welches eine exacte Berechnung zuläſſt, ausreichend, ſo daſs wir hier nur Träger mit eintheiligem Gitterwerk beſprechen werden.

Die Gitterſtäbe ſind entweder geneigt oder vertical; ſie werden in der Folge als Diagonalen und Verticalen bezeichnet werden.

Gitterwerk mit zwei Lagen Diagonalen nennen wir Netzwerk, Gitterwerk mit einer Lage Diagonalen und einer Lage Verticalen Fachwerk.

Die Dachbinder ſind in den allermeiſten Fällen Gitterträger, ſo daſs die hier zunächſt zu entwickelnden allgemeinen Regeln und Geſetze auch für die im nächſten Kapitel zu behandelnden Dachbinder giltig ſind.

Bei den nachſtehenden Unterſuchungen werden folgende Annahmen gemacht: 375. Voraus-ſetzungen.

1) die Belaſtungen finden nur in den Knotenpunkten ſtatt, und

2) die Stäbe ſind in den Knotenpunkten ſo mit einander verbunden, daſs ſie ſich um dieſelben frei drehen können.

1) Methoden für die Beſtimmung der Stabſpannungen.

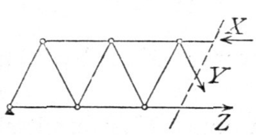
Die Ermittelung der inneren Kräfte oder Spannungen erfolgt nach dem allgemeinen Verfahren, welches in Art. 254, S. 232 angegeben worden iſt. Der Körper wird an derjenigen Stelle durchſchnitten gedacht, an welcher man die inneren Kräfte, hier die Stabſpannungen, kennen lernen will; an den Schnittſtellen werden die inneren Kräfte angebracht und auf das Fragment die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet. Da hier die Stäbe, wie angenommen wurde, um die Knotenpunkte frei drehbar ſind, ſo muſs jede Stabſpannung mit der Richtung des betreffenden Stabes zuſammenfallen. Es ergiebt ſich ſonach folgende Regel: 376. Verfahren im Allgemeinen.

Man denke den Träger ſo durchſchnitten, daſs die Stäbe, deren Spannung man ſucht, durch den Schnitt getroffen werden, bringe die mit den Stabrichtungen zuſammenfallenden Stabſpannungen als vorläufig unbekannte Kräfte an (Fig. 172) und ſtelle für das Fragment die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

Es ergiebt ſich leicht, daſs die Aufgabe auf dem angegebenen Wege nur dann lösbar iſt, wenn ſtets nur drei Unbekannte vorhanden ſind, d. h., wenn für jeden Stab ein Schnitt möglich iſt, bei welchem auſser demſelben nur noch zwei andere Stäbe geſchnitten werden; anderenfalls erhält man ein ſtatiſch unbeſtimmtes Syſtem.

Die Stäbe werden gezogen oder gedrückt; im erſten Falle wirkt die Spannung vom Knotenpunkte ab (Y und Z in Fig. 172); im zweiten Falle wirkt ſie nach dem Knotenpunkt hin (X in Fig. 172). Da man beim Beginne der Berechnung vielfach noch nicht den Sinn der Beanſpruchung kennt, ſo werden wir zunächſt ſtets alle Spannungen als Zugſpannungen, d. h. vom Knotenpunkte ab gerichtet, einführen; die Rechnung ergiebt entweder einen poſitiven oder negativen Werth. Das erſtere Reſultat bedeutet, daſs die angenommene Pfeilrichtung die richtige war, d. h. daſs im Stabe Zug herrſcht. Das zweite Reſultat bedeutet, daſs die wirkliche Spannung der angenommenen gerade entgegengeſetzt (mit cos 180° zu multipliciren) iſt, d. h. im Stabe Druck herrſcht.

Fig. 172.



α) Analytiſche Beſtimmung der Stabſpannungen. Dieſelbe kann in zweifacher Weiſe geſchehen, entweder durch Aufſtellung der Gleichgewichtsbedingungen oder nach der ſog. Momentenmethode. 377. Analytiſches Verfahren.

378. Gleichgewichts-bedingungen.

α) Die Aufſtellung der Gleichgewichtsbedingungen für das Fragment (Fig. 173), welches, wie im vorigen Artikel angegeben, behandelt iſt, ergiebt drei Gleichungen, welche nach Art. 256, S. 233 lauten:

$$\left. \begin{array}{l} X \cos \sigma + Y \sin \tau + Z = 0; \quad D_0 - P_1 - P_2 + X \sin \sigma - Y \cos \tau = 0 \\ \qquad D_0 \,.\, 2\,a - P_1\,a - Z z = 0 \end{array} \right\} \quad . \quad 193.$$

Als Drehpunkt für die dritte Gleichung iſt der Punkt C gewählt; alsdann haben X, Y und P_2 kein ſtatiſches Moment, weil ſie für dieſen Drehpunkt keinen Hebelsarm haben.

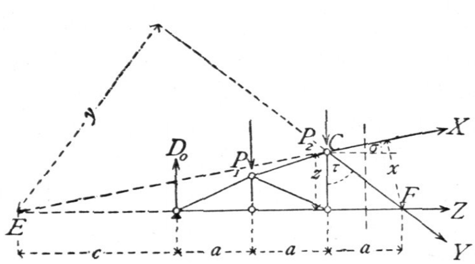
Die angegebene Methode führt ſtets, wenn nur 3 Unbekannte, alſo 3 geſchnittene Stäbe vorhanden ſind, zum Ziele; ſie hat den Nachtheil, daſs meiſtens 3 Gleichungen gelöst werden müſſen, ſelbſt wenn man nur eine Spannung kennen lernen will.

379. *Ritter*'ſche Methode.

β) Das Charakteriſtiſche der von *Ritter* angegebenen Momenten-Methode iſt, daſs man für jede Spannung nur eine Gleichung erhält; das Mittel dazu bietet die dritte Gleichgewichtsbedingung des vorhergehenden Artikels. Wird der Momentenpunkt ſo gewählt, daſs zwei von den drei Unbekannten das Moment Null haben, ſo bleibt in der Gleichung nur eine Unbekannte. Das ſtatiſche Moment jeder der beiden Kräfte iſt aber gleich Null für den Schnittpunkt beider Kraftrichtungen, weil für dieſen Punkt jede der beiden Kräfte den Hebelsarm Null hat. Die Methode iſt demnach folgende:

Man lege durch den Träger einen Schnitt, ſo daſs nur 3 Stäbe mit unbekannten Spannungen geſchnitten werden, bringe dieſe Spannungen und alle am Fragment wirkenden äuſseren Kräfte an, ſetze die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente dieſer Kräfte gleich Null und wähle dabei als Momentenpunkt für die Ermittelung der Spannung eines Stabes ſtets den Schnittpunkt der beiden mit durchſchnittenen Stäbe.

Fig. 173.



Um in Fig. 173 die Spannung X zu finden, wählt man F als Momentenpunkt; die Gleichung der ſtatiſchen Momente heiſst dann

$$X x + D_0 \,.\, 3\,a - P_1 \,.\, 2\,a - P_2\,a = 0,$$

woraus ſich die einzige Unbekannte X leicht finden läſſt. Für C als Momentenpunkt ergiebt ſich

$$D_0 \,.\, 2\,a - P_1\,a - Z z = 0,$$

woraus Z zu berechnen iſt, und für E als Momentenpunkt

$$Y y - D_0\,c + P_1\,(c + a) + P_2\,(c + 2\,a) = 0,$$

woraus Y zu ermitteln iſt.

Die Länge der Hebelsarme ergiebt ſich meiſtens genügend genau aus der Zeichnung, kann aber auch leicht rechneriſch ermittelt werden.

Wir werden den für einen Stab nach dieſer Methode ſich ergebenden Momentenpunkt den dieſem Stabe conjugirten Punkt nennen.

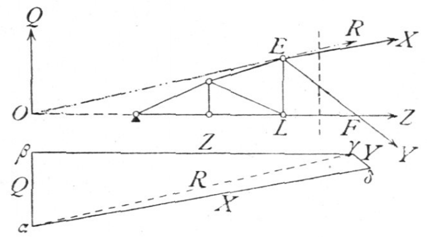
380. Graphiſches Verfahren.

β) Graphiſche Beſtimmung der Stabſpannungen. Auch das graphiſche Verfahren kann nach zwei verſchiedenen Methoden durchgeführt werden, entweder nach der Schnittmethode oder nach der Polygonalmethode.

a) Die Schnittmethode wurde von *Culmann* angegeben. 381. *Culmann'*ſche Methode.

Werden die ſämmtlichen am Fragment wirkenden äuſseren Kräfte zu einer Reſultirenden Q (Fig. 174) zuſammengefaſst, ſo wirken auf daſſelbe 4 Kräfte, nämlich Q und die 3 unbekannten Spannungen. Für dieſe 4 Kräfte ergiebt ſich ein geſchloſſenes Kraftpolygon. Von einer dieſer Kräfte, nämlich von Q, iſt Gröſse, Richtung und Lage bekannt; von den drei anderen wohl Richtung und Lage, nicht aber die Gröſse. Erſetzt man 2 der unbekannten Kräfte, etwa X und Y, durch ihre Mittelkraft R, ſo bleiben nur noch die 3 Kräfte Q, Z und R, welche ſich nach Art. 258, S. 234 in einem Punkte ſchneiden müſſen. R muſs alſo durch den Schnittpunkt O von Q und Z gehen. Da R auſserdem durch den Schnittpunkt E von X und Y geht, ſo ſind 2 Punkte der Richtungslinie von R, es iſt alſo auch dieſe Richtung ſelbſt bekannt. R hat die Richtung OE. Im Punkte O halten ſich demnach 3 Kräfte Q, R und Z im Gleichgewichte; das für dieſelben conſtruirte Kraftpolygon iſt eine geſchloſſene Figur, hier ein Dreieck. Iſt $Q = \alpha\beta$, ſo ziehe man durch β eine Parallele zur Richtung von Z, durch α eine ſolche zur Richtung von R; der Schnittpunkt γ beider Linien ergiebt die beiden Kräfte $R = \gamma\alpha$ und $Z = \beta\gamma$.

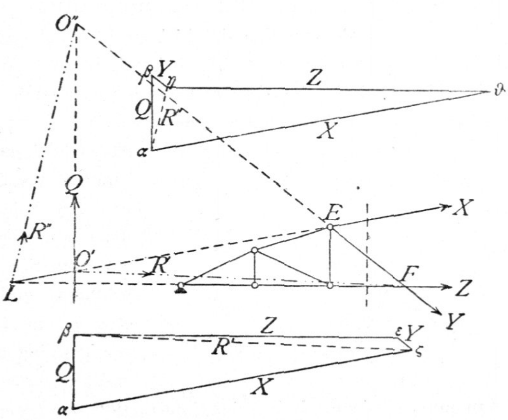
Fig. 174.



In derſelben Weiſe kann nun R in ſeine beiden Seitenkräfte X und Y zerlegt werden, indem man durch die beiden Endpunkte von R Parallelen zu den Richtungen von bezw. X und Y zieht. Es ergiebt ſich $\gamma\delta = Y$ und $\delta\alpha = X$.

Es iſt für das Endreſultat gleichgiltig, welche zwei von den unbekannten Spannungen man zu einer Mittelkraft vereinigt. Man kann auch Y und Z (Fig. 175) durch ihre Mittelkraft R' erſetzen, welche dann durch F und den Schnittpunkt O' der Kraft X mit Q geht. Als Kraftpolygon erhält man $\alpha\beta\varepsilon\zeta$. Eben ſo kann man auch X und Z zu einer Reſultirenden vereinen, und erhält die ebenfalls in Fig. 175 gezeichnete Conſtruction.

Fig. 175.



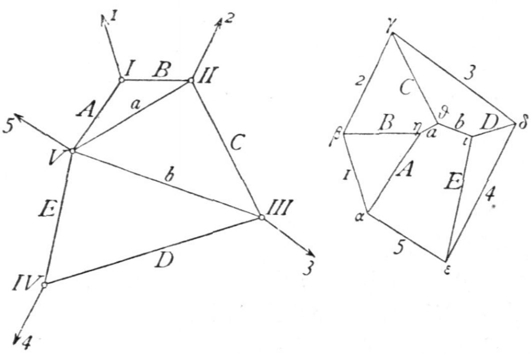
Die angegebene Conſtruction giebt zugleich Auffchluſs darüber, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt werden. Da die am Fragment wirkenden Kräfte im Gleichgewicht ſind, ſo haben ſie nach Art. 264, S. 237 denſelben Umfahrungsſinn, und es iſt demnach der Sinn aller im Kraftpolygon vorkommenden Kräfte bekannt, wenn der Sinn einer derſelben bekannt iſt. Hier iſt ſtets der Sinn von Q bekannt; denn dieſes iſt die Transverſalkraft für den bezüglichen Querſchnitt. Q hat den Sinn von α nach β; alſo iſt in Fig. 174 Z von β nach γ, d. h. vom Knotenpunkt L ab gerichtet, Y von γ nach δ, und X von δ nach α gerichtet. X wirkt alſo nach dem Knotenpunkt E hin, iſt demnach Druck, während Z und Y Zug bedeuten. Richtung, Gröſse und Lage der Transverſalkraft Q für eine gegebene Belaſtung ſind mit Hilfe des Kraft- und Seilpolygons leicht beſtimmbar. (Siehe Art. 360, S. 322.)

b) Die Polygonalmethode iſt von *Cremona* angegeben worden. 382. *Cremona'*ſche Methode.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Randſtäbe ſeien Stäbe, welche zwei auf einander folgende äuſsere Knotenpunkte mit einander verbinden, alſo *I II*, *II III* .... in Fig. 176; Zwiſchenſtäbe ſeien Stäbe, welche zwei nicht auf einander folgende äuſsere Knotenpunkte verbinden, alſo *II V*, *III V*.... in Fig. 176.

Da alle auf das Syſtem wirkenden äuſseren Kräfte im Gleichgewichte ſind, ſo iſt für dieſelben ein geſchloſſenes Kraftpolygon möglich, welches, wenn alle äuſseren Kräfte nach Gröſse und Richtung gegeben ſind, leicht conſtruirt werden kann. Auſserdem ſind an jedem Knotenpunkte die an demſelben wirkenden Kräfte für ſich im Gleichgewicht; es iſt alſo für jeden dieſer Knotenpunkte ein kleines ſecundäres, ſich ſchlieſsendes Kraftpolygon möglich. An jedem Knotenpunkte wirken: eine äuſsere Kraft, die im ſpeciellen Falle Null ſein kann, und die Spannungen der Stäbe, welche ſich in ihm ſchneiden, alſo im Knotenpunkte *II* die Kräfte *2*, *B*, *C*, *a*.

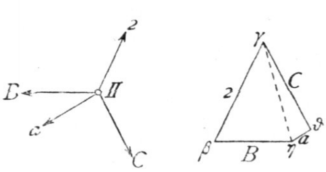
Fig. 176.



In den meiſten der kleinen Kraftpolygone kommt nun je eine äuſsere Kraft vor, welche bereits im groſsen Hauptpolygon der äuſseren Kräfte enthalten iſt; es wird alſo offenbar möglich ſein, jedes kleine Kraftpolygon ſo an das groſse zu legen, daſs die beiden gemeinſame äuſsere Kraft durch dieſelbe Gerade dargeſtellt wird. Da ferner jeder Stab zu zwei Knotenpunkten gehört, ſo kommt jede Stabſpannung in zwei ſecundären Kraftpolygonen vor. Es wird nun durch rationelle Anordnung möglich, die kleinen Kraftpolygone ſo in das groſse einzuſchachteln, daſs nicht nur jede äuſsere Kraft, ſondern auch jede Stabſpannung nur einmal im Kräftezuge vorkommt, d. h. auch die kleinen Kraftpolygone hängen dann ſo zuſammen, daſs die zweien gemeinſame Stabſpannung durch dieſelbe Gerade dargeſtellt wird.

Für die Conſtruction der kleinen Kraftpolygone iſt nun Folgendes zu beachten. Wenn, wie hier, die Richtung ſämmtlicher Kräfte bekannt iſt und das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte ſich ſchlieſst, ſo iſt die Conſtruction deſſelben ſtets möglich, wenn am Knotenpunkte nur 2 unbekannte Kräfte vorhanden ſind. Denn ſeien etwa in Fig. 177 *B* und *2* bekannt, *a* und *C* unbekannt, ſo erfordert das Gleichgewicht, daſs die Reſultirende von *a* und *C* der bekannten Reſultirenden von *2* und *B* der Gröſse nach genau gleich iſt. Die bekannte Reſultirende von *2* und *B* iſt aber die Verbindungslinie $\eta\,\gamma$ im Kraftpolygon, und es iſt dieſelbe im entgegengeſetzten Sinne genommen ohne Schwierigkeit in die beiden Seitenkräfte *C* und *a* zu zerlegen, indem durch den einen Endpunkt, etwa γ, eine Parallele zu *C*, durch den anderen Endpunkt, etwa η, eine Parallele zu *a* gezogen wird. Der Schnittpunkt ϑ ergiebt $\gamma\,\vartheta = C$ und $\vartheta\,\eta = a$. Alsdann iſt $\beta\,\gamma\,\vartheta\,\eta$ das kleine Kraftpolygon für Punkt *II*.

Fig. 177.



Man muſs es demnach bei der Conſtruction der kleinen Kraftpolygone ſo einrichten, daſs ſtets nur 2 Unbekannte da ſind. Zu dem Zwecke beginnt man mit demjenigen Knotenpunkte, in welchem ſich nur 2 Stäbe ſchneiden, hier alſo etwa mit *I* (Fig. 176). Die äuſsere Kraft iſt bekannt; unbekannt ſind demnach nur *A* und *B* und nach Obigem leicht zu ermitteln. Man geht nun zu einem Knotenpunkt über, von welchem man wiederum alle Kräfte mit Ausnahme von zweien kennt, hier zu *II*. Bekannt ſind hier *2* und *B*, unbekannt *C* und *a*, demnach leicht ermittelt. So ſchreitet man weiter. Ein Knotenpunkt, in welchem ſich nur 2 Stäbe ſchneiden, iſt bei den Gitterträgern ſtets vorhanden.

Damit nun jede äuſsere Kraft und jede Stabſpannung nur einmal in dem entſtehenden Kraftzuge — dem Kräfteplan — vorkomme, iſt folgende Regel zu befolgen. Man vereine ſämmtliche äuſseren Kräfte zu einem geſchloſſenen Kraftpolygon, indem man ſie in der Folge der Knotenpunkte oder, wie man ſagt, in cyclifcher Reihenfolge an einander legt, und ziehe nun durch die Eckpunkte diefes Kraftpolygons Parallelen zu den Randftäben derart, dafs die Parallele zu einem Randftabe, etwa zu A, durch denjenigen Eckpunkt des grofsen Kraftpolygons geht, welcher zwifchen den beiden äufseren Kräften liegt, zwifchen denen der betreffende Randftab im Syftem fich befindet. Der Randftab A liegt im Syftem zwifchen den äufseren Kräften *1* und *5*; die Parallele zu A wird alfo durch den Punkt α zwifchen *1* und *5* gezogen; eben fo die Parallele zum Randftab B durch β zwifchen *1* und *2* etc. Unter Benutzung der hier gezogenen Parallelen conftruire man nun, wie oben angegeben, die kleinen Kraftpolygone, fo erhält man einen Linienzug zwifchen den Randftäben, in welchem jede einzelne Linie eine Zwifchenftabfpannung darftellt und in welchem jede Zwifchenftabfpannung nur einmal vorkommt. Die auf den Parallelen zu den Randftäben abgefchnittenen Längen geben die Spannungen der Randftäbe an.

Der Sinn der Stabfpannungen wird hier genau in derfelben Weife aus dem Kraftpolygon für einen Knotenpunkt ermittelt, wie im vorhergehenden Artikel angegeben ift.

2) Parallelträger mit Netzwerk.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Um diefe Spannungen für eine beliebige Belaftung zu ermitteln, nennen wir die Mittelkraft aller auf das Fragment links vom Schnitte II (Fig. 178) wirkenden Kräfte Q; da nun für irgend einen Stab CE der oberen Gurtung F der Momenten- oder conjugirte Punkt ift, fo ift das Moment der äufseren Kräfte in Bezug auf diefen Punkt $M = Q\eta$. Daraus folgt als Bedingungsgleichung: 383. Berechnung der Gurtungs-fpannungen.

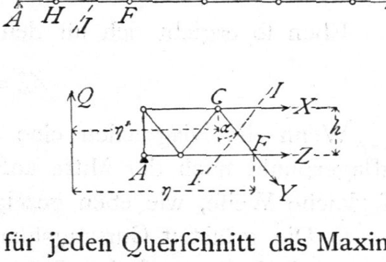
$$0 = M + Xh, \quad \text{woraus} \quad X = -\frac{M}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 194.$$

In gleicher Weife ergiebt fich für C als Momentenpunkt, wenn M_1 das Moment von Q in Bezug auf C ift,

$$0 = M_1 - Zh, \quad \text{woraus} \quad Z = \frac{M_1}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 195.$$

Da bei einem Träger auf zwei Stützen M ftets die angegebene Drehrichtung hat (ftets pofitiv ift, vergl. Art. 358, S. 317), fo folgt aus den Gleichungen 194. und 195.: Bei Trägern auf zwei Stützen werden die oberen Gurtungsftäbe ftets gedrückt, die unteren Gurtungsftäbe ftets gezogen. Ferner: X_{max} und Z_{max} wird bei derfelben Belaftung wie M_{max} ftattfinden, d. h. in jedem Gurtungsftabe findet Maximalbeanfpruchung bei derjenigen Belaftung ftatt, bei welcher das Moment für den dem Stabe conjugirten Punkt fein Maximum erreicht. Wird gleichmäfsig vertheilte Belaftung zu Grunde gelegt, fo findet für jeden Querfchnitt das Maximalmoment bei voller Belaftung ftatt; fämmtliche Gurtungsftäbe werden demnach bei totaler Belaftung am meiften beanfprucht.

Fig. 178.



a) Das Eigengewicht der Conftruction kann als eine gleichmäfsig über die Länge des Trägers vertheilte Belaftung angefehen werden. Wir bezeichnen es mit g pro Längeneinheit und machen die vereinfachende Annahme, dafs alle Belaftungen durch Eigengewicht nur in der einen Gurtung angreifen, welche Annahme für die Hochbau-Praxis ftets ausreichen wird. Die Entfernung der Knotenpunkte fei a (Fig. 179), die Felderzahl des Trägers n, mithin $l = na$. Jeder Mittenknotenpunkt