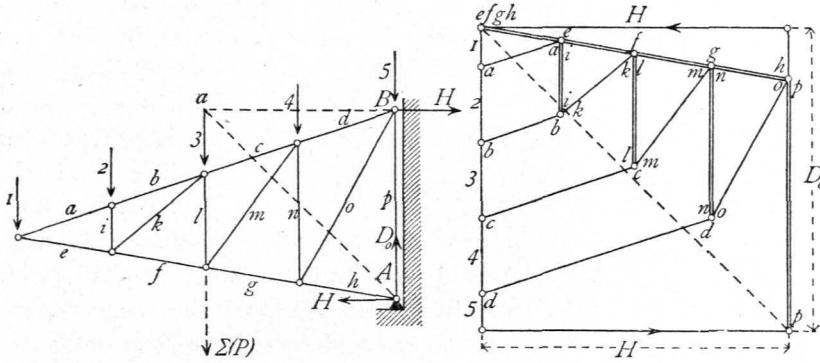


Fig. 309.



H_1 mit D_1 zu einer zweiten Resultierenden, welche durch A geht. Beide Kräfte halten das Dach im Gleichgewicht, haben also die Richtung bA , bzw. Ab .

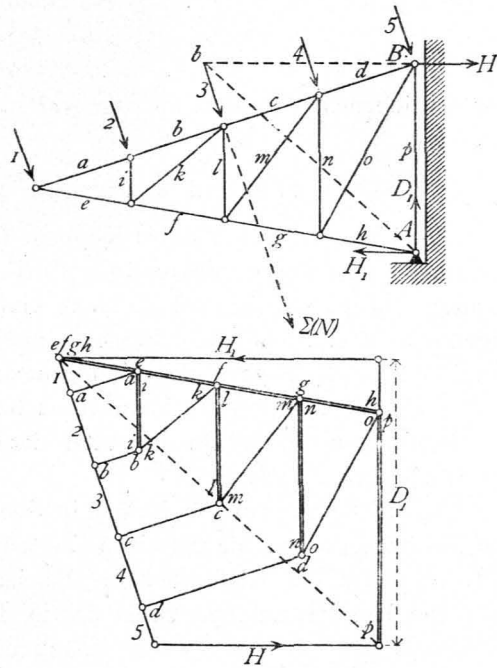
Ist $a\delta = \Sigma(N)$, so ziehe man durch δ eine Parallele zur Richtung von H , durch a eine Parallele zur Richtung von W ; man erhält ε , und es ist $\delta\varepsilon = H$, $\varepsilon a = W$. Nun zerlege man εa in D_1 und H_1 , und es wird $\varepsilon\zeta = D_1$, $\zeta a = H_1$.

2) Stabspannungen. Um die Stabspannungen zu ermitteln, sind hier nur Belastung durch das Eigengewicht, durch totale Schnee- und totale Windbelastung ins Auge zu fassen.

Die Berechnung für die verschiedenen möglichen Formen ist nach der Momentenmethode ohne Schwierigkeit durchzuführen, und zwar sowohl wenn die Lasten vertical, als wenn sie normal zur Dachfläche gerichtet sind; es braucht darauf hier nicht weiter eingegangen zu werden.

Das graphische Verfahren ist in den Fig. 309 und 310 für einen ConSOLE-Dachstuhl, und zwar für Belastung durch Eigengewicht und durch Winddruck durchgeführt. Zuerst sind die äußeren Kräfte, wie oben gezeigt, ermittelt, in cyclischer Reihenfolge an einander getragen und dann der Kräfteplan construiert, der ohne Weiteres verständlich ist.

Fig. 310.



448.
Stabspannungen.

4. Kapitel.

Kuppel-, Zelt- und Thurmdächer.

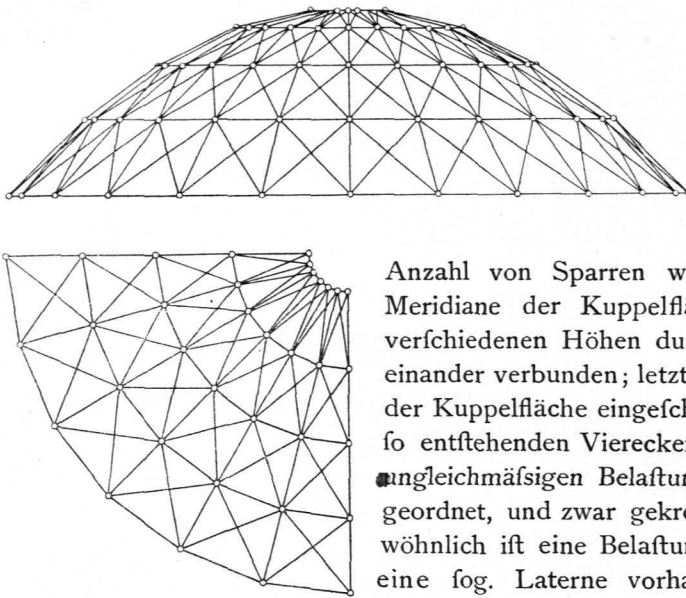
a) Kuppeldächer.

Die Kuppelfläche entsteht durch Rotation einer Curve um eine verticale Mittelaxe; sie ist also eine Rotationsfläche.

Während man früher die Kuppeldächer aus einer Anzahl radial gestellter

449.
Allgemeines.

Fig. 311.



eingeschriebenes Polyeder; in Fig. 311 sind Ansicht und Grundrifs derselben dargestellt.

1) Belastungen und Auflager-Reactionen.

450.
Belastungen.

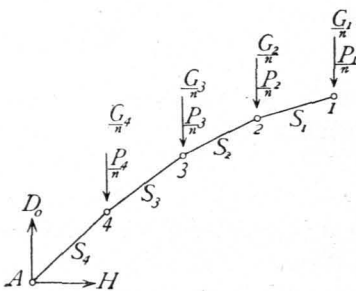
Die hier zu betrachtenden Kuppeln sind meistens so flach, dass der Winddruck nur eine ganz untergeordnete Rolle spielt; wir werden denselben deshalb hier in allen Theilen der Kuppel constant einführen, wobei eine mittlere Dachneigung angenommen werden soll. Ferner genügt es, nur die verticale Componente v (vergl. Art. 412, S. 379) des Winddruckes zu berücksichtigen; die in die Dachfläche fallende Componente kann vernachlässigt werden. Endlich empfiehlt es sich, alle Belastungen auf das Quadratmeter der Grundfläche, also der Horizontalprojection des Daches zu beziehen.

Auch hier greifen die Lasten in den Knotenpunkten der Construction an; es sind demnach die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Flächen zu berechnen und mit diesen die Belastungen pro Flächeneinheit der Grundfläche zu multipliciren.

451.
Auflager-
Reactionen.

Die Horizontalcomponenten der in den untersten Sparrenstangen vorhandenen Spannungen werden durch einen Ring, gegen welchen sich sämtliche Sparrenfüsse setzen, den sog. Mauerring, aufgehoben; in Folge davon wirken als Reactionen nur Verticalkräfte. Wir brauchen dieselben nur für gleichmäßige und solche Belastung zu bestimmen, bei welcher, wenn auch nur einzelne, so doch stets ganze Ringzonen belastet sind. Sind n Sparren vorhanden und ist der Grundrifs der Kuppel ein reguläres n -Eck, so können wir annehmen, dass bei den erwähnten Belastungen alle Sparren gleiche Lasten tragen. Die

Fig. 312.



Kuppel trage eine Laterne, deren Gewicht im Eigengewicht der ersten Ringzone mit enthalten sei. Die Eigengewichte der ganzen Ringzonen seien bezw. (Fig. 312) $G_1, G_2, G_3, G_4 \dots$, die mobilen Lasten der ganzen Ringzonen $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$; alsdann ist, wenn die Auflager-Reaction auf jeden Sparren D_0 beträgt, für totale Belaftung der ganzen Dachfläche

$$n D_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \dots + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots = \Sigma (G) + \Sigma (P).$$

Wenn etwa nur die drei obersten Zonen mobil belaftet sind, so wird

$$n D_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \dots + P_1 + P_2 + P_3.$$

fein. Auf diese Art sind die Reactionen leicht zu ermitteln.

2) Stabspannungen.

a) Ungünstigste Beanspruchung der einzelnen Stäbe. Die genaue Untersuchung der für jeden Stab ungünstigsten Belaftungsweise und die Berechnung der dabei entstehenden Beanspruchungen ist sehr complicirt, da die elastischen Verschiebungen der einzelnen Punkte in Frage kommen.

452.
Berechnung
der Stab-
spannungen.

Wir machen deshalb, nach Schwedler, für die Grenzen der Spannungen die folgenden vereinfachenden Annahmen:

a) die Sparren erhalten den Maximaldruck, wenn die ganze Kuppel mobil belaftet ist;

b) ein Ring erhält seinen Maximalzug, wenn der innerhalb desselben befindliche Kuppeltheil *in maximo* belaftet, der Ring selbst mit seiner Zone aber unbelaftet ist; bei der entgegengesetzten Belaftungsart treten die entgegengesetzten Grenzen ein;

c) die Diagonalen zwischen zwei Sparren sind im Maximum des Zuges, wenn die halbe Kuppel auf einer Seite des durch die Mitte der Diagonalen gehenden Durchmessers *in maximo* belaftet, die andere leer ist.

β) Spannungen in den Sparren. Wir betrachten nur zwei Belaftungsarten, nämlich die Belaftung der ganzen Kuppel durch mobile Last und die Belaftung der Kuppel durch Eigengewicht. Die zweite Belaftungsart ergibt die Minimalspannungen. Die Maximalspannungen der Sparren sind gleich den Summen der bei den beiden angeführten Belaftungsarten sich ergebenden Spannungen. Die Formeln für beide Belaftungsarten unterscheiden sich nur durch die Größe der Lasten.

Fig. 313.

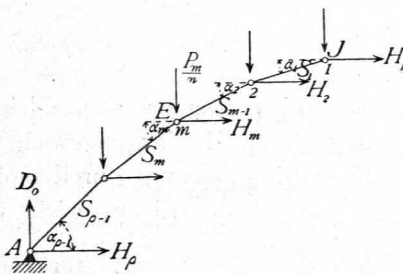
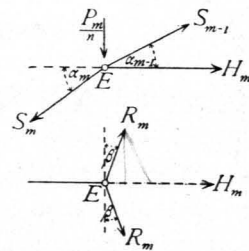


Fig. 314.



Was zunächst die mobile Belaftung betrifft, so sind im m -ten Knotenpunkte (vom Laternenringe an gerechnet) in E (Fig. 313 und 314) folgende Kräfte im Gleichwichte: die Spannungen der Sparren S_{m-1} und S_m , die Last $\frac{1}{n} P_m$, endlich die beiden Ringspannungen R_m . Letztere sind einander, der Symmetrie wegen, gleich und haben in der Horizontalebene des m -ten Ringes die Mittelkraft H_m . Die algebraische Summe der Verticalkräfte für den Punkt E ist gleich Null; mithin

$$0 = \frac{1}{n} P_m + S_m \sin \alpha_m - S_{m-1} \sin \alpha_{m-1},$$

woraus

$$S_m = \frac{S_{m-1} \sin \alpha_{m-1}}{\sin \alpha_m} - \frac{1}{n} \frac{P_m}{\sin \alpha_m}.$$

Für den ersten Knotenpunkt, den Knotenpunkt am Laternenringe, für \mathcal{F} ist $S_{m-1} = 0$; mithin folgt der Reihe nach für $m = 1, 2, 3 \dots$

$$S_1 = -\frac{1}{n} \frac{P_1}{\sin \alpha_1}; \quad S_2 = -\frac{1}{n} \frac{P_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} - \frac{1}{n} \frac{P_2}{\sin \alpha_2} = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2};$$

$$S_3 = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{n} \frac{P_3}{\sin \alpha_3} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3},$$

oder allgemein

$$S_m = -\frac{1}{n \sin \alpha_m} \sum_1^m (P) \dots \dots \dots 319.$$

Eben so ergibt sich die Spannung in den Sparren für eine Belaftung durch das Eigengewicht zu

$$S_1' = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}; \quad S_2' = -\frac{(G_1 + G_2)}{n \sin \alpha_2}; \quad \dots \quad S_m' = -\frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha_m} \dots \dots \dots 320.$$

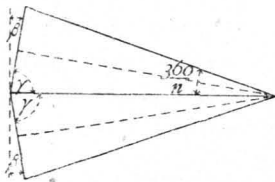
γ) Spannungen in den Ringen. Die Gleichgewichtsbedingung, nach welcher die algebraische Summe der Horizontalkräfte im Punkte E gleich Null ist, lautet (Fig. 314):

$$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - S_m \cos \alpha_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}.$$

Da H_m die Resultierende der beiden Ringspannungen R_m ist, so ergibt sich $H_m = 2 R_m \sin \beta$, woraus $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \beta}$. Nun ist (Fig. 315) $\beta = \frac{360}{2n} = \frac{\pi}{n}$,

sonach $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$. Wird in diese Gleichung der für H_m gefundene Werth

Fig. 315.



eingesetzt, so folgt

$$R_m = \frac{S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 321.$$

Wir bestimmen nach Gleichung 321. die Ringspannung durch das Eigengewicht und die Maximal- und Minimalringspannung durch mobile Belaftung.

Durch das Eigengewicht wird

$$R_m^g = \frac{-\frac{\sum_1^m (G) \cos \alpha_m}{n \sin \alpha_m} + \frac{\sum_1^{m-1} (G) \cos \alpha_{m-1}}{n \sin \alpha_{m-1}}}{2 \sin \frac{\pi}{n}},$$

$$R_m^g = -\frac{\sum_1^m (G) \cotg \alpha_m - \sum_1^{m-1} (G) \cotg \alpha_{m-1}}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 322.$$

Man erhält

$$\left. \begin{aligned} \text{für den Laternenring, d. h. für } m=1: R_1^g &= - \frac{G_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \\ \text{für den Ring 2, d. h. für } m=2: R_2^g &= - \frac{(G_1 + G_2) \cotg \alpha_2 - G_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \\ \text{für den Ring 3, d. h. für } m=3: R_3^g &= - \frac{(G_1 + G_2 + G_3) \cotg \alpha_3 - (G_1 + G_2) \cotg \alpha_2}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \end{aligned} \right\} 323.$$

etc.

Für den Mauerring ist S_m , also auch das erste Glied im Zähler gleich Null; mithin

$$R_p^g = \frac{\sum_1^{p-1} (G) \cotg \alpha_{p-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{(G_1 + G_2 + \dots + G_{p-1}) \cotg \alpha_{p-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots 324.$$

Um die durch mobile Belastung erzeugten Ringspannungen zu ermitteln, setzen wir in die Gleichung 321. die Werthe für S_m und S_{m-1} ein. Wir erhalten, wenn wir die zwischen den Knotenpunkten 1 und m befindlichen mobilen Lasten mit $\mathfrak{S}_1^m(P)$ bezeichnen, wobei nur ein Theil der Knotenpunkte belastet zu sein braucht, während $\sum_1^m(P)$ die Belastung sämmtlicher Knotenpunkte von 1 bis m bedeutet,

$$R_m = - \frac{\mathfrak{S}_1^m(P) \cotg \alpha_m - \mathfrak{S}_1^{m-1}(P) \cotg \alpha_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots 325.$$

Druckmaximum findet statt, wenn im Zähler der Minuendus möglichst groß, der Subtrahendus möglichst klein ist, d. h. wenn (totale Belastung der Zonen vorausgesetzt) die Knotenpunkte von 1 bis $m-1$, d. h. die innerhalb des betrachteten Ringes liegenden Knotenpunkte unbelastet sind, die zu dem Ringe gehörigen Knotenpunkte dagegen belastet sind, wofür wir auch sagen können, wenn die ganze äußere Kuppel, incl. der zum Ringe gehörigen Zone, belastet ist, da die Belastung der außerhalb des Ringes liegenden Zonen auf die Ringspannung ohne Einfluss ist. Ein Wachsen des Minuendus $\mathfrak{S}_1^m(P) \cotg \alpha_m$ durch Belastung der inneren Knotenpunkte hat ein Wachsen auch des Subtrahendus $\mathfrak{S}_1^{m-1}(P) \cotg \alpha_{m-1}$ zur Folge, und da $\cotg \alpha_{m-1}$ stets größer ist, als $\cotg \alpha_m$, so wächst dadurch der Subtrahendus mehr als der Minuendus; der Druck wird demnach dadurch verringert, daß innerhalb des Ringes Lasten angenommen werden. Die angegebene Belastungsart erzeugt also in der That Druckmaximum. Eben so ergibt sich Zugmaximum, wenn $\mathfrak{S}_1^{m-1}(P)$ möglichst groß, $\mathfrak{S}_1^m(P)$ möglichst klein wird. Jede Last zwischen Knotenpunkt 1 und $m-1$ vergrößert den Subtrahendus in Gleichung 325. mehr als den Minuendus, weil $\cotg \alpha_{m-1}$ größer ist, als $\cotg \alpha_m$, vergrößert also den Zug. Für $\mathfrak{S}_1^m(P)$ und $\mathfrak{S}_1^{m-1}(P)$ ist also unter diesen Umständen der gleiche Werth $\sum_1^{m-1}(P)$ als ungünstigster Zugwerth einzuführen.) Zugmaximum findet demnach statt, wenn nur der innere Kuppeltheil, excl. der Zone, zu welcher der Ring gehört,

belastet ist. Die hier gefundenen Resultate stimmen demnach mit den auf S. 419 gemachten Annahmen über die Maximalbelastung überein. Man erhält

$$R_m^{\rho \min} = -\frac{P_m \cotg \alpha_m}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_m^{\rho \max} = \frac{\sum_1^{m-1} (P) (\cotg \alpha_{m-1} - \cotg \alpha_m)}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad 327.$$

Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \text{für den Laternenring } (m=1): \quad R_1^{\rho \min} &= -\frac{P_1 \cotg \alpha_1}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_1^{\rho \max} = 0 \\ \text{für } m=2: \quad R_2^{\rho \min} &= -\frac{P_2 \cotg \alpha_2}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_2^{\rho \max} = \frac{P_1 (\cotg \alpha_1 - \cotg \alpha_2)}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \\ \text{für } m=3: \quad R_3^{\rho \min} &= -\frac{P_3 \cotg \alpha_3}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_3^{\rho \max} = \frac{(P_1 + P_2) (\cotg \alpha_2 - \cotg \alpha_3)}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \end{aligned} \right\} 328.$$

etc.

$$\text{für den Mauerring: } R_\rho^{\rho \min} = 0 \quad \text{und} \quad R_\rho^{\rho \max} = \frac{(P_1 + P_2 + \dots + P_{\rho-1}) \cotg \alpha_{\rho-1}}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad 329.$$

d) Spannungen in den Diagonalen. Neben dem Durchmesser, welcher für die ungünstigste Diagonalenbelastung die belastete und unbelastete Kuppelhälfte trennt, liegt ein belasteter und ein unbelasteter Sparren. Nehmen wir nun an, daß die Spannung im ersteren so groß ist, als wenn die ganze Kuppel permanent und mobil belastet wäre, im zweiten so groß, als wenn die ganze Kuppel nur permanent belastet wäre, und machen wir die im Knotenpunkte anschließende Diagonale stark genug, um die ganze Spannungsdifferenz zu übertragen, so wird dieselbe jedenfalls zu stark, ist also als ausreichend zu betrachten.

Im obersten Sparrenstück sind die größten und kleinsten Druckspannungen bezw.

$$S_{1 \max} = -\frac{P_1 + G_1}{n \sin \alpha_1} \quad \text{und} \quad S_{1 \min} = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}.$$

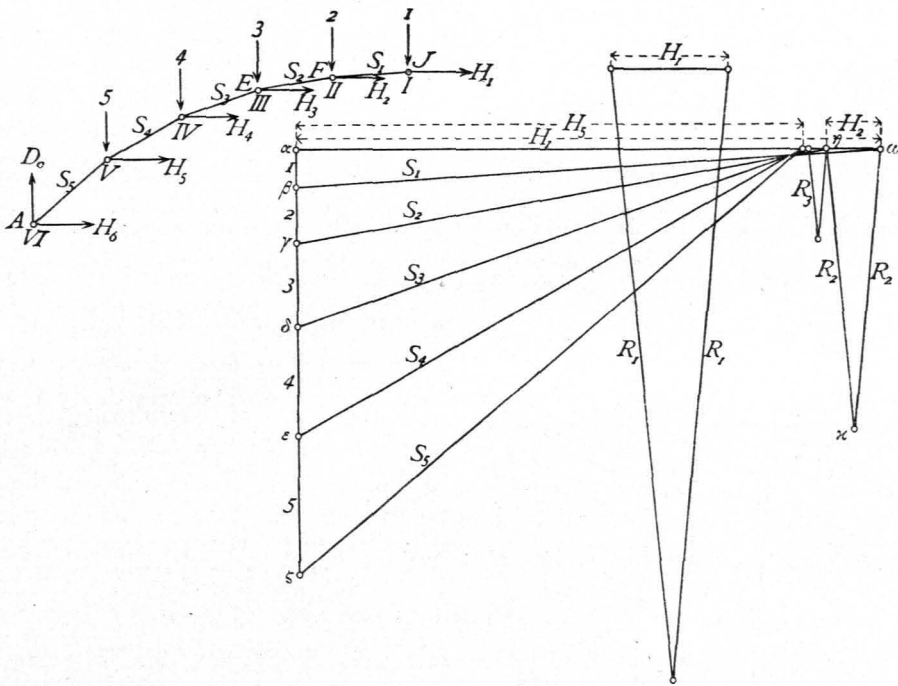
Die Differenz beider Spannungen ist $\Delta_1 = -\frac{P_1}{n \sin \alpha_1}$. Dieselbe soll durch die Diagonale übertragen werden; es ist also nahezu, wenn der Winkel zwischen Diagonale und belastetem Sparren γ_1 genannt wird, $Y_1 \cos \gamma_1 = -\Delta$, daher

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{P_1}{n \sin \alpha_1 \cos \gamma_1}, \quad Y_2 = +\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2 \cos \gamma_2} \\ Y_3 &= \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3 \cos \gamma_3}, \quad Y_4 = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{2n \sin \alpha_4 \cos \gamma_4} \end{aligned} \right\} \dots \dots 330.$$

Auf graphischem Wege lassen sich die Spannungen in den einzelnen Stäben einer Kuppel in folgender Weise ermitteln.

a) Sparrenspannungen durch das Eigengewicht. Die Lasten in den einzelnen Knotenpunkten seien 1, 2, 3, 4, 5 (Fig. 316); man trage dieselben zu einem Kraftpolygon $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta$ an einander. Im Knotenpunkte \mathcal{F} wirkt 1, die Sparrenspannung S_1 und die resultierende H_1 der Ringspannungen R_1 . Die Zerlegung der Kraft 1 nach den beiden Richtungen von S_1 und H_1 ergibt $\beta \omega = S_1$, $\omega \alpha = H_1$. Am Knotenpunkt F wirken nun 2, S_1 , S_2 und H_2 ; bekannt sind 2 und S_1 ; man erhält $\gamma \eta = S_2$, $\eta \omega = H_2$. Eben so ergeben sich die übrigen Sparrenspannungen.

Fig. 316.



β) Spannungen in den Sparren durch mobile Belastung. Die Construction ist in gleicher Weise, wie sub α vorzunehmen, nachdem die in den einzelnen Knotenpunkten wirkenden mobilen Lasten genau wie oben aufgetragen und behandelt sind.

γ) Ringspannungen durch das Eigengewicht. Die Zerlegung der für diese Belastung gefundenen Werthe von H ergibt ohne Schwierigkeit die Werthe für R_1^g, R_2^g, \dots , wie in Fig. 316 gezeichnet. Die Construction empfiehlt sich für die vorliegende Ermittlung nicht sehr, weil sie der spitzen Schnittwinkel wegen nur ungenaue Resultate giebt, die Schnittpunkte vielfach nicht mehr auf die Zeichenebene fallen. So ist H_1 in Fig. 316 im fünffach verkleinerten Mafsstabe aufgetragen, um R_1 zu construiren.

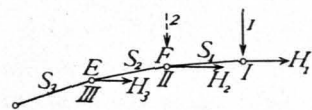
δ) Ringspannungen durch mobile Belastung. Maximalspannung im Ringe II findet statt, wenn nur die Ringzone I mobil belastet ist. Es sei (Fig. 318 a) $ab = \frac{P_1}{n}$; alsdann wird $bf = S_1$, $fa = H_1$.

Im Knotenpunkt F (Fig. 317) sind S_1, S_2 und H_2 im Gleichgewicht, d. h. das Kräfte-dreieck für Punkt F wird bgf . Darin ist $H_2 = gf$ und $gi = if = R_2^{max}$.

Im Ringe III ist Maximalspannung, wenn die Zonen zu den Ringen I und II mobil belastet sind; alsdann wirken in F die Kräfte $S_1 = fb, a = bc = \frac{P_2}{n}, S_2'$ und H_2' . Man erhält leicht $H_2' = hf, S_2' = ch$. In E sind dann S_2', S_3 und H_3 im Gleichgewicht und $H_3 = kh$, woraus $R_3^{max} = kl = lh$. Eben so wird $R_4^{max} = on = mo$ etc.

Minimalspannung im Ringe I findet bei totaler Kuppelbelastung statt; alsdann wirkt in F die Kraft $i = \frac{P_1}{n}$, und es wird, wenn (Fig. 318 b) $ab = i$ ist, $ia = H_1$. Die Zerlegung in die beiden Ringspannungen ist dann in gleicher Weise wie oben vorzunehmen. Für Ring II findet Minimalspannung bei einer Belastung der Zonen II, III, IV statt; I ist unbelastet;

Fig. 317.



mithin ist S_1 alsdann gleich Null (siehe Gleichung 319). Ist $\frac{P_2}{n} = 2$, so wird $hb = H_2$. So wird weiter für die Minimalbelastungen der einzelnen Ringe $H_3 = kc$, $H_4 = md$, $H_5 = ne$.

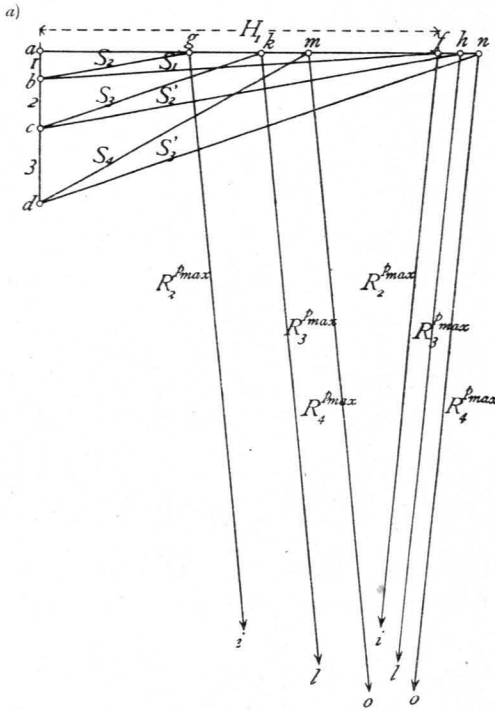
ε) Die Construction der Spannungen in den Diagonalen ist so einfach, daß dieselbe nicht weiter gezeigt zu werden braucht.

3) Erzeugende Kuppelcurve.

454.
Parabel-
Kuppel.

Die erzeugende Curve ist in den meisten Fällen eine Parabel der Gleichung (Fig. 319) $y = \frac{h x^2}{r^2}$, bei welcher der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel C liegt, die halbe Spannweite gleich r , die Pfeilhöhe gleich h gesetzt ist, oder eine cubische Parabel der Gleichung $y = \frac{h x^3}{r^3}$.

Fig. 318.



Letztere Curvenform hat den Vortheil, daß in den Zwischenringen bei gleichmäßig vertheilter totaler Belastung die Spannung Null herrscht und daß die Spannungen in den Sparren nahezu constant find, was sich folgender Mafsen ergibt.

Die Spannung im Sparrentheil EF (Fig. 320) ist durch Betrachtung des Fragmentes zwischen dem Scheitel C und dem durch die Sparrenmitte gelegten Schnitt II zu ermitteln. Die algebraische Summe der auf das Fragment wirkenden Verticalkräfte ist gleich Null, daher, wenn wir die belastende Grundfläche mit F_1 , die Belastung pro 1qm der Grundfläche mit g bezeichnen, $S \sin \alpha = g F_1$. Nun ist $F_1 = \frac{x^2 \pi}{n}$, mithin $S \sin \alpha = \frac{g x^2 \pi}{n} = S \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$.

Fig. 319.

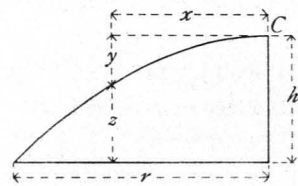
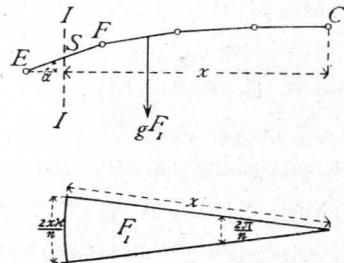


Fig. 320.



Wird statt des Polygons die stetig gekrümmte Curve der Berechnung zu Grunde gelegt, so ist $y = \frac{h x^3}{r^3}$ und $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{3 h x^2}{r^3}$; mithin

$$S \cos \alpha \frac{3 h x^2}{r^3} = \frac{g x^2 \pi}{n}, \text{ woraus } S \cos \alpha = \frac{g \pi r^3}{3 n h}, \dots \dots \dots 331.$$

d. h. $S \cos \alpha$ ist constant. Da aber wegen der flachen Neigung der Kuppel der Winkel α sehr klein ist, so variirt auch $\cos \alpha$ sehr wenig; die Spannung ist daher im ganzen Sparren nahezu constant.

Betrachten wir nun einen Knotenpunkt E (Fig. 314) und setzen die algebraische Summe der in ihm wirkenden Horizontalkräfte gleich Null, so wird

$$0 = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - H_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} = 0, \text{ da nach Gleichung 331. } S \cos \alpha \text{ constant ist. Die Ringspannung ist dann}$$

$$R = \frac{H}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = 0 \dots \dots \dots 332.$$

Die obigen Angaben sind damit bewiesen.

Es möge noch bemerkt werden, daß der theoretische Materialaufwand bei einer nach der cubischen Parabel gekrümmten Kuppel nur $\frac{2}{3}$ desjenigen Materialaufwandes beträgt, der sich bei einer nach der gemeinen Parabel gekrümmten Kuppel ergibt.

Beispiel. Es ist ein Kuppeldach von nachfolgenden Hauptdimensionen und Belastungen zu construiren: Durchmesser des zu überdachenden kreisförmigen Raumes gleich 47 m, demnach der Durchmesser des dem Mauerring umschriebenen Parallelkreises $2L = 48$ m; Scheitelhöhe der Kuppel $h = 8$ m; es sind 6 Ringe mit den Radien 4, 8, 12, 16, 20 und 24 m und $n = 32$ Sparren anzuordnen; das Eigengewicht ist zu 70 kg pro 1 qm Grundfläche anzunehmen; als mittlere Dachneigung ist $\frac{h}{2L} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$ einzuführen, und es ergibt sich hieraus nach Art. 411, S. 377 ff. als Belastung durch Schnee

455.
Beispiel.

pro 1 qm Grundfläche 75 kg, als Belastung durch Winddruck pro 1 qm Grundfläche $w = 30$ kg, so daß die gesammte mobile Belastung pro 1 qm Grundfläche 105 kg beträgt; die Laterne wiegt 2000 kg.

Die Kuppelfläche sei durch Rotation einer cubischen Parabel der Gleichung

$$y = \frac{h x^3}{r^3} = \frac{8}{24^3} x^3 = 0,00058 x^3$$

entstanden; man erhält für die verschiedenen, durch die Ringe vorgeschriebenen Eckpunkte des Polygons (Fig. 321):

$x =$	4	8	12	16	20	24 m
$y =$	0,04	0,30	1,00	2,38	4,64	8,0 "
$h - y = z =$	7,96	7,70	7,00	5,62	3,36	0 "

Ferner ist:

$$\Delta_1 = y_2 - y_1 = 0,26 \text{ m}; \Delta_2 = y_3 - y_2 = 0,7 \text{ m}; \Delta_3 = y_4 - y_3 = 1,38 \text{ m}; \Delta_4 = y_5 - y_4 = 2,26 \text{ m}; \Delta_5 = y_6 - y_5 = 3,36 \text{ m}.$$

$$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + \Delta_1^2} = 4,01 \text{ m}; \lambda_2 = 4,06 \text{ m}; \lambda_3 = 4,23 \text{ m}; \lambda_4 = 4,59 \text{ m}; \lambda_5 = 5,22 \text{ m}.$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\lambda_1} = 0,0648; \sin \alpha_2 = 0,1724; \sin \alpha_3 = 0,32; \sin \alpha_4 = 0,192; \sin \alpha_5 = 0,644.$$

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{4}{\Delta_1} = 15,38; \operatorname{cotg} \alpha_2 = 5,7; \operatorname{cotg} \alpha_3 = 2,9; \operatorname{cotg} \alpha_4 = 1,77; \operatorname{cotg} \alpha_5 = 1,19.$$

$$\frac{\pi}{n} = \frac{180}{32} = 5^\circ 37,5'; \sin \frac{\pi}{n} = \sin 5^\circ 37,5' = 0,098; \frac{1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{64 \cdot 0,098} = 0,16.$$

Die Eigengewichte, bezw. mobilen Belastungen der einzelnen Ringe sind:

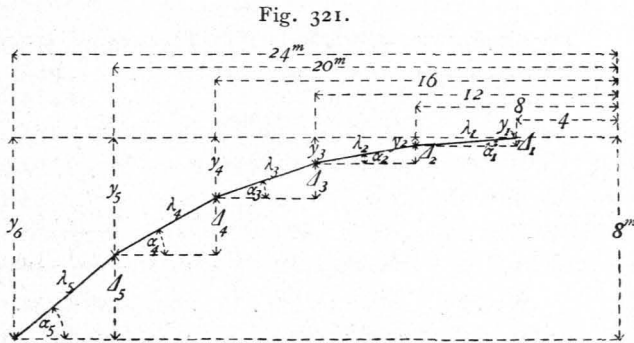


Fig. 321.

- Laternenring: $G_1 = 2000 + 6^2 \pi \cdot 70 = 9913 \text{ kg}$, $P_1 = 6^2 \pi \cdot 105 = 11869 \text{ kg}$;
 2. Ring: $G_2 = (10^2 - 6^2) \pi \cdot 70 = 14067 \text{ kg}$, $P_2 = (10^2 - 6^2) \pi \cdot 105 = 21105 \text{ kg}$;
 3. Ring: $G_3 = (14^2 - 10^2) \pi \cdot 70 = 21100 \text{ kg}$, $P_3 = (14^2 - 10^2) \pi \cdot 105 = 31647 \text{ kg}$;
 4. Ring: $G_4 = (18^2 - 14^2) \pi \cdot 70 = 28133 \text{ kg}$, $P_4 = (18^2 - 14^2) \pi \cdot 105 = 42200 \text{ kg}$;
 5. Ring: $G_5 = (22^2 - 18^2) \pi \cdot 70 = 35168 \text{ kg}$, $P_5 = (22^2 - 18^2) \pi \cdot 105 = 52752 \text{ kg}$.

Die Spannungen in den Sparren, welche durch das Eigengewicht hervorgebracht werden, sind nach Gleichung 320.:

$$S_1^g = - \frac{G_1}{n \sin \alpha_1} = - \frac{9913}{32 \cdot 0,065} = - 4766 \text{ kg};$$

$$S_2^g = - \frac{G_1 + G_2}{n \sin \alpha_2} = - \frac{23980}{32 \cdot 0,1724} = - 4346 \text{ kg};$$

$$S_3^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3}{n \sin \alpha_3} = - \frac{45080}{32 \cdot 0,32} = - 4402 \text{ kg};$$

$$S_4^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{n \sin \alpha_4} = - \frac{73213}{32 \cdot 0,492} = - 4651 \text{ kg};$$

$$S_5^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5}{n \sin \alpha_5} = - \frac{108381}{32 \cdot 0,644} = - 5258 \text{ kg}.$$

Die durch mobile Belastung erzeugten Sparrenspannungen betragen:

$$S_1^p = - \frac{P_1}{n \sin \alpha_1} = - \frac{11869}{2,08} = - 5706 \text{ kg};$$

$$S_2^p = - \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} = - \frac{32974}{5,517} = - 5977 \text{ kg};$$

$$S_3^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3} = - \frac{64621}{10,24} = - 6310 \text{ kg};$$

$$S_4^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4} = - \frac{106821}{15,74} = - 6786 \text{ kg};$$

$$S_5^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{n \sin \alpha_5} = - \frac{159573}{20,61} = - 7742 \text{ kg}.$$

Die Ringspannungen, welche durch das Eigengewicht hervorgerufen werden, sind nach Gleichung 323.

Laternenring: $R_1^g = - 9913 \cdot 15,38 \cdot 0,16 = - 24396 \text{ kg}$;

$$R_2^g = - (23980 \cdot 5,7 - 9913 \cdot 15,38) \cdot 0,16 = + 2524 \text{ kg};$$

$$R_3^g = - (45080 \cdot 2,9 - 23980 \cdot 5,7) \cdot 0,16 = + 953 \text{ kg};$$

$$R_4^g = - (73213 \cdot 1,77 - 45080 \cdot 2,9) \cdot 0,16 = + 183 \text{ kg};$$

$$R_5^g = - (108381 \cdot 1,19 - 73213 \cdot 1,77) \cdot 0,16 = + 98 \text{ kg};$$

Mauerring: $R_6^g = 108381 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = 20636 \text{ kg}$.

Die Maximal- und Minimalspannungen in den Ringen, durch mobile Belastung erzeugt, betragen nach Gleichung 328.:

Laternenring: $R_1^{p \min} = - 11869 \cdot 15,38 \cdot 0,16 = - 29159 \text{ kg}$ u. $R_1^{p \max} = 0$;

2. Ring: $R_2^{p \min} = - 21105 \cdot 5,7 \cdot 0,16 = - 19248 \text{ kg}$,
 $R_2^{p \max} = 11869 (15,38 - 5,7) \cdot 0,16 = + 18387 \text{ kg}$;

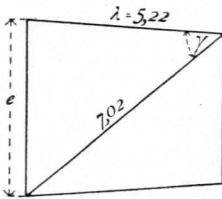
3. Ring: $R_3^{p \min} = - 31647 \cdot 2,9 \cdot 0,16 = - 14684 \text{ kg}$,
 $R_3^{p \max} = 32974 \cdot 2,8 \cdot 0,16 = + 14472 \text{ kg}$;

4. Ring: $R_4^{p \min} = - 42200 \cdot 1,77 \cdot 0,16 = - 11951 \text{ kg}$,
 $R_4^{p \max} = 64621 \cdot 1,13 \cdot 0,16 = + 11696 \text{ kg}$;

5. Ring: $R_5^{p \min} = - 52752 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = - 10023 \text{ kg}$,
 $R_5^{p \max} = 106821 \cdot 0,58 \cdot 0,16 = + 9913 \text{ kg}$;

Mauerring: $R_6^{p \min} = 0$ und $R_6^{p \max} = 159573 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = + 30319 \text{ kg}$.

Fig. 322.



Was schliesslich die Spannungen in den Diagonalen betrifft, so brauchen wir nur die am stärksten beanspruchte Diagonale zu berechnen, weil selbst diese noch sehr schwach wird. Gewöhnlich macht man dann alle Diagonalen gleich stark.

Die größte durch mobile Belastung erzeugte Sparrenspannung ist durch die Diagonale zu übertragen (siehe Art. 452, S. 422); dieselbe ist $S_5^p = -7742 \text{ kg}$, und es hat demnach eine Diagonale höchstens diese Kraft aufzunehmen. Die Spannung in der Diagonalen wird demnach kleiner sein, als $\frac{7742}{\cos \gamma}$; da nun nahezu (Fig. 322) $\cos \gamma = \frac{5,22}{7,02} = 0,744$ ist, wird $Y < \frac{7742}{0,744}$ oder $Y < 10406 \text{ kg}$ fein.

Man könnte noch für einige der oberen Diagonalen die Spannungen auffuchen, was nach dem Vorstehenden keine Schwierigkeit macht. Für die Querschnittsbestimmungen kann nun, wie bei den früheren Beispielen, eine Tabelle aufgestellt werden.

Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	P_2
Sparren:			Ringe:			
S_1	-4766	-5706	R_1	-24396	-29159	0
S_2	-4346	-5977	R_2	+2524	+18387	-19248
S_3	-4402	-6310	R_3	+953	+14472	-14684
S_4	-4651	-6786	R_4	+183	+11696	-11951
S_5	-5258	-7742	R_5	+98	+9913	-10023
Diagonalen:			R_6	+20636	+30319	0
Y	0	10406				
	Kilogramm.			Kilogramm.		

b) Flache Zeldächer.

Die Zeldächer bilden Pyramiden, und zwar in den allermeisten Fällen reguläre Pyramiden. Man kann sie aus einer Anzahl radial gestellter Binder, die unter die fog. Grate kommen, construiren, in welchem Falle die Berechnung eines jeden Binders unter Zugrundelegung der auf ihn entfallenden Belastungen genau so vorzunehmen ist, wie bei den Balkendächern gezeigt wurde, oder man legt auch hier, wie bei den Kuppeln, alle Constructionstheile in die Dachflächen, so dass sich eine der dortigen ganz analoge Construction ergibt. In diesem Falle (Fig. 323) werden eine Anzahl Bindersparren $A, C, A', C, B, C, B', C \dots$ angeordnet; zwischen denselben befinden sich horizontale Ringe $E, E', E'', E''' \dots$ und in den viereckigen Feldern der Dachflächen, wegen der ungleichmäßigen Belastungen, Diagonalen. Auch hier wird oft in der Dachmitte eine Laterne angeordnet, welche sich auf einen Laternenring stützt, gegen den sich die oberen Sparrenenden anlehnen. Wir werden hier nur die der Kuppelconstruction analogen Anordnungen betrachten, da die ersteren keine be-

Fig. 323.

