeführt: die Stützlinie. Die Stützlinie iſt die Verbindungslinie aller derjenigen Punkte, in denen die Gewölbequerſchnitte von den auf ſie wirkenden reſultirenden Kräften geſchnitten werden.

Den verſchiedenen Belaſtungsarten entſprechen verſchiedene Reſultirende für die einzelnen Querſchnitte; es folgt daraus, daſs bei demſelben Gewölbe jeder Belaſtungsart auch eine beſondere Stützlinie entſpricht.

472. Reſultantenpolygon.

Zerlegt man das Gewölbe in eine Anzahl von Theilen (Fig. 343), ermittelt die Kämpfer-Reactionen (D und D_1), ſo wie die Belaſtungen der einzelnen Theile (G_1, G_2, G_3 … G_6) und ſetzt zunächſt D mit der erſten Laſt G_1 zu einer Reſultirenden zuſammen, dieſe letztere mit G_2 und fährt ſo bis zum rechten Kämpfer fort, ſo erhält man ein Polygon *0 I II III IV V VI* 7, welches man das Reſultantenpolygon nennt. Aus dem Reſultantenpolygon ergiebt ſich ſofort die Stützlinie, wenn man die Schnittpunkte der einzelnen Reſultanten mit den bezüglichen Querſchnitten, d. h. die Punkte 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 7 mit einander verbindet. Je kleiner die einzelnen Theile des Ge-

Fig. 343.



wölbes angenommen werden, deſto mehr nähert ſich das Reſultantenpolygon einer continuirlich verlaufenden Curve, der ſog. Seilcurve, die für dieſen ſpeciellen Fall identiſch mit der Stützlinie iſt.

Die Form des Reſultantenpolygons, ſo wie der Seilcurve iſt von der Lage der Angriffspunkte der Reactionen D und D_1 unabhängig. Denn, wenn man D um ein Stück verſchiebt, dabei jedoch die frühere Gröſse und Richtung beibehält, ſo ergiebt ſich ein neues Polygon, welches mit dem alten identiſch iſt und nur um ein beſtimmtes Stück höher oder tiefer liegt, als dieſes. Handelt es ſich demnach, wie häufig, nur um die Ermittelung der Form (nicht der Lage) der Seilcurve, ſo ſind nur 4 Unbekannte: D, D_1, α, α_1 vorhanden, mithin die Aufgabe bei Annahme einer dieſer Unbekannten ſtatiſch zu löſen.

Die Ermittelung der Form und Lage der Stützlinie auf ſtatiſchem Wege ſetzt nach Obigem die Kenntniſs der Kämpfer-Reactionen oder wenigſtens dreier von den ſechs Unbekannten voraus, welche die Kämpfer-Reactionen nach Gröſse, Richtung und Lage beſtimmen; denn alsdann ſind nur noch drei Unbekannte vorhanden, welche mit Hilfe der Statik ermittelt werden können. Mit Hilfe der Elaſticitätstheorie der Gewölbe hat *Winkler* folgenden wichtigen Satz gefunden, den wir hier nur angeben wollen, wegen des Beweiſes auf unten ſtehende Quellen[170]) verweiſend. 473. Ergebniſſe d. Elaſticitäts-theorie.

Bei conſtantem Querſchnitt iſt unter allen ſtatiſch möglichen Stützlinien nahezu diejenige die richtige, welche ſich der Bogenaxe durchſchnittlich am meiſten nähert, wenn man das Wort »durchſchnittlich« im Sinne der Methode der kleinſten Quadratſummen deutet. Es iſt alſo diejenige Stützlinie nahezu die richtige, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Bogenaxe ein Minimum iſt. Läſſt ſich demnach eine Stützlinie conſtruiren, welche mit der Mittellinie des Gewölbes zuſammenfällt, ſo wird dieſe die richtige ſein.

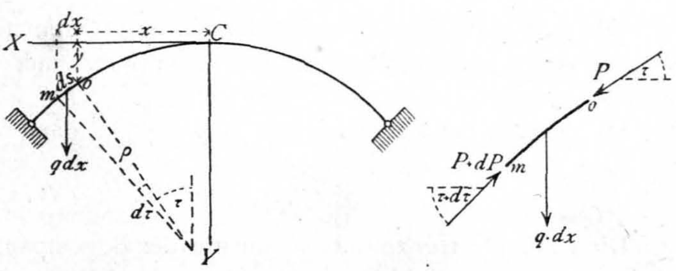
Man conſtruire alſo die Mittellinie des Bogens derart, daſs ſie für die gegebene Belaſtung mit der unter gewiſſen Annahmen conſtruirten Seilcurve übereinſtimmt; alsdann iſt dieſe Mittellinie die richtige Stützlinie — natürlich nur für die angenommene Belaſtung. Da es ſich aber im Hochbau meiſtens um conſtante Belaſtungen handelt, ſo iſt dieſe Ermittelung in der Regel genügend.

Wir werden ferner weiter unten ſehen, daſs es in vielen Fällen, in denen die Aufſuchung der genauen Stützlinie ſchwierig iſt, genügt, gewiſſe Grenzlagen der Stützlinie zu ermitteln; da aber die Stützlinie leicht aus dem Reſultantenpolygon conſtruirt werden kann, ſo wird für alle dieſe Fälle zunächſt das Reſultantenpolygon aufgeſucht.

b) Seilcurve und Reſultantenpolygon.

Aus der Erklärung des Begriffes der Seilcurve geht hervor, daſs an jeder Stelle die Tangente an die Seilcurve mit der auf dieſelbe wirkenden Reſultanten gleiche Richtung hat. Um nun die Gleichung der Seilcurve aufzuſtellen, betrachten wir ein Bogenſtück von der Länge ds (Fig. 344). Wir nehmen die Belaſtungen vertical und pro Längeneinheit der Horizontalprojection gleich q 474. Gleichung der Seilcurve.

Fig. 344.



170) Winkler, E. Beitrag zur Theorie der Bogenträger. Zeitſchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover. 1879, S. 199. Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutſche Bauz. 1879, S. 117 u. 127.

an, wobei q allgemein variabel ift. Alsdann wirken auf das Bogenftück $m\,o$ von der Länge $d\,s$ drei Kräfte: die Laft $q\,d\,x$ und die beiden Tangentialkräfte P, bezw. $P + d\,P$. Das Bogenftück ift unter Einwirkung diefer Kräfte im Gleichgewicht; mithin findet ftatt

$$0 = P \cos \tau - (P + d\,P) \cos (\tau + d\,\tau).$$

Führt man die Multiplication durch und läfft man die unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung fort, fo wird $0 = d\,P \cos \tau - P \sin \tau\, d\,\tau = d\,(P \cos \tau)$, d. h. $P \cos \tau$ ift eine Conftante. Nun ift $P \cos \tau$ die Horizontalcomponente der Bogenfpannung an beliebiger Stelle; wir bezeichnen diefelbe mit H; alsdann ift

$$P \cos \tau = H, \qquad \ldots \ldots \ldots \qquad 359.$$

und es heifst das gefundene Gefetz: Bei verticaler Belaftung ift die Horizontalcomponente der Bogenfpannung conftant. Man nennt H den Horizontalfchub des Gewölbes.

Die zweite Gleichgewichtsbedingung ergiebt

$$0 = q\,d\,x + P \sin \tau - (P + d\,P) \sin (\tau + d\,\tau),$$

und man findet in gleicher Weife, wie oben

$$0 = q\,d\,x - d\,(P \sin \tau) \quad \text{oder} \quad d\,(P \sin \tau) = q\,d\,x.$$

Nach Gleichung 359. ift jedoch $P = \dfrac{H}{\cos \tau}$, alfo

$$d\,(H \operatorname{tg} \tau) = q\,d\,x = d\left(H \frac{d\,y}{d\,x}\right) = H \frac{d^2 y}{d\,x};$$

daher

$$q = H \frac{d^2 y}{d\,x^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{q}{H} \qquad \ldots \ldots \qquad 360.$$

Ift die Function q gegeben, fo erhält man durch zweimalige Integration die Gleichung der Seilcurve.

In vielen Fällen ift eine andere Form diefer Gleichung bequemer. Nennt man den Krümmungsradius der Seilcurve an der betrachteten Stelle ρ, fo ift nach Fig. 344 $d\,s = \rho\,d\,\tau$; ferner ift

$$\frac{q}{H} = d\,\frac{\frac{d\,y}{d\,x}}{d\,x} = d\,\frac{\operatorname{tg} \tau}{d\,x} = \frac{\frac{d\,\tau}{\cos^2 \tau}}{d\,x}, \text{ d. h. } \frac{q}{H}\,d\,x = \frac{d\,\tau}{\cos^2 \tau} \quad \text{und} \quad \cos \tau = \frac{d\,x}{d\,s},$$

d. h. $d\,x = d\,s \cos \tau = \rho\,d\,\tau \cos \tau$. Wird diefer Werth von $d\,x$ in die Gleichung für $\dfrac{q}{H}\,d\,x$ eingeführt, fo ergiebt fich

$$\frac{q}{H}\,\rho\,d\,\tau \cos \tau = \frac{d\,\tau}{\cos^2 \tau} \quad \text{und} \quad \rho = \frac{H}{q \cos^3 \tau} \qquad \ldots \ldots \qquad 361.$$

Für gegebene Werthe von q, für ein angenommenes H, erhält man demnach die den verfchiedenen Werthen von τ entfprechenden Krümmungsradien durch Gleichung 361.

Im Scheitel der Curve fei $q = q_0$, $\rho = \rho_0$; alsdann wird, da $\tau_0 = 0$ ift,

$$\rho_0 = \frac{H}{q_0}, \quad \text{woraus} \quad H = q_0\,\rho_0 \qquad \ldots \ldots \ldots \qquad 362.$$

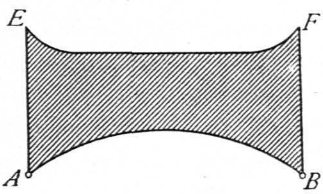
Die conftante Horizontalcomponente der Bogenfpannungen ift alfo das Product aus der Belaftung pro Längeneinheit der Horizontalprojection im Scheitel multiplicirt mit dem Krümmungsradius der Seilcurve im Scheitel.

Wird der Werth für H aus Gleichung 362. in Gleichung 361. eingefetzt, fo wird

$$\rho = \frac{q_0 \rho_0}{q \cos^3 \tau} \quad \text{und} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{q_0}{q \cos^3 \tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 362_a.$$

Gewöhnlich ftellt man die Belaftung des Bogens durch verticale Streifen von gleichem fpecififchem Gewichte dar, fo dafs alfo die verfchiedenen Belaftungen der einzelnen Stellen durch verfchieden hohe Streifen repräfentirt werden. Man erhält fo eine Fläche, deren untere Begrenzung die Seilcurve, deren obere Begrenzung die durch die Endpunkte der Streifen gelegte Linie ift. Diefe (in Fig. 345 fchraffirte) Fläche wird die Belaftungsfläche, die obere Grenzlinie die Belaftungslinie genannt.

Fig. 345.



Die Differentialgleichung der Seilcurve $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{q}{H}$ ergiebt bei gegebener Belaftung, alfo bei gegebener Function q, durch einmalige Integration den Ausdruck $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \int q \, dx + C$ und durch wiederholte Integration

$$y = \frac{1}{H} \int dx \int q \, dx + C x + C_1.$$

In diefer Gleichung find drei Conftante H, C und C_1, deren Annahme den Verlauf und die Lage der Seilcurve beftimmt.

Handelt es fich nur um die Form der Seilcurve, nicht um deren Lage, so kann man zwei Conftante beliebig annehmen, da diefe ja nur die Lage der Seilcurve beeinfluffen. So kann man etwa $C = C_1 = 0$ annehmen und erhält als Gleichung der Seilcurvenform $y = \frac{1}{H} \int dx \int q \, dx$; diefelbe giebt Auffchluss über die gegenfeitige Lage der Curvenpunkte, nicht aber darüber, an welcher Stelle die Curve liegt.

Da es uns vorläufig nur auf die Form der Seilcurve ankommt, fo werden wir zunächft nur zwei Punkte der Seilcurve, nämlich die Kämpferpunkte vorfchreiben, und zwar follen diefelben in gleicher Höhe liegen; damit find zwei Conftante angenommen. Alsdann ift für fymmetrifch zu einer Verticalaxe angeordnete Belaftung die Seilcurve gleichfalls zu diefer Axe fymmetrifch; die letztere wird am beften als Y-Axe gewählt.

Hier find nun hauptfächlich zwei Aufgaben zu löfen. Einmal, wenn die Belaftungslinie gegeben ift, die zugehörige Seilcurve zu ermitteln, fodann für eine gegebene Bogenform die zugehörige Belaftungslinie zu finden. Was die erft erwähnte Aufgabe anlangt, fo ift diefelbe meiftens in beftimmterer Form fo geftellt, dafs die obere Grenzlinie der Belaftungsfläche eine gerade horizontale Linie oder aus zwei geraden Linien zufammengefetzt ift und die Seilcurve gefucht wird. Da diefe Aufgabe eine etwas umftändliche Rechnung erfordert, im Hochbau auch wohl in diefer Form nur ausnahmsweife geftellt wird und wir die graphifche Ermittelung der Seilcurve für diefen Fall zeigen werden, fo können wir uns mit der Angabe der Quellen [171]), in welchen das Nähere darüber nachgefehen werden kann, begnügen.

---

171) Schwedler, J. W. Theorie der Stützlinie. Ein Beitrag zur Form und Stärke gewölbter Bögen. Zeitfchr. f. Bauw. 1859, S. 109.

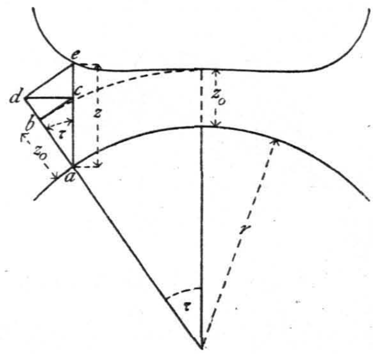
Ritter, A. Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik. Hannover 1876. S. 335.

Die zweite Aufgabe werden wir im folgenden Artikel behandeln, indem wir für den wichtigften Fall der Praxis, für den Kreisbogen die Belaftungslinie auffuchen.

475. Belaftungslinie für Kreisgewölbe.

Beim Kreife ift der Krümmungsradius conftant, d. h. $\rho = \rho_0 = r$; mithin übergeht die Gleichung 362a. der Seilcurve in $q = \frac{q_0}{\cos^3 \tau}$. Um in der Gleichung

Fig. 346.



nur geometrifche Gröfsen zu behalten, nennen wir die Höhen der Belaftungsfläche im Scheitel, bezw. an einer beliebigen Stelle, die dem Centriwinkel τ entfpricht, z_0, bezw. z (Fig. 346); alsdann ift, wenn γ das fpecififche Gewicht des Belaftungsmaterials bedeutet, $q_0 = \gamma z_0$, $q = \gamma z$, $\gamma z = \frac{\gamma z_0}{\cos^3 \tau}$ und

$$z = \frac{z_0}{\cos^3 \tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 363.$$

Gleichung 363. ift die Gleichung der Belaftungslinie für den Kreis als Bogenaxe. Für $\tau = 0$ wird $z = z_0$, entfprechend der Annahme; für $\tau = 90^0$ wird $z = \frac{z_0}{0} = \infty$; demnach würde dem Halbkreis als Seilcurve am Widerlager eine unendlich grofse Belaftungshöhe entfprechen, mit anderen Worten: eine halbkreisförmige Seilcurve exiftirt nicht.

Die Gleichung 363. giebt ein bequemes Mittel an die Hand, die Belaftungslinie für den Kreisbogen zu conftruiren. Um die dem Punkte a entfprechende Belaftungshöhe z zu erhalten, trage man die gegebene Scheitelbelaftungshöhe $z_0 = \overline{ab}$ in der Richtung des Radius ab, ziehe durch a eine Verticale und durch b die Normale zum Radius, welche die erwähnte Verticale in c fchneidet, ferner durch c eine Horizontale cd und durch d eine Normale de zum Radius; alsdann ift $\overline{ae} = z$. Denn es ift

$$\overline{ac} = \frac{\overline{ab}}{\cos \tau}, \quad \overline{ad} = \frac{\overline{ab}}{\cos^2 \tau}, \quad \overline{ae} = \frac{\overline{ab}}{\cos^3 \tau} = \frac{z_0}{\cos^3 \tau}.$$

Wie man fieht, ift der Verlauf der Belaftungslinie von der angenommenen, refp. gegebenen Gröfse z_0 und der Gröfse des Radius abhängig. Man hat für das Verhältnifs $\frac{r}{z_0}$ eine befondere Bezeichnung eingeführt und nennt diefen Quotienten den Modulus. Bei kleinen Belaftungshöhen im Scheitel, etwa für $\frac{r}{z_0} = 10$, läuft die Belaftungslinie bis zu einem Centriwinkel von etwa 30 Grad jederfeits nahezu concentrifch mit dem Kreisbogen; bei gröfserer Belaftungshöhe, etwa für $\frac{r}{z_0} = 3$, ift fie in der Mitte bis zu einem Centriwinkel von beiläufig 30 Grad jederfeits nahezu horizontal. Für eine oben gerade abgegrenzte Belaftung, bei welcher $\frac{r}{z_0}$ nahezu gleich 3 ift, kann alfo der flache Stichbogen als Seilcurve betrachtet werden.

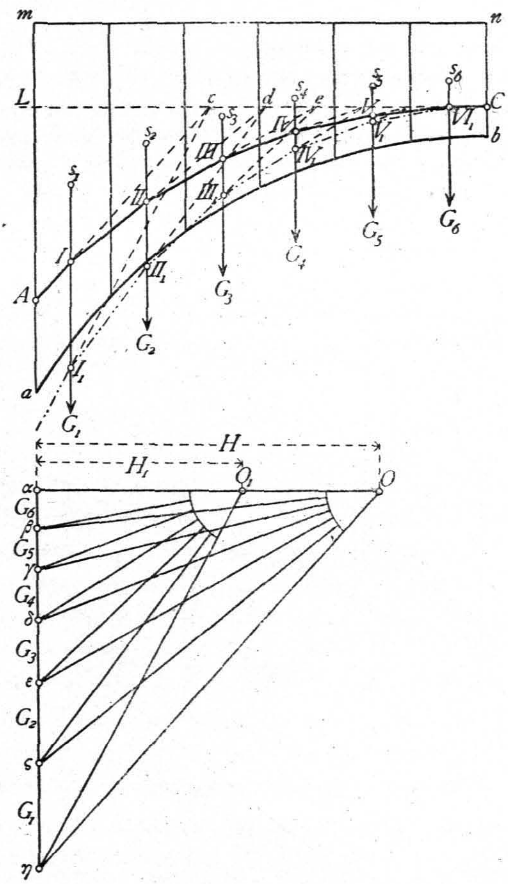
476. Conftruction der Seilcurve.

Die Seilcurve, bezw. das Refultantenpolygon ift nach Art. 474, S. 443 genau beftimmt, wenn drei Elemente für den Verlauf gegeben find; alsdann ift alfo auch eine graphifche Löfung der Aufgabe, d. h. eine Conftruction der Seilcurve möglich. Als diefe drei Elemente werden gewöhnlich drei Punkte angenommen, durch welche die Seilcurve verlaufen foll; ftatt deffen kann auch Gröfse, Richtung und Angriffspunkt einer Kämpfer-Reaction oder auch der Mittelkraft an beliebiger Stelle des Bogens angenommen werden. Wir werden weiter unten fehen, dafs die Annahme dreier Punkte, zweier in den Kämpfern und eines im Verlaufe der Curve, für viele

Fälle zweckmäſsig iſt. Deſshalb werden wir hier die Conſtruction des Reſultantenpolygons, welches durch drei vorgeſchriebene Punkte geht, zeigen; aus dem Reſultantenpolygon ergiebt ſich dann leicht die Seilcurve, bezw. Stützlinie.

Bei einem zu einer Verticalaxe ſymmetriſchen Bogen mit ſymmetriſch zu dieſer Axe disponirter Belaſtung (Fig. 347) iſt die Seilcurve nach Art. 474, S. 443 ſymmetriſch zu dieſer Axe, alſo bei continuirlichem Verlauf der Curve in der Mitte horizontal. Deſshalb genügt die Verzeichnung nur einer Hälfte derſelben; für dieſe Hälfte ſind die drei angenommenen Elemente: die beiden vorgeſchriebenen Punkte C und A und die für den Scheitel vorgeſchriebene horizontale Richtung der Seilcurve. Die Belaſtungsfläche ſei $a\,b\,n\,m$, und es ſolle das Reſultantenpolygon durch A und C gehen, ferner in C horizontal ſein.

Fig. 347.

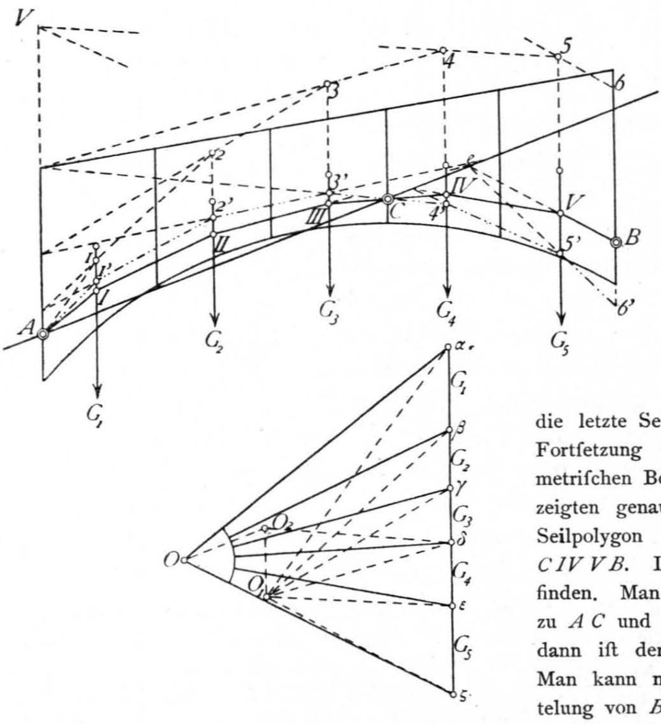


Man zerlege nun die Belaſtungsfläche in eine Anzahl verticaler Lamellen, deren Gewichte G_6, G_5, G_4 . . . G_1 leicht durch Multiplication der Flächengröſsen der einzelnen Lamellen mit der (normal zur Bildfläche gedachten) Einheit und dem ſpecifiſchen Gewichte der Belaſtung ermittelt werden. Dieſe Gewichte haben ihre Angriffspunkte in den Schwerpunkten s_6, s_5 . . . s_1 der einzelnen Lamellen. Die Gewichte G_6, G_5, G_4 . . . G_1 werden nun zu einem Kraftpolygon $\alpha \beta \gamma$ . . . η an einander getragen und die im Punkte C wirkende Horizontalkraft zunächſt beliebig mit $H_1 = O_1 \alpha$ angenommen; die Zuſammenſetzung derſelben mit G_6 ergiebt als Reſultirende $O_1 \beta$, welche Kraft durch den Schnittpunkt VI_1 von H_1 und G_6 geht. Die weitere Zuſammenſetzung dieſer und der folgenden Reſultanten mit G_5, G_4 . . . ergiebt das Polygon $VI_1\ V_1\ IV_1\ III_1\ II_1\ I_1$, welches in Fig. 347 ſtrichpunktirt iſt. Daſſelbe wird allgemein nicht durch A gehen, iſt alſo noch nicht das richtige Reſultantenpolygon. Um daſſelbe aus dem verzeichneten zu finden, benutzen wir, da das Reſultantenpolygon ein Seilpolygon iſt, den in Art. 269, S. 240 bewieſenen Satz VII. Es liegen hier, da die Reſultante in C horizontal iſt, die zwei Pole, ſowohl der zum richtigen, wie der zum unrichtigen Reſultantenpolygon gehörige, auf der durch α gezogenen Horizontalen; die Verbindungslinie beider Pole iſt alſo eine Horizontale; beide Reſultantenpolygone gehen durch C. In dieſem Punkte ſchneiden ſich alſo die beiden erſten Seilpolygonſeiten. Alle gleichvielten Seilpolygonſeiten ſchneiden ſich demnach auf einer durch C gelegten Horizontalen CL. Die auf G_1 folgende Seite des richtigen Reſultantenpolygons geht nach der Annahme durch A; auſserdem durch den Punkt c, in welchem die auf G_1 folgende Seite des unrichtigen Polygons die Linie CL ſchneidet. Die Verbindungslinie Ac ergiebt alſo die richtige Seite. Dieſelbe iſt bis zur Verticalen von G_1 ausgezogen. Die Seilpolygonſeite zwiſchen G_1 und G_2' geht einmal durch I, ferner nach obigem Satze durch d, iſt alſo $I\,II\,d$. In dieſer Weiſe erhält man das richtige Reſultantenpolygon $A\ I\ II\ III\ IV\ V\ VI_1\ C$. Der zugehörige Werth von H wird erhalten, indem man durch η eine Linie parallel zu Ac zieht und den Schnittpunkt O derſelben mit der durch α gehenden Horizontalen aufſucht. Es wird $O\alpha = H$; O iſt auſserdem der Pol des Reſultantenpolygons. Die Gröſsen der einzelnen Reſultanten werden durch die Strahlen $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ . . . dargeſtellt.

Bei einem beliebig geſtalteten Bogen mit beliebiger Belaſtung (Fig. 348) genügt die Unterſuchung einer Hälfte nicht; vielmehr iſt alsdann der ganze Bogen zu betrachten. Das Reſultantenpolygon, welches durch drei vorgeſchriebene Punkte verläuft, ergiebt ſich alsdann, wie folgt.

Die Laſten ſeien G_1, G_2, G_3, G_4, G_5; alsdann wird zunächſt das Kraftpolygon $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$ und für einen beliebig angenommenen Pol O_1 ein Seilpolygon conſtruirt, welches letztere durch einen der gegebenen Punkte, etwa A gehen möge $(A\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$. Allgemein wird daſſelbe nicht durch die beiden anderen vorgeſchriebenen Punkte B und C gehen, iſt alſo noch nicht das richtige. Wir conſtruiren nun zunächſt ein zweites Seilpolygon, welches durch A und C geht, indem wir einen neuen Pol O_2 annehmen, durch A eine Linie parallel zu $O_1\,O_2$ ziehen und nun dieſes Seilpolygon nach dem Satze VII des Art. 269, S. 240 ermitteln. Der Einfachheit halber nehmen wir den Pol O_2 in der gleichen Verticalen mit O_1 an; alsdann iſt die Schnittlinie der gleichvielten Seiten des bereits conſtruirten und des geſuchten Seilpolygons die durch A gelegte Verticale $A\,V$. Man erhält, indem man zunächſt diejenige Seite des neuen Seilpolygons ermittelt, welche durch C geht, das ſtrichpunktirte Seilpolygon $A\ 1'\ 2'\ 3'\ 4'\ 5'\ 6'$, welches durch A und C, aber nicht durch B geht. Das endgiltig richtige Seilpolygon geht nun jedenfalls durch A und C; die gleichvielten Seiten des richtigen und des ſtrichpunktirten Polygons ſchneiden ſich auf einer Linie, welche der Verbindungslinie des richtigen Poles mit dem Pol O_2 parallel iſt. Dieſe Linie geht jedenfalls durch A, weil ſich in A zwei gleichvielte Seilpolygonſeiten ſchneiden, und aus gleichem Grunde durch C; mithin iſt $A\,C$ dieſe Linie. Man ziehe alſo $A\,C$, ermittele den Schnittpunkt der auf die letzte Laſt G_5 folgenden Seite des ſtrichpunktirten Seilpolygons mit $A\,C$, d. h. e, verbinde e mit B; alsdann iſt $e\,B$ die letzte Seite des richtigen Seilpolygons. Die Fortſetzung der Conſtruction iſt der für ſymmetriſchen Bogen und ſymmetriſche Belaſtung gezeigten genau analog und ergiebt das richtige Seilpolygon oder Reſultantenpolygon $A\,I\,II\,III\,C\,IV\,V\,B$. Der richtige Pol O iſt nun leicht zu finden. Man ziehe durch O_2 eine Linie parallel zu $A\,C$ und durch ζ eine Parallele zu $B\,e$; alsdann iſt der Schnittpunkt beider der Punkt O. Man kann natürlich auch ſofort nach der Ermittelung von $B\,e$ dieſen Pol aufſuchen und dann das Reſultantenpolygon in gewöhnlicher Weiſe conſtruiren, wobei die erſte Seite durch A gelegt wird.

Fig. 348.



Betreff der praktiſchen Conſtruction iſt noch Folgendes zu beachten. Die Belaſtung wird durch eine Fläche von an allen Stellen gleichem ſpecifiſchem Gewichte dargeſtellt. Die gegebenen Belaſtungen haben aber nicht das gleiche ſpecifiſche Gewicht, müſſen deſshalb auf daſſelbe ſpecifiſche Gewicht, am bequemſten auf dasjenige des Wölbmaterials reducirt werden; man erſetzt alſo die Laſten durch eben ſo ſchwere Mauerwerkskörper.

2. Kapitel.

Tonnen- und Kappengewölbe.

Die Zerſtörung des Gewölbes kann erfolgen:

1) durch Umkanten eines Gewölbetheiles um eine innere oder äuſsere Kante, 477. Stabilität.

2) durch Gleiten einzelner Gewölbetheile längs der Fugen und

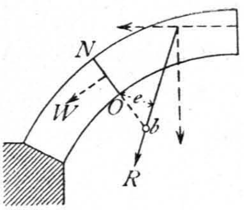
3) durch Zerdrücken der Wölbſteine.

Wenn die Lage der Stützlinie bekannt iſt, ſo können alle auf die Stabilität des Gewölbes bezügliche Fragen leicht beantwortet werden. Die wirkliche Lage der Stützlinie iſt aber nach Art. 470, S. 439 nur mittels der Elaſticitätslehre zu ermitteln, und es iſt dieſe Ermittelung ſehr umſtändlich. Wir werden deſshalb im vorliegenden Kapitel nur die Bedingungen der Stabilität der Gewölbe entwickeln und gewiſſe Grenzlagen ermitteln, zwiſchen denen die Stützlinie zu liegen hat.

Soll das Gewölbe (Fig. 349) ſtabil ſein, ſo muſs die Stützlinie ganz im Gewölbe liegen. 478. Stabilität gegen Kanten.

Wenn die Reſultirende R aller an der einen Seite des Querſchnittes NO wirkenden Kräfte die Verlängerung des Querſchnittes etwa im Punkt b ſchneidet, ſo hat dieſe Kraft in Bezug auf O ein Moment $M = Re$, welches eine Drehung des oberhalb NO liegenden Gewölbetheiles um O erſtrebt. Dieſe Drehung kann nur durch eine andere, entgegengeſetzt drehende Kraft W (in Fig. 349 punktirt) mit gleich groſsem Momente in Bezug auf O aufgehoben werden, d. h. durch einen Zugwiderſtand der Gewölbefaſern. Die Wölbſteine können aber einen ſolchen, wenn von der Cohäſion des Mörtels abgeſehen wird, nicht leiſten, ſo daſs alſo eine Kraft nicht exiſtirt, welche das Gleichgewicht herſtellen könnte. Der oberhalb der Fuge NO befindliche Gewölbetheil würde demnach um O kanten und einſtürzen. Eine Aufhebung der Kraft R iſt erſt möglich, wenn dieſelbe den Querſchnitt NO ſchneidet; alsdann erzeugt ſie in den einzelnen Faſern des Querſchnittes Druckſpannungen, welche R aufheben. Soll alſo das Gewölbe nicht um O kanten, ſo muſs der Schnittpunkt der Reſultirenden R mit dem Querſchnitte, d. h. der Schnittpunkt der Stützlinie mit dem Querſchnitte in das Gewölbe fallen. Was aber vom Querſchnitt NO gilt, gilt von allen Querſchnitten. Das Gewölbe iſt alſo nur dann gegen Kanten ſtabil, wenn die Stützlinie ganz im Gewölbe liegt.

Fig. 349.



In Art. 318 bis 322, S. 273 bis 277 iſt nachgewieſen worden, wie ſich die axialen Faſerſpannungen für Balken mit gerader Axe ergeben, falls auf dieſelben Axialkräfte und Momente wirken. Mit für die Praxis hinreichender Genauigkeit können die dort gefundenen Formeln auch gebraucht werden, um die Spannungsvertheilung in den Gewölbefugen zu ermitteln. Die Spannung in einer Faſer, welche um z von der normal zur Bildebene errichteten Schwerpunktsaxe des Querſchnittes abſteht, iſt demnach nach Gleichung 50., bezw. 358. 479. Stabilität gegen Zerdrücken.

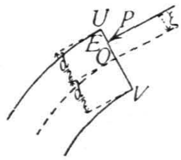
$$N = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F \xi z}{\mathfrak{J}}\right).$$

Hier handelt es ſich nur um rechteckige Querſchnitte von der Höhe d und der Breite 1 (normal zur Bildebene); mithin iſt $F = d \,.\, 1$, $\mathfrak{J} = \frac{d^3}{12}$ und

$$N = \frac{P}{d}\left(1 + \frac{12\,\xi\,z}{d^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 364.$$

Da P hier ſtets Druck iſt und wir P als poſitiv einführen, ſo bedeuten die poſitiven Werthe von N Druck, die negativen Werthe Zug. Der gröſste Druck N_{max} findet bei der in Fig. 350 gezeichneten Lage der Kraft N in der Faſer U ſtatt, für welche z ſeinen gröſsten Werth $\frac{d}{2}$ hat; der kleinſte Druck N_{min} in der Faſer V, für welche z ſeinen kleinſten Werth $-\frac{d}{2}$ hat; demnach wird

Fig. 350.



$$N_{max} = \frac{P}{d}\left(1 + \frac{12\,\xi\,d}{2\,d^2}\right) = \frac{P}{d}\left(1 + \frac{6\,\xi}{d}\right) \quad \text{und} \quad N_{min} = \frac{P}{d}\left(1 - \frac{6\,\xi}{d}\right) \quad . \quad 365.$$

N_{min} wird zu Null, wenn $1 - \frac{6\,\xi}{d} = 0$, d. h. wenn $\xi = \frac{d}{6}$ iſt.

In der am wenigſten gedrückten Faſer V findet alſo die Spannung Null ſtatt, wenn die Mittelkraft den Querſchnitt in der Höhe $\frac{d}{6}$ über der Mittellinie des Gewölbes ſchneidet. Schneidet die Kraft P, alſo die Stützlinie, den Querſchnitt unterhalb O, ſo ergiebt ſich leicht aus Gleichung 364. (indem man $-\xi$ ſtatt $+\xi$ einführt), daſs der gröſste Druck in der Faſer V, der gröſste Zug in der Faſer U ſtattfindet. In U findet demnach die Spannung Null ſtatt, wenn die Stützlinie den Querſchnitt in dem Abſtande $\frac{d}{6}$ unterhalb der Schwerpunktsaxe ſchneidet.

N_{max} und N_{min} haben gleiches Vorzeichen für diejenigen Werthe von ξ, für welche gleichzeitig ſtattfindet

$$1 + \frac{6\,\xi}{d} > 0 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{6\,\xi}{d} > 0, \text{ d. h. für } \xi > -\frac{d}{6} \quad \text{und} \quad \xi < +\frac{d}{6}.$$

So lange alſo der Schnittpunkt der Reſultirenden nicht weiter von der Gewölbemittellinie entfernt iſt, als $\frac{d}{6}$, d. h. ſo lange der Schnittpunkt im inneren Gewölbedrittel liegt, haben N_{max} und N_{min} gleiches Vorzeichen, ſind demnach N_{max} und N_{min} Druck; dann findet aber im ganzen Querſchnitte nur Druck ſtatt.

Iſt dagegen ξ gröſser als $\frac{d}{6}$, ſo findet in der am meiſten gezogenen Faſer Zugbeanſpruchung ſtatt; dann gilt die Gleichung 358. für die Druckvertheilung nicht mehr, weil dieſe unter der Annahme einer Beanſpruchung aller Faſern entwickelt worden iſt; falls aber hier einzelne Faſern des Querſchnittes auf Zug beanſprucht werden, ſo findet entweder ein Klaffen der Fugen oder ein indifferentes Aneinanderliegen der Steine ſtatt. Die dann geltenden Gleichungen ſind in Art. 322, S. 275 entwickelt. Falls ξ gröſser als $\frac{d}{6}$ iſt, mit anderen Worten, falls die Stützlinie einen Querſchnitt auſserhalb des inneren Drittels ſchneidet, etwa im Abſtande c von der zunächſt gelegenen äuſseren Faſer, ſo vertheilt ſich nach Art. 322, S. 275 und 276 der Druck P auf eine Breite $3\,c$, wobei der Maximaldruck doppelt ſo groſs iſt, als wenn ſich der Druck über die gedrückte Fläche gleichmäſsig vertheilte. Wir erhalten alſo $N_{max} = \frac{2\,P}{3\,c}$ (Gleichung 56.).

Wird die gröfste, im Wölbmaterial zuläffige Druckbeanfpruchung pro Flächeneinheit mit K bezeichnet, fo kann Gleichung 56. benutzt werden, um zu ermitteln, wie weit fich die Stützlinie der inneren oder äufseren Gewölbelaibung nähern darf. Man erhält als Bedingungsgleichung:

$$K = \frac{2P}{3c}, \quad \text{woraus} \quad c = \frac{2P}{3K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 366.$$

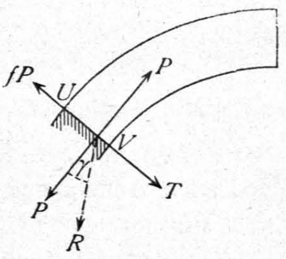
Damit haben wir die Bedingung für die Stabilität des Gewölbes gegen Zerdrücken gefunden: Soll das Gewölbe gegen Zerdrücken ftabil fein, fo darf einmal der Abftand der Stützlinie von den Gewölbelaibungen an keiner Stelle kleiner werden, als $\frac{2P}{3K}$, und ferner die Maximal-Druckbeanfpruchung niemals gröfser werden, als K.

Da P für die verfchiedenen Gewölbeftellen variabel ift, fo ergeben fich für diefelben auch verfchiedene Werthe von c. Meiftens wird es jedoch genügen, den Maximalwerth von P, der fich an den Kämpfern ergiebt, einzufetzen und dann den für c erhaltenen Werth im ganzen Gewölbe conftant anzunehmen. Man kann in diefer Weife leicht die beiden Linien conftruiren, zwifchen denen die Stützlinie verlaufen foll.

Die Forderung, dafs in allen Fafern fammtlicher Querfchnitte nur Druckbeanfpruchung ftattfinden foll, ift erfüllt, wenn fämmtliche Querfchnitte von ihren zugehörigen Refultanten im inneren Gewölbedrittel gefchnitten werden, d. h. wenn die ganze Stützlinie im inneren Drittel verläuft.

Der Einfturz des Gewölbes kann endlich auch dadurch verurfacht werden, dafs ein Theil deffelben längs des anderen gleitet. Es fei die Refultirende aller auf den Gewölbetheil oberhalb der Fuge UV (Fig. 351) wirkenden Kräfte gleich R; alsdann ift Gleichgewicht nur möglich, wenn Seitens der Fuge eine genau gleich grofse und gleich gerichtete Kraft mit entgegengefetztem Sinne auf den betreffenden Gewölbetheil wirkt. Wir zerlegen R in eine Axialkraft $P = R \cos \gamma$ und eine Transverfalkraft $T = R \sin \gamma$. Die Axialkraft P wird, wenn ihr Schnittpunkt mit der Fuge nicht zu nahe an die Laibungen fällt, durch die normal zum Querfchnitt gerichteten axialen Faferfpannungen, die Transverfalkraft T wird durch den Reibungswiderftand an der Berührungsfläche UV aufgehoben. 480. Stabilität gegen Gleiten.

Fig. 351.



Nennt man den Reibungscoefficienten f, fo ift der Reibungswiderftand $W = fP = fR \cos \gamma$. Gröfser kann W nicht werden; Gleichgewicht gegen Verfchieben ift alfo nur möglich, wenn ftattfindet: $T \leqq fR \cos \gamma$, d. h. $R \sin \gamma \leqq fR \cos \gamma$ und $\operatorname{tg} \gamma \leqq f$.

Wird der Reibungswinkel mit φ bezeichnet, fo ift $f = \operatorname{tg} \varphi$, und es heifst alsdann die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht:

$$\operatorname{tg} \gamma \leqq \operatorname{tg} \varphi \quad \text{oder} \quad \gamma \leqq \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 366_a.$$

Sobald γ gröfser wird, als der Reibungswinkel, kann T nicht aufgehoben werden, und es findet dann ein Abgleiten des betrachteten Gewölbetheiles ftatt.

Diefelbe Schlufsfolgerung gilt auch, falls R um den Winkel γ nach oben von der Normalen zur Fuge abweicht; nur ift dann das Beftreben vorhanden, den oberen Gewölbetheil nach aufsen zu verfchieben. Was für die Fuge UV gilt, gilt für alle Fugen, fo dafs wir folgendes Gefetz ermittelt haben: Soll das Gewölbe gegen Gleiten ftabil fein, fo darf an keiner Stelle der Winkel, welchen das Refultantenpolygon mit der betreffenden Fugennormalen bildet, gröfser fein, als der Reibungswinkel für die betreffenden Materialien.

In den meiften Fällen kann man ohne grofsen Fehler ftatt des Refultantenpolygons die Stützlinie einführen und als Bedingung für die Stabilität des Gewölbes angeben, dafs die Tangente an die Stützlinie nirgends einen Winkel mit der Fugennormalen macht, welcher gröfser ift, als der Reibungswinkel.

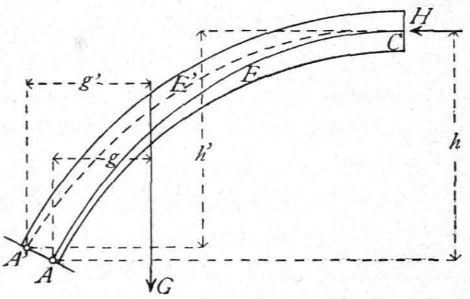
Man kann den Reibungscoefficienten f zwifchen 0,6 und 0,75 liegend annehmen, welchen Werthen die Winkel $\varphi = 31$ bis 37 Grad entfprechen. Bei frifchem Mörtel kann der Winkel φ bis auf 27 Grad hinabgehen (f bis auf 0,51). Die Tangenten an die Stützlinie bilden aber nur felten fo grofse Winkel mit den Fugennormalen, fo dafs, wenigftens im eigentlichen Gewölbe, die Stabilität gegen Gleiten felten in Frage kommt.

481. Grenzlagen der Stützlinie.

Nach Obigem giebt die Statik allein über die Lage der Stützlinie im Gewölbe keine genaue Auskunft; wir werden nun zeigen, wie man ohne die Elafticitätsgleichungen dennoch die Stabilität des Gewölbes nachweifen kann. Dabei werden wir zunächft abfolut feftes Material vorausfetzen.

Betrachtet man die eine Hälfte eines fymmetrifch geftalteten und fymmetrifch belafteten Gewölbes (Fig. 352), auf welche aufser der Belaftung G noch der Horizontalfchub H im Scheitel wirkt, und nimmt zunächft als Angriffspunkt von H den Punkt C beliebig und aufserdem an, dafs die Stützlinie die Kämpferfuge in A fchneide, fo geht die Refultirende von G und H durch A, hat alfo in Bezug auf den Drehpunkt A das ftatifche Moment Null. Das ftatifche Moment der Refultirenden ift aber gleich der algebraifchen Summe der ftatifchen Momente der Einzelkräfte H und G; mithin ift

Fig. 352.



$$0 = Hh - Gg \quad \text{und} \quad H = \frac{Gg}{h}.$$

Diefen Annahmen entfpricht eine ganz beftimmte Stützlinie CEA, die in Fig. 352 ausgezogen ift.

Wählt man ein zweites Mal unter Beibehaltung des Punktes C als Schnittpunkt der Stützlinie mit der Kämpferfuge den Punkt A', fo wird $H' = \frac{Gg'}{h'}$.

Diefen Annahmen entfpricht etwa die punktirte Stützlinie $CE'A'$. Da $\frac{g'}{h'} > \frac{g}{h}$, fo ift $H' > H$.

Man fieht, einer Vergröfserung des Horizontalfchubes entfpricht ein Flacherwerden der Stützlinie, und es ergiebt fich in gleicher Weife, dafs einer Verringerung von H ein Steilerwerden der Stützlinie entfpricht. Unter Beibehaltung des Punktes C als Scheitelpunkt der Stützlinie ift nun offenbar eine grofse Anzahl von Stützlinien möglich, welche fämmtlich ganz im Gewölbe verlaufen, demnach mit der Stabilität deffelben vereinbar find. Dem kleinften Werthe von H für C als Angriffspunkt entfpricht diejenige diefer Stützlinien, welche an irgend einer Stelle die innere Gewölbelaibung berührt (CFA in Fig. 353); denn eine weitere Verringerung

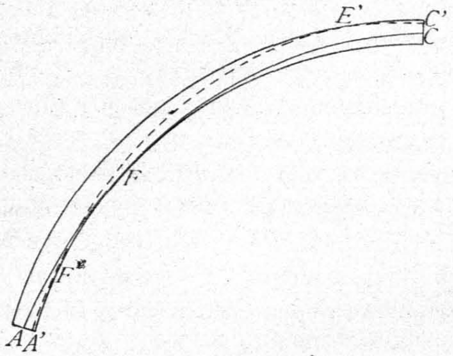


Fig. 353.

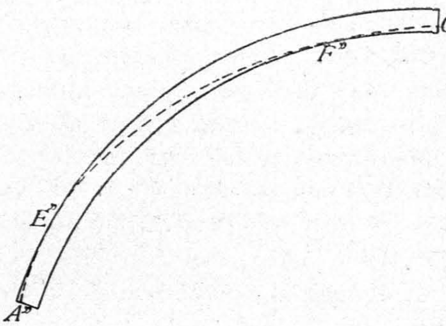


Fig. 354.

von H würde zur Folge haben, daſs die Stützlinie bei F nach innen aus dem Gewölbe herausfiele. Nun kann aber jeder Punkt der Scheitelfuge Angriffspunkt der Kraft H ſein; es ſteht alſo nichts im Wege, einen andern höheren Punkt der Scheitelfuge als Angriffspunkt von H anzunehmen, mithin die ganze Stützlinie um das entſprechende Stück parallel ſich ſelbſt nach oben zu verſchieben. Jetzt kann der Horizontalſchub weiter verringert werden, und zwar ſo weit, bis die Stützlinie gleichzeitig die äuſsere und die innere Laibung berührt. Dieſe Stützlinie ſei etwa $C'E'F'A'$. Eine weitere Verringerung von H hat die Folge, daſs die Stützlinie bei F' das Gewölbe verläſst; ein weiteres Hinaufſchieben der Stützlinie iſt auch nicht möglich, weil bei einem ſolchen — ſollte es ſo weit fortgeſetzt werden, daſs bei F' die Stützlinie wieder in das Gewölbe fällt — bereits vorher die Stützlinie bei E' nach auſserhalb des Gewölbes gefallen wäre.

Die gezeichnete Stützlinie $C'E'F'A'$ entſpricht alſo dem Minimum von H und heiſst deſshalb die Minimalſtützlinie. Es ergiebt ſich demnach: Die Minimalſtützlinie hat jederſeits mit den Gewölbelaibungen zwei Punkte gemeinſam, und zwar liegen die Berührungspunkte mit der äuſseren Laibung über denjenigen mit der inneren Laibung.

Bei flachen Bogen fällt gewöhnlich der Berührungspunkt mit der äuſseren Laibung in die Scheitelfuge, derjenige mit der inneren Laibung jederſeits in die Kämpferfuge.

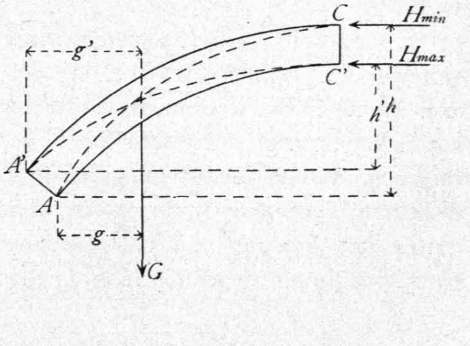
In gleicher Weiſe erhält man die Stützlinie, welche dem Maximum von H entſpricht, die Maximalſtützlinie ($C''F''E''A''$ in Fig. 354). Die Maximalſtützlinie hat jederſeits des Scheitels mit den Gewölbelaibungen zwei Punkte gemeinſam, und zwar liegen die Berührungspunkte mit der inneren Laibung über denjenigen mit der äuſseren Laibung.

Bei flachen Bogen fallen die beiden Berührungspunkte mit der inneren Laibung in die Scheitelfuge, die Berührungspunkte mit der äuſseren Laibung in die Kämpferfugen.

In Fig. 355 iſt CA die Minimal-, $C'A'$ die Maximalſtützlinie. Die entſprechenden Werthe von H ſind:

$$H_{min} = \frac{Gg}{h} \quad \text{und} \quad H_{max} = \frac{Gg'}{h'} \quad . \quad 367.$$

Fig. 355.

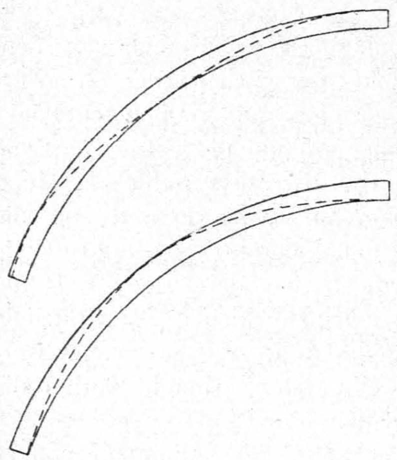


Wenn wir demnach auch die wirkliche

Lage der Stützlinie und die wirkliche Gröfse von H durch die Gleichgewichtsbedingungen allein nicht ermitteln können, fo haben wir jetzt doch Grenzen fowohl für die Lage der Stützlinie, als auch für die Gröfse des Horizontalfchubes gefunden. Der Horizontalfchub darf nicht gröfser fein, als H_{max}, nicht kleiner als H_{min}.

Wenn das Gewölbe fo fchwach ift, dafs Maximal- und Minimalftützlinie in eine Stützlinie zufammenfallen, *fo ift diefelbe die einzig mögliche Stützlinie*; denn eine Vergröfserung von H *darf nicht ftattfinden*, weil die Stützlinie eine Maximalftützlinie ift, eine Verringerung nicht, weil die Stützlinie eine Minimalftützlinie ift. In diefem Falle ift alfo die erwähnte Stützlinie, da fie die einzig mögliche, auch die richtige. Die geringfte Aenderung von H hat den Einfturz des Gewölbes zur Folge. Wir nennen defshalb diefen Zuftand den labilen Gleichgewichtszuftand des Gewölbes Derfelbe findet für fymmetrifche Gewölbe und Belaftung bei den in Fig. 356 gezeichneten Stützlinien ftatt, d. h. wenn die Stützlinie jederfeits mit den Laibungen drei Punkte gemeinfam hat, zwei mit der einen, einen mit der anderen Laibung.

Fig. 356.



Fallen dagegen Maximal- und Minimalftützlinie nicht zufammen, fo ift eine Anzahl von Stützlinien möglich, welche folchen Werthen des Horizontalfchubes entfprechen, die zwifchen H_{max} und H_{min} liegen. Je gröfser die Differenz diefer beiden Werthe ift, defto mehr Stützlinien find möglich, defto gröfsere Aenderung darf H erleiden, ehe das Gewölbe einftürzt, defto ftabiler ift alfo das Gewölbe. Man kann demnach fchliefsen: Ein Gewölbe ift ftabil, wenn eine Maximal- und eine Minimalftützlinie möglich ift und beide nicht zufammenfallen. Die Stabilität ift um fo gröfser, je gröfser die Unterfchiede diefer beiden Stützlinien find, bezw. je gröfser die Differenz $H_{max} - H_{min}$ ift. Um demnach die Stabilität eines Gewölbes gegen Umkanten nachzuweifen, genügt die Einzeichnung der Maximal- und Minimalftützlinie und die Unterfuchung, ob diefelben zufammenfallen oder nicht.

482. Praktifche Grenzlagen der Stützlinie.

Im vorhergehenden Artikel war abfolut feftes Material angenommen, und es konnte defshalb eine Berührung der Stützlinie und der Gewölbelaibung als möglich vorausgefetzt werden. In Wirklichkeit darf nach Art. 479, S. 447, die Stützlinie nicht näher an die Laibungen treten, als dafs der Abftand noch $c = \frac{2P}{3K}$ ift. Bei einer Berührung der Laibung durch die Stützlinie würde an diefer Stelle $c = 0$, und da nach Gleichung 56. $N_{max} = \frac{2P}{3c}$ ift, hier $N_{max} = \frac{2P}{0} = \infty$ fein.

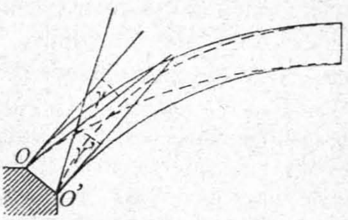
Wir ftellen defshalb die Bedingung, dafs eine Maximal- und eine Minimalftützlinie möglich fei, welche wenigftens um $\frac{2P}{3K}$ von den Gewölblaibungen abftehen und dafs diefe beiden nicht zufammenfallen.

Wenn im inneren Drittel des Gewölbes, in der fog. Kernfläche, eine Maximal- und eine Minimalftützlinie möglich ift und beide nicht zufammenfallen, fo ift dies noch günftiger.

Die Stabilität gegen Gleiten erfordert, dafs die Tangente an die Stützlinie an keiner Stelle einen gröfseren, als den Reibungswinkel mit der Fugennormalen mache. Diefer Bedingung müffen alfo auch die Maximal- und Minimalftützlinie genügen.

Wenn bei der nach den vorigen Artikeln conftruirten Maximalftützlinie in Fig. 357 der Winkel γ bei O gröfser ift als φ, fo wird man durch Verkleinern von H und damit zufammenhängendes Steilermachen der Stützlinie den Winkel γ fo weit verringern, bis er gleich φ ift. Diejenige Stützlinie, bei welcher an der ungünſtigſten Stelle γ höchſtens gleich φ iſt, wird dann als Maximalſtützlinie einzuführen ſein. Eben ſo iſt es möglich, daſs die nach Art. 481, S. 450 conſtruirte Minimalſtützlinie an irgend einer Stelle um einen Winkel γ' von der Fugennormalen abweicht, welcher gröſser als φ iſt (Fig. 357); alsdann iſt H ſo weit zu vergröſsern, bis die ſich ergebende Stützlinie nirgends einen gröſseren Winkel mit der Fugennormalen bildet, als φ; dieſe iſt dann die Minimalſtützlinie.

Fig. 357.



Aus den Entwickelungen der vorſtehenden Artikel folgt, daſs die ſtatiſche Behandlung der Gewölbetheorie keine genauen Gleichungen für die Gewölbeſtärke ergeben kann. Sowohl die Richtung, wie die Gröſse und die Lage der auf die einzelnen Fugen wirkenden Reſultirenden iſt unbekannt; bekannt ſind nur die Grenzen, zwiſchen denen die Gröſse und Lage ſich bewegen darf, wenn kein Kanten und Zerdrücken, ihre Richtung liegen muſs, wenn kein Gleiten ſtattfinden ſoll. Will man demnach nicht die Elaſticitätstheorie zu Grunde legen, was ſich bei den einfachen Fällen des Hochbaues nicht als nöthig erweiſt, ſo dürfte ſich das folgende Verfahren für die praktiſche Stabilitätsbeſtimmung der Gewölbe empfehlen. 483. Graphiſche Unterſuchung der Stabilität.

Man nimmt zuerſt nach empiriſchen Formeln der Erfahrung entſprechende Werthe für die Gewölbeſtärke an, und verzeichnet danach das Gewölbe. Alsdann ermittelt man überſchläglich H_{max} und P_{max} und daraus $c = \frac{2\,P_{max}}{3\,K}$, zieht zwei Curven in den Abſtänden c von den Laibungen und conſtrurt zwiſchen denſelben die Minimal- und die Maximalſtützlinie. Fallen dieſe beiden Curven nicht zuſammen und ergiebt ſich zwiſchen den Werthen des Horizontalſchubes, welche den beiden Stützlinien entſprechen, eine nicht zu geringe Differenz, ſo iſt das Gewölbe gegen Kanten und Zerdrücken ſtabil. Schlieſslich iſt noch zu unterſuchen, ob auch die Tangenten an die Stützlinien nicht an irgend einer Stelle einen gröſseren Winkel mit der Fugennormalen bilden, als den Reibungswinkel, in welchem Falle die Maximal-, bezw. Minimalſtützlinie, wie in Art. 482, S. 452 angegeben, zu rectificiren iſt. Um für c einen jedenfalls ausreichenden Werth zu erhalten, nehme man ein möglichſt groſses P an; man erhält ein ſolches, indem man den Horizontalſchub für eine Stützlinie berechnet, die durch den unteren Punkt der Scheitelfuge und die oberen Punkte der Kämpferfugen geht, und dieſes H mit der Belaſtung der einen Gewölbehälfte zu einer Reſultirenden P vereint. Das ſo ermittelte P iſt gröſser, als es je werden kann, alſo der unter Zugrundelegung dieſes P ermittelte Werth für c keinesfalls zu klein.

---

3. Kapitel.

Kreuz- und Kuppelgewölbe.

a) Kreuzgewölbe.

Die Einwölbung erfolgt beim Kreuzgewölbe bekanntlich entweder ſo, daſs die Lagerfugen parallel zu den Längsaxen der einzelnen Kappen laufen, aus denen das Kreuzgewölbe beſteht, oder auf den Schwalbenſchwanz, d. h. im Grundriſs normal oder nahezu normal zu den Graten. Das ſtatiſche Verhalten iſt bei den beiden Anordnungen verſchieden [172]). 484. Lagerfugen.

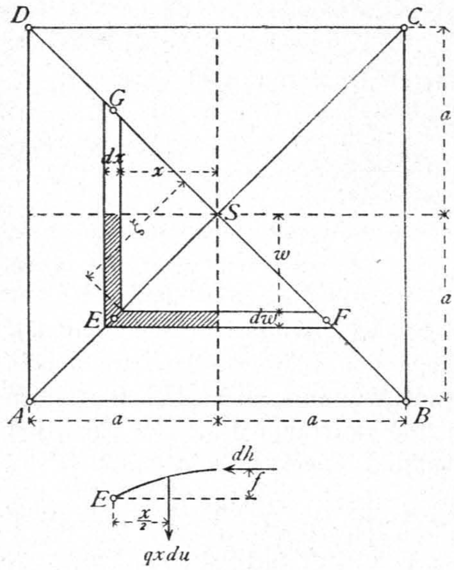
1) Die Lagerfugen laufen zu den Längsaxen der Kappen parallel.

Bei den hier vorzunehmenden Berechnungen ſoll die vereinfachende, mit der Wirklichkeit genügend genau übereinſtimmende Annahme einer über die Horizontal- 485. Berechnung.

---

172) Wegen Raummangels ſoll hier nur das Kreuzgewölbe über quadratiſchem Raum behandelt werden; die Erweiterung der gefundenen Reſultate für den oblongen und vieleckigen Raum iſt nicht ſchwierig.

Fig. 358.



projection gleichmäſsig vertheilten Belaſtung q pro Flächeneinheit gemacht werden. Für die Ermittelung der Seilcurve werden wir hier ſtets drei Punkte annehmen. Alle Bedingungen, welche für die Lage der Stützlinie im vorigen Kapitel entwickelt ſind, gelten natürlich auch hier. Die zu berechnenden Horizontalſchübe ſind alſo nur dann richtig, wenn die angenommenen drei Punkte richtig ſind. An der Hand der nachfolgenden Unterſuchungen können dann leicht die Maxima und Minima der Horizontalſchübe ermittelt werden.

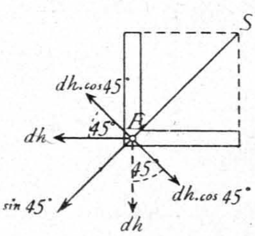
Wir zerlegen jede Kappe durch normal zur Längsaxe gelegte Verticalebenen in einzelne Streifen, welche im Grundriſs Paralleltrapeze bilden und betrachten einen ſolchen Streifen EF (Fig. 358) von der Breite dw im Abſtande w vom Centrum S. Die Belaſtung des Streifens pro Längeneinheit beträgt $q\,dw$ und der Horizontalſchub, welcher einer Pfeilhöhe f der Seilcurve entſpricht, iſt

$$dh = \frac{q\,x^2\,d\,w}{2f}.$$

Da $x = w$ iſt, ſo iſt auch $dw = dx$ und $dh = \frac{q\,x^2\,d\,x}{2f}$.

Der Punkt E repräſentirt den Kämpferpunkt für den Bogen EF und den Bogen EG; die in dieſem Punkte auf den als Widerlager wirkenden Gratbogen von jedem der beiden Nachbarbogen übertragene Kraft hat eine horizontale Componente dh und eine verticale Componente $dv = q\,x\,dw = q\,x\,dx$.

Fig. 359.



Die verticalen Componenten der beiden Kämpferdrücke addiren ſich zu einer in E auf den Gratbogen wirkenden Verticalkraft $\mathfrak{v} = 2\,dv = 2\,q\,x\,dx$; die horizontalen Componenten dh zerlegen ſich nach Fig. 359 in je eine Seitenkraft, welche in die Richtung der Diagonale AC fällt, und in je eine normal zu dieſer Richtung wirkende Seitenkraft. Letztere beiden heben einander auf; die beiden erſteren addiren ſich zu

$$\mathfrak{h} = 2\,dh \sin 45^0 = \frac{q\,x^2\,d\,x}{2f}\,2 \sin 45^0 = \frac{q\,x^2\,d\,x}{f\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad 368.$$

Wenn als Bogenmittellinie für alle Kappenſtreifen dieſelbe Curve gewählt wird, ſo ſind für alle Streifen die Gleichgewichtsbedingungen dieſelben, und es genügt die Nachweiſung der Stabilität in dem äuſserſten, am weiteſten geſpannten Streifen. Dieſe Nachweiſung iſt in gleicher Weiſe vorzunehmen, wie bei den Kappengewölben gezeigt iſt. Von beſonderem Intereſſe iſt hier das Verhalten der Grate, welche als Widerlager für die Kappen dienen.

In den einzelnen Punkten E wirken auf die Grate Vertical- und Horizontalkräfte. Die Verticalkräfte $\mathfrak{v} = 2 q\, x\, d\, x$ ſind gleich dem Gewichte der Hälfte beider Nachbarſtreifen, d. h. der in Fig. 358 ſchraffirten Fläche. Die geſammte auf den Eckpunkt A Seitens des Kreuzgewölbes $A\,B\,C\,D$ übertragene Verticalkraft iſt demnach

$$V = \sum_0^a (\mathfrak{v}) = \int_0^a 2\, q\, x\, d\, x = q\, a^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 369.$$

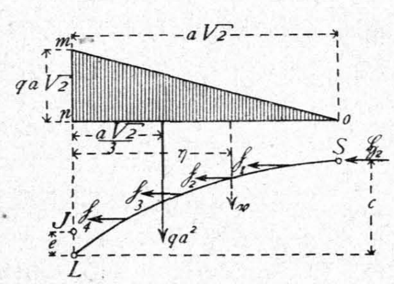
d. h. gleich dem Gewichte des Viertels der Grundfläche.

Die auf den Eckpunkt A übertragene Horizontalkraft ſetzt ſich aus zwei Theilen zuſammen. Der erſte Theil iſt die Summe der einzelnen $\mathfrak{h}$, welche in der Strecke $S\,A$ wirken; nennt man dieſen Theil $\mathfrak{H}_1$, ſo iſt $\mathfrak{H}_1 = \int_{x=0}^{x=a} \frac{q\, x^2\, d\, x}{f \sqrt{2}}$. In dieſem Integral iſt f variabel. Die den einzelnen Streifen entſprechenden Seilcurven ſind, weil die Belaſtung gleichmäſsig über die Horizontalprojection vertheilt iſt, Parabeln, und man kann annehmen, daſs in allen Streifen dieſelbe Seilcurve ſtattfindet. Dann iſt, wenn C eine noch zu beſtimmende Conſtante iſt, $x^2 = C f$, alſo $f = \frac{x^2}{C}$, und $\mathfrak{h} = \frac{C\, q\, x^2\, d\, x}{x^2 \sqrt{2}} = \frac{C\, q\, d\, x}{\sqrt{2}}$, d. h. $\mathfrak{h}$ iſt für alle Streifen conſtant. Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im äuſserſten Streifen c genannt, ſo iſt $a^2 = C c$, $C = \frac{a^2}{c}$,

$$\mathfrak{h} = \frac{q\, a^2\, d\, x}{c \sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_1 = \frac{q\, a^2}{c \sqrt{2}} \int_0^a d\, x = \frac{q\, a^3}{c \sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \qquad 370.$$

Der zweite Theil der Horizontalkraft iſt diejenige Horizontalſpannung $\mathfrak{H}_2$, die im Scheitel durch die verticalen Belaſtungen erzeugt wird. Man erhält dieſelbe durch Aufſtellung der Gleichung der ſtatiſchen Momente für den Kämpferpunkt J der Seilcurve im Gratbogen. Wenn dieſer Punkt um e höher liegt, als der Punkt L, in welchem die beiden zu den äuſserſten Streifen gehörigen Seilcurven ſich auf dem Gratbogen treffen, ſo heiſst die Gleichung der ſtatiſchen Momente (Fig. 360):

Fig. 360.



$$0 = \mathfrak{H}_2\,(c - e) + \int \mathfrak{h}\,(c - f - e) - \int \mathfrak{v}\, \eta.$$

Die Reſultirende aller Verticallaſten iſt gleich $q a^2$; die verticalen Belaſtungen wachſen von S bis A entſprechend den Ordinaten einer Geraden, da die Belaſtung $\mathfrak{v} = 2\, q\, x\, d\, x = 2\, q\, \frac{\xi}{\sqrt{2}} \frac{d\, \xi}{\sqrt{2}} = q\, \xi\, d\, \xi$, alſo pro Längeneinheit $\mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{v}}{d\, \xi} = q\, \xi$ iſt. Für $\xi = 0$ iſt $\mathfrak{v}' = 0$; für $\xi = a \sqrt{2}$ iſt $\mathfrak{v}' = q\, a \sqrt{2}$. Das Dreieck $m\,n\,o$ giebt dieſe Laſtvertheilung an. Demnach iſt

$$\int \mathfrak{v}\, \eta = \frac{q\, a \sqrt{2}\, a \sqrt{2}}{2} \, \frac{a \sqrt{2}}{3} = \frac{q\, a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Wird ferner für $\mathfrak{h}$ der Werth aus Gleichung 368. eingeführt, ſo ergiebt ſich

$$0 = \mathfrak{H}_2\,(c - e) + \frac{q}{\sqrt{2}} \int_0^a \frac{x^2\, d\, x}{f}\,(c - f - e) - \frac{q\, a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Es iſt $f = \frac{x^2}{C} = \frac{x^2}{a^2}\, c$. Durch Einſetzung dieſes Werthes in das Integral und einfache Reductionen erhält man

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{q\, a^3}{\sqrt{2}} \, \frac{e}{c\,(c - e)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 371.$$

Für $e = 0$, d. h. wenn die Seilcurve durch den Punkt L gehen ſoll, wird $\mathfrak{H}_2 = 0$. Die geſammte Horizontalkraft, welche auf den Eckpfeiler übertragen wird, iſt alſo

$$H = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = \frac{q\, a^3}{c\sqrt{2}} \left(1 + \frac{e}{c - e}\right) = \frac{q\, a^3}{(c - e)\sqrt{2}} \quad . \; . \; . \quad 372.$$

Für $e = 0$ iſt $H' = \frac{q\, a^3}{c\sqrt{2}} = \mathfrak{H}_1$.

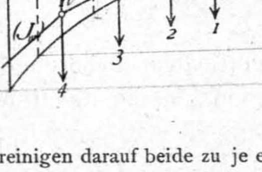
Da die Pfeilhöhe $c - e$ der Seilcurve innerhalb gewiſſer Grenzen angenommen werden kann, ſo erhält man je nach der Wahl derſelben verſchiedene Werthe für H, und es ergiebt ſich in früher gezeigter Weiſe ohne Schwierigkeit H_{max} und H_{min} für den Grat.

486. Graphiſche Ermittelung.

Die graphiſche Unterſuchung der Stabilitätsverhältniſſe eines Kreuzgewölbes kann in nachſtehender Weiſe geſchehen.

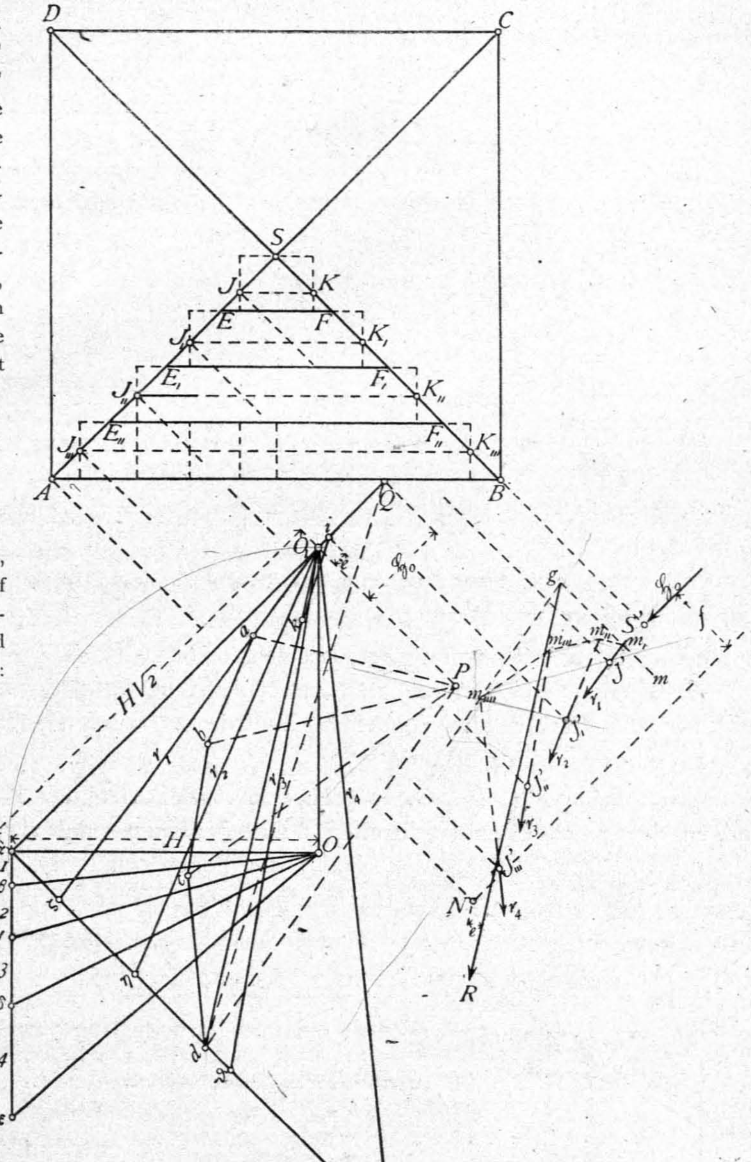
Wir zerlegen die Kappen (Fig. 362) durch normal zu den Gewölbeaxen ſtehende Verticalebenen in eine Anzahl gleich breiter Streifen $A E_{,,} F_{,,} B$, $E_{,,} E, F, F_{,,}$, $E, E\, F\, F, \ldots$ und ermitteln für die im Grundriſs punktirten Schwerlinien dieſer Streifen $\mathcal{J}_{,,,} K_{,,,}$, $\mathcal{J}_{,,} K_{,,} \ldots$ die Seilcurven, unter Annahme je dreier Punkte für dieſelben. Die Belaſtungsfläche möge (nach Fig. 361) unten durch die innere Laibungsfläche, oben durch eine geneigte gerade Linie begrenzt ſein. Wenn alle Streifen gleiche Bogenform haben, ſo ergiebt die Conſtruction der Seilcurve, bezw. des Reſultantenpolygons für den am weiteſten geſpannten Streifen mit der Schwerlinie $\mathcal{J}_{,,,} K_{,,,}$ zugleich die Seilcurven für die übrigen Streifen. Wir ermitteln demnach die Seilcurve für $\mathcal{J}_{,,,} K_{,,,}$ und legen dabei, wie auch bei den anderen Streifen, ſtatt der trapezförmigen die punktirte rechteckige Form zu Grunde. Bei der Eintheilung der Belaſtungsfläche in Lamellen empfiehlt es ſich, die Lamellenbreiten nach den Abſätzen in den Punkten $\mathcal{J}_{,,,}$, $\mathcal{J}_{,,} \ldots$ zu bemeſſen; alsdann wird, wenn $S\, I\, II\, III\, IV\, \mathcal{J}_{,,,}$ (Fig. 361) die Seilcurve für $\mathcal{J}_{,,,} K_{,,,}$ iſt, $S\, I\, II\, III\, \mathcal{J}_{,,}$ diejenige für $\mathcal{J}_{,,} K_{,,}$ ſein, $S\, I\, II\, \mathcal{J},$ diejenige für $\mathcal{J}, K,$, $S\, I\, \mathcal{J}$ diejenige für $\mathcal{J}\, K$. Man ſieht leicht, daſs auch der Horizontalſchub bei dieſen Annahmen in allen Streifen gleich groſs iſt. Die in den Punkten $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_{,}$, $\mathcal{J}_{,,}$, $\mathcal{J}_{,,,}$ von der Kappe $A\, S\, B$ auf den Grat übertragenen Kräfte werden ſomit nach Gröſse und Richtung durch die Strahlen $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$, $O\varepsilon$ des Kraftpolygons der Fig. 362 dargeſtellt, falls $\alpha\beta = 1$, $\beta\gamma = 2$, $\gamma\delta = 3$, $\delta\varepsilon = 4$ iſt. Genau eben ſo groſse Kräfte werden — bei quadratiſchem Kreuzgewölbe — von den Streifen der Kappe $A\, S\, D$ auf den Grat übertragen. Wir ſetzen zunächſt die in den einzelnen Punkten $\mathcal{J}$ wirkenden Verticalkräfte, dann die eben daſelbſt wirkenden Horizontalkräfte zuſammen und vereinigen darauf beide zu je einer Reſultirenden.

Fig. 361.



Die ganze Verticalkraft in $\mathcal{J}$ iſt $2\,\overline{\alpha\beta}$, in $\mathcal{J}_{,}$: $2\,\overline{\alpha\gamma} \ldots$; die Horizontalkraft in allen Punkten $\mathcal{J}$ fällt im Grundriſs in die Diagonalrichtung und iſt gleich $\sqrt{2 H^2} = H\sqrt{2}$. Dieſelbe wird nach Gröſse und Richtung erhalten, indem man $O\, O_{,} = H$ normal zu $O\alpha$ abträgt und $O_{,}\alpha$ zieht. Man mache nun $\alpha\zeta = 2\,\overline{\alpha\beta}$; alsdann iſt $O_{,}\zeta$ nach Gröſse und Richtung die Reſultirende der im Punkte $\mathcal{J}$ auf den Grat wirkenden Kräfte. In gleicher Weiſe ergeben ſich $O_{,}\eta$, $O_{,}\vartheta$ und $O_{,}\varkappa$ als Reſultirende in den Punkten $\mathcal{J}_{,}$, $\mathcal{J}_{,,}$, $\mathcal{J}_{,,,}$. Es ſind nun die im Grat wirkenden Kräfte und die Seilcurve für den Grat zu ermitteln. Die Kräfte $r_1 = O_{,}\zeta$, $r_2 = O_{,}\eta$, $r_3 = O_{,}\vartheta$ und $r_4 = O_{,}\varkappa$ wirken in den Punkten $\mathcal{J}'$, $\mathcal{J}_{,}'$, $\mathcal{J}'_{,,}$, $\mathcal{J}'_{,,,}$ (Fig. 362); die Reſultirende derſelben R wird nach Gröſse, Richtung und Lage mittels des Kraftpolygons $O_{,}\, a\, b\, c\, d$ (in welchem die Kräfte in vierfach verkleinertem Maſsſtabe aufgetragen ſind) und des für einen beliebigen Pol P conſtruirten Seilpolygons $m\, m_{,}\, m_{,,}\, m_{,,,}\, m_{,,,,}$ erhalten. Dieſelbe iſt gleich und parallel $O_{,}\, d$ und geht durch den Punkt g.

Fig. 362.



Soll nun die Seilcurve für den Gratbogen durch die beiden Punkte S' und N gehen und in S' eine horizontale Tangente haben, fo ergiebt fich die Gröfse der in S' wirkenden Kraft $\mathfrak{H}$ aus der Bedingung, dafs die Refultirende aller auf die eine Hälfte wirkenden Kräfte durch N geht, für N als Drehpunkt alfo kein ftatifches Moment hat. Die Bedingungsgleichung heifst demnach

$$0 = \mathfrak{H}_0 f - R e,$$

woraus

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{R e}{f}.$$

Um $\mathfrak{H}_0$ zu conftruiren, mache man in Fig. 362 auf der über O_1 verlängerten Horizontalen $\alpha\, O_1$: $O_1 i = e$ und auf der Richtungslinie von R: $O_1 k = f$, ziehe $k\, i$ und durch den Endpunkt d von R eine Parallele zu $k\, i$, bis fie die Horizontale $\alpha\, O_1$ in Q fchneidet; alsdann ift

$$\frac{O_1 i}{O_1 k} = \frac{O_1 Q}{O_1 d},$$

d. h.

$$\frac{e}{f} = \frac{O_1 Q}{R}$$

und

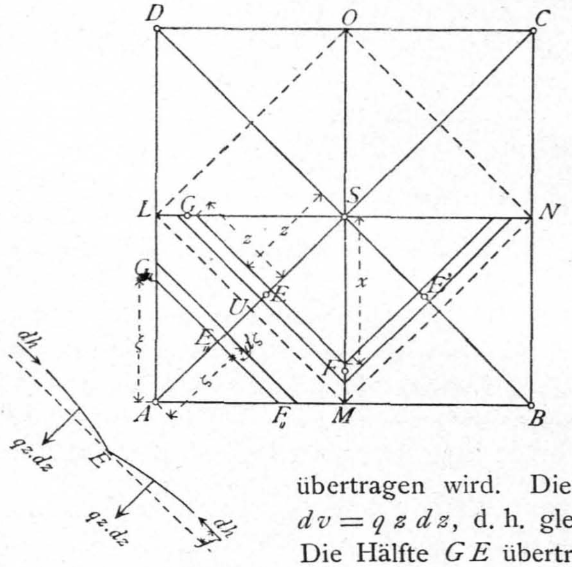
$$O_1 Q = \frac{R e}{f} = \mathfrak{H}_0.$$

Nun kann man leicht $\mathfrak{H}_0$ der Reihe nach mit r_1, r_2, r_3, r_4 zufammenfetzen und die Seilcurve für den Gratbogen erhalten.

2) Die Lagerfugen find im Grundrifs normal zu den Graten.

Wir denken uns das Gewölbe (Fig. 363) durch Verticalebenen, welche im Grundrifs normal zu den Graten gerichtet find, in Streifen zerlegt; dann befteht jeder Streifen aus zwei Hälften, welche fich im Grat treffen. Für jede Hälfte bildet der Grat das eine Widerlager; das andere Widerlager wird bei den innerhalb des Viereckes $L\,M\,N\,O$ liegenden Streifen durch den entfprechenden Streifen des benachbarten Gewölbviertels gebildet (beim Streifen $E\,F$ durch $F\,E'$), bei den aufserhalb $L\,M\,N\,O$ liegenden Streifen durch die Gurtbogen bei $A\,B$, $B\,C$. . . 487. Berechnung.

Fig. 363.

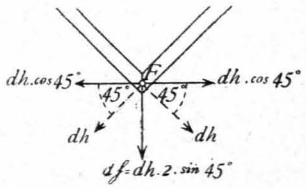


Wir nehmen wiederum gleichmäfsig über die Horizontalprojection vertheilte Belaftung q pro Flächeneinheit an und betrachten zunächft den Streifen GEF. Die Pfeilhöhe, welche fich unter Annahme dreier Punkte für die Seilcurve ergiebt, fei f; alsdann wird der Horizontalfchub im Scheitel (Fig. 363) $dh = \frac{q\,d\,z\,.\,z^2}{2f}$. Diefelbe Gröfse hat auch die Horizontalcomponente der Kraft, welche im Punkte E von der Streifenhälfte EF auf den Grat übertragen wird. Die Verticalcomponente diefer Kraft ift $dv = q\,z\,dz$, d. h. gleich dem Gewichte des Streifens EF. Die Hälfte GE überträgt auf den Gratbogen im Punkte E eine Refultirende, deren Verticalcomponente ebenfalls $dv = q\,z\,dz$ ift, deren Horizontalcomponente gleiche Gröfse und Richtung, aber entgegengefetzten Sinn hat, wie diejenige von EF. Die beiden Horizontalcomponenten heben einander auf, und es verbleibt als Totalrefultirende die Verticalkraft $\mathfrak{v} = 2\,q\,z\,dz$. Bei der angegebenen Conftruction werden demnach die Grate nur durch verticale Kräfte belaftet.

Im Punkte F (Fig. 364) wirken nun zwei horizontale Kräfte dh in den Richtungen der anfchliefsenden Streifen. Die beiden normal zur Längsaxe der Kappe gerichteten Componenten der Kräfte dh heben einander auf; die beiden in die Richtung der Längsaxe fallenden Componenten addiren fich zu einer Kraft

$$d\mathfrak{h} = 2\,dh \sin 45^0 = dh\sqrt{2}\,.$$

Fig. 364.



Setzt man nunmehr für dh den eben gefundenen Werth ein und berückfichtigt man, dafs $x = z\sqrt{2}$ oder $z = \frac{x}{\sqrt{2}}$, daher $dz = \frac{dx}{\sqrt{2}}$ ift, fo erhält man

$$d\mathfrak{h} = \frac{q\,x^2\,dx}{4f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 373.$$

Von jedem Doppelftreifen EFE' innerhalb der Grenzen $x = 0$ bis $x = a$ wird eine Horizontalkraft $d\mathfrak{h}$ auf den Scheitel des Gurtbogens ausgeübt. Die Gefammtwirkung ift alfo eine im Scheitel wirkende Horizontalkraft $\mathfrak{H} = \int_0^a \frac{q\,x^2\,dx}{4f}$.

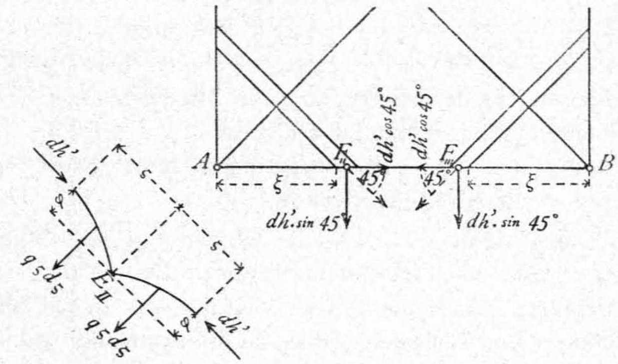
f ift variabel und unter gleichen Annahmen, wie früher, ift $z^2 = Cf$, fonach $f = \frac{z^2}{C} = \frac{x^2}{2\,C}$. Für $z = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ fei $f = F$; alsdann ift $\frac{a^2}{2} = C\,F$, $C = \frac{a^2}{2\,F}$ und $f = \frac{x^2\,F}{a^2}$, mithin

$$\mathfrak{H} = \int_0^a \frac{q\, x^2\, a^2\, d\,x}{4\, F\, x^2} = \frac{q\, a^3}{4\, F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 374.$$

Wir wenden uns jetzt zu einem Streifen $G_{,,}\, E_{,,}\, F_{,,}$ (Fig. 363) aufserhalb des Viereckes $LMNO$; dabei wird die Annahme gemacht, dafs in den Streifenhälften, welche hier halbe Spitzbogen bilden, eine Gleichgewichtscurve (Seilcurve) möglich ift, bei welcher im Scheitel nur eine Horizontalkraft $d\,h'$ wirkt. Die beiden auf den Grat in E'' (Fig. 365) übertragenen Horizontalkräfte, die je $d\,h' = \frac{q\, \zeta^2\, d\, \zeta}{2\, \varphi}$ find, heben einander auf; demnach ift die in E'' übertragene Refultirende die Verticalkraft $\mathfrak{v} = 2\, q\, \zeta\, d\, \zeta$.

$\mathfrak{v}$ ift wiederum gleich dem Gewichte des anfchliefsenden Streifens $G_{,,}\, E_{,,}\, F_{,,}$; daffelbe ift aber genau fo grofs, wie das Gewicht des um $z = \zeta$ von der Mitte entfernten Streifens, woraus folgt, dafs die Gratbogenbelaftung von S aus nach A zunächft entfprechend den Ordinaten einer Geraden, nach dem Gefetze $y = 2\, q\, z$, bis zum Punkt U zunimmt und von U bis A nach demfelben Gefetze wieder bis zu Null abnimmt.

Fig. 365.



Im Punkte $F_{,,}$ wirkt (Fig. 365) die Kraft $d\,h' = \frac{q\, \zeta^2\, d\, \zeta}{2\, \varphi}$ auf den Gurtbogen unter 45 Grad mit der Richtung $A\,B$ und zerlegt fich in eine Componente $d\,h' \cos 45^0$, welche in die Richtung $A\,B$ fällt, und in eine normal dazu gerichtete Componente $d\,h' \sin 45^0$. Die erftere wird durch eine gleich grofse, entgegengefetzt gerichtete Componente im fymmetrifch zur Mitte liegenden Punkt $F_{,,,}$ aufgehoben. Die letztere ift $d\,h' \sin 45^0 = \frac{q\, \zeta^2\, d\, \zeta}{2\, \sqrt{2}\, \varphi}$; da $\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$ ift, fo wird

$$d\,h' \sin 45^0 = \frac{q\, \xi^2\, d\, \xi}{8\, \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 375.$$

Seitens des Kreuzgewölbes werden alfo auf den Gurtbogen $A\,B$ keine verticalen, fondern nur horizontale Kräfte übertragen: im Scheitel die Einzelkraft $\frac{q\, a^3}{4\, F}$ und aufserdem pro laufende Einheit der Horizontalprojection die Kraft $\frac{q\, \xi^2}{8\, \varphi}$. Diefelben werden entweder durch gleiche entgegengefetzt gerichtete, vom Nachbargewölbe ausgehende Kräfte aufgehoben, oder der Gurtbogen ift mit einer Mauer in Verbindung zu fetzen, welche im Stande ift, die Kräfte aufzunehmen.

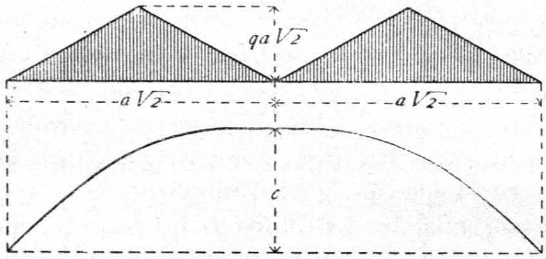
Was den Gratbogen anlangt, fo ift die Belaftung deffelben nach Vorftehendem in Fig. 366 graphifch dargeftellt. Nimmt man drei Punkte für den Verlauf der Seilcurve an und bezeichnet die Pfeilhöhe der durch diefelben beftimmten Curve mit c, fo ift der im Gurtbogen wirkende Horizontalfchub

$$H = \frac{1}{c} \frac{q\,a\,\sqrt{2}\;a\,\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\,\sqrt{2}}{2} = \frac{q\,a^3}{c\,\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 376.$$

488.
Graphische
Ermittelung.

Die Conftruction der Seilcurven für die einzelnen Theile der Kappen ift fo einfach, dafs diefelbe nicht befonders gezeigt zu werden braucht; wir werden nur die Ermittelung der Seilcurve für den Gratbogen zeigen.

Fig. 366.



Wir zerlegen jedes Gewölbeviertel (Fig. 367) in eine Anzahl Lamellen, welche im Grundrifs trapezförmig, bezw. dreieckig find, und ermitteln die diefen Lamellen entfprechenden Gewichte; diefelben find die Kräfte, welche den Gratbogen vertical belaften und zwar wirken fie (*1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* in Fig. 367) in den Schwerlinien der einzelnen Lamellen. Unter Annahme dreier Punkte für die Seilcurve des Gratbogens, bezw. zweier Punkte und der horizontalen Tangente im Scheitel für eine Hälfte wird nun die Seilcurve in der Weife conftruirt, die in Art. 476, S. 444 näher angegeben ift. Für den Pol O und die beiden gegebenen Punkte S und A ergiebt fich in

Fig. 367.

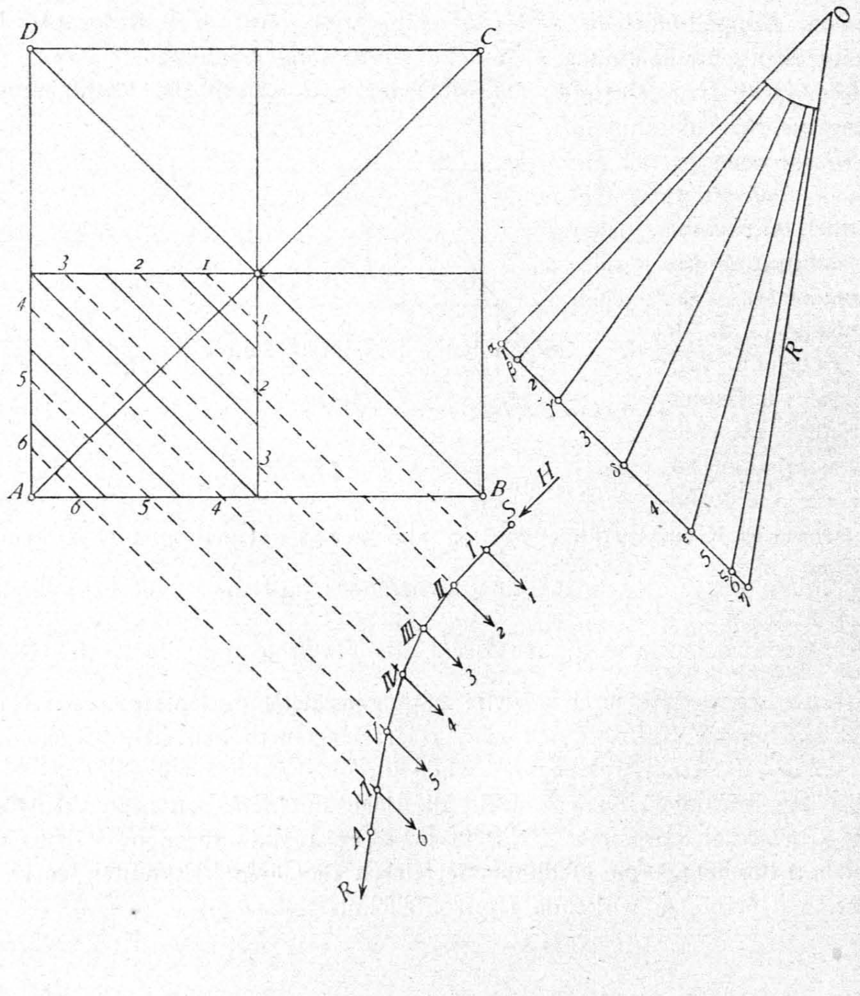


Fig. 367 das Reſutantenpolygon $S\,I\,II\,III\,IV\,V\,VI\,A$, woraus nun leicht die entſprechende Stützlinie zu finden iſt.

Die auf die Gurtbogen übertragenen Horizontalkräfte ergeben ſich leicht, wenn für die einzelnen Streifen die Seilcurven conſtruirt werden.

b) Kuppelgewölbe.

Die Kuppelfläche entſteht durch Rotation einer ebenen Curve um eine Verticalaxe. Wir ermitteln in den folgenden Unterſuchungen die im Inneren des Kuppelgewölbes auftretenden Kräfte unter der Annahme einer ruhenden und derartig vertheilten Belaſtung, daſs dieſelbe ſich über jeden ganzen, durch zwei Parallelkreiſe begrenzten Ring gleichmäſsig vertheile. Setzen wir ferner die Gewölbeſtärke gering im Vergleich zu den Krümmungsradien, ſo können wir annehmen, daſs die auf ein beliebiges Kuppeltheilchen $MNOP$ (Fig. 368), welches oben und unten durch zwei Parallelkreiſe, rechts und links durch zwei Meridiane der Kuppel begrenzt iſt, wirkenden inneren Kräfte tangential zu der Kuppelfläche gerichtet ſind. Indem wir alsdann für irgend eine Rotationsfläche die unter obigen Annahmen aufgeſtellten Gleichgewichtsbedingungen anwenden, erhalten wir die inneren Spannungen, welche der angenommenen Fläche als Gleichgewichtsfläche entſprechen. 489. Voraus-ſetzungen.

Wir legen den Anfangspunkt der Coordinaten (Fig. 369) in den Scheitel der Kuppel, wählen die verticale Axe als Y-Axe, eine im Scheitel S normal zu erſterer errichtete Axe als X-Axe und unterſuchen den Gleichgewichtszuſtand des oben beſchriebenen Kuppeltheilchens $MNOP$ (Fig. 368). Auf MN wirke pro Längeneinheit die Tangentialſpannung T, alſo auf $x\,d\omega$ Längeneinheiten $T\,x\,d\omega$. Auf OP wirkt $(T + d\,T)\,(x + d\,x)\,d\omega$; auf MP und NO wirken die Ringſpannungen R pro Längeneinheit, alſo pro ds Längeneinheiten je $R\,ds$. Auſserdem wirkt noch die variabele Belaſtung p pro Flächeneinheit der Kuppelfläche, d. h. auf $MNOP$ die Laſt $p\,ds\,x\,d\omega$. Um ſämmtliche Kräfte in einer Ebene zu erhalten, ermitteln wir die Reſultirende der beiden Ringſpannungen $R\,ds$; ſie iſt $\mathfrak{H} = 2\,R\,ds \sin\frac{d\omega}{2}$, und da wegen der Kleinheit von $\frac{d\omega}{2}$ ſtattfindet: $\sin\frac{d\omega}{2} = \frac{d\omega}{2}$, ſo wird 490. Allgemeine Gleichgewichts-bedingungen.

Fig. 368.

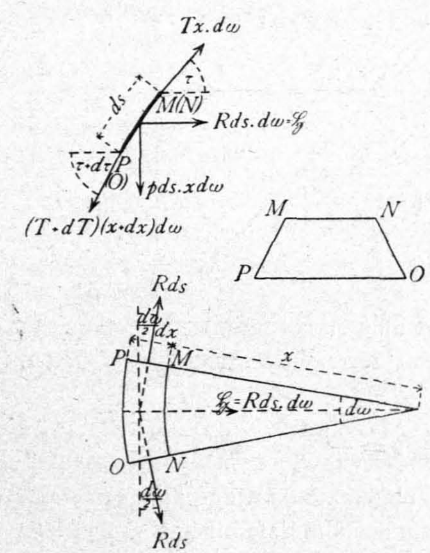
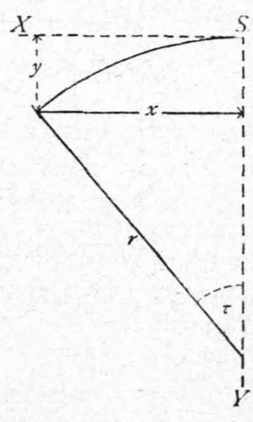


Fig. 369.



$$\mathfrak{H} = R\,ds\,d\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 377.$$

Die Aufſtellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für $MNOP$ ergiebt

$$0 = T x d\omega \cos\tau - (T + dT)(x + dx)\, d\omega \cos(\tau + d\tau) + R\, ds\, d\omega.$$

Führt man die Multiplication durch und läfst die unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung fort, fo bleibt

$$0 = T x \sin\tau\, d\tau - dT x \cos\tau - T dx \,.\cos\tau + R ds = -d\,(T d \cos\tau) + R ds;$$

$$R ds = d\,(T x \cos\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 378.$$

Ferner ift

$$0 = p ds \,.\, x d\omega - T x d\omega \sin\tau + (T + dT)(x + dT)\, d\omega \sin(\tau + d\tau)$$

$$\sin(\tau + d\tau) = \sin\tau + \cos\tau\, d\tau.$$

Durch Ausmultipliciren und Fortlaffen der unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung erhält man $0 = p x ds + d\,(T x \sin\tau)$, daher

$$-p x ds = d\,(T x \sin\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 379.$$

Die beiden Gleichungen 378. und 379. geben Auffchlufs über die Gröfse der gleichzeitigen Werthe von T und R, welche irgend welchen Belaftungen und Curvenformen entfprechen.

491. Kugelförmige Kuppel.

Die erzeugende Curve ift bei der Kugelkuppel ein Kreis. Die bezüglichen Werthe von T und R werden erhalten, wenn in die Gleichungen 378. und 379. für x und d s die Werthe eingeführt werden, welche dem Kreife entfprechen. Nach Fig. 369 ift $x = r \sin\tau$ und $ds = r d\tau$, mithin, wenn noch die Annahme gemacht wird, dafs p für die ganze Kuppel conftant ift,

$$-p r \sin\tau \,.\, r d\tau = d\,(T r \sin\tau \sin\tau) \text{ und } \int_0^\tau d\,(T r \sin^2\tau) = -p r^2 \int_0^\tau \sin\tau\, d\tau.$$

Als untere Grenze ift der Werth von τ und T einzuführen, welcher dem oberen Endpunkte der Erzeugenden entfpricht; hier ift diefer Endpunkt S, und es wird $\tau_0 = 0$; demnach ift

$$T r \sin^2\tau = +p r^2 \left(\cos\tau\right)_0^\tau = -p r^2 (1 - \cos\tau),$$

$$T = -\frac{p r (1 - \cos\tau)}{\sin^2\tau} = -\frac{p r (1 - \cos\tau)}{1 - \cos^2\tau} = -\frac{p r}{1 + \cos\tau} \quad . \quad . \quad 380.$$

Wird diefer Werth in die Gleichung 378. für R eingefetzt, fo erhält man

$$R ds = R r d\tau = d\left(-\frac{p r}{1 + \cos\tau}\, r \sin\tau \cos\tau\right) = -p r^2 d\, \frac{\sin\tau\cos\tau}{1 + \cos\tau},$$

$$R = -p r\, \frac{\cos 2\tau + \cos^3\tau}{(1 + \cos\tau)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 381.$$

Die Werthe der Gleichungen 380. und 381. gelten für oben gefchloffene Kugelkuppeln. Die Spannungen im Scheitel werden erhalten für $\tau = 0$. Für letzteren Werth ift

$$T_0 = -\frac{p r}{2} \text{ und } R_0 = -\frac{p r}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 382.$$

d. h. die Meridianfpannungen und Ringfpannungen find pro Längeneinheit im Scheitel gleich grofs; es findet alfo dafelbft nach allen Richtungen ein gleicher Druck $\frac{p r}{2}$ ftatt.

492. Halbkugelkuppel.

Für die Halbkugelkuppel ift am Aequator $\tau = \frac{\pi}{2}$, daher

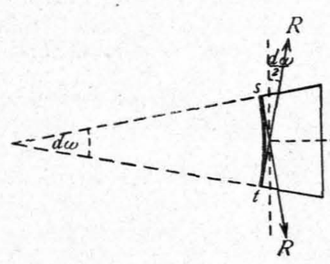
$$T_{\frac{\pi}{2}} = -p r \text{ und } R_{\frac{\pi}{2}} = +p r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 383.$$

Die Meridianſpannung nimmt alſo vom Scheitel nach dem Aequator von $\frac{pr}{2}$ bis auf pr zu, bleibt aber ſtets Druck, da $1 + \cos \tau$ nie negativ werden kann. Am Aequator iſt T vertical gerichtet, da T gleiche Richtung mit der Tangente an die Erzeugende hat. Die Summe aller $T_{\frac{\pi}{2}}$ iſt gleich dem Gewichte der ganzen Kuppel, da die $T_{\frac{\pi}{2}}$ die Auflager-Reactionen repräſentiren. Es iſt $\Sigma\left(T_{\frac{\pi}{2}}\right) = pr \,.\, 2 r\pi = 2 p r^2 \pi$, und das ganze Kuppelgewicht iſt gleich $\frac{4 r^2 \pi}{2} p = 2 r^2 p \pi$. Die Ringſpannung R geht vom Drucke $\frac{pr}{2}$ im Scheitel zum Zug pr am Aequator über, demnach für irgend einen näher zu beſtimmenden Winkel durch Null. Iſt dieſer Winkel τ_1, ſo iſt $0 = pr \frac{\cos 2\tau_1 + \cos^3 \tau_1}{(1 + \cos \tau_1)^2}$, woraus ſich ergiebt

$$\cos \tau_1 = 0{,}618 \quad \text{und} \quad \tau_1 = 51^0\, 50' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 384.$$

In allen Ringen, deren zugehörige Winkel τ kleiner als τ_1 ſind, findet Druck, in den Ringen, deren Winkel τ gröſser ſind als τ_1, findet Zug ſtatt. Nimmt man auf die Zugfeſtigkeit des Mörtels keine Rückſicht, ſo können die einzelnen Theile des Ringes keinen Zug auf einander ausüben. Ohne ſolchen kann aber Gleichgewicht nicht ſtattfinden; es iſt alſo ohne Hilfsconſtruction das Gleichgewicht nicht vorhanden. Solche Hilfsconſtructionen ſind entweder umgelegte eiſerne Ringe oder die Hintermauerung. Letztere leiſtet die auf den Kuppelring wirkenden Ringkräfte R; auf dieſelbe wirken alſo nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung die Kräfte R in entgegengeſetztem Sinne; dieſelben ſind bei Berechnung der Hintermauerung zu berückſichtigen. Betrachtet man ein Bogenſtück st (Fig. 370), welches zum Winkel $d\omega$ gehört, ſo iſt die Reſultirende der beiden R die nach auſsen gerichtete Kraft h gleich $2R \sin \frac{d\omega}{2} = R\, d\omega$.

Fig. 370.



Wir führen die abkürzende Bezeichnung ein:

$$\mu = - \frac{\cos 2\tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2}, \quad . \quad . \quad . \qquad 385.$$

alsdann wird

$$R = \mu p r \quad \text{und} \quad h = \mu p r\, d\omega \quad . \quad . \quad . \qquad 386.$$

Pro Längeneinheit des $x\, d\omega$ langen Bogens iſt alſo die nach auſsen auf die Hintermauerung wirkende Horizontalkraft in Folge der Ringſpannungen

$$\mathfrak{h} = \frac{\mu p r\, d\omega}{x\, d\omega} = \frac{\mu\, p r}{x}. \quad . \quad . \quad . \qquad 387.$$

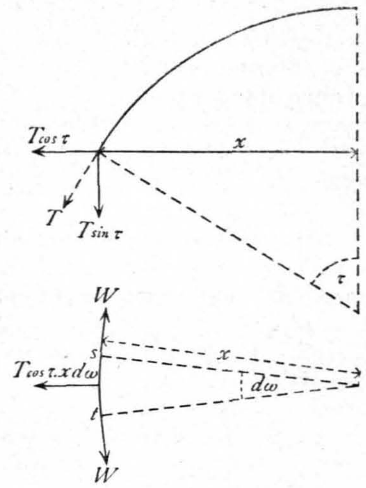
Aus Vorſtehendem folgt noch, daſs bei der Halbkugelkuppel die Hintermauerung wenigſtens bis zu derjenigen Höhe hinaufreichen muſs, welche dem Winkel $\tau_1 = 51^0\, 50'$ entſpricht.

Iſt die Kuppel ein Kugelabſchnitt, ſo wirken auf die Widerlager auſser den eventuell vorhandenen Kräften $\mathfrak{h}$ (nach Gleichung 387.) noch die Meridianſpannungen T, welche dem gröſsten zur Kuppel gehörigen Winkel τ entſprechen. T hat eine horizontale Componente $T \cos \tau$ und eine verticale Componente $T \sin \tau$. Die erſtere wird durch die Widerlager oder durch einen eiſernen Ring aufgehoben. Die Spannung in dieſem Ringe ergiebt ſich dann wie folgt. Auf den Bogen st (Fig. 371) von der Länge $x\, d\omega$ wirkt nach auſsen $T \cos \tau\, x\, d\omega$, und es ſoll dieſe Kraft durch die beiden Ringſpannungen W aufgehoben werden; es iſt demnach

$$T \cos \tau\, x\, d\omega = 2\, W \sin \frac{d\omega}{2} = W\, d\omega;$$

$$W = T x \cos \tau = \frac{p r r \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{p r^2 \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} \quad . \quad . \quad . \qquad 388.$$

Fig. 371.



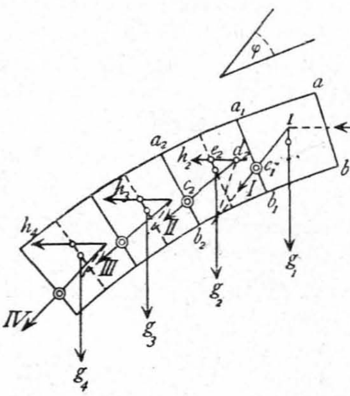
493. Graphische Ermittelung.

Die vorstehend entwickelten Werthe für T und R entsprechen den Gleichgewichtscurven. Man kann bei verhältnifsmäfsig geringer Stärke der Kuppel diefe Werthe als genügend genaue Mittelwerthe annehmen; immerhin find aber gröfsere und geringere Werthe denkbar, welche anderen in der Kuppel möglichen Seilcurven entsprechen, die nicht mit der Mittelfläche des Kuppelgewölbes zufammenfallen.

Die graphifche Ermittelung der Werthe von T und R an den verfchiedenen Stellen der Kuppel kann nun in analoger Weife durchgeführt werden, wie bei den anderen Gewölbarten gezeigt ift, indem man beftimmte Bedingungen für die Stützlinie vorfchreibt. Man unterfucht zu dem Zwecke den einem Centriwinkel α entfprechenden Kuppeltheil und geht dabei vom Scheitel, bezw. vom Laternenring aus.

Stellt man die Bedingung, dafs die Stützlinie im inneren Drittel verbleiben foll und kein Gleiten ftattfinde, so ergiebt fich die Stützlinie folgender Mafsen (Fig. 372).

Fig. 372.



Die Belaftung des oberften Ringfteines fei g_1 ($= \alpha\,\beta$); alsdann wirken auf diefen Stein (Fig. 372) g_1 und die vor der Hand unbekannte Refultante h_1 der Spannungen im oberften Ringe. Der kleinfte Werth von h_1, bei welchem die Stützlinie die geftellten Bedingungen erfüllt, ergiebt fich, wenn die Refultirende I von g_1 und h_1 durch den unterften Punkt c_1 des inneren Drittels der Fuge $a_1\,b_1$ geht und um einen Winkel φ von der Fugennormalen abweicht. Die durch c_1 unter dem Winkel φ mit der Fugennormalen gelegte Linie fchneide die Richtungslinie von g_1 in 1; alsdann ift diefer Punkt auch der Angriffspunkt von h_1. Die Gröfse von h_1 und I ergiebt das Kraftpolygon, wenn durch β eine Linie parallel zu der Richtungslinie von I gezogen wird. Man erhält $O_1\,\alpha = h_1$ und $O_1\,\beta = I$. Wenn der Schnittpunkt von h_1 mit der Fuge $a\,b$ oberhalb des inneren Drittels fiele, fo würde man h_1 bis zum oberen Endpunkt des inneren Drittels hinabzurücken haben und den fich alsdann ergebenden Schnittpunkt von h_1 und g_1 mit c_1 verbinden, wobei der Winkel von I mit der Fugennormalen kleiner würde, als φ.

Auf den zweiten Stein wirken nun g_2, I und h_2. Der kleinfte Werth von h_2, welcher obigen Bedingungen entfpricht, ift derjenige, bei welchem h_2 durch den oberen Grenzpunkt des inneren Drittels der Steinfchwerlinie, d. h. durch e_2 geht, die Refultirende von I, g_2 und h_2 aber die Fuge $a_2\,b_2$ im unteren Grenzpunkte c_2 des inneren Drittels fchneidet. Die Verbindungslinie von c_2 mit d_2, dem Schnittpunkt der Refultirenden der Kräfte I und g_2 mit h_2, ergiebt die Richtung von II; die Gröfse von II erhält man durch Ziehen einer Parallelen $\gamma\,O_2$ durch γ zur Richtungslinie von II. Der Winkel, welchen II mit der Fugennormalen zu $a_2\,b_2$ einfchliefst, ift kleiner als φ, alfo die Conftruction brauchbar. Wäre der Winkel gröfser als φ, fo wäre h_2 fo weit hinabzurücken und zu vergröfsern, bis der Winkel höchftens gleich φ ift. In diefer Weife erhält man durch Weiterconftruiren eine mögliche Stützlinie, welche auch mit der Wirklichkeit nahezu übereinftimmen dürfte.

Literatur.

Bücher über »Statik der Gewölbe«.

DIETLEIN, J. F. W. Beitrag zur Statik der Kreuzgewölbe. Halle 1823.

TELLKAMPF, H. Beitrag zur Gewölbetheorie. Frei nach CARVALLO. Hannover 1855.

SCHEFFLER, H. Theorie der Gewölbe, Futtermauern etc. Braunſchweig 1857.

FABRE, V. *Théorie des voûtes élaſtiques et dilatables d'une application ſpéciale aux arcs métalliques.* Paris 1860.

HAGEN, G. Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin 1863.

HÄNEL, v. Zur Theorie der Tonnengewölbe. Stuttgart 1868.

FONTAINE, H. *Stabilité des conſtructions. Extrait de la notice ſur la théorie des voûtes.* Beſançon 1870.

ORTMANN, O. Die Statik der Gewölbe mit Rückſicht auf ihre Anwendung. Halle 1876.

FABIAN, W. Ueber Gewölbstheorien mit beſonderer Berückſichtigung auf den Brückenbau. Leipzig 1876.

BONNIN, R. *Étude ſur la ſtabilité des voûtes en maçonnerie.* Evreux 1876.

PERRODIL. *Réſiſtance des voûtes et arcs métalliques.* Paris 1879.

GOBERT, J. B. *Nouvelles recherches ſur la théorie des voûtes.* Paris 1879.

FOEPPL, A. Theorie der Gewölbe. Leipzig 1880.

DURAND-CLAYE, A. *Vérification de la ſtabilité des voûtes et des arcs; application aux voûtes ſphériques.* Paris 1880.

Berichtigungen.

S. 50,	Zeile 1 v. u.:	Statt »BOSE« zu leſen: »BOSC«.
S. 97,	» 20 v. o.:	Statt »*Pietro duro*« zu leſen: »*Pietra dura*«.
S. 109,	» 13 v. u.	Statt »*E. March*« zu leſen: »*Ernſt March Söhne*«.
S. 110,	» 21 v. o.	(wie oben)
S. 113,	» 3 v. o.:	Statt »Erſcheint ſeit 1865« zu leſen: »1865—80«.
	» 10 v. o.:	Statt »Red. von H. Seger« zu leſen: »Red. v. H. Seeger u. J. Aron«.
S. 159,	» 18 v. o.:	Statt »*calls*« zu leſen: »*walls*«.
S. 164,	» 3 v. u.:	Statt »$0{,}_{18}$ kg« zu leſen: »$0{,}_{18}$ t«.
S. 165,	» 3 v. o.:	Statt »174« zu leſen: »104«.
S. 166,	» 20 v. o.:	Statt »$0{,}_{26}$ kg« zu leſen: »$0{,}_{26}$ t«.
	» 16 v. u.:	Hat »und« zu entfallen.
S. 167,	» 16 v. o.:	Statt »($6{,}_{748}$)« zu leſen: »($0{,}_{748}$)«,
S. 174,	» 8 v. o.:	Statt »unter« zu leſen: »von«.
S. 178,	» 22 v. o.	hat zu entfallen.
S. 192,	» 5 v. u.:	Statt »25« zu leſen: »28«.
S. 238,	» 14 v. o.:	Statt »K« zu leſen: »K_1«.
S. 244,	» 23 v. o.:	Statt »die normal« zu leſen: »die geneigt oder normal«.
S. 251,	» 7 v. u.:	Statt »Gleichung 16.« zu leſen: »Gleichung 16a«.
S. 257,	» 4 v. o:	Statt »eine normal« zu leſen: »eine geneigt oder normal«.
	» 21 v. o.:	Statt »Biegungsmoment« zu leſen: »Biegungs- oder Angriffsmoment«.
S. 265,	» 11 v. o.:	Statt «des Moment« zu leſen: »das Moment«.
S. 265,	» 15 v. o.:	Statt »$\frac{\mathfrak{J}}{\alpha_2}$« zu leſen: »$\frac{\mathfrak{J}}{a_2}$«.
S. 279,	» 6 v. o.:	Statt »oberhalb YY« zu leſen: »oberhalb einer leicht zu ermittelnden, durch O gehenden Axe«.
S. 280,	» 11 v. o.:	Statt »P« zu leſen »R«.
S. 290,	Fig. 118 links unten:	Statt »$V\,d\,x$« zu leſen: »$V\,d\,z$«.
S. 424,	» 320 rechts unten:	Statt »$\frac{2\,x\,\varkappa}{\mathrm{n}}$« zu leſen: »$\frac{2\,x\,\pi}{n}$«.
S. 454,	» 358 unten:	Statt »$q\,x\,d\,u$« zu leſen: »$q\,x\,d\,w$«.