Bei drei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1, l_2 und l_1 ergeben fich folgende Refultate:

$$M_0 = M_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4(3 l_2 + 2 l_1)} \quad \ldots \ldots \quad 191.$$

$$D_0 = D_3 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4 l_1 (3 l_2 + 2 l_1)}, \quad D_1 = D_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4 l_1 (3 l_2 + 2 l_1)} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2} \quad 192.$$

b) Innere Kräfte der Gitterträger.

373. Allgemeines.

Die Balkenträger find entweder vollwandige Träger oder gegliederte Träger, letztere gewöhnlich Gitterträger genannt. Bei den erfteren bildet der ganze Querfchnitt eine zufammenhängende Fläche; bei den letzteren befteht derfelbe aus zwei getrennten Theilen, den fog. Gurtungsquerfchnitten; beide Gurtungen find durch ein Syftem von Stäben mit einander verbunden.

Die Ermittelung der Spannungen, welche in den vollwandigen Trägern, wozu die hölzernen und gufseifernen Balken, die Walzbalken und Blechträger gehören, durch die äufseren Kräfte erzeugt werden, ift bereits im 4. Kapitel des 1. Abfchnittes vorgeführt worden; dafelbft ift auch die Querfchnittsbeftimmung für diefe Balken gezeigt. Im vorliegenden Kapitel follen defshalb nur die in den Gitterträgern entftehenden inneren Kräfte entwickelt werden.

Gitterträger find aus einzelnen Stäben combinirte Träger. Die Kreuzungspunkte der einzelnen Stäbe heifsen Knotenpunkte. Jeder Gitterträger hat eine obere Gurtung und eine untere Gurtung. Zur Verbindung beider dient das zwischen ihnen angeordnete Gitterwerk.

374. Claffification der Gitterträger.

Nach der Form der Gurtung unterfcheidet man:

1) Parallelträger, d. h. Träger, deren beide Gurtungen parallel (gewöhnlich auch horizontal) find.

2) Träger mit einer krummen und einer geraden Gurtung oder mit zwei krummen Gurtungen. Die erfteren nennt man, wenn die Endhöhe des Trägers gleich Null ift und die obere Gurtung krumm, die untere Gurtung gerade ift, Bogenfehnenträger; wenn die untere Gurtung gekrümmt, die obere Gurtung gerade ift, Fifchbauchträger. Je nach der Curve der Krümmung unterfcheidet man Parabelträger, Hyperbel- (Schwedler-) Träger, Ellipfenträger etc.

3) Dreieck- und Trapezträger, d. h. Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bezw. ein Paralleltrapez bilden.

Nach der Anordnung des Gitterwerkes werden unterfchieden:

1) Träger mit einfachem Gitterwerk oder Träger, bei denen nur zwei Lagen von Gitterftäben vorhanden find;

2) Träger mit combinirtem Gitterwerk, falls drei Lagen von Gitterftäben vorhanden find.

Wir werden uns mit den letzteren nur in fo fern befchäftigen, als man die Träger mit Gegendiagonalen zu denfelben rechnen kann.

Eintheiliges Gitterwerk ift folches, bei welchem fich jeder Gitterftab nur in den Gurtungen mit den anderen Gitterftäben kreuzt; mehrtheiliges Gitterwerk ift folches, bei welchem jeder Gitterftab fich aufser in den Gurtungen noch ein oder mehrere Male mit anderen Gitterftäben kreuzt.

Für die Zwecke des Hochbaues ift wohl immer das eintheilige Gitterwerk welches eine exacte Berechnung zuläfst, ausreichend, fo dafs wir hier nur Träger mit eintheiligem Gitterwerk befprechen werden.

Die Gitterftäbe find entweder geneigt oder vertical; fie werden in der Folge als Diagonalen und Verticalen bezeichnet werden.

Gitterwerk mit zwei Lagen Diagonalen nennen wir Netzwerk, Gitterwerk mit einer Lage Diagonalen und einer Lage Verticalen Fachwerk.

Die Dachbinder find in den allermeiften Fällen Gitterträger, fo dafs die hier zunächft zu entwickelnden allgemeinen Regeln und Gefetze auch für die im nächften Kapitel zu behandelnden Dachbinder giltig find.

Bei den nachftehenden Unterfuchungen werden folgende Annahmen gemacht: 375. Voraus-fetzungen.

1) die Belaftungen finden nur in den Knotenpunkten ftatt, und

2) die Stäbe find in den Knotenpunkten fo mit einander verbunden, dafs fie fich um diefelben frei drehen können.

1) Methoden für die Beftimmung der Stabfpannungen.

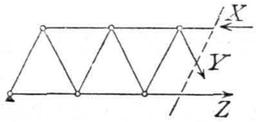
Die Ermittelung der inneren Kräfte oder Spannungen erfolgt nach dem allgemeinen Verfahren, welches in Art. 254, S. 232 angegeben worden ift. Der Körper wird an derjenigen Stelle durchfchnitten gedacht, an welcher man die inneren Kräfte, hier die Stabfpannungen, kennen lernen will; an den Schnittftellen werden die inneren Kräfte angebracht und auf das Fragment die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet. Da hier die Stäbe, wie angenommen wurde, um die Knotenpunkte frei drehbar find, fo mufs jede Stabfpannung mit der Richtung des betreffenden Stabes zufammenfallen. Es ergiebt fich fonach folgende Regel: 376. Verfahren im Allgemeinen.

Man denke den Träger fo durchfchnitten, dafs die Stäbe, deren Spannung man fucht, durch den Schnitt getroffen werden, bringe die mit den Stabrichtungen zufammenfallenden Stabfpannungen als vorläufig unbekannte Kräfte an (Fig. 172) und ftelle für das Fragment die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

Es ergiebt fich leicht, dafs die Aufgabe auf dem angegebenen Wege nur dann lösbar ift, wenn ftets nur drei Unbekannte vorhanden find, d. h., wenn für jeden Stab ein Schnitt möglich ift, bei welchem aufser demfelben nur noch zwei andere Stäbe gefchnitten werden; anderenfalls erhält man ein ftatifch unbeftimmtes Syftem.

Die Stäbe werden gezogen oder gedrückt; im erften Falle wirkt die Spannung vom Knotenpunkte ab (Y und Z in Fig. 172); im zweiten Falle wirkt fie nach dem Knotenpunkt hin (X in Fig. 172). Da man beim Beginne der Berechnung vielfach noch nicht den Sinn der Beanfpruchung kennt, fo werden wir zunächft ftets alle Spannungen als Zugfpannungen, d. h. vom Knotenpunkte ab gerichtet, einführen; die Rechnung ergiebt entweder einen pofitiven oder negativen Werth. Das erftere Refultat bedeutet, dafs die angenommene Pfeilrichtung die richtige war, d. h. dafs im Stabe Zug herrfcht. Das zweite Refultat bedeutet, dafs die wirkliche Spannung der angenommenen gerade entgegengefetzt (mit cos 180° zu multipliciren) ift, d. h. im Stabe Druck herrfcht.

Fig. 172.



α) Analytifche Beftimmung der Stabfpannungen. Diefelbe kann in zweifacher Weife gefchehen, entweder durch Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen oder nach der fog. Momentenmethode. 377. Analytifches Verfahren.

378. Gleichgewichtsbedingungen.

α) Die Aufſtellung der Gleichgewichtsbedingungen für das Fragment (Fig. 173), welches, wie im vorigen Artikel angegeben, behandelt iſt, ergiebt drei Gleichungen, welche nach Art. 256, S. 233 lauten:

$$\left.\begin{aligned} X \cos\sigma + Y \sin\tau + Z = 0; \quad D_0 - P_1 - P_2 + X \sin\sigma - Y \cos\tau = 0 \\ D_0 \,.\, 2a - P_1 a - Zz = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad 193.$$

Als Drehpunkt für die dritte Gleichung iſt der Punkt C gewählt; alsdann haben X, Y und P_2 kein ſtatiſches Moment, weil ſie für dieſen Drehpunkt keinen Hebelsarm haben.

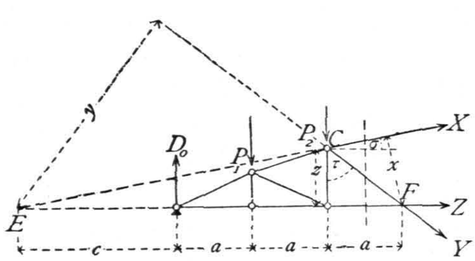
Die angegebene Methode führt ſtets, wenn nur 3 Unbekannte, alſo 3 geſchnittene Stäbe vorhanden ſind, zum Ziele; ſie hat den Nachtheil, daſs meiſtens 3 Gleichungen gelöst werden müſſen, ſelbſt wenn man nur eine Spannung kennen lernen will.

379. *Ritter*'ſche Methode.

β) Das Charakteriſtiſche der von *Ritter* angegebenen Momenten-Methode iſt, daſs man für jede Spannung nur eine Gleichung erhält; das Mittel dazu bietet die dritte Gleichgewichtsbedingung des vorhergehenden Artikels. Wird der Momentenpunkt ſo gewählt, daſs zwei von den drei Unbekannten das Moment Null haben, ſo bleibt in der Gleichung nur eine Unbekannte. Das ſtatiſche Moment jeder der beiden Kräfte iſt aber gleich Null für den Schnittpunkt beider Kraftrichtungen, weil für dieſen Punkt jede der beiden Kräfte den Hebelsarm Null hat. Die Methode iſt demnach folgende:

Man lege durch den Träger einen Schnitt, ſo daſs nur 3 Stäbe mit unbekannten Spannungen geſchnitten werden, bringe dieſe Spannungen und alle am Fragment wirkenden äuſseren Kräfte an, ſetze die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente dieſer Kräfte gleich Null und wähle dabei als Momentenpunkt für die Ermittelung der Spannung eines Stabes ſtets den Schnittpunkt der beiden mit durchſchnittenen Stäbe.

Fig. 173.



Um in Fig. 173 die Spannung X zu finden, wählt man F als Momentenpunkt; die Gleichung der ſtatiſchen Momente heiſst dann

$$X x + D_0 \,.\, 3a - P_1 \,.\, 2a - P_2 a = 0,$$

woraus ſich die einzige Unbekannte X leicht finden läſſt. Für C als Momentenpunkt ergiebt ſich

$$D_0 \,.\, 2a - P_1 a - Zz = 0,$$

woraus Z zu berechnen iſt, und für E als Momentenpunkt

$$Yy - D_0 c + P_1 (c + a) + P_2 (c + 2a) = 0,$$

woraus Y zu ermitteln iſt.

Die Länge der Hebelsarme ergiebt ſich meiſtens genügend genau aus der Zeichnung, kann aber auch leicht rechneriſch ermittelt werden.

Wir werden den für einen Stab nach dieſer Methode ſich ergebenden Momentenpunkt den dieſem Stabe conjugirten Punkt nennen.

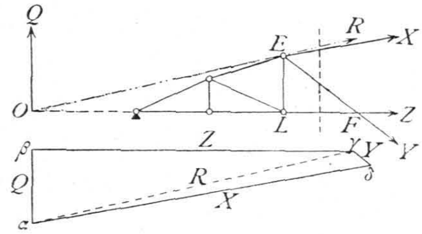
380. Graphiſches Verfahren.

β) Graphiſche Beſtimmung der Stabſpannungen. Auch das graphiſche Verfahren kann nach zwei verſchiedenen Methoden durchgeführt werden, entweder nach der Schnittmethode oder nach der Polygonalmethode.

a) Die Schnittmethode wurde von *Culmann* angegeben. 381. *Culmann*'ſche Methode.

Werden die ſämmtlichen am Fragment wirkenden äuſseren Kräfte zu einer Reſultirenden Q (Fig. 174) zuſammengefaſſt, ſo wirken auf daſſelbe 4 Kräfte, nämlich Q und die 3 unbekannten Spannungen. Für dieſe 4 Kräfte ergiebt ſich ein geſchloſſenes Kraftpolygon. Von einer dieſer Kräfte, nämlich von Q, iſt Gröſse, Richtung und Lage bekannt; von den drei anderen wohl Richtung und Lage, nicht aber die Gröſse. Erſetzt man 2 der unbekannten Kräfte, etwa X und Y, durch ihre Mittelkraft R, ſo bleiben nur noch die 3 Kräfte Q, Z und R, welche ſich nach Art. 258, S. 234 in einem Punkte ſchneiden müſſen. R muſs alſo durch den Schnittpunkt O von Q und Z gehen. Da R auſserdem durch den Schnittpunkt E von X und Y geht, ſo ſind 2 Punkte der Richtungslinie von R, es iſt alſo auch dieſe Richtung ſelbſt bekannt. R hat die Richtung OE. Im Punkte O halten ſich demnach 3 Kräfte Q, R und Z im Gleichgewichte; das für dieſelben conſtruirte Kraftpolygon iſt eine geſchloſſene Figur, hier ein Dreieck. Iſt $Q = \alpha\beta$, ſo ziehe man durch β eine Parallele zur Richtung von Z, durch α eine ſolche zur Richtung von R; der Schnittpunkt γ beider Linien ergiebt die beiden Kräfte $R = \gamma\alpha$ und $Z = \beta\gamma$.

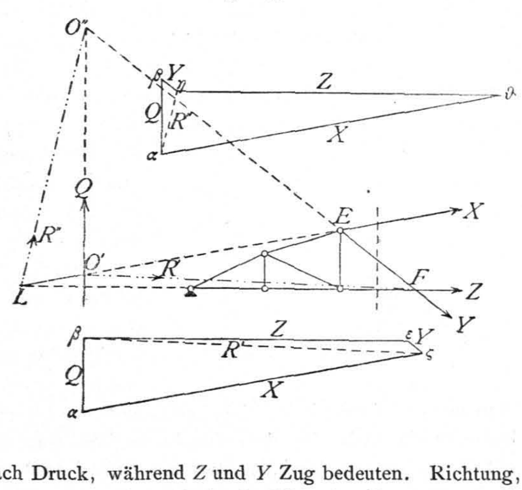
Fig. 174.



In derſelben Weiſe kann nun R in ſeine beiden Seitenkräfte X und Y zerlegt werden, indem man durch die beiden Endpunkte von R Parallelen zu den Richtungen von bezw. X und Y zieht. Es ergiebt ſich $\gamma\delta = Y$ und $\delta\alpha = X$.

Es iſt für das Endreſultat gleichgiltig, welche zwei von den unbekannten Spannungen man zu einer Mittelkraft vereinigt. Man kann auch Y und Z (Fig. 175) durch ihre Mittelkraft R' erſetzen, welche dann durch F und den Schnittpunkt O' der Kraft X mit Q geht. Als Kraftpolygon erhält man $\alpha\beta\varepsilon\zeta$. Eben ſo kann man auch X und Z zu einer Reſultirenden vereinen, und erhält die ebenfalls in Fig. 175 gezeichnete Conſtruction.

Fig. 175.



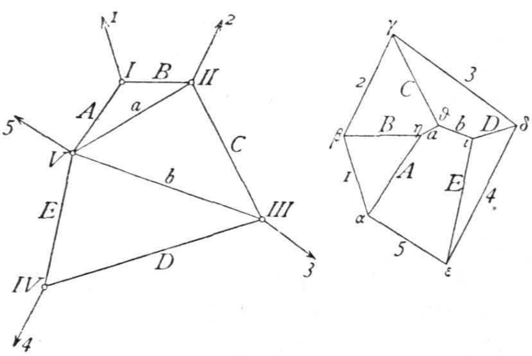
Die angegebene Conſtruction giebt zugleich Aufſchluſs darüber, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt werden. Da die am Fragment wirkenden Kräfte im Gleichgewicht ſind, ſo haben ſie nach Art. 264, S. 237 denſelben Umfahrungsſinn, und es iſt demnach der Sinn aller im Kraftpolygon vorkommenden Kräfte bekannt, wenn der Sinn einer derſelben bekannt iſt. Hier iſt ſtets der Sinn von Q bekannt; denn dieſes iſt die Transverſalkraft für den bezüglichen Querſchnitt. Q hat den Sinn von α nach β; alſo iſt in Fig. 174 Z von β nach γ, d. h. vom Knotenpunkt L ab gerichtet, Y von γ nach δ, und X von δ nach α gerichtet. X wirkt alſo nach dem Knotenpunkt E hin, iſt demnach Druck, während Z und Y Zug bedeuten. Richtung, Gröſse und Lage der Transverſalkraft Q für eine gegebene Belaſtung ſind mit Hilfe des Kraft- und Seilpolygons leicht beſtimmbar. (Siehe Art. 360, S. 322.)

b) Die Polygonalmethode iſt von *Cremona* angegeben worden. 382. *Cremona*'ſche Methode.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Randſtäbe ſeien Stäbe, welche zwei auf einander folgende äuſsere Knotenpunkte mit einander verbinden, alſo $I\,II$, $II\,III$ .... in Fig. 176; Zwiſchenſtäbe ſeien Stäbe, welche zwei nicht auf einander folgende äuſsere Knotenpunkte verbinden, alſo *II V*, *III V* .... in Fig. 176.

Da alle auf das Syſtem wirkenden äuſseren Kräfte im Gleichgewichte ſind, ſo iſt für dieſelben ein geſchloſſenes Kraftpolygon möglich, welches, wenn alle äuſseren Kräfte nach Gröſse und Richtung gegeben ſind, leicht conſtruirt werden kann. Auſserdem ſind an jedem Knotenpunkte die an demſelben wirkenden Kräfte für ſich im Gleichgewicht; es iſt alſo für jeden dieſer Knotenpunkte ein kleines ſecundäres, ſich ſchlieſsendes Kraftpolygon möglich. An jedem Knotenpunkte wirken: eine äuſsere Kraft, die im ſpeciellen Falle Null ſein kann, und die Spannungen der Stäbe, welche ſich in ihm ſchneiden, alſo im Knotenpunkte *II* die Kräfte *2*, *B*, *C*, *a*.

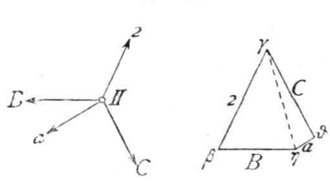
Fig. 176.



In den meiſten der kleinen Kraftpolygone kommt nun je eine äuſsere Kraft vor, welche bereits im groſsen Hauptpolygon der äuſseren Kräfte enthalten iſt; es wird alſo offenbar möglich ſein, jedes kleine Kraftpolygon ſo an das groſse zu legen, daſs die beiden gemeinſame äuſsere Kraft durch dieſelbe Gerade dargeſtellt wird. Da ferner jeder Stab zu zwei Knotenpunkten gehört, ſo kommt jede Stabſpannung in zwei ſecundären Kraftpolygonen vor. Es wird nun durch rationelle Anordnung möglich, die kleinen Kraftpolygone ſo in das groſse einzuſchachteln, daſs nicht nur jede äuſsere Kraft, ſondern auch jede Stabſpannung nur einmal im Kräftezuge vorkommt, d. h. auch die kleinen Kraftpolygone hängen dann ſo zuſammen, daſs die zweien gemeinſame Stabſpannung durch dieſelbe Gerade dargeſtellt wird.

Für die Conſtruction der kleinen Kraftpolygone iſt nun Folgendes zu beachten. Wenn, wie hier, die Richtung ſämmtlicher Kräfte bekannt iſt und das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte ſich ſchlieſst, ſo iſt die Conſtruction deſſelben ſtets möglich, wenn am Knotenpunkte nur 2 unbekannte Kräfte vorhanden ſind. Denn ſeien etwa in Fig. 177 *B* und *2* bekannt, *a* und *C* unbekannt, ſo erfordert das Gleichgewicht, daſs die Reſultirende von *a* und *C* der bekannten Reſultirenden von *2* und *B* der Gröſse nach genau gleich iſt. Die bekannte Reſultirende von *2* und *B* iſt aber die Verbindungslinie $\eta\,\gamma$ im Kraftpolygon, und es iſt dieſelbe im entgegengeſetzten Sinne genommen ohne Schwierigkeit in die beiden Seitenkräfte *C* und *a* zu zerlegen, indem durch den einen Endpunkt, etwa γ, eine Parallele zu *C*, durch den anderen Endpunkt, etwa η, eine Parallele zu *a* gezogen wird. Der Schnittpunkt ϑ ergiebt $\gamma\,\vartheta = C$ und $\vartheta\,\eta = a$. Alsdann iſt $\beta\,\gamma\,\vartheta\,\eta$ das kleine Kraftpolygon für Punkt *II*.

Fig. 177.



Man muſs es demnach bei der Conſtruction der kleinen Kraftpolygone ſo einrichten, daſs ſtets nur 2 Unbekannte da ſind. Zu dem Zwecke beginnt man mit demjenigen Knotenpunkte, in welchem ſich nur 2 Stäbe ſchneiden, hier alſo etwa mit *I* (Fig. 176). Die äuſsere Kraft iſt bekannt; unbekannt ſind demnach nur *A* und *B* und nach Obigem leicht zu ermitteln. Man geht nun zu einem Knotenpunkt über, von welchem man wiederum alle Kräfte mit Ausnahme von zweien kennt, hier zu *II*. Bekannt ſind hier *2* und *B*, unbekannt *C* und *a*, demnach leicht ermittelt. So ſchreitet man weiter. Ein Knotenpunkt, in welchem ſich nur 2 Stäbe ſchneiden, iſt bei den Gitterträgern ſtets vorhanden.

Damit nun jede äuſsere Kraft und jede Stabſpannung nur einmal in dem entſtehenden Kraftzuge — dem Kräfteplan — vorkomme, iſt folgende Regel zu befolgen. Man vereine ſämmtliche äuſseren Kräfte zu einem geſchloſſenen Kraftpolygon, indem man ſie in der Folge der Knotenpunkte oder, wie man ſagt, in cyclifcher Reihenfolge an einander legt, und ziehe nun durch die Eckpunkte diefes Kraftpolygons Parallelen zu den Randftäben derart, dafs die Parallele zu einem Randftabe, etwa zu A, durch denjenigen Eckpunkt des grofsen Kraftpolygons geht, welcher zwifchen den beiden äufseren Kräften liegt, zwifchen denen der betreffende Randftab im Syftem fich befindet. Der Randftab A liegt im Syftem zwifchen den äufseren Kräften *1* und *5*; die Parallele zu A wird alfo durch den Punkt α zwifchen *1* und *5* gezogen; eben fo die Parallele zum Randftab B durch β zwifchen *1* und *2* etc. Unter Benutzung der hier gezogenen Parallelen conftruire man nun, wie oben angegeben, die kleinen Kraftpolygone, fo erhält man einen Linienzug zwifchen den Randftäben, in welchem jede einzelne Linie eine Zwifchenftabfpannung darftellt und in welchem jede Zwifchenftabfpannung nur einmal vorkommt. Die auf den Parallelen zu den Randftäben abgefchnittenen Längen geben die Spannungen der Randftäbe an.

Der Sinn der Stabfpannungen wird hier genau in derfelben Weife aus dem Kraftpolygon für einen Knotenpunkt ermittelt, wie im vorhergehenden Artikel angegeben ift.

2) Parallelträger mit Netzwerk.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Um diefe Spannungen für eine beliebige Belaftung zu ermitteln, nennen wir die Mittelkraft aller auf das Fragment links vom Schnitte II (Fig. 178) wirkenden Kräfte Q; da nun für irgend einen Stab CE der oberen Gurtung F der Momenten- oder conjugirte Punkt ift, fo ift das Moment der äufseren Kräfte in Bezug auf diefen Punkt $M = Q\eta$. Daraus folgt als Bedingungsgleichung: 383. Berechnung der Gurtungs-fpannungen.

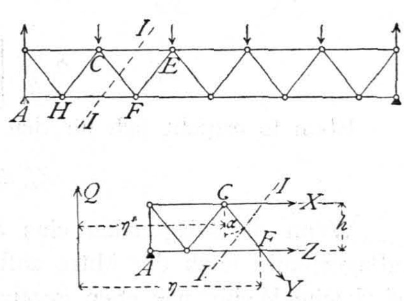
$$0 = M + Xh, \quad \text{woraus} \quad X = -\frac{M}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 194.$$

In gleicher Weife ergiebt fich für C als Momentenpunkt, wenn M_1 das Moment von Q in Bezug auf C ift,

$$0 = M_1 - Zh, \quad \text{woraus} \quad Z = \frac{M_1}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 195.$$

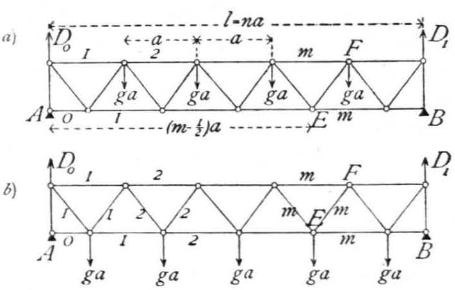
Da bei einem Träger auf zwei Stützen M ftets die angegebene Drehrichtung hat (ftets pofitiv ift, vergl. Art. 358, S. 317), fo folgt aus den Gleichungen 194. und 195: Bei Trägern auf zwei Stützen werden die oberen Gurtungsftäbe ftets gedrückt, die unteren Gurtungsftäbe ftets gezogen. Ferner: X_{max} und Z_{max} wird bei derfelben Belaftung wie M_{max} ftattfinden, d. h. in jedem Gurtungsftabe findet Maximalbeanfpruchung bei derjenigen Belaftung ftatt, bei welcher das Moment für den dem Stabe conjugirten Punkt fein Maximum erreicht. Wird gleichmäfsig vertheilte Belaftung zu Grunde gelegt, fo findet für jeden Querfchnitt das Maximalmoment bei voller Belaftung ftatt; fämmtliche Gurtungsftäbe werden demnach bei totaler Belaftung am meiften beanfprucht.

Fig. 178.



α) Das Eigengewicht der Conftruction kann als eine gleichmäfsig über die Länge des Trägers vertheilte Belaftung angefehen werden. Wir bezeichnen es mit g pro Längeneinheit und machen die vereinfachende Annahme, dafs alle Belaftungen durch Eigengewicht nur in der einen Gurtung angreifen, welche Annahme für die Hochbau-Praxis ftets ausreichen wird. Die Entfernung der Knotenpunkte fei a (Fig. 179), die Felderzahl des Trägers n, mithin $l = na$. Jeder Mittenknotenpunkt

Fig. 179.



ist mit $g a$ belastet; die Belastungen der Knotenpunkte über den Auflagern berücksichtigen wir nicht, weil diese direct vom Auflager aufgenommen werden.

Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 179 *a*), so ist bei der angenommenen Diagonalenanordnung die Auflager-Reaction $D_0 = D_1 = (n-1)\frac{g a}{2}$. Für den m-ten Stab der oberen Gurtung ist E der conjugirte Punkt, und

$$M = D_0\left(m - \frac{1}{2}\right) a - (m-1) g a \left(\frac{m-2}{2} a + \frac{a}{2}\right),$$

$$M = \frac{g a^2}{2}\left[(n+1)\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2\right];$$

$$X_m^g = -\frac{g a^2}{2 h}\left[(n+1)\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; 196.$$

Für den m-ten Stab der unteren Gurtung ist F der conjugirte Punkt, und

$$M_1 = D_0\, m a - (m-1) g a \frac{m a}{2} = \frac{g a^2}{2} m (n-m);$$

$$Z_m^g = \frac{g a^2}{2 h} m (n-m) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 197.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an, so ist bei der in Fig. 179 *b* gezeichneten Diagonalenanordnung die Auflager-Reaction $D_0 = D_1 = \frac{n g a}{2}$. Für den m-ten Stab der oberen Gurtung ist wiederum E der conjugirte Punkt, und

$$M = D_0\left(m - \frac{1}{2}\right) a - (m-1) g a \frac{m a}{2} = \frac{g a^2}{2}\left[m (n - m + 1) - \frac{n}{2}\right];$$

$$X_m^g = -\frac{g a^2}{2 h}\left[m (n - m + 1) - \frac{n}{2}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 198.$$

Eben so ergiebt sich für den m-ten Stab der unteren Gurtung

$$Z_m^g = \frac{g a^2}{2 h} m (n-m) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 199.$$

Wenn die Diagonalen eine andere Richtung haben, so dass die erste vom Auflagerpunkt nach der Mitte ansteigt, so ergeben sich etwas andere Formeln, die auf gleiche Weise, wie eben gezeigt, zu ermitteln sind.

b) Die grössten Gurtungsspannungen in Folge mobiler gleichmässig vertheilter Belastung finden statt, wenn der ganze Träger belastet ist. Nennen wir die gleichmässig vertheilte mobile Belastung pro Längeneinheit p, so ergeben sich offenbar für diese Belastung, die pro Knotenpunkt gleich $p a$ ist, genau dieselben Formeln, wie für das Eigengewicht, wobei nur g durch p zu ersetzen ist. Wir erhalten also für an der oberen Gurtung angreifende Lasten (Fig. 179 *a*)

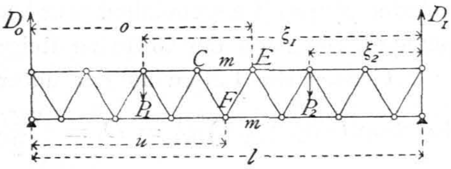
$$X_m^p = -\frac{p a^2}{2 h}\left[(n+1)\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2\right] \text{ und } Z_m^p = \frac{p a^2}{2 h} m (n-m), \; . \quad 200.$$

für an der unteren Gurtung angreifende Lasten (Fig. 179 *b*)

$$X_m^p = -\frac{p a^2}{2h}\left[m(n-m+1)-\frac{n}{2}\right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p a^2}{2h}\, m(n-m) \quad . \quad . \quad 201.$$

c) Findet eine Belaftung des Trägers durch Einzellaften P_1, P_2, P_3, (Fig. 180) ftatt, fo ift die Auflager-Reaction $D_0 = \frac{P_1 \xi_1}{l} + \frac{P_2 \xi_2}{l} = \Sigma\left(\frac{P\xi}{l}\right)$. Für den m-ten Stab der oberen, bezw. der unteren Gurtung betragen die Spannungen

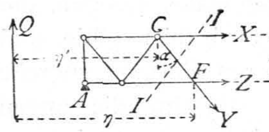
Fig. 180.



$$X_m = -\frac{D_0 u - P_1 \frac{3}{2} a}{h} \quad \text{und} \quad Z_m = \frac{D_0 o - P_1 \cdot 2a}{h} \quad . \quad . \quad 202.$$

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterftäben. Es fei für eine beliebige Belaftung die Mittelkraft aller auf das Fragment links vom Schnitt II (Fig. 181) wirkenden Kräfte Q; alsdann ift für eine nach rechts fallende Diagonale 384. Berechnung d. Gitterftabs-fpannungen.

Fig. 181.



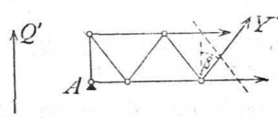
$$0 = Q - Y \cos \alpha, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \quad . \quad 203.$$

und für eine nach rechts fteigende Diagonale (Fig. 182)

$$0 = Q' + Y' \cos \beta, \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{Q'}{\cos \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 204.$$

α) Das Eigengewicht erzeugt, wenn die Laften an der oberen Gurtung angreifen, die Auflager-Reaction (Fig. 179 a) $D_0 = D_1 = (n-1)\frac{ga}{2}$. Für den m-ten nach rechts fallenden Stab ift

Fig. 182.



$$Q_m = (n-1)\frac{ga}{2} - (m-1)\, ga = \frac{ga}{2}(n-2m+1),$$

fonach

$$Y_m^g = \frac{ga}{2\cos\alpha}(n-2m+1); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 205$$

für den m-ten nach rechts fteigenden Stab ift

$$Q'_m = \frac{ga}{2}(n-2m+1), \quad \text{daher} \quad Y'^g_m = -\frac{ga}{2\cos\beta}(n-2m+1) \quad . \quad 206.$$

Y_m^g ift pofitiv, wenn der Klammerfactor $n - 2m + 1 > 0$ ift, d. h. wenn $m < \frac{n+1}{2}$; negativ, wenn $m > \frac{n+1}{2}$ ift. Bei geradem n ift für alle Felder links von der Mitte $m < \frac{n+1}{2}$, für alle Felder rechts von der Mitte $m > \frac{n+1}{2}$. Mithin werden alle nach rechts fallenden Diagonalen links von der Mitte gezogen, rechts von der Mitte gedrückt. Y'^g_m ift negativ, d. h. die m-te rechts fteigende Diagonale wird gedrückt, wenn der Klammerfactor pofitiv ift; Y'^g_m ift pofitiv, d. h. die m-te rechts fteigende Diagonale wird gezogen, wenn der Klammerfactor negativ ift. Mithin werden die nach rechts fteigenden Diagonalen links von der Mitte gedrückt, rechts von der Mitte gezogen.

Bei ungerader Felderzahl ift für alle Felder links vom Mittelfelde $m < \frac{n+1}{2}$, d. h. Y^g Zug und Y'^g Druck. Für alle Felder rechts vom Mittelfelde ift $m > \frac{n+1}{2}$, mithin Y^g Druck und Y'^g

Zug. Für das Mittelfeld ift $m = \frac{n+1}{2}$, d. h. der Klammerfactor gleich Null; demnach ift in den zum Mittelfelde gehörigen Diagonalen die durch das Eigengewicht erzeugte Spannung gleich Null.

Allgemein ergiebt fich: Bei gleichmäfsig über den Träger vertheilter Belaftung g (oder p) pro Längeneinheit werden die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu fteigenden Diagonalen gedrückt.

Greifen die Laften an der unteren Gurtung an, fo ergiebt fich die Auflager-Reaction (Fig. 179 *b*) $D_0 = D_1 = \frac{n g a}{2}$, und für die m-te rechts fallende Diagonale

$$Y = \frac{g\,a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 2), \qquad 207.$$

für die m-te rechts fteigende Diagonale

$$Y' = - \frac{g\,a}{2 \cos \beta} (n - 2m) \qquad 208.$$

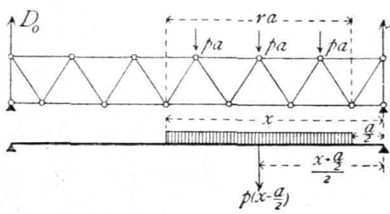
Das Gefetz, dafs bei diefer Belaftungsart die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu fteigenden Diagonalen gedrückt werden, ift auch hier giltig und ergiebt fich in derfelben Weife, wie foeben für an der oberen Gurtung angreifende Laften gezeigt wurde.

b) Um die ungünftigften Gitterftabfpannungen, welche in Folge mobiler Belaftung entftehen, zu ermitteln, erwäge man, dafs bei beliebiger Belaftung für rechts fallende Diagonalen nach Gleichung 203. $Y = \frac{Q}{\cos \alpha}$ und für rechts fteigende Diagonalen nach Gleichung 204. $Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta}$ ift. Das Maximum von Y findet demnach bei derjenigen Belaftung ftatt, bei welcher fich das Maximum der Transverfalkraft ergiebt. Nach Art. 362, S. 325 hat aber die Transverfalkraft für einen Querfchnitt ihren gröfsten pofitiven Werth, wenn der Trägertheil rechts von dem betrachteten Querfchnitte belaftet, der Trägertheil links davon unbelaftet ift, ihren gröfsten negativen Werth bei der umgekehrten Belaftung. Daraus folgt: Jede nach rechts fallende Diagonale erleidet den gröfsten Zug durch mobile Belaftung, wenn die rechts vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belaftet, die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte unbelaftet find; dagegen den gröfsten Druck, wenn die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belaftet, die übrigen unbelaftet find. Da $Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta}$, fo findet in den nach rechts fteigenden Diagonalen der gröfste Druck ftatt, wenn nur die Knotenpunkte rechts vom Schnitte, der gröfste Zug, wenn nur die Knotenpunkte links vom Schnitte belaftet find.

Allgemeiner kann die Regel wie folgt ausgefprochen werden: Jede Diagonale erleidet den gröfsten Zug, wenn nur die Knotenpunkte zwifchen ihrem Fufspunkte und demjenigen Auflager, nach welchem diefer Fufspunkt zeigt, belaftet find; jede Diagonale erleidet den gröfsten Druck, wenn nur die Knotenpunkte zwifchen ihrem Kopfpunkte und demjenigen Auflager belaftet find, nach welchem diefer Kopfpunkt hinweist. Diefer Satz gilt allgemein, ob die Laftpunkte an der oberen oder unteren Gurtung liegen.

Die pofitiven, bezw. negativen Maximalwerthe für Y und Y' ergeben fich nun in folgender Weife. Greifen die Laften an der oberen Gurtung an (Fig. 183), fo ift Q genau eben fo grofs, als wenn bei dem homogen angenommenen Träger die Einzellaften $p\,a$ je auf die Längen a gleichmäfsig vertheilt wären, d. h. als wenn die Laft p pro Längeneinheit von der Mitte des äufserften Feldes am rechten, bezw. linken Auflager bis zur Mitte desjenigen Feldes der oberen Gurtung vorgerückt ift, dem die Diagonale angehört. Denn im erften Falle ift, wenn r belaftete Knotenpunkte vorhanden find,

Fig. 183.



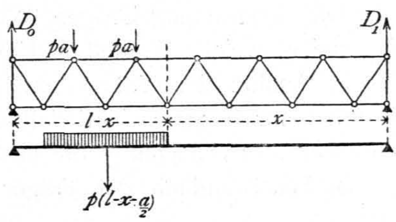
$$D_0 = \frac{r\,a\,p}{l}\left(\frac{r\,a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \frac{r\,p\,a^2}{2\,l}\,(r+1),$$

und da $x = r\,a + \frac{a}{2} = a\left(r + \frac{1}{2}\right)$, alfo $x + \frac{a}{2} = a\,(r+1)$ ift, fo wird

$$D_0 = \left(x + \frac{a}{2}\right)\frac{r\,p\,a}{2\,l} = \frac{p}{2\,l}\left(x + \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right].$$

Derfelbe Werth ergiebt fich für den homogenen Träger in Fig. 183, nämlich $D_0 = \frac{p}{2\,l}\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2}\right)$. Es gilt dies allgemein, falls die den Auflagern zunächft liegenden Knotenpunkte der mobil belafteten Gurtung um eine ganze Feldweite von den Auflagern abliegen.

Fig. 184.



Nun ift für diejenigen Diagonalen, für welche die gezeichnete Belaftung Maximalzug bezw. Maximaldruck erzeugt, $Q_{max} = D_0$, daher

$$Y_{max} = \frac{p}{2\,l\cos\alpha}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]. \qquad 209.$$

In gleicher Weife ergiebt fich nach Fig. 184

$$D_0 = \frac{p\left(l - x - \frac{a}{2}\right)}{l}\left(x + \frac{l - x - \frac{a}{2}}{2}\right) = \frac{p}{2\,l}\left[\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right];$$

$$Q_{x\,min} = \frac{p}{2\,l}\left[\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right] - p\left(l - \frac{a}{2} - x\right) = -\frac{p}{2\,l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right],$$

$$\text{und}\quad Y_{min} = -\frac{p}{2\,l\cos\alpha}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 210.$$

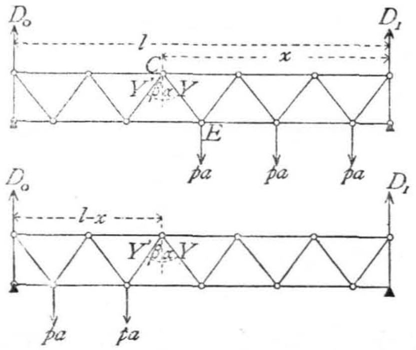
Dem entfprechend wird

$$Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos\beta} = -\frac{p}{2\,l\cos\beta}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 211.$$

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos\beta} = \frac{p}{2\,l\cos\beta}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 212.$$

Greifen die Laften an der unteren Gurtung an (Fig. 185), fo ift (wenn mit ganz geringem Fehler die Belaftung der beiden den Auflagern zunächft liegenden Knotenpunkte gleichfalls mit $p\,a$ eingeführt wird) Q_{max}, bezw. Q_{min} eben fo grofs, wie bei einem homogenen Träger, bei welchem die Laft p pro Längeneinheit vom rechten, bezw. linken Auflager aus bis zur Mitte desjenigen Feldes der unteren

Fig. 185.



Gurtung vorgerückt ift, welchem die Diagonale angehört. Der Beweis ift in gleicher Weife, wie oben, zu führen und gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächft liegenden Knotenpunkte der mobil belafteten Gurtung um eine halbe Feldweite von den Auflagern entfernt find. Demnach ift

$$Q_{max} = \frac{p\,x^2}{2\,l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = -\frac{p\,(l-x)^2}{2\,l}.$$

x bedeutet in diefen Gleichungen den Abftand der Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vom rechten Auflager, zu welchem die Diagonale gehört.

Es ergiebt fich nun

$$Y_{max} = \frac{p\,x^2}{2\,l\cos\alpha} \quad \text{und} \quad Y_{min} = -\frac{p\,(l-x)^2}{2\,l\cos\alpha}, \quad \ldots \quad 213.$$

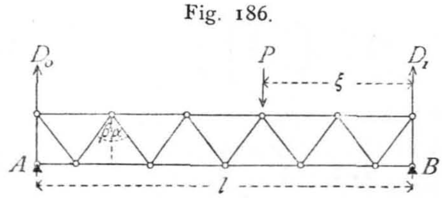
$$Y'_{min} = -\frac{p\,x^2}{2\,l\cos\beta} \quad \text{und} \quad Y'_{max} = \frac{p\,(l-x)^2}{2\,l\cos\beta} \quad \ldots \quad 214.$$

Die zufammengehörigen Werthe von Y und Y' beziehen fich auf zwei Diagonalen, welche demfelben Felde der unteren Gurtung angehören.

c) Erfährt der Träger eine totale Belaftung p pro Längeneinheit, fo find die sub a für Eigengewichtbelaftung gefundenen Werthe auch für diefen Fall giltig, wenn ftatt des dortigen g die Gröfse p eingeführt wird.

d) Wird endlich der Träger durch Einzellaften beanfprucht (Fig. 186), fo erzeugt die Laft P im Abftande ξ von B die Reaction $D_0 = \frac{P\xi}{l}$. In fämmtlichen rechts fallenden Diagonalen links vom Laftpunkt wird dann $Y = \frac{D_0}{\cos\alpha} = \frac{P\xi}{l\cos\alpha}$; in fämmtlichen rechts fteigenden Diagonalen links vom Laftpunkte ift $Y' = -\frac{P\xi}{l\cos\beta}$. Eben fo ift für alle Querfchnitte rechts vom Laftpunkte $Q = D_0 - P = -\frac{P(l-\xi)}{l}$,

Fig. 186.

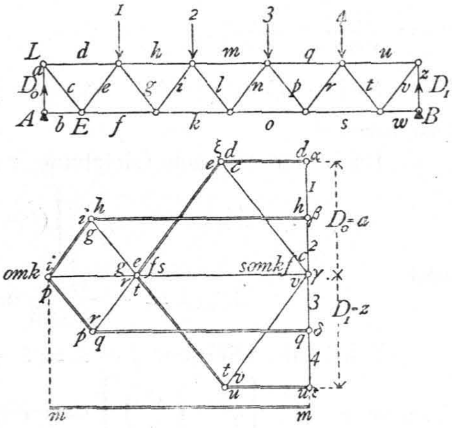


mithin für die nach rechts fallenden Diagonalen diefer Strecke $Y_1 = -\frac{P(l-\xi)}{l\cos\alpha}$, für die nach rechts fteigenden Diagonalen diefer $Y_1' = \frac{P(l-\xi)}{l\cos\beta}$. Daraus folgt die Regel: Die nach dem Laftpunkte zu fallenden Diagonalen werden gezogen, die nach demfelben fteigenden Diagonalen werden gedrückt.

385. Graphifche Ermittelung der Spannungen.

β) Graphifche Ermittelung der Spannungen. Setzen wir zunächft eine gleichmäfsig vertheilte Belaftung (Eigengewicht, bezw. totale mobile Belaftung) voraus, fo macht es für die Conftruction keinen wefentlichen Unterfchied, ob die Laften an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen. Wenn in jedem Knotenpunkte, z. B. der oberen Gurtung (Fig. 187) die Belaftung $g\,a$, bezw. $p\,a$ wirkt, fo

Fig. 187.



empfiehlt fich für die Ermittelung der Spannungen die Polygonalmethode, weil diefelbe fämmtliche Stabfpannungen in einem Linienzuge giebt.

Nachdem D_0 und D_1 auf bekannte Art gefunden find, trägt man fämmtliche äufseren Kräfte *1, 2, 3, 4,* D_1 und D_0 in cyclifcher Reihenfolge an einander. Es fei $\alpha\beta = 1$, $\beta\gamma = 2$ etc.; nun trägt man an ε (den Endpunkt von *4*) $D_1 = \varepsilon\gamma$ und $D_0 = \gamma\alpha$. Damit fchliefst fich das Kraftpolygon der äufseren Kräfte. Wir gehen nun von demjenigen Knotenpunkte, in welchem fich nur 2 Stäbe fchneiden, d. h von *A* aus. In *A* wirken D_0, *a* und *b*; die Zerlegung von D_0 in die beiden Componenten *a* und *b* ergiebt $a = D_0$ und $b = 0$. Im Knotenpunkte *L* wirken jetzt *a, c* und *d*. Bei der Zerlegung von *a* ($= \gamma\alpha$) ift zu beachten, dafs die Parallele zum Randftabe *d* durch den Punkt im Kraftpolygon gehen mufs, der zwifchen D_0 und *1* liegt, d. h. durch α. Man erhält $\alpha\xi = d$ und $\xi\gamma = c$. (Nach Art. 381, S. 341 ift *d* Druck und *c* Zug.) Geht man nun zum Knotenpunkte *E* über, fo wirken dafelbft ($b = o$) *c, e* und *f*; bekannt ift $c = \gamma\xi$. Demnach find *e* und *f* durch Zerlegung zu ermitteln, wobei die Parallelle zum Randftabe *f* durch den Punkt γ im Kraftpolygon gehen mufs, welcher zwifchen D_1 und D_0 liegt, da der Randftab *f* im Syftem fich zwifchen den Kräften D_0 und D_1 befindet. Man erhält leicht *e* und *f*. (Da *c*, wie oben gefunden, Zug ift, erhält *e* Druck, *f* Zug.) Geht man fo weiter, fo ergiebt fich der in Fig. 187 gezeichnete Kräfteplan. In demfelben find die Druckfpannungen durch doppelte, die Zugfpannungen durch einfache Linien bezeichnet; *m* ift Druck, fällt aber mit einer Anzahl von Zugfpannungen zufammen und ift defshalb befonders herausgezeichnet. Die Endpunkte der Stabfpannungen find ftets durch diefelben Buchftaben bezeichnet, welche die bezüglichen Stäbe im Syftem führen. Die Spannungen *b, l, n, w* werden gleich Null.

Uebergehen wir nunmehr dazu, die Maximalfpannungen in den Gitterftäben, welche durch mobile Belaftung hervorgebracht werden, zu beftimmen, fo war, wenn die Laften an der oberen Gurtung angreifen, oder allgemein, wenn die an der mobil belafteten Gurtung gelegenen Knotenpunkte zunächft den Auflagern von diefen um eine ganze Feldweite *a* entfernt find, nach Art. 384, S. 347 für die nach rechts fallenden Diagonalen

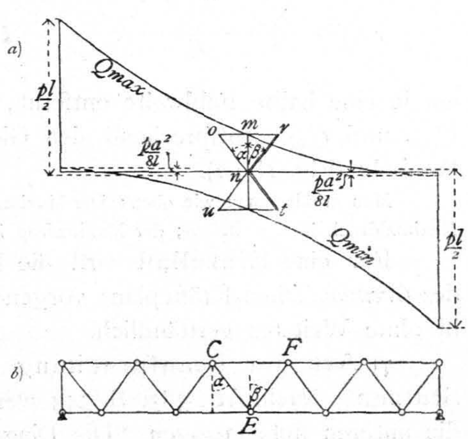
$$Y_{max} = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{Q_{max}}{\cos\alpha}.$$

Die graphifche Darftellung von

$$Q_{max} = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

ergiebt eine Parabel.

Fig. 188.



Für $x = 0$ wird $Q_{max} = -\frac{p\,a^2}{8\,l}$; für $x = l$ wird $Q_{max} = \frac{p}{2\,l}\left[l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{p\,l}{2} - \frac{p\,a^2}{8\,l}$. Q_{max} wird Null für $x = \frac{a}{2}$; die Curve hat ein Minimum für $0 = 2x$, d. h. für $x = 0$. Danach ift die Curve in Fig. 188 *a* conftruirt.

Hier find diejenigen Ordinaten der Curve als Werthe von Q_{max} einzuführen, welche den Fufspunkten der betreffenden Diagonalen entfprechen. Für die Diagonale *CE* ergiebt fich *mn* als Werth von Q_{max}. Die durch n parallel zur Diagonale CE gezogene Linie $n\,o$ giebt den Werth von $Y = \frac{Q_{max}}{\cos\alpha}$; denn es ist

$$\overline{n\,o} = \frac{m\,n}{\cos\alpha} = \frac{Q_{max}}{\cos\alpha}.$$

Nach Gleichung 211. ist $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos\beta}$, also $n\,r$ der gröſste Druck in der rechts steigenden Diagonale EF.

Es ist ferner nach Gleichung 210. und 212.

$$Y_{min} = -\frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{Q_{min}}{\cos\alpha}$$

und

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos\beta} = \frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\cos\beta}.$$

Wird die Differenz $l - x = \xi$ gesetzt, so ergiebt sich, daſs die Curve für $Q_{min} = -\frac{p}{2l}\left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$ derjenigen für Q_{max} congruent ist.

Für $\xi = 0$ ist $Q_{min} = +\frac{p\,a^2}{8\,l}$; für $\xi = l$ ist $Q_{min} = -\frac{p}{2l}\left[l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = -\frac{p\,l}{2} + \frac{p\,a^2}{8\,l}$.

Man erhält die in Fig. 188 a gezeichnete Curve, in welcher für die rechts fallende Diagonale CE das Minimum $n\,t$, für die rechts steigende Diagonale das Maximum $n\,u$ eingezeichnet ist.

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an oder allgemein, sind die an der mobil belasteten Gurtung gelegenen Knotenpunkte zunächst den Auflagern von diesen

Fig. 189.

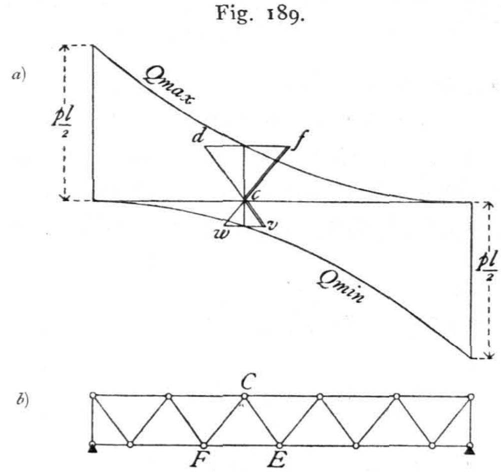
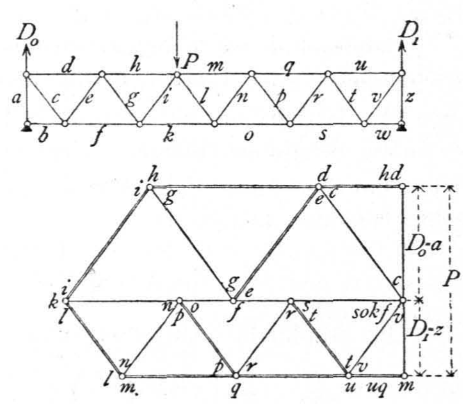


Fig. 190.



um je eine halbe Feldweite entfernt, so ergiebt die Verzeichnung der Curven für Q_{max} und Q_{min} entsprechend den Gleichungen in Art. 384, S. 348 oben stehende Parabeln (Fig. 189 a).

Man erhält genau wie oben: Der Maximalzug in CE ist $c\,d$; der Maximaldruck in CF ist $c\,f$; der Maximaldruck in CE ist $c\,v$; der Maximalzug in CF ist $c\,w$.

Für eine Einzellast wird die Ermittelung der Spannungen bequem mittels des *Cremona*'schen Kräfteplans vorgenommen, wie in Fig. 190 geschehen ist; dieselbe ist ohne Weiteres verständlich.

γ) Art der Beanspruchung der Stäbe bei einem Träger auf zwei Stützen. Nach Art. 383, S. 343 werden die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren stets gezogen. Die Diagonalen erhalten verschiedene Beanspruchungen.

Durch das Eigengewicht erhalten die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Zug, die nach der Mitte zu fteigenden Diagonalen Druck; durch die ungünftigfte mobile Belaftung erhalten im Allgemeinen alle Diagonalen fowohl Zug, wie Druck. Wenn der gröfste Druck, der in einer Diagonalen durch mobile Belaftung entfteht, kleiner ift, als der Zug durch das Eigengewicht, fo erleidet die Diagonale nur Zug, umgekehrt nur Druck. Für die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen nahe dem Auflager ift der Zug in Folge des Eigengewichtes meiftens viel gröfser, als der gröfste Druck durch mobile Belaftung, und es werden daher diefe Diagonalen meiftens nur gezogen. Eben fo ergiebt fich, dafs die nahe dem Auflager befindlichen, nach der Mitte zu anfteigenden Diagonalen nur Druck erhalten. Die Diagonalen in dem mittleren Theile des Trägers werden dagegen fowohl gezogen, wie gedrückt.

3) Parallelträger mit Fachwerk.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Für eine beliebige Belaftung wird im vorliegenden Falle genau fo, wie in Art. 383, S. 343, wenn M das Biegungsmoment für den einem oberen Gurtungsftabe conjugirten Punkt, M' das Biegungsmoment für den einem unteren Gurtungsftabe conjugirten Punkt bezeichnet, 386. Berechnung d. Gurtungs-fpannungen.

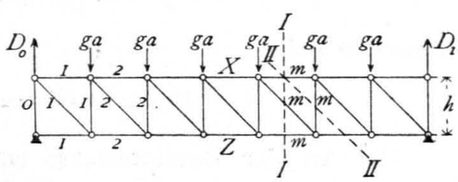
$$X = -\frac{M}{h} \quad \text{und} \quad Z = \frac{M'}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 215.$$

Auch hier findet das Maximum der Beanfpruchung der Gurtungsftäbe bei totaler Belaftung des Trägers ftatt.

Für die Belaftung durch Eigengewicht, bezw. totale gleichmäfsig vertheilte mobile Belaftung (Fig. 191) ift die Spannung in den Gurtungsftäben davon unabhängig, ob die Laften an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen. Es ift die Auflager-Reaction

$$D_0 = D_1 = (n-1)\,\frac{g\,a}{2}.$$

Fig. 191.



Für den m-ten Stab der oberen, bezw. der unteren Gurtung erhält man die durch das Eigengewicht g pro Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_g = -\frac{g\,a^2\,m\,(n-m)}{2\,h} \quad \text{und} \quad Z_g = \frac{g\,a^2}{2\,h}\,(m-1)\,(n-m+1) \quad . \quad 216.$$

und die durch totale mobile Belaftung p pro Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_p = -\frac{p\,a^2\,m\,(n-m)}{2\,h} \quad \text{und} \quad Z_p = \frac{p\,a^2}{2\,h}\,(m-1)\,(n-m+1) \quad . \quad 217.$$

X_p und Z_p find zugleich die Maximalfpannungen, die durch mobile Belaftung hervorgebracht werden.

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterftäben. Für das Fragment in Fig. 192 fei bei beliebiger Belaftung die Transverfalkraft Q; alsdann ift für die Spannung in der Diagonalen 387. Berechnung d. Gitterftabs-fpannungen.

$$Y\cos\alpha = Q, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 218.$$

Ift in Fig. 193 die Transverfalkraft für das Fragment Q', fo ift die Spannung in der Verticalen

$$V = - Q' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 219.$$

Fig. 192.

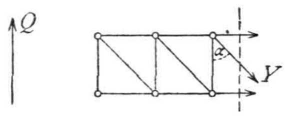
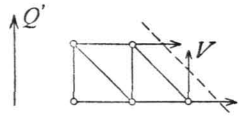


Fig. 193.



Für die Diagonalen ist es, da der Schnitt vertical gelegt werden kann, gleichgiltig, ob die Last in der oberen oder unteren Gurtung liegt; für die Verticalen dagegen ergiebt sich, da der Schnitt bei diesen schräg gelegt wird, ein wesentlich anderes Q', wenn die Last oben, als wenn sie unten liegt.

α) Das Eigengewicht erzeugt (Fig. 191) die Auflager-Reaction $D_0 = (n-1)\,\frac{g\,a}{2}$. Um die Spannung in den Diagonalen zu finden, führen wir den Schnitt II durch die m-te Diagonale; alsdann ist die Transversalkraft $Q_m = D_0 - (m-1)\,g\,a = \frac{g\,a}{2}\,(n - 2\,m + 1)$ und

$$Y_g = \frac{Q_m}{\cos\alpha} = \frac{g\,a}{2\,\cos\alpha}\,(n - 2\,m + 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 220.$$

Denselben Ausdruck fanden wir in Art. 384, S. 345, Gleichung 205. für die beim Netzwerk rechts fallenden Diagonalen. Die in Bezug auf Zug und Druck dort gefundenen Resultate gelten demnach auch hier. Die nach der Mitte fallenden Diagonalen erhalten durch das Eigengewicht Zug; die nach der Mitte steigenden Diagonalen erhalten Druck.

Für die Ermittelung der Spannungen in den Verticalen ist zu unterscheiden, ob die Lastpunkte oben oder unten sich befinden. Im ersteren Falle (Fig. 191) ist

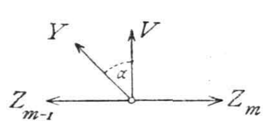
$$V_m = - Q_m = - \frac{g\,a}{2}\,(n - 2\,m + 1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 221.$$

im zweiten Falle

$$V'_m = - Q'_m = - \frac{g\,a}{2}\,(n - 1 - 2\,m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 222.$$

Die Art der Beanspruchung ergiebt sich entweder, wie oben in Art. 384, S. 345 gezeigt wurde, oder durch Betrachtung eines beliebigen nicht belasteten Knotenpunktes (Fig. 194). An einem Knotenpunkte der unteren Gurtung wirken, wenn etwa die Lasten an der oberen Gurtung angenommen werden, nur die Spannungen der Stäbe, welche sich an ihm kreuzen. Die algebraische Summe aller Verticalcomponenten muss Null sein, d. h. es muss $0 = Y\cos\alpha + V$ und $V = - Y\cos\alpha$ sein. Hieraus folgt der Satz: Die beiden Gitterstabsspannungen am Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung haben entgegengesetzte Beanspruchung; die Belastung, welche in einer Diagonalen Zug erzeugt, erzeugt in derjenigen Verticalen, welche mit ihr an einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung zusammentrifft, Druck und umgekehrt.

Fig. 194.



β) Für die ungünstigste Beanspruchung der Gitterstäbe, welche durch mobile Belastung hervorgebracht wird, ergiebt sich betreff der Diagonalen durch dieselbe Beweisführung, wie in Art. 384, S. 346, die gleiche Regel wie dort. Für die Verticalen ergiebt sich zugleich aus dem Schlussatze unter α: Jede Verticale erhält ihren gröfsten Druck (bezw. Zug) bei derjenigen Belastung, bei welcher die mit ihr an einem unbelafteten Knotenpunkte zufammentreffende Diagonale ihren gröfsten Zug (bezw. Druck) erhält.

Fig. 195.

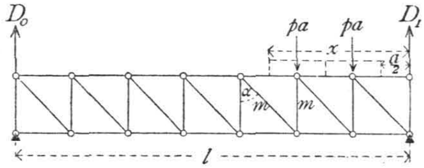
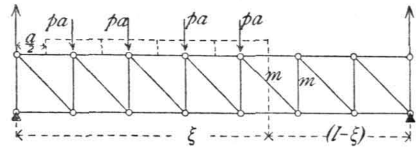


Fig. 196.



Wirken die Laften an der oberen Gurtung, fo ergeben fich die Werthe für die Spannungen, wenn wir wiederum zur Ermittelung von Q die Knotenpunktsbelaftungen durch gleichförmig vertheilte Laften erfetzt denken, wie folgt. Für das Maximum von Y_m und das Minimum von V_m ergiebt fich nach Fig. 195 die Auflager-Reaction

$$D_0 = \frac{p\left(x - \frac{a}{2}\right)}{2l}\left(x + \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = Q_m.$$

Sonach

$$\underset{max}{Y_m} = \frac{p}{2\,l\cos\alpha}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad\text{und}\quad \underset{min}{V_m} = -\frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad 223.$$

Für Y_{min} und V_{max} findet man nach Fig. 196

$$D_0 = \frac{p\left(\xi - \frac{a}{2}\right)\left[\frac{\xi - \frac{a}{2}}{2} + l - \xi\right]}{l} = p\left(\xi - \frac{a}{2}\right) - \frac{p}{2l}\left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right];$$

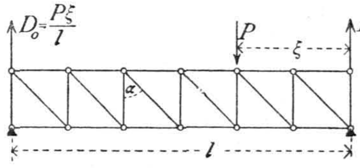
$$Q = -\frac{p}{2l}\left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right];$$

$$\underset{min}{Y_m} = -\frac{p}{2l\cos\alpha}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad\text{und}\quad \underset{max}{V_m} = -\frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \; 224.$$

x bedeutet den Abftand der Mitte desjenigen Feldes, zu dem die Diagonale gehört, vom rechten Auflager; bei den Verticalen die Mitte des Feldes, zu welchem diejenige Diagonale gehört, die mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der nicht belafteten Gurtung zufammentrifft (hier alfo der unteren Gurtung).

Greifen die Laften an der unteren Gurtung an, fo ftimmen die Formeln für die Diagonalen genau mit den eben entwickelten; auch diejenigen für die Verticalen, wenn man beachtet, dafs x den foeben erwähnten Werth hat, dafs fich alfo x hier auf die Mitte des Feldes bezieht, zu dem die Diagonale gehört, welche mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der oberen Gurtung fich fchneidet.

Fig. 197.



c) Wenn der Träger durch eine Einzellaft belaftet wird (Fig. 197), fo erhält jede Diagonale zwifchen dem Laftpunkt und dem linken Auflager, nach welchem hier die Diagonalen fteigen, einen Zug

$$Y = \frac{P\xi}{l\cos\alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 225.$$

jede Verticale auf dieſer Seite der Laſt einen Druck

$$V = -\frac{P\,\xi}{l}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 226.$$

Jede Diagonale zwiſchen dem Laſtpunkt und dem rechten Auflager, nach dem die Diagonalen hier fallen, erhält einen Druck

$$Y = -\frac{P\,(l-\xi)}{l \cos \alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 227.$$

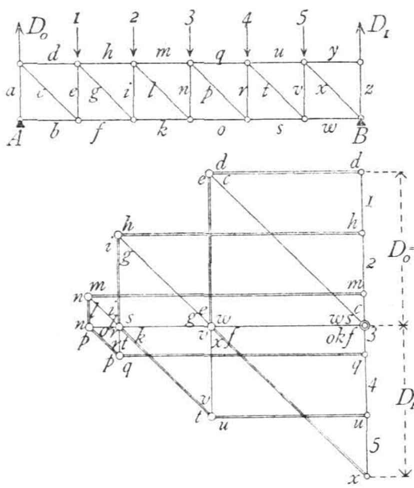
jede Verticale auf dieſer Seite einen Zug

$$V = \frac{P\,(l-\xi)}{l}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 228.$$

388. Graphiſche Ermittelung der Spannungen.

γ) Graphiſche Ermittelung der Spannungen. Der Träger ſei durch eine gleichmäſsig vertheilte Laſt (Eigengewicht, bezw. totale mobile Belaſtung) belaſtet; in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung wirke die Laſt $g\,a$, bezw. $p\,a$. Hiernach iſt in Fig. 198 der Kräfteplan nach der *Cremona*'ſchen Methode conſtruirt, worüber weitere Bemerkungen unnöthig ſind.

Fig. 198.



Wenn die Zeichnung für eine Belaſtung g pro Längeneinheit conſtruirt iſt, ſo geben die Längen der einzelnen Linien auch zugleich die Beanſpruchungen für die Belaſtung p pro Längeneinheit, falls dieſelben nur auf einem Maſsſtabe abgegriffen werden, auf welchem diejenige Länge $p\,a$ bedeutet, welche vorher $g\,a$ bedeutet hatte.

Sind die Maximalſpannungen in den Gitterſtäben, welche durch mobile Belaſtung erzeugt werden, zu beſtimmen, ſo ergiebt die Vergleichung der in Art. 387, S. 353 für $Y_{\substack{max\\min}}$ und $V_{\substack{max\\min}}$ gefundenen Werthe mit den in Art. 384, S. 347 für den Parallelträger mit Netzwerk gefundenen Werthen für Y und Q die genaue Uebereinſtimmung beider, falls x den in Art. 387, S. 353 angegebenen Werth hat.

Die unten ſtehende Curve (Fig. 199) ergiebt demnach die Werthe für Q_{max},

Fig. 199.

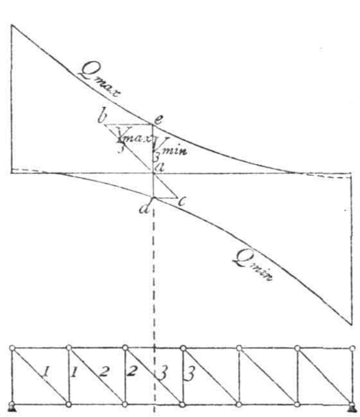
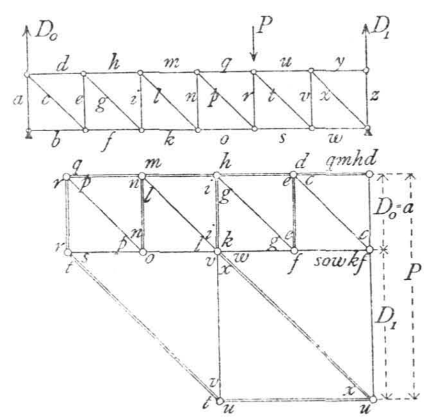


Fig 200.



ſo wie Q_{min} und damit, wie gezeichnet, leicht die Werthe für V und V. Der für $V_{3\,min}$ angegebene Werth entſpricht einer Belaſtung der oberen Gurtung.

Auch die *Culmann*'ſche Methode giebt raſch die geſuchten Reſultate.

Die Ermittelung ſämmtlicher Spannungen, welche eine Einzellaſt hervorbringt, ergiebt ſich leicht mittels des *Cremona*'ſchen Kräfteplans, wie neben ſtehend (Fig. 200) gezeichnet iſt.

4) Parallelträger mit nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Diagonalen.

Im vorhergehenden Kapitel iſt gezeigt worden, daſs die gedrückten Stäbe mit Rückſicht auf Widerſtand gegen Zerknicken weſentlich ſtärker conſtruirt werden müſſen, als die einfache Druckbeanſpruchung erfordert. Bei der Beſtimmung der Querſchnittsgröſse ſind Zuſchläge zu machen, welche bei den gezogenen Stäben nicht nöthig ſind. Man wird deſshalb bei gewiſſen Materialien, beſonders bei Schmiedeeiſen, die Verwendung gedrückter Stäbe möglichſt beſchränken, und ſtatt deren, wenn möglich, gezogene anordnen. Wo aber gedrückte Stäbe nicht entbehrt werden können, empfiehlt es ſich, die kürzeren Stäbe als gedrückte, die längeren als gezogene anzuordnen. Bei manchen Materialien hingegen, insbeſondere beim Holz, macht die Anordnung der Verbindungen eine möglichſt geringe Verwendung von Zugſtäben und eine möglichſt ausgedehnte Verwendung von Druckſtäben wünſchenswerth. 389. Princip.

Bei den Trägern mit Fachwerk iſt die Anordnung von nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Diagonalen möglich.

Wir betrachten zunächſt die Träger mit nur gezogenen Diagonalen. 390. Träger mit nur gezogenen Diagonalen.

Wie in Art. 387, S. 352 nachgewieſen iſt, erzeugt das Eigengewicht, ſo wie auch eine totale gleichmäſsige Belaſtung aller Knotenpunkte in den nach der Mitte fallenden Diagonalen Zug, in den nach der Mitte ſteigenden Diagonalen Druck. Soll alſo durch die angegebene Belaſtung, welche für den Hochbau weitaus die wichtigſte iſt, in den Diagonalen nur Zug entſtehen, ſo ordnet man nur nach der Mitte fallende Diagonalen an, conſtruirt alſo den Träger genau ſymmetriſch zur Mitte (Fig. 201). Iſt die Felderzahl ungerade, ſo erhalten die Diagonalen in dem Mittelfelde bei dieſer Belaſtung den Zug und Druck Null (Fig. 202). Bei dieſer Trägerform erhalten je zwei ſymmetriſch zur Mitte liegende Stäbe gleiche Spannungen; dieſelben wurden früher für die eine Hälfte gefunden und ſind demnach leicht zu übertragen.

Fig. 201.

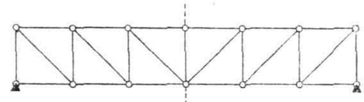
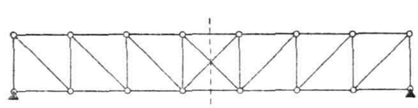


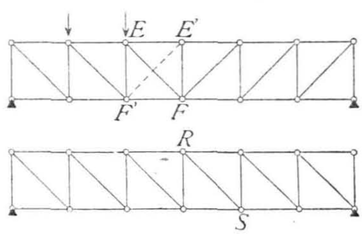
Fig. 202.



Die in Fig. 201 und 202 gezeichneten Diagonalen erhalten aber durch mobile, nicht über den ganzen Träger ausgedehnte Belaſtung eventuell Druckbeanſpruchungen, und zwar findet, wie oben ermittelt, in einer Diagonalen der gröſste Druck ſtatt, wenn die Knotenpunkte vom Kopfpunkte der Diagonalen bis zu demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweiſt, belaſtet, die übrigen Knotenpunkte aber unbelaſtet ſind. Durch das ſtets noch vorhandene Eigengewicht findet andererſeits in den Diagonalen eine beſtändige Zugſpannung ſtatt, welche die erwähnte Druckbeanſpruchung vermindert. Diejenigen Diagonalen nun, bei denen (beides abſolut genommen) die Zugſpannung durch das Eigengewicht gröſser iſt, als die gröſste Druckſpannung in Folge mobiler Laſt, werden ſtets gezogen, nie gedrückt. Bei denjenigen Diagonalen dagegen, welche durch das Eigengewicht einen geringeren Zug erhalten, als ungünſtigſten Falles der Druck durch mobile Belaſtung beträgt (wiederum beides abſolut genommen), wird eine Druckbeanſpruchung eintreten, die zu vermeiden iſt. Man bringt deſshalb in dem betreffenden Felde eine zweite Diagonale mit einer ſolchen Richtung an, daſs die mobile Belaſtung, welche in der bereits im Felde vorhandenen Diagonalen Druck erzeugt, in der zweiten Diagonalen Zug hervorruft. Die Diagonale muſs demnach ſo gerichtet ſein, daſs die erwähnte mobile Belaſtung die Knotenpunkte vom Fuſspunkte der Diagonalen an bis zu demjenigen Auflager belaſtet, nach welchem dieſer Fuſspunkt hinweiſt; mit anderen Worten, man bringt eine Diagonale an, welche die bereits vorhandene Diagonale kreuzt, eine ſog. Gegendiagonale (in Fig. 203 die punktirte Diagonale $E' F'$).

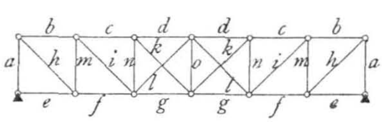
Damit dieſelbe aber auch wirkſam ſei, erhält die Hauptdiagonale EF einen derartigen Querſchnitt, daſs ſie bei Druckſpannungen ausbiegt, daſs ſie alſo in dieſem Falle als nicht vorhanden angeſehen werden kann.

Fig. 203.



Solche Gegendiagonalen ſind in denjenigen Feldern anzuordnen, in welchen die Hauptdiagonalen eventuell Druckſpannungen erhalten. In den Feldern nahe an dem Auflager iſt die Zugſpannung durch das Eigengewicht meiſtens groſs, die Druckſpannung durch mobile Laſt meiſtens klein, ſo daſs in dieſen Feldern keine Gegendiagonalen nöthig ſind; in den mittleren dagegen ſind ſie anzuordnen. Die Spannungen in den Gegendiagonalen ſind dann genau ſo zu ermitteln, als wären die Hauptdiagonalen nicht vorhanden; jede Gegendiagonale, z. B. etwa $E' F'$, befindet ſich genau in derſelben Lage, wie die ſymmetriſch zur Trägermitte liegende Hauptdiagonale in dem Träger mit nur nach einer Seite fallenden Diagonalen, alſo hier wie RS (Fig. 203). Die oben gefundenen Spannungen ſind daher hier ſofort zu verwerthen. Der Träger würde demnach die Form der Fig. 204 erhalten, in welcher je zwei Stäbe mit gleichen Bezeichnungen gleiche Spannungen erleiden.

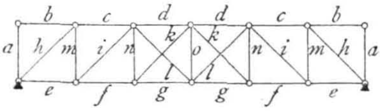
Fig. 204.



391. Träger mit nur gedrückten Diagonalen.

Bei der Conſtruction eines Trägers mit nur gedrückten Diagonalen iſt nach gleichen Principien zu verfahren. Zunächſt ſind beiderſeits nur nach der Mitte anſteigende Diagonalen zu verwenden, damit man für Belaſtung durch Eigengewicht, bezw. Totallaſt nur Druck erhalte. In denjenigen Feldern alsdann, in welchen die Diagonalen eventuell Zugſpannung erhalten würden, ſind wie oben Gegendiagonalen anzuordnen (Fig. 205). Die Verbindung in den Knotenpunkten iſt ſo anzuordnen, daſs die Hauptdiagonalen keinen Zug übertragen können.

Fig. 205.



Die Beanſpruchung der Verticalen ergiebt ſich nach Art. 387, S. 352 ſtets der Beanſpruchung derjenigen Diagonalen entgegengeſetzt, welche an einem unbelaſteten Knotenpunkte mit der Verticalen zufammentrifft. Werden demnach alle Diagonalen nur gezogen, fo werden alle Verticalen nur gedrückt (Fig. 204); werden alle Diagonalen nur gedrückt, fo werden alle Verticalen nur gezogen (Fig. 205). Im zweiten Falle werden diefelben meiftens aus Schmiedeeifen hergeftellt, während die Diagonalen aus Holz beftehen.

Beifpiel. Eine als Parallelträger mit Fachwerk (nach Art der Fig. 201) conftruirte Dachpfette hat folgende Dimenfionen und Belaftungen: Stützweite $l = 15$ m; Höhe zwifchen den Gurtungs-Schwerpunkten $h = 0{,}6$ m; Anzahl der Felder $n = 20$; Feldweite $a = 0{,}75$ m; die Diagonalen fallen jederfeits nach der Trägermitte zu; Gegendiagonalen find nicht vorhanden. Die Belaftung durch das Eigengewicht pro lauf. Meter ift $g = 66$ kg, alfo pro Knotenpunkt $g\,a = 66 \cdot 0{,}75 = 49{,}5$ kg oder rot. 50 kg. Die verticale Belaftung durch Schnee- und Winddruck pro lauf. Meter ift $p = 235$ kg, alfo pro Knotenpunkt $p\,a = 235 \cdot 0{,}75 = \infty\ 175$ kg. Es find die durch diefe Belaftungen entftehenden Spannungen zu berechnen. 392. Beifpiel.

1) Spannungen in den Gurtungen. Nach Gleichung 216. und 217. find für den m-ten Stab der oberen Gurtung

$$X_g = -\frac{50 \cdot 0{,}75 \cdot m\,(20 - m)}{1{,}2} = -31{,}25\,m\,(20 - m)\,;$$

$$X_p = -\frac{175 \cdot 0{,}75 \cdot m\,(20 - m)}{1{,}2} = -109{,}37\,m\,(20 - m).$$

Für den m-ten Stab der unteren Gurtung find nach Gleichung 216. und 217.

$$Z_g = \frac{50 \cdot 0{,}75}{1{,}2}\,(m-1)(21-m) = +31{,}25\,(m-1)\,(21-m) \text{ und } Z_p = 109{,}37\,(m-1)\,(21-m).$$

Man erhält aus vorftehenden Ausdrücken, indem man der Reihe nach für m die Werthe 1, 2, 3, ... 9, 10 einführt, die Gurtungsfpannungen der Stäbe links der Mitte. Die Spannungen in den fymmetrifch zur Mitte liegenden Stäben find den gefundenen genau gleich. Die Addition der Werthe X_g und X_p ergiebt die Maximalfpannungen in der oberen, die Addition der Werthe Z_g und Z_p die Maximalfpannungen in der unteren Gurtung. Die Refultate find in umftehender Tabelle 1 angegeben.

2) Spannungen in den Diagonalen. α) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 220. ift für die m-te Diagonale die Spannung durch das Eigengewicht, da hier $\cos\alpha = \frac{0{,}6}{\sqrt{0{,}6^2 + 0{,}75^2}} = 0{,}625$,

$$Y_g = \frac{50}{1{,}25}\,(21 - 2\,m) = 40\,(21 - 2\,m).$$

Durch Einfetzung der Zahlenwerthe 1, 2, 3, ... 9, 10 für m erhält man die Spannungen der umftehenden Tabelle 2.

β) Durch die mobile Belaftung. Im vorliegenden Fall ift die mobile Belaftung in zwei Theile zu trennen. Der Winddruck kann nur gleichzeitig den ganzen Träger belaften; die durch diefen erzeugten Spannungen berechnen fich alfo nach der obigen Formel der Gleichung 220., wenn in diefelbe ftatt g die Verticalcomponente der Windbelaftung pro lauf. Meter eingeführt wird. Diefelbe beträgt im vorliegenden Falle 88 kg; mithin ift

$$Y_w = \frac{88 \cdot 0{,}75}{1{,}25}\,(21 - 2\,m) = 53\,(21 - 2\,m).$$

Die Schneebelaftung pro lauf. Meter des Trägers ift $p_1 = 147$ kg. Die Maximal-Zug-, bezw. -Druckfpannungen, welche durch diefe Belaftung in den Diagonalen hervorgerufen werden, find nach Gleichung 223. u. 224.

$$Y_{p\,max} = \frac{147}{2 \cdot 15 \cdot 0{,}625}\,(x^2 - 0{,}375^2) = 7{,}84\,(x^2 - 0{,}141)\,;$$

$$Y_{p\,min} = -\frac{147}{2 \cdot 15 \cdot 0{,}625}\left[(l-x)^2 - 0{,}375^2\right] = -7{,}84\left[(15-x)^2 - 0{,}141\right].$$

Für x find der Reihe nach die Werthe einzufetzen: $15 - \frac{a}{2} = 14{,}625$, $15 - \frac{3\,a}{2} = 13{,}875$, $15 - \frac{5\,a}{2} = 13{,}125$, $15 - \frac{7\,a}{2} = 12{,}375$, 11,625, 10,875, 10,125, 9,375, 8,625, 7,875. Die fymmetrifch zur Mitte liegenden Diagonalen erhalten gleich grofse Spannungen.

Man erhält die in der umftehenden Tabelle 2 angegebenen Werthe.

3) Spannungen in den Verticalen. α) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 221. ift, da die Laftpunkte oben liegen,

Tabelle 1: Spannungen in den Gurtungen (in Kilogr.).

	Für $m =$ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Obere Gurtung.	X_g = − 594	− 1125	− 1594	− 2000	− 2344	− 2625	− 2844	− 3000	− 3094	− 3125	− 3125	− 3094	− 3000	− 2844	− 2625	− 2344	− 2000	− 1594	− 1125	− 594
	X_p = − 2078	− 3937	− 5579	− 7000	− 8204	− 9187	− 9954	− 10500	− 10829	− 10937	− 10937	− 10829	− 10500	− 9954	− 9187	− 8204	− 7000	− 5579	− 3937	− 2078
	X_{g+p} = − 2672	− 4062	− 7173	− 9000	− 10548	− 11812	− 12798	− 13500	− 13923	− 14062	− 14062	− 13923	− 13500	− 12798	− 11812	− 10548	− 9000	− 7173	− 4062	− 2672
Untere Gurtung.	Z_g = 0	594	1125	1594	2000	2344	2625	2844	3000	3094	3094	3000	2844	2625	2344	2000	1594	1125	594	0
	Z_p = 0	2078	3937	5579	7000	8204	9187	9954	10500	10829	10829	10500	9954	9187	8204	7000	5579	3937	2078	0
	Z_{g+p} = 0	2672	4062	7173	9000	10548	11812	12798	13500	13923	13923	13500	12798	11812	10548	9000	7173	4062	2672	0

Tabelle 2: Spannungen in den Diagonalen (in Kilogr.).

Für $m =$ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y_g = 760	680	600	520	440	360	280	200	120	40	40	120	200	280	360	440	520	600	680	760
Y_w = 1007	901	795	689	583	477	371	265	159	53	53	159	265	371	477	583	689	795	901	1007
x = $\simeq$ 14,6	13,9	13,1	12,4	11,6	10,9	10,1	9,4	8,6	7,9	7,9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$Y_{p\,max}$ = + 1666	1513	1344	1204	1054	930	799	692	579	488	488	579	692	799	930	1054	1204	1344	1513	1666
$Y_{p\,min}$ = 0	− 8	− 27	− 52	− 90	− 131	− 187	− 245	− 320	− 394	− 394	− 320	− 245	− 187	− 131	− 90	− 52	− 27	− 8	0

Tabelle 3: Spannungen in den Verticalen (in Kilogr.).

Für $m =$ 0*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10**)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20*)
V_g = − 500	− 475	− 425	− 375	− 325	− 275	− 225	− 175	− 125	− 75	− 50	− 75	− 125	− 175	− 225	− 275	− 325	− 375	− 425	− 475	− 500
V_w = − 660	− 627	− 561	− 495	− 429	− 363	− 297	− 231	− 165	− 99	− 66	− 99	− 165	− 231	− 297	− 363	− 429	− 495	− 561	− 627	− 660
x =	14,6	13,9	13,1	12,4	11,6	10,9	10,1	9,4	8,6	7,9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$V_{p\,min}$ = − 1103	− 1044	− 946	− 840	− 753	− 659	− 581	− 499	− 433	− 362	− 110*)	− 362	− 433	− 499	− 581	− 659	− 753	− 840	− 946	− 1044	− 1103
$V_{p\,max}$ = 0	0	+ 5	+ 17	+ 33	+ 56	+ 82	+ 117	+ 153	+ 200	0	+ 200	+ 153	+ 117	+ 82	+ 56	+ 33	+ 17	+ 5	0	0

*) In der Endverticalen ist der Druck stets gleich der Auflager-Reaction, d. h., da die Belastung des Endknotenpunkts $\frac{g\,a}{2}$ hinzukommt, für Eigengewicht $= -\frac{g\,a}{2}(n-1) - \frac{g\,a}{2} = -\frac{g\,a}{2}\,n = -25\,.\,20 = -500$ kg; für Winddruck $= -\frac{88\,.\,0{,}75}{2}\,n = -660$ kg. Die gröfste Beanspruchung durch Schneelast findet in derselben bei totaler Belastung durch Schnee statt, weil bei dieser die Auflager-Reaction am gröfsten ist. Demnach ist $V_{p\,min} = -\frac{p\,a}{2}\,n = -\frac{147\,.\,0{,}75}{2}\,20 = -1103$ kg. Zug kann in dieser Verticalen nicht entstehen.

**) Auf die Mittelverticale (Nr. 10) sind die obigen Gleichungen nicht anwendbar, weil an ihrem unteren Endpunkte sich die zwei Diagonalen der anstofsenden Felder treffen, also der schräge Schnitt andere Stäbe trifft, als bei der Entwickelung der Formeln vorgesehen war. Da am oberen Endpunkt der Verticalen keine Diagonale ansetzt, so kann dieselbe nur solche Verticalkräfte aufnehmen, welche im oberen Knotenpunkte direct angreifen. Wir erhalten also die Spannungen in derselben genau so grofs, wie die Knotenpunktsbelastungen. Diese Werthe sind in die oben stehende Tabelle eingesetzt worden.

$$V_g = -\frac{50}{2}(21 - 2m) = -25(21 - 2m).$$

β) Durch mobile Belaftung. Die Spannung in den Verticalen durch den Winddruck ift entfprechend dem sub 2. Angeführten

$$V_w = -\frac{88 \cdot 0{,}75}{2}(n - 2m + 1) = -33(21 - 2m).$$

Die Maximal-Druck-, bezw. -Zugfpannungen durch Schneelaft endlich ergeben fich aus den Gleichungen 223. u. 224. zu

$$V_{p\,min} = -\frac{147}{2 \cdot 15}(x^2 - 0{,}141) = -4{,}9(x^2 - 0{,}141) \quad \text{und} \quad V_{p\,max} = 4{,}9\left[(l - x^2) - 0{,}141\right].$$

Für x find diefelben Werthe, wie bei den Diagonalen einzuführen. Man erhält die Werthe der neben ftehenden Tabelle 3.

4) Zufammenftellung der Spannungen für die Querfchnittsbeftimmung. Sollen die Querfchnitte nach der neueren Methode beftimmt werden, fo ift für jeden Stab die Spannung durch die permanente Belaftung P_g, die Maximalfpannung durch mobile Belaftung P_1 und die Minimalfpannung durch diefelbe Belaftung P_2 zu ermitteln (fiehe Art. 284 bis 287, S. 250 bis 252). Ueberwiegt im Stabe der Zug, fo ift P_1 der Maximalzug, P_2 der Maximaldruck durch mobile Belaftung; überwiegt im Stabe der Druck, fo ift P_1 der Maximaldruck, P_2 der Maximalzug durch mobile Belaftung. Die Werthe für P_0, P_1 und P_2 ergeben fich leicht aus neben ftehenden Tabellen. Zunächft geben die X_g, Z_g, Y_g und V_g die Werthe der P_0, die X_p, Z_p, $Y_w + Y_{p\,max}$ und $V_w + V_{p\,min}$ die Werthe der P_1, endlich die $Y_{p\,min}$ und $V_{p\,max}$ die Werthe der P_2. Danach ift folgende Tabelle zufammengeftellt.

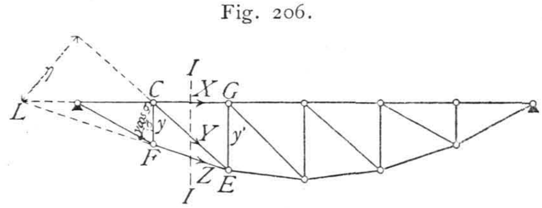
Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen: Ueberwiegender Zug				Verticalen: Ueberwiegender Druck			
Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1 u. 20	− 594	− 2078	1 u. 20	0	0	1 u. 20	+ 760	+ 2673	0	0 u. 20	− 500	− 1763	0
2 u. 19	− 1125	− 3937	2 u. 19	+ 594	+ 2078	2 u. 19	+ 680	+ 2414	− 8	1 u. 19	− 475	− 1671	0
3 u. 18	− 1594	− 5579	3 u. 18	+ 1125	+ 3937	3 u. 18	+ 600	+ 2139	− 27	2 u. 18	− 425	− 1507	+ 5
4 u. 17	− 2000	− 7000	4 u. 17	+ 1594	+ 5579	4 u. 17	+ 520	+ 1893	− 52	3 u. 17	− 375	− 1335	+ 17
5 u. 16	− 2344	− 8204	5 u. 16	+ 2000	+ 7000	5 u. 16	+ 440	+ 1637	− 90	4 u. 16	− 325	− 1182	+ 33
6 u. 15	− 2625	− 9187	6 u. 15	+ 2344	+ 8204	6 u. 15	+ 360	+ 1407	− 131	5 u. 15	− 275	− 1022	+ 56
7 u. 14	− 2844	− 9954	7 u. 14	+ 2625	+ 9187	7 u. 14	+ 280	+ 1170	− 187	6 u. 14	− 225	− 878	+ 82
8 u. 13	− 3000	− 10500	8 u. 13	+ 2844	+ 9954	8 u. 13	+ 200	+ 957	− 245	7 u. 13	− 175	− 730	+ 117
9 u. 12	− 3094	− 10829	9 u. 12	+ 3000	+ 10500	9 u. 12	+ 120	+ 738	− 320	8 u. 12	− 125	− 598	+ 153
10 u. 11	− 3125	− 10937	10 u. 11	+ 3094	+ 10829	10 u. 11	+ 40	+ 541	− 394	9 u. 11	− 75	− 461	+ 200
										10	− 50	− 176	0
	Kilogr.			Kilogr.			Kilogramm.				Kilogramm.		

5) Parabelträger.

Wir wollen hier von den Trägern, bei denen nicht beide Gurtungen geradlinig find, nur die Parabelträger befprechen. Parabelträger find Träger mit einer oder zwei nach Parabeln gekrümmten Gurtungen. Es follen nur Träger mit einer geraden und einer gekrümmten Gurtung behandelt werden.

α) Berechnung der Spannungen in der gekrümmten Gurtung. Ift die obere Gurtung gerade (Fig. 206), fo ift für einen Stab FE der unteren Gurtung C der conjugirte Punkt; mithin wird, wenn M das Moment der an der einen Seite des Schnittes II wirkenden äufseren Kräfte bezogen auf C als Drehpunkt bezeichnet, 393. Berechnung d. Spannungen in d. gekrümmten Gurtung.

Fig. 206.



$$O = M - Zy\cos\sigma, \quad \text{woraus} \quad Z = \frac{M}{y\cos\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 229.$$

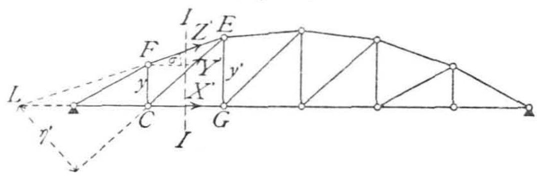


Fig. 207.

Wenn die obere Gurtung gekrümmt ift (Fig. 207), wird für den Stab FE, wenn alle Bezeichnungen die obige Bedeutung behalten,

$$Z' = -\frac{M}{y \cos \sigma} \quad . \quad . \quad 230.$$

Beide Ausdrücke find alfo numerifch gleich; nur das Vorzeichen ift verfchieden, weil Z das eine Mal die Spannung in der unteren, das andere Mal diejenige in der oberen Gurtung bedeutet.

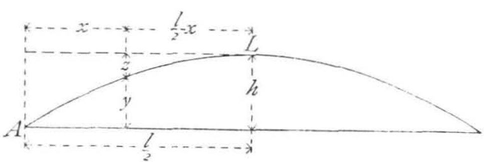


Fig. 208.

y ift in Gleichung 229. und 230. nach der Parabelgleichung zu beftimmen. Der Anfangspunkt der Coordinaten fei A; alsdann ift (Fig. 208), wenn L der Scheitel der Parabel ift,

$$\frac{z}{h} = \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}, \quad \text{woraus} \quad z = h\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2$$

und

$$y = h - z = h\left(\frac{4x}{l} - \frac{4x^2}{l^2}\right) = \frac{4h}{l^2}(lx - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad 231.$$

Die Ordinaten y find nach unten, bezw. nach oben als pofitiv zu rechnen, je nachdem die untere oder die obere Gurtung gekrümmt ift.

Um die Werthe für die verfchiedenen Z zu erhalten, find der Reihe nach die den bezw. conjugirten Punkten entfprechenden zufammengehörigen Werthe für M und y einzuführen.

394. Berechnung d. Spannungen in d. geraden Gurtung.

β) Berechnung der Spannungen in der geraden Gurtung. Es fei die obere Gurtung gerade (Fig. 206); alsdann ift E der conjugirte Punkt für den Stab CG, und wenn das Moment der äufseren Kräfte für diefen Punkt mit M' bezeichnet wird, ift

$$0 = M' + Xy', \quad \text{woraus} \quad X = -\frac{M'}{y'}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 232.$$

Ift die obere Gurtung gekrümmt (Fig. 207), fo ergiebt fich für den Stab CG genau wie vorher, unter Beibehaltung derfelben Bezeichnungen,

$$0 = M' - X'y', \quad \text{woraus} \quad X' = +\frac{M'}{y'}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 233.$$

Auch hier ftimmen beide Ausdrücke numerifch überein; auch hier ift nur das Vorzeichen verfchieden.

395. Berechnung d. Spannungen in den Gitterftäben.

γ) Berechnung der Spannungen in den Gitterftäben. Für die Diagonalen CE (Fig. 206 und 207) ift, fowohl bei gerader, wie bei gekrümmter oberen Gurtung L der conjugirte Punkt, η, bezw. η' der Hebelsarm von Y, bezw. Y' und wenn wiederum mit M_1 und M_1' die Momente der äufseren Kräfte am Fragment links vom Schnitt II, bezogen auf L als Drehpunkt, bezeichnet werden, ift

$$\left.\begin{aligned} 0 &= Y\eta - M_1, &\quad \text{woraus} \quad Y &= +\frac{M_1}{\eta} \\ \text{bezw.} \quad 0 &= -Y'\eta' - M_1', &\quad \text{woraus} \quad Y' &= -\frac{M_1'}{\eta'} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 234.$$

Liegt die Diagonale rechts der Mitte, ſo fällt der conjugirte Punkt rechts vom rechten Auflager. Die Aufſtellung der Momentengleichung für dieſen Punkt ergiebt genau wie in Gleichung 234. die Diagonalſpannung als Quotienten aus dem Moment der am Fragment wirkenden äuſseren Kräfte, dividirt durch den Hebelsarm der Diagonalſpannung.

Fig. 209.

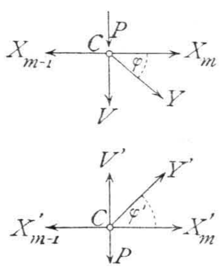
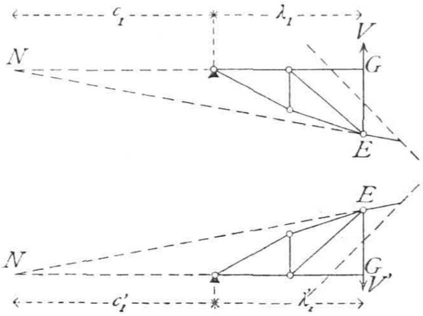


Fig. 210.



Häufig iſt ein anderer Ausdruck der Diagonalſpannung bequemer, als Gleichung 234. Die am Knotenpunkt C der geraden Gurtung (Fig. 209) angreifenden Kräfte ſind im Gleichgewicht; die algebraiſche Summe aller Horizontal-Componenten iſt demnach gleich Null; mithin

$$\left.\begin{array}{ll} 0 = Y \cos \varphi + X_m - X_{m-1}, & \text{woraus} \quad Y = -\dfrac{X_m - X_{m-1}}{\cos \varphi} \\ \text{bezw. } 0 = Y' \cos \varphi' + X'_m - X'_{m-1}, & \text{woraus} \quad Y' = -\dfrac{X'_m - X'_{m-1}}{\cos \varphi'} \end{array}\right\} \quad . \quad 235.$$

Für die Beſtimmung der Spannungen in den Verticalen iſt der Schnitt ſchief zu legen (Fig. 210). Der conjugirte Punkt für die Verticale EG iſt N. Bezeichnet M_2, bezw. M_2' das Moment der am Fragment wirkenden äuſseren Kräfte für N als Drehpunkt, ſo wird

$$0 = V(\lambda_1 + c_1) + M_2, \quad \text{woraus} \quad V = -\frac{M_2}{\lambda_1 + c_1}, \quad . \quad . \quad . \quad 236.$$

$$\text{bezw. } 0 = V'(\lambda_1' + c_1') - M_2', \quad \text{woraus} \quad V' = \frac{M_2'}{\lambda_1' + c_1'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 237.$$

Falls der conjugirte Punkt nach rechts vom rechten Auflager fällt, ergiebt ſich eine geringe Modification der Gleichungen 236. und 237.

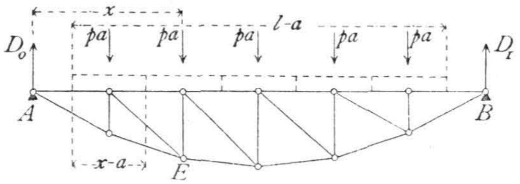
Ein für manche Fälle bequemerer Ausdruck wird wiederum durch Betrachtung des Knotenpunktes an der geraden Gurtung erhalten. Es ergiebt ſich, da die Kräfte an demſelben im Gleichgewicht ſind,

$$\left.\begin{array}{ll} 0 = Y \sin \varphi + V + P, & \text{woraus} \quad V = -(Y \sin \varphi + P), \\ \text{bezw. } 0 = Y' \sin \varphi' + V' - P, & \text{woraus} \quad V' = -(Y' \sin \varphi' - P) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 238.$$

δ) Totale Belaſtung durch mobile Laſt p (bezw. Eigengewicht g) pro Längeneinheit. Nehmen wir wiederum an, daſs die Laſten nur in den Knotenpunkten angreifen, ſo kommt auf jeden Knotenpunkt bei der Feldweite a eine Laſt gleich pa. Die Auflager-Reactionen D_0 und D_1 ſind bei dieſer Belaſtung genau eben ſo groſs, als wenn bei dem homogen angenommenen Träger die Einzellaſten pa ſich je auf die Länge a gleichmäſsig vertheilten; denn im zweiten Falle iſt $D_0 = \dfrac{p(l-a)}{2}$, während im erſten Falle $D_0 = \dfrac{pa(n-1)}{2}$ iſt. Da nun $(n-1)a = l - a$ iſt, ſo iſt im erſten Falle gleichfalls $D_0 = \dfrac{p(l-a)}{2}$. 396.

396.
Gleichförmig vertheilte Belaſtung.

Fig. 211.



Für irgend einen Knotenpunkt E (Fig. 211) ift auch das Moment in beiden Fällen gleich, wenn nur die Belaftung von der Mitte des dem Auflager zunächft liegenden Feldes bis zur Mitte desjenigen Feldes gerechnet wird, welches E vorhergeht.

Dann ift für den Punkt E

$$M_x = \frac{p\,(l-a)}{2}\,x - p\,(x-a)\left(\frac{x-a}{2}+\frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2}\,(l\,x - x^2).$$

Dies ift aber nach Gleichung 159. der Ausdruck für das Moment im Punkte E bei einem homogenen, gleichmäfsig total mit p pro Längeneinheit belafteten Träger.

Für die gekrümmte Gurtung ift nach Gleichung 229.

$$Z \cos \sigma = \frac{M}{y}.$$

Wird für M der eben gefundene Werth, für y der Werth aus Gleichung 231. eingeführt, fo wird

$$\left.\begin{aligned} Z \cos \sigma &= \frac{\frac{p}{2}\,(l\,x - x^2)}{\frac{4\,h}{l^2}\,(l\,x - x^2)} = \frac{p\,l^2}{8\,h} \\ \text{eben fo}\qquad Z' \cos \sigma &= -\frac{p\,l^2}{8\,h} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 239.$$

$Z \cos \sigma$ ift die Horizontalcomponente H der Spannung in der gekrümmten Gurtung; die rechte Seite der Gleichung enthält nur conftante Gröfsen, fo dafs fich hieraus ergiebt: Beim Parabelträger ift für gleichmäfsige Belaftung des ganzen Trägers die Horizontalcomponente der Spannung in der gekrümmten Gurtung conftant.

Da $\cos \sigma = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + (y' - y)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{y' - y}{a}\right)^2}}$ ift, erhält man aus Gleichung 239.

$$Z = \frac{p\,l^2}{8\,h}\sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 240.$$

Für die gerade Gurtung ift nach Gleichung 232. und 233.

$$X = -\frac{M'}{y'} \quad \text{und} \quad X' = +\frac{M'}{y'}.$$

Nun ift für die in Rede ftehende Belaftung $\dfrac{M}{y}$ conftant, und zwar gleich $Z \cos \sigma = H$, alfo auch

$$X = -H = -\frac{p\,l^2}{8\,h} \quad \text{und} \quad X' = H = \frac{p\,l^2}{8\,h} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 241.$$

Beim Parabelträger ift fonach für eine gleichmäfsig über den ganzen Träger vertheilte Belaftung die Spannung in der geraden Gurtung conftant.

Für die Spannung in den Diagonalen wurde die Gleichung 235. aufgeftellt. Da nun $X_m = X_{m-1} = -H$ ift, folgt aus diefer Gleichung

$$Y = 0; \text{ eben fo } Y' = 0.$$

Beim Parabelträger iſt daher für die mehr erwähnte Belaſtungsart die Spannung in den Diagonalen gleich Null.

Die Spannung in den Verticalen ergiebt ſich aus Gleichung 238., da Y gleich Null, $P = p\,a$ iſt, zu

$$V = -p\,a, \text{ eben ſo } V' = p\,a.$$

Die Spannung in den Verticalen iſt ſonach beim Parabelträger und bei der angegebenen Belaſtung gleich der im Knotenpunkte der geraden Gurtung wirkenden Laſt, und zwar Zug, wenn die untere Gurtung gerade, und Druck, wenn die obere Gurtung gerade iſt. (Dabei iſt angenommen, daſs die Laſten an der geraden Gurtung wirken.)

Die ſämmtlichen hier gefundenen Reſultate gelten auch für die Belaſtung durch das Eigengewicht; nur iſt überall ſtatt der Laſt p das Eigengewicht g einzuführen. Da ferner die Momente für die Knotenpunkte aufgeſtellt ſind, und dabei nur vorausgeſetzt iſt, daſs y eine Parabelordinate ſei, ſo gelten die vorhergehenden Entwickelungen auch, wenn nur die Knotenpunkte auf einer Parabel liegen, alſo die Curve durch ein der Parabel eingeſchriebenes Polygon erſetzt wird.

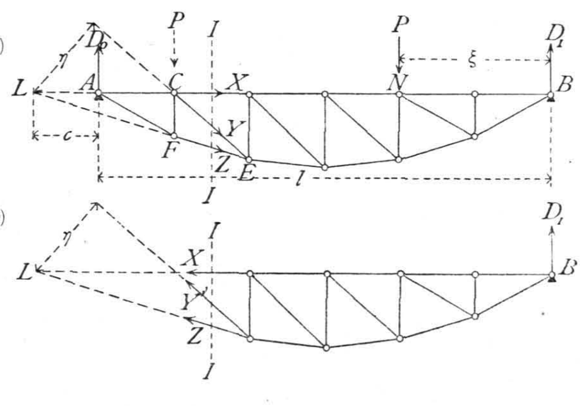
397. Ungünſtigſte Belaſtungen u. gröſste Spannungen.

ε) Ungünſtigſte Belaſtungen und gröſste Stabſpannungen. Da es keinen principiellen Unterſchied macht, ob die obere oder die untere Gurtung gerade iſt, ſo ſoll im Folgenden nur der Fall der geraden oberen Gurtung behandelt werden. Die Modificationen für den Fall der geraden unteren Gurtung ergeben ſich leicht.

Die Spannungen in den Gurtungen hängen nach den Gleichungen 229., 230., 232. und 233. nur von der Gröſse der Momente ab; dieſe aber ſind bei totaler Belaſtung des ganzen Trägers am gröſsten; mithin findet Maximalſpannung in den Gurtungen bei totaler mobiler Belaſtung ſtatt.

Die Gleichungen 240. und 241. geben für die obere, bezw. untere Gurtung die durch totale mobile Belaſtung p pro Längeneinheit erzeugten Spannungen.

Fig. 212.



Die ungünſtigſte Belaſtung für eine Diagonale CE (Fig. 212 *a*) ergiebt ſich, wie folgt. Eine Laſt P rechts von dem durch die Mitte der Diagonalen gelegten Verticalſchnitt erzeugt eine Auflager-Reaction $D_0 = \frac{P\,\xi}{l}$. Die Gleichung der ſtatiſchen Momente für den Punkt L als Momentenpunkt und das Fragment des Trägers links vom Schnitt II ergiebt

$$0 = Y\eta - D_0\,c, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{D_0\,c}{\eta} = \frac{P\,\xi\,c}{l\,\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 242.$$

So lange die Laſt ſich rechts vom Schnitt II befindet, gilt der hier für Y gefundene Ausdruck. Jede Laſt rechts vom Schnitt erzeugt alſo in CE einen Zug.

Befindet ſich die Laſt P links vom Schnitte II (Fig. 212 *b*), ſo betrachte man das Fragment an der rechten Seite des Schnittes; auf daſſelbe wirken die Auflager-

Reaction D_1 in B und die 3 Spannungen X, Y' und Z. Die Gleichung der ſtatiſchen Momente für L als Drehpunkt heiſst dann

$$0 = Y' \eta + D_1 (l + c), \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{D_1 (l + c)}{\eta} \quad . \; . \; . \; 243.$$

Die Laſt P links von II erzeugt alſo in den Diagonalen Druck und in gleicher Weiſe jede links vom Schnitt liegende Laſt.

Handelt es ſich um eine rechts der Mitte liegende Diagonale, bei welcher der conjugirte Punkt von B nach rechts fällt, ſo findet man dieſelben Reſultate für die ungünſtigſte Belaſtung.

Es ergiebt ſich hiernach leicht Folgendes: Wenn am Fragment des Trägers, auf welchem die Einzellaſt nicht liegt, die betrachtete Stabſpannung und die Auflager-Reaction in gleichem Sinne um den conjugirten Punkt drehen, ſo findet im Stabe Druck ſtatt; wenn die Stabſpannung und die Auflager-Reaction in entgegengeſetztem Sinne um den conjugirten Punkt drehen, ſo findet im Stabe Zug ſtatt. Die Anwendung dieſes Satzes ergiebt, daſs auch hier das für die Parallelträger (Art. 384, S. 346) gefundene Geſetz gilt: Jede Belaſtung zwiſchen dem durch die Diagonalenmitte gelegten Verticalſchnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Fuſspunkt der Diagonale hinweist, erzeugt in derſelben Zug; jede Belaſtung zwiſchen dem erwähnten Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonale hinweist, erzeugt in derſelben Druck.

Maximalzug durch mobile Belaſtung findet demnach in einer Diagonalen ſtatt, wenn die ganze Zugabtheilung und nur dieſe belaſtet iſt, d. h. wenn alle Knotenpunkte zwiſchen dem Schnitte und demjenigen Auflager belaſtet ſind, nach welchem der Fuſs der Diagonale hinweist; Maximaldruck durch mobile Belaſtung findet ſtatt, wenn die Knotenpunkte zwiſchen dem Schnitte und demjenigen Auflager belaſtet ſind, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist.

Dieſes Geſetz gilt ſowohl, wenn die untere, als wenn die obere Gurtung gekrümmt iſt.

Fig. 213.

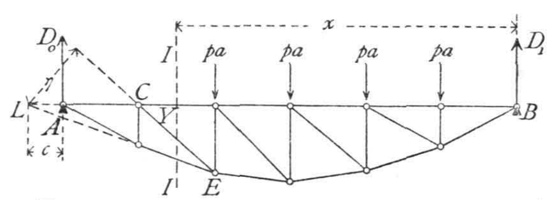
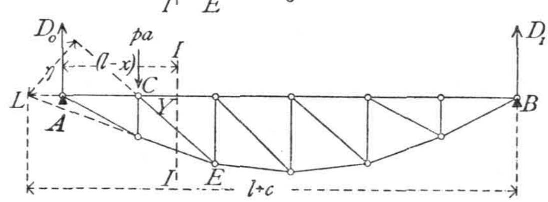


Fig. 214.



Die gröſste Zugbelaſtung in einer Diagonalen CE findet daher bei der in Fig. 213 gezeichneten Belaſtung ſtatt; ſie iſt nach Gleichung 242.

$$Y_{max} = \frac{D_0 \, c}{\eta}.$$

Genau, wie in Art. 387, S. 353, erhält man für die Auflager-Reaction

$$D_0 = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

alſo

$$Y_{max} = \frac{p \, c}{2 l \eta} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 244.$$

Die gröſste Druckbeanſpruchung in einer Diagonalen CE findet bei der in Fig. 214 gezeichneten Belaſtung ſtatt und iſt (wenn der Trägertheil rechts vom Schnitte II betrachtet wird) nach Gleichung 243.

$$Y_{min} = - D_1 \left(\frac{l + c}{\eta}\right).$$

Nun ift die Auflager-Reaction $D_1 = \frac{p}{2\,l}\left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$, alfo

$$Y_{min} = - \frac{p}{2\,l}\left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c}{\eta} \quad \ldots\ldots \quad 245.$$

Die Gleichungen 244. und 245. gelten, wenn die Diagonalen, wie hier, nach rechts fallen, nur für diejenigen links der Mitte; für die Diagonalen rechts der Mitte, bei denen der conjugirte Punkt von B nach rechts fällt, ergeben fich folgende Werthe, in denen η_1 den Hebelsarm von Y, c_2 den Abftand des conjugirten Punktes von B bedeutet:

$$Y_{max} = \frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c_2}{\eta_1} \text{ und } Y_{min} = - \frac{p}{2\,l}\left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{c_2}{\eta_1} \quad 246.$$

Bei der angenommenen Belaftungsart genügt es, Y_{max} oder Y_{min} auszurechnen; denn für die Belaftung aller Knotenpunkte mit je $p\,a$ ift die Diagonalfpannung nach Art. 395, S. 362 gleich Null. Sind nur die Knotenpunkte der Druckabtheilung belaftet, fo ift die Spannung in der Diagonalen gleich Y_{min}; find nur die Knotenpunkte der Zugabtheilung belaftet, fo ift die Spannung gleich Y_{max}. Bei totaler Belaftung ift die Spannung $Y_{summa} = Y_{max} + Y_{min}$ und zwar ift $Y_{summa} = 0$, d. h. $0 = Y_{max} + Y_{min}$ und $Y_{min} = - Y_{max}$.

Für die ungünftigfte Belaftung in einer Verticalen ergiebt fich in gleicher Weife, wie bei den Diagonalen gezeigt ift, folgendes Gefetz: Jede Laft zwifchen einem durch die Verticale gelegten fchrägen Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Fufspunkt der Diagonale hinweist, welche mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der nicht mobil belafteten Gurtung zufammentrifft, erzeugt Druck; jede Laft zwifchen dem Schnitte und dem Auflager, nach welchem der Kopf der erwähnten Diagonale weist, erzeugt in der Verticalen Zug. Auch hier findet demnach Maximaldruck, bezw. -Zug in einer Verticalen bei derfelben Belaftung ftatt, welche in derjenigen Diagonalen Maximalzug, bezw. -Druck erzeugt, die mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der nicht mobil belafteten Gurtung zufammentrifft.

Es wird alfo Maximaldruck in GE bei der in Fig. 215 gezeichneten Belaftung, Maximalzug bei der in Fig. 216 gezeichneten Belaftung ftattfinden.

Fig. 215.

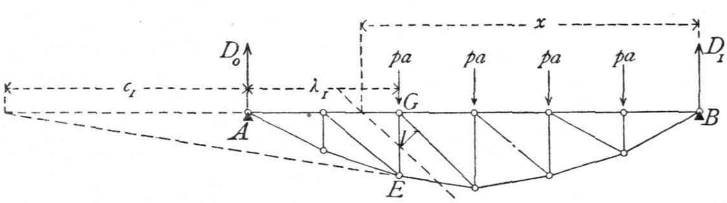
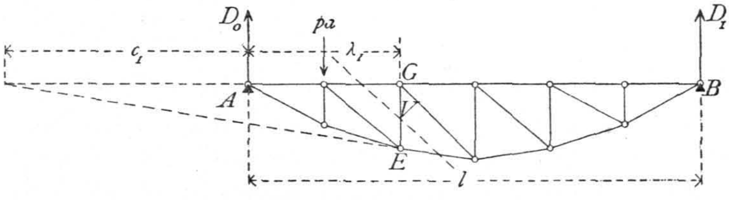


Fig. 216.



Die Maximalſpannungen in den Verticalen ergeben ſich mit

$$\left.\begin{aligned} V_{min} &= -\frac{D_0\, c_1}{\lambda_1 + c_1} = -\frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{c_1}{\lambda_1 + c_1} \\ V_{max} &= \frac{D_1\,(l + c_1)}{\lambda_1 + c_1} = \frac{p}{2\,l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c_1}{\lambda_1 + c_1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; 247.$$

Falls der conjugirte Punkt um c'_1 nach rechts von B fällt, was hier bei allen Verticalen rechts der Mitte incl. der Mittelverticalen ſtattfindet, ſo ergeben ſich für V_{min} und V_{max} die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} V'_{min} &= -\frac{D_0\,(l + c_1')}{c_1' + l - \lambda_1} = -\frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \\ V'_{max} &= \frac{D_1\, c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} = \frac{p}{2\,l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 247_a.$$

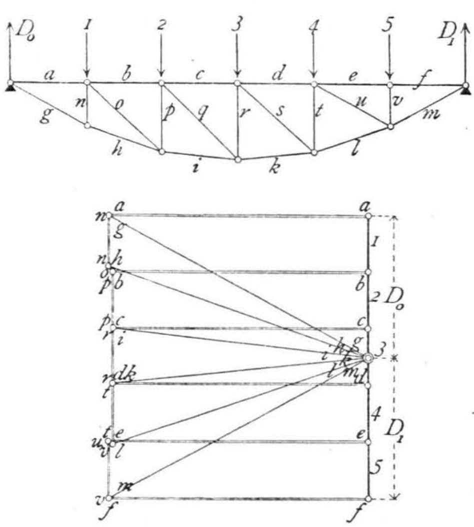
Die Modificationen für Berechnung der Stabſpannungen bei entgegengeſetzter Richtung der Diagonalen ergeben ſich aus Vorſtehendem ſo einfach, daſs darauf hier nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

Die bei einer Belaſtung durch eine oder mehrere Einzellaſten erzeugten Spannungen ergiebt die Momentenmethode ohne Mühe.

398. Graphiſche Ermittelung der Spannungen.

ζ) Graphiſche Ermittelung der Spannungen. Wird eine gleichmäſsig vertheilte Belaſtung (Eigengewicht, bezw. totale mobile Belaſtung) vorausgeſetzt, ſo ergiebt der in Fig. 217 gezeichnete *Cremona*'ſche Kräfteplan ſofort die Spannungen.

Fig. 217.



Was die durch mobile Belaſtung erzeugten Maximalſpannungen betrifft, ſo ergeben ſich die gröſsten Gurtungsſpannungen aus dem eben erwähnten Kräfteplan (Fig. 217), falls eine Belaſtung des ganzen Trägers mit der Laſt p pro Längeneinheit zu Grunde gelegt wird.

Zur Beſtimmung der gröſsten Diagonalſpannungen, welche bei den im Art. 397, S. 364 angegebenen Belaſtungen ſtattfinden, empfiehlt ſich die Schnittmethode.

Auf das Fragment links vom Schnitte *II* wirken bei der in Fig. 218 *a* gezeichneten Maximal-Zugbelaſtung für die Diagonale CE die Kräfte D_0, X, Y, Z. Die Werthe von D_0, welche für die verſchiedenen Diagonalen zu Grunde zu legen ſind, ergeben ſich aus der Gleichung $D_0 = \frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$; dieſelben ſind in der Curve (Fig. 218 *b*) aufgetragen. — Für die Diagonale CE z. B. iſt $D_0 = mn$; dieſe Kraft iſt nach den Richtungen AE und X zerlegt in no und om; no iſt alsdann noch nach den Richtungen Z und Y in np und po zerlegt; po iſt gleich Y_{max}.

Um die Y_{min} zu erhalten, kann man für $D_1 = \frac{p}{2\,l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$ die Curve auftragen und für das Fragment rechts vom Schnitt nach der angegebenen Methode zerlegen. Da aber $Y_{min} = - Y_{max}$ iſt, ſo kann dieſe Conſtruction unterbleiben.

Die Maximalſpannungen in den Verticalen werden in gleicher Weiſe ermittelt.

Fig. 218.

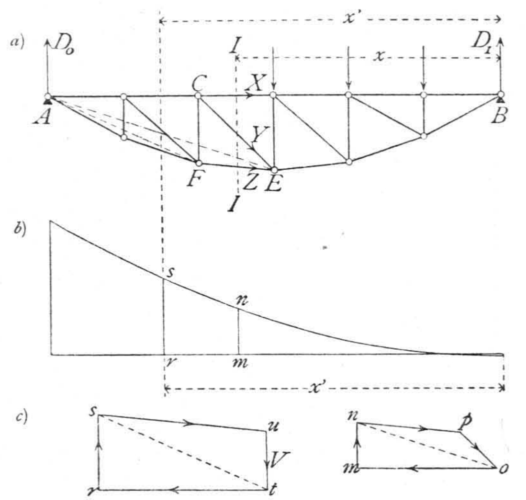


Fig. 219.

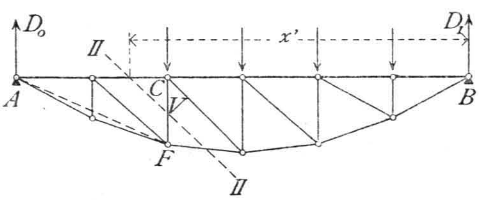
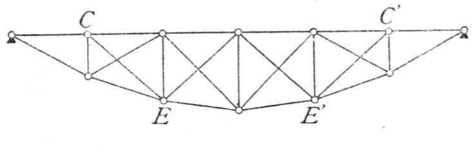


Fig. 220.



In der Verticalen CF findet Maximaldruck bei der in Fig. 219 gezeichneten Belaftung ftatt. D_0 ift hier gleich derjenigen Ordinate der Curve in Fig. 218, welche zu x' gehört, d. h. gleich rs. Nun wird genau wie oben zerlegt. Es wird $V_{min} = ut$. Eben fo ift der Maximalzug in CF zu ermitteln.

η) Träger mit Gegendiagonalen. Jede Diagonale erleidet durch die mobile Belaftung fowohl Zug, wie Druck; durch das Eigengewicht entfteht in den Diagonalen die Spannung Null; die refultirende Spannung ift alfo identifch mit derjenigen durch die mobile Belaftung. Sollen nur gezogene Diagonalen vorkommen, fo wird nach Art. 390, S. 356 in jedem Felde eine Gegendiagonale angeordnet werden müffen. Man erhält die in Fig. 220 gezeichnete Trägerform. Die Gegendiagonale $C'E'$ wird genau eben fo beanfprucht werden, wie die fymmetrifch zur Mitte liegende Hauptdiagonale CE des Trägers mit einfeitig fallenden Diagonalen. Daffelbe gilt von allen Gegendiagonalen; es wird alfo die Berechnung eines Trägers mit nach einer Richtung fallenden Diagonalen genügen.

399. Träger mit Gegendiagonalen.

Beifpiel. Ein als Unterzug dienender Parabelträger mit gerader oberer und gekrümmter unterer Gurtung hat die nachfolgenden Hauptabmeffungen und Belaftungen: Stützweite $l = 12{,}0$ m; Pfeilhöhe $h = 1{,}20$ m; Feldweite $a = 1{,}0$ m; Eigengewicht der Conftruction pro lauf. Meter des Trägers $g = 320$ kg, alfo pro Knotenpunkt $ga = 320$ kg; mobile Belaftung pro lauf. Meter des Trägers $p = 1280$ kg, alfo pro Knotenpunkt $pa = 1280$ kg. Der Träger hat ein aus Verticalen und Diagonalen beftehendes Gitterwerk; die Diagonalen fallen beiderfeits nach der Mitte zu; der Träger ift alfo zur Mitte fymmetrifch angeordnet. Es find die in den einzelnen Stäben entftehenden Spannungen zu ermitteln. Wegen der Symmetrie des Trägers brauchen wir nur die Spannungen in den Stäben links der Mitte zu beftimmen; die fymmetrifch zur Mitte liegenden Stäbe erhalten gleiche Beanfpruchungen.

400. Beifpiel.

1) Form der unteren Gurtung. Die Parabelordinaten ergeben fich nach Gleichung 231. aus der Relation $y = \frac{4 \cdot 1{,}2}{144} x (12 - x) = 0{,}033\, x (12 - x)$.

Man erhält für

$x = 1$ m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m	7 m	8 m	9 m	10 m	11 m
$y = 0{,}36$ m	0,66 m	0,89 m	1,06 m	1,16 m	1,2 m	1,16 m	1,06 m	0,89 m	0,66 m	0,36 m

2) Spannungen in der oberen Gurtung. Durch das Eigengewicht, bezw. totale mobile Belaftung entfteht in fämmtlichen Stäben der oberen Gurtung eine Spannung nach Gleichung 241.

$$H_g = -\frac{320 \cdot 12^2}{8 \cdot 1{,}2} = -4800 \text{ kg} \quad \text{und} \quad H_p = -\frac{1280 \cdot 12^2}{8 \cdot 1{,}2} = -19\,200 \text{ kg}.$$

H_p ift zugleich die gröfste durch mobile Belaftung entftehende Spannung.

3) Spannungen in der unteren Gurtung. Nach Gleichung 240. find die durch Eigengewicht, bezw. totale mobile Belaftung erzeugten Spannungen aus der Relation zu finden:

$$Z_g = 4800 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \quad \text{und} \quad Z_p = 19\,200 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - p}{a}\right)^2}.$$

Hiernach erhält man:

Stab Nr.	y'	y	$\frac{y'-y}{a}$	$\sqrt{1+\left(\frac{y'-y}{a}\right)^2}$	Z_g	Z_p
1	0,36	0,0	0,36	1,063	5102	20 410
2	0,66	0,36	0,30	1,044	5011	20 045
3	0,89	0,66	0,23	1,026	4925	19 699
4	1,06	0,89	0,17	1,014	4867	19 469
5	1,16	1,06	0,10	1,005	4824	19 296
6	1,20	1,16	0,04	1,008	4804	19 216
	Meter				Kilogr.	

Die Werthe Z_p find zugleich die gröfsten durch mobile Belaftung entftehenden Spannungen.

4) Spannungen in den Diagonalen. Die Spannungen durch das Eigengewicht find nach Art. 396, S. 362 gleich Null. Die durch mobile Belaftung erzeugten Maximal- und Minimalfpannungen find für die Diagonalen links der Mitte nach Gleichung 244. und 245.

$$Y_{max} = \frac{1280}{2 \cdot 12}(x^2 - 0{,}25)\frac{c}{\eta} = 53{,}33 \frac{c}{\eta}(x^2 - 0{,}25) \text{ und } Y_{min} = -53{,}33\left[(l-x)^2 - 0{,}25\right]\frac{l+c}{\eta}.$$

Die Gröfsen c und η können berechnet oder conftruirt werden; die Werthe für c werden beffer berechnet, weil die Zeichnung wegen der fpitzen Schnittwinkel der Gurtungsftabrichtungen keine genauen Refultate ergiebt. Man erhält mit Hilfe ähnlicher Dreiecke leicht:

$$\frac{c_2 + a}{y_1} = \frac{a}{y_2 - y_1}; \quad \frac{c_3 + 2a}{y_2} = \frac{a}{y_3 - y_2}; \quad \frac{c_4 + 3a}{y_3} = \frac{a}{y_4 - y_3};$$

$$\frac{c_5 + 4a}{y_4} = \frac{a}{y_5 - y_4} \quad \text{und} \quad \frac{c_6 + 5a}{y_5} = \frac{a}{y_6 - y_5}.$$

Die Werthe für η können in ähnlicher Weife leicht berechnet werden; doch können, befonders wenn c berechnet und der Schnittpunkt entfprechend den Rechnungsrefultaten aufgetragen wird, die η mit hinreichender Genauigkeit conftruirt werden. Die Werthe für c, η, x, Y_{max} und Y_{min} find in nachftehender Tabelle zufammengeftellt.

Diagonale Feld-Nr.	c	η	x	Y_{max}	Y_{min}
2	0,2	0,66	10,5	+ 1777	− 1971
3	0,87	1,91	9,5	+ 2186	− 2156
4	2,23	3,8	8,5	+ 2304	− 2396
5	6,6	8,03	7,5	+ 2449	− 2460
6	24	22,3	6,5	+ 2410	− 2582
	Meter			Kilogr.	

Nach Art. 397, S. 365 müffen die abfoluten Werthe der Y_{max} und Y_{min} einander gleich fein; dies ift hier nicht der Fall, und es hat dies feinen Grund darin, dafs nicht die genauen Parabelordinaten der Berechnung zu Grunde gelegt find, fondern eine Abrundung auf zwei Decimalen ftattgefunden hat. Aus demfelben Grunde würden fich auch die durch das Eigengewicht erzeugten Spannungen nicht genau gleich Null ergeben, wenn man fie nach Gleichung 234. berechnete. Immerhin ergeben fich diefe Spannungen fo gering, dafs fie vernachläffigt werden können.

5) Spannungen in den Verticalen. Durch das Eigengewicht entfteht in jeder Verticalen nach Art. 396, S. 363 der Druck $V = -320$ kg. Die durch mobile Belaftungen in den Verticalen links der Mitte erzeugten Maximalfpannungen find nach Gleichung 247.

$$V_{min} = -53{,}33\,(x^2 - 0{,}25)\frac{c_1}{\lambda + c_1} \quad \text{und} \quad V_{max} = +53{,}33\left[(l-x)^2 - 0{,}25\right]\frac{12 + c_1}{\lambda_1 + c_1}.$$

Man erhält für die verſchiedenen Verticalen die in folgender Tabelle zuſammengeſtellten Werthe von c_1, λ_1, x, $(l - x)$, V_{min} und V_{max}. Die 6. (die Mittel-)Verticale, an deren Fuſspunkt ſich die zwei Diagonalen der anſchlieſsenden Felder ſchneiden, kann nicht nach den obigen Gleichungen berechnet werden, da die dort für den Schnitt gemachten Vorausſetzungen hier nicht zutreffen. Nachdem im oberen Knotenpunkte derſelben keine Diagonale anſetzt, ſo kann dieſelbe nur die Kräfte aufnehmen, welche direct in derſelben wirken, d. h. der gröſste Druck iſt gleich der Knotenpunktsbelaſtung daſelbſt.

Verticale Nr.	c_1	λ_1	x	$l - x$	V_{min}	V_{max}
1	0,2	1,0	11,5	0,5	— 1173	0
2	0,87	2,0	10,5	1,5	— 1778	+ 478
3	2,23	3,0	9,5	2,5	— 2047	+ 870
4	6,60	4,0	8,5	3,5	— 2391	+ 1123
5	24	5,0	7,5	4,5	— 2469	+ 1324
6	—	—	—	—	— 1280	0
	Meter				Kilogr.	

6) Zur Beſtimmung der Querſchnitte nach der neueren Methode (ſiehe Art. 283 bis 287, S. 248 bis 252) ergeben ſich dann für die einzelnen Stäbe die in der folgenden Tabelle angegebenen Werthe von P_0, P_1 und P_2:

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen.				Verticalen: Druck überwiegt			
Stab Nr.	P_0	P	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1	— 4800	— 19 200	1	5102	20 410					1	— 320	— 1173	0
2	— 4800	— 19 200	2	5011	20 045	2	0	+ 1777	— 1971	2	— 320	— 1778	+ 478
3	— 4800	— 19 200	3	4925	19 699	3	0	+ 2186	— 2156	3	— 320	— 2047	+ 870
4	— 4800	— 19 200	4	4867	19 469	4	0	+ 2304	— 2396	4	— 320	— 2391	+ 1123
5	— 4800	— 19 200	5	4824	19 296	5	0	+ 2449	— 2460	5	— 320	— 2469	+ 1324
6	— 4800	— 19 200	6	4804	19 216	6	0	+ 2410	— 2582	6	— 320	— 1280	0
7	— 4800	— 19 200	7	4804	19 216	7	0	+ 2410	— 2582	7	— 320	— 2469	+ 1324
8	— 4800	— 19 200	8	4824	19 296	8	0	+ 2449	— 2460	8	— 320	— 2391	+ 1123
9	— 4800	— 19 200	9	4867	19 469	9	0	+ 2304	— 2396	9	— 320	— 2047	+ 870
10	— 4800	— 19 200	10	4925	19 699	10	0	+ 2186	— 2156	10	— 320	— 1778	+ 478
11	— 4800	— 19 200	11	5011	20 045	11	0	+ 1777	— 1971	11	— 320	— 1173	0
12	— 4800	— 19 200	12	5102	20 410								
	Kilogr.			Kilogr.			Kilogramm.				Kilogramm.		

In die Gleichungen 15., 18., 21. u. 24. ſind die abſoluten Zahlenwerthe für P_0, P_1, P_2 einzuſetzen; es folgt dies aus der Entwickelung derſelben.

6) Dreieckträger.

Dreieck- und Trapezträger ſind, wie bereits in Art. 374, S. 338 geſagt wurde, Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bezw. ein Paralleltrapez bilden. Die eine

Fig. 221.

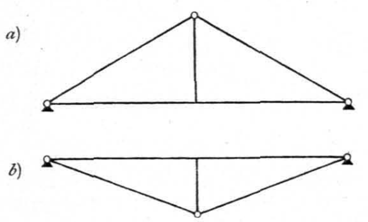
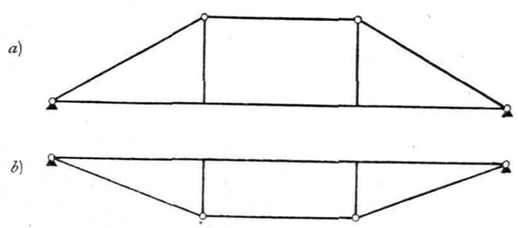


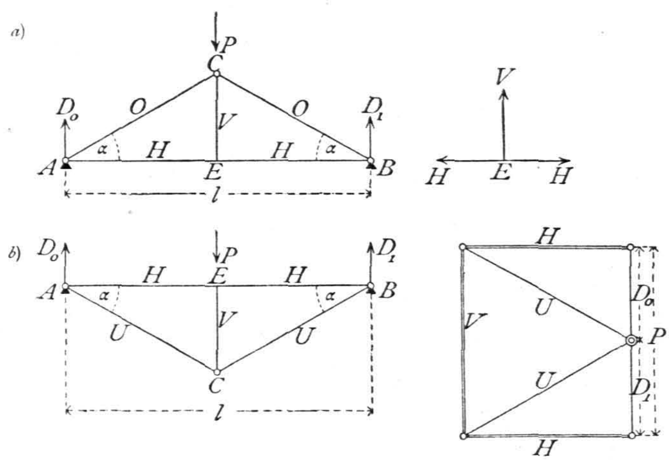
Fig. 222.



Gurtung zeigt eine gerade, die andere eine gebrochene Linie. Iſt die untere Gurtung gerade, ſo erhält man die unter dem Namen des einfachen, bezw. doppelten Hängebockes bekannte Trägerform (Fig. 221 *a*, bezw. 222 *a*) — nicht zu verwechſeln mit den Hängewerksträgern, welche nach Art. 357, S. 315 von der hier betrachteten weſentlich verſchieden ſind. Iſt die obere Gurtung gerade, ſo erhält man die unter dem Namen des armirten Balkens bekannte Trägeranordnung (Fig. 221 *b* u. 222 *b*).

401. Concentrirte Belaſtung. α) Concentrirte Belaſtung (Fig. 223). Wenn im Mittelknotenpunkte C oder in dem Knotenpunkte E des Hängebockes (Fig. 223 *a*) die Laſt P wirkt, ſo wird die Auflager-Reaction $D_0 = D_1 = \frac{P}{2}$. Die im Punkte A wirkenden 3 Kräfte D_0, O und H halten einander im Gleichgewicht, und es ſind demnach die algebraiſchen Summen der in dieſem Knotenpunkte wirkenden Horizontalcomponenten, bezw. Verticalcomponenten je gleich Null, d. h. es iſt

Fig. 223.



$$0 = D_0 + O \sin \alpha, \quad \text{woraus} \quad O = -\frac{P}{2 \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 248.$$

$$0 = O \cos \alpha + H, \quad \text{woraus} \quad H = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 249.$$

Die Spannungen der ſymmetriſch zur Mitte liegenden Stäbe ſind gleich.

Falls die Laſt P im Punkte C angreift, ſo ergiebt ſich als Gleichgewichtsbedingung für den Punkt E die Relation $0 = V$; falls P in E angreift, ſo heiſst die Gleichgewichtsbedingung $0 = V - P$, woraus

$$V = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 250.$$

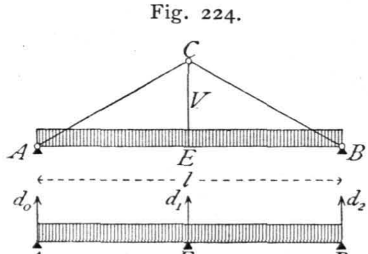
Eben ſo ergiebt ſich für den armirten Träger (Fig. 223 *b*):

$$U = \frac{P}{2 \sin \alpha} \; ; \; H = -\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad V = -P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 251.$$

Die Conſtruction der Spannungen ergiebt den Kräfteplan der Fig. 223, welcher ohne weitere Erläuterung verſtändlich iſt.

402. Gleichförmig vertheilte Belaſtung. β) Gleichförmig vertheilte, totale Belaſtung. Wird der Berechnung eine gleichförmig vertheilte Belaſtung zu Grunde gelegt, ſo iſt die totale Belaſtung auch die ungünſtigſte; denn jede Laſt, wo ſie auch liegen möge, erzeugt in A und B (Fig. 224) Auflager-Reactionen, alſo in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denen der unteren Gurtung Zug. Bei dieſer Belaſtung iſt AEB wie ein continuirlicher Balken auf 3 Stützen A, E und B aufzufaſſen; die Mittelſtütze wird durch die Hängeſäule CE gebildet. In derſelben entſteht demnach ein Zug, welcher nach dem Principe von Wirkung

Fig. 224.



und Gegenwirkung genau fo grofs ift, wie die Auflager-Reaction bei der Mittelftütze E des continuirlichen Trägers AEB. Nach der Zufammenftellung in Art. 372, S. 337 ift diefelbe hier $d_1 = 1{,}25\, p \frac{l}{2} = \frac{5}{8} p\, l$, während $d_0 = d_2 = 0{,}375\, p \frac{l}{2} = \frac{3}{16} p\, l$ ift; die letzteren Drücke werden vom Auflager aufgenommen und belaften das Syftem nicht. Die Stabfpannungen werden demnach die sub α gefundenen Werthe haben, wenn ftatt P die Gröfse $\frac{5}{8} p\, l$ eingefetzt wird. Es wird alfo beim Hängebock

$$V = P = \frac{5}{8} p\, l,\quad O = -\frac{5}{16} \frac{p\, l}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad H = \frac{5}{16} \frac{p\, l}{\operatorname{tg} \alpha} \quad . \quad . \quad 252.$$

Eben fo ergiebt fich im armirten Balken für diefe Belaftungsart

$$H = -\frac{5}{16} \frac{p\, l}{\operatorname{tg} \alpha},\quad U = \frac{5}{16} \frac{p\, l}{\sin a} \quad \text{und} \quad V = -\frac{5}{8} p\, l \quad . \quad . \quad 253.$$

In der geraden Gurtung AEB wirkt alfo die Zug-, bezw. Druckfpannung $H = \pm \frac{5}{16} \frac{p\, l}{\operatorname{tg} \alpha}$; da aber diefe gerade Gurtung gleichzeitig als continuirlicher Träger zum Uebertragen der Laften auf die Knotenpunkte dient, fo wirken in derfelben auch noch die Momente und Transverfalkräfte, welche in den verfchiedenen Querfchnitten des continuirlichen Trägers AEB entftehen. Nach der Zufammenftellung in Art. 372, S. 337 findet das Maximalmoment am Mittelauflager ftatt, und es ift daffelbe

$$M_1 = 0{,}125\, p \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{p\, l^2}{32}.$$

γ) Querfchnittsbeftimmung. Die Querfchnitte der nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Stäbe ergeben fich leicht, wie in den Art. 281 ff., S. 247 ff. und im vorhergehenden Kapitel angegeben ift. Der Querfchnitt der geraden Gurtung AEB ift für die combinirte Beanfpruchung durch Zug, bezw. Druck und die Momente zu conftruiren. Wird der ganze Querfchnitt (für Holz) als conftant angenommen, fo ift das gröfste im Balken wirkende Moment der Berechnung zu Grunde zu legen. An der Stelle des Maximalmoments M_{max} ift die gröfste in der äufserften Fafer ftattfindende Axialfpannung pro Flächeneinheit nach Art. 296, S. 261 — 403. Querfchnitts-beftimmung.

$$N_{max} = \pm \left(\frac{H}{F} + \frac{M_{max}\, a}{\mathfrak{J}}\right).$$

Beim Rechteckquerfchnitt ift $F = b\, h$, $\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{b\, h^2}{6}$, und wenn noch ftatt N_{max} die gröfste zuläffige Spannung K eingeführt wird, fo ergiebt fich als Bedingungsgleichung für den Querfchnitt:

$$K = \pm \left(\frac{H}{b\, h} + \frac{6\, M_{max}}{b\, h^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 254.$$

In diefer Gleichung find b und h unbekannt. Man nimmt praktifch zunächft für b einen Werth probeweife an und beftimmt h aus Gleichung 254.; ergiebt fich für h eine unpraktifche Gröfse, fo nehme man für b einen anderen Werth an und beftimme wiederum h nach Gleichung 254. Es werden fich meiftens bei der zweiten Rechnung entfprechende Werthe für b und h ergeben.

7) Trapezträger.

α) Concentrirte Belaftungen. Für die Belaftungen in Fig. 225 a find die Auflager-Reactionen beim Hängebock — 404. Concentrirte Belaftungen.

$$D_0 = \frac{P_2\, a + P_1\, (a + b)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P_1\, a + P_2\, (a + b)}{l}.$$

Die Stabfpannungen ergeben fich dann durch Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte, wie folgt:

$$0 = D_0 + O_1 \sin \alpha, \text{ woraus } O_1 = -\frac{P_2\, a + P_1\, (a + b)}{l \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 255.$$

$$0 = O_1 \cos\alpha + U_1, \text{ woraus } U_1 = \frac{P_2\, a + P_1\,(a+b)}{l \operatorname{tg}\alpha} = [P_2\, a + P_1\,(a+b)]\,\frac{a}{l\,h} \qquad 256.$$

$$0 = U_1 - U_2, \text{ woraus } U_2 = U_1 = [P_2\, a + P_1\,(a+b)]\,\frac{a}{l\,h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 257.$$

$$0 = D_1 + O_3 \sin\alpha, \text{ woraus } O_3 = -\frac{P_1\, a + P_2\,(a+b)}{l \sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 258.$$

$$0 = U_3 + O_3 \cos\alpha, \text{ woraus } U_3 = \frac{P_1\, a + P_2\,(a+b)}{l \operatorname{tg}\alpha} = [P_1\, a + P_2\,(a+b)]\,\frac{a}{l\,h} \qquad 259.$$

$$0 = O_2 - O_3 \cos\alpha, \text{ woraus } O_2 = -\frac{P_1\, a + P_2\,(a+b)}{l \operatorname{tg}\alpha} = -[P_1\, a + P_2\,(a+b)]\,\frac{a}{l\,h} \qquad 260.$$

$0 = V_1$ (falls die Laſt P_1 in C wirkt, ſo iſt $V_1' = P_1$) . . . . 261.

$$0 = P_2 + V_2 + O_3 \sin\alpha, \text{ woraus } V_2 = (P_1 - P_2)\,\frac{a}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 262.$$

(Falls die Laſt P_2 in E wirkt, ſo wird

$$0 = V_2' + O_3 \sin\alpha, \text{ woraus } V_2' = \frac{P_1\, a + P_2\,(a+b)}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 263).$$

$$0 = U_2 + Y \cos\beta - U_3, \text{ woraus } Y = -\frac{U_2 - U_3}{\cos\beta} = -\frac{a\,b}{l\,h \cos\beta}\,(P_1 - P_2),$$

$$Y = +(P_2 - P_1)\,\frac{a}{l \sin\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 264.$$

Falls die Laſten in der unteren Gurtung, in C und E, angreifen, ſo wird

$$Y' \sin\beta + V_2' - P_2 = 0, \text{ woraus } Y' = \frac{P_2 - V_2'}{\sin\beta} = \frac{P_2}{\sin\beta} - \frac{P_1\, a + P_2\,(a+b)}{l \sin\beta}$$

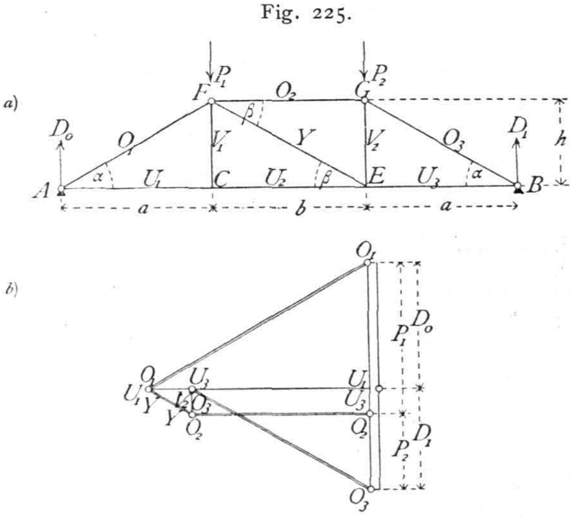
$$Y' = (P_2 - P_1)\,\frac{a}{l \sin\beta}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 265.$$

d. h. eben ſo groſs, wie in Gleichung 264.

Wenn, wie meiſtens, $P_1 = P_2 = P$ iſt, wird

$$\left.\begin{aligned} O_1 &= -\frac{P}{\sin\alpha};\; U_1 = \frac{P\,a}{h} = U_2;\; O_2 = -\frac{P\,a}{h};\; O_3 = -\frac{P}{\sin\alpha}; \\ U_3 &= \frac{P\,a}{h};\; V_1 = 0;\; V_2 = 0;\; Y = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; 266.$$

Fig. 225.



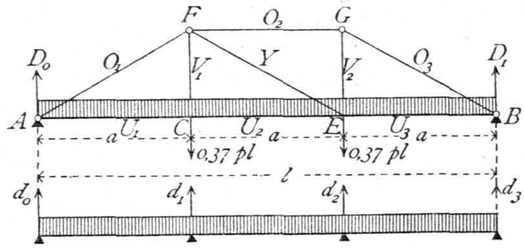
Die Conſtruction ergiebt neben ſtehenden, ohne Erklärung verſtändlichen Kräfteplan (Fig. 225 *b*).

Was den armirten Balken (Fig. 222 *b*) anbelangt, ſo ſind bei dieſem die Spannungen ſowohl in der oberen, wie in der unteren Gurtung den ſoeben für die gerade, bezw. gebrochene Gurtung des doppelten Hängebockes gefundenen Spannungen der abſoluten Gröſse nach gleich, dem Sinne nach entgegengeſetzt. Die Werthe derſelben können demnach aus den Gleichungen 255. bis 260. durch Umkehrung der Vorzeichen genommen werden. Die Spannungen in der Diagonalen und in den Verticalen ergeben fich leicht durch Betrachtung des Gleichgewichtes der einzelnen Knotenpunkte, wie beim doppelten Hängebock gezeigt ift.

405. Gleichförmig vertheilte Belaftung.

β) Gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Belaftung (Fig. 226). Jede Belaftung erzeugt in den Stäben der unteren Gurtung Zug, in denjenigen der oberen Gurtung Druck, wie fich aus den Gleichungen 255. bis 260. ergiebt. Maximalzug, bezw. -Druck findet alfo in den Gurtungen bei Belaftung des ganzen Trägers ftatt.

Fig. 226.



Die untere Gurtung wirkt, wenn keine Gelenke in den Knotenpunkten derfelben angenommen werden, wie ein continuirlicher Balken auf 4 Stützen. Die Endftützen find A und B; die Mittelftützen werden durch die Verticalen FC und GE gebildet. Wird $a = b$ gefetzt, fo ergiebt fich bei Belaftung des ganzen Trägers mit der Laft p pro Längeneinheit als Auflager-Reaction der Mittelftützen nach der Zufammenftellung in Art. 372, S. 337 $d_1 = d_2 = 1{,}1 \; \frac{p\,l}{3} \; = 0{,}37\,p\,l$. Eben fo grofs ift die Laft, welche in den Knotenpunkten C und E des Syftemes nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung nach unten wirkt. Werden diefe Werthe für P_1 und P_2 in die obigen Gleichungen eingeführt, fo ergiebt fich

$$\left.\begin{array}{l} O_1 = - \dfrac{0{,}37\,p\,l}{\sin\alpha}; \; U_1 = 0{,}37\,p\,l\,\dfrac{a}{h}; \; O_2 = -\,0{,}37\,p\,l\,\dfrac{a}{h}; \; O_3 = - \dfrac{0{,}37\,p\,l}{\sin\alpha}; \\ U_2 = 0{,}37\,p\,l\,\dfrac{a}{h}; \; U_3 = 0{,}37\,p\,l\,\dfrac{a}{h}; \; V_1 = 0{,}37\,p\,l; \; V_2 = 0{,}37\,p\,l; \; Y = 0 \end{array}\right\} . \quad 267.$$

Die hier gefundenen Spannungen O und U find die Maximalfpannungen, welche durch gleichförmig vertheilte mobile Belaftung entftehen; wird ftatt p das Eigengewicht g pro Längeneinheit eingeführt, fo ergeben fich die durch das Eigengewicht entftehenden Stabfpannungen.

406. Ungünftigfte Beanfpruchung der Gitterftäbe.

γ) Ungünftigfte Beanfpruchung der Diagonale und der Verticalen. Den allgemeinen Ausdruck für die Diagonalfpannung giebt die Gleichung 264. Y wird feinen gröfsten pofitiven Werth (Zug) haben, wenn P_2 möglichft grofs, P_1 möglichft klein ift; Y wird feinen gröfsten negativen Werth (Druck) erreichen, wenn P_2 möglichft klein, P_1 möglichft grofs ift. Wird als mobile Belaftung eine gleichmäfsig vertheilte Laft eingeführt, fo kann man, wenn $a = b$ ift, mit für die Zwecke des Hochbaues hinreichender Sicherheit annehmen, dafs die Diagonale den gröfsten Zug erleidet, wenn der Punkt E am Fufspunkte derfelben mit $p\,a + 0{,}37\,g\,l$ belaftet ift, der Punkt C (in der Verticalen des Kopfes der Diagonalen) nur das Eigengewicht $0{,}37\,g\,l$ trägt. Bei der umgekehrten Belaftung dagegen erleidet die Diagonale ihren gröfsten Druck. Demnach wird

$$Y_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{p\,a^2}{l \sin\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 268.$$

Ferner ift hier, wo die Laften unten wirken, $V_1 = P_1$, d. h.

$$V_{1_{max}} = (g + p)\; 0{,}37\; l \quad \text{und} \quad V_{1_{min}} = 0{,}37\; g\,l \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 269.$$

Dieſelben Werthe ergeben ſich für V_2; denn es iſt nach Gleichung 263. für die Belaſtung der unteren Knotenpunkte $V'_2 = \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l}$; da nun $V_{2_{max}}$ für $P_1 = P_2 = 0{,}37\ (g + p)\ l$ eintritt, wird

$$V_{2_{max}} = 0{,}37\ (g + p)\ l \quad \text{und} \quad V_{2_{min}} = 0{,}37\ g\ l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 270$$

407. Querſchnittsbeſtimmung.

δ) Die Querſchnittsbeſtimmung iſt in genau gleicher Weiſe vorzunehmen, wie dies in Art. 403, S. 371 beim Dreieckträger gezeigt iſt. Die Maximalmomente in der geraden Gurtung finden bei C und E ſtatt und ſind für $a = b$ nach der Zuſammenſtellung in Art. 372, S. 337 $M = p\left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{10} = \frac{p l^2}{90}$. Die Dimenſionen b und h des rechteckigen Querſchnittes (für Holz) ſind demnach aus der Gleichung zu beſtimmen:

$$N_{max} = K = \pm\left(\frac{U}{b\,h} + \frac{6\,M_{max}}{b\,h^2}\right).$$

Die Dreieck- und Trapezträger mit einer gröſseren Anzahl von Laſtpunkten werden durch Einfügen von ſecundären Dreiecken in die oben (Fig. 221 u. 222) dargeſtellten Trägerformen hergeſtellt. Die Berechnung iſt der vorſtehenden analog, kann aber auch bequem nach der Momentenmethode vorgenommen werden.

---

3. Abſchnitt.

Dachſtühle.

408. Dachbinder.

Den weſentlichen und charakteriſtiſchen Theil der Dachſtühle bilden die ſog. Dachbinder; ſie ſind die Hauptträger der Dachconſtructionen und haben die übrigen Theile derſelben, wie Pfetten, Sparren etc. [167]) zu tragen. Sie werden in beſtimmten Entfernungen von einander angeordnet.

Im vorliegenden Abſchnitt werden wir uns mit der Berechnung der Dachbinder beſchäftigen. Was die Querſchnittsermittelung der Pfetten, der Sparren, des Windverbandes etc. betrifft, ſo iſt einerſeits in den beiden vorhergehenden Abſchnitten bereits das Erforderliche vorgeführt worden; andererſeits wird im III. Theile dieſes »Handbuches« (Band 3, Abſchn. 2, E: Dachſtuhl-Conſtructionen) nochmals auf dieſen Gegenſtand zurückgekommen werden.

Bei den meiſten Dachconſtructionen iſt jeder Binder unter dem Einfluſſe der äuſseren Kräfte für ſich ſtabil; eine Ausnahme machen die neueren Kuppeldächer und gewiſſe Arten von Zeltdächern, bei denen alle Binder zuſammen ein im Gleichgewicht befindliches Syſtem bilden.

Für die Gröſse der Belaſtungen, welche der Berechnung zu Grunde zu legen ſind, iſt die Stellung der Binder zu einander von groſser Wichtigkeit. Die Binder ſind entweder einander parallel geſtellt, oder ſie convergiren gegen einander. Im erſten Falle iſt die Belaſtung pro Längeneinheit des Binders auf der ganzen Binderlänge conſtant, im zweiten Falle variabel, und zwar meiſtens nach dem Geſetze der geraden Linie.

---

[167]) Es kann hier nicht der Ort ſein, die Begriffe »Pfetten, Sparren etc.« zu definiren, eben ſo wenig als an dieſer Stelle auf die Erklärung der verſchiedenen Benennungen von Dächern, wie »Sattel-, Walm-, Pult-, Zelt-, Kuppel- etc. Dächer, eingegangen werden kann. Es ſei diesfalls auf Theil III. dieſes »Handbuches« (Bd. 3, Abſchn. 2, D: Dächer und Dachformen) verwieſen.