

Hiernach betragen die Auflager-Reactionen (Fig. 159)

$$D_0 = \frac{p l}{2} + \sum_0^l \left( \frac{P \xi}{l} \right) \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{p l}{2} + \sum_0^l \left[ \frac{P(l - \xi)}{l} \right] \quad \dots \quad 162.$$

Die Transversalkraft für einen Punkt  $G$  mit der Abciffen  $x_1$  ist

$$Q_{x_1} = D_0 - P_1 - p x_1 = \sum_0^{x_1} \left( \frac{P \xi}{l} \right) - \sum_0^{x_1} (P) + \frac{p}{2} (l - 2 x_1) \quad \dots \quad 163.$$

und für den Punkt  $L$  mit der Abciffen  $x_2$

$$Q_{x_2} = D_0 - P_1 - P_2 - p x_2 = \sum_0^{x_2} \left( \frac{P \xi}{l} \right) - \sum_0^{x_2} (P) + \frac{p}{2} (l - 2 x_2).$$

Das Moment für den Punkt  $G$  ist

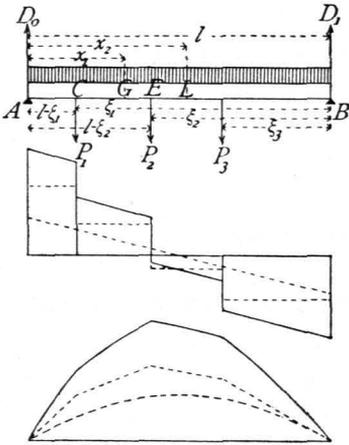
$$M_{x_1} = D_0 x_1 - P_1(x_1 - l + \xi_1) - \frac{p x_1^2}{2} = \sum_0^{x_1} \left( \frac{P \xi}{l} \right) x_1 - \sum_0^{x_1} [P(x_1 - l + \xi)] + \frac{p}{2} (l x_1 - x_1^2) \quad 164.$$

und für den Punkt  $L$

$$M_{x_2} = D_0 x_2 - P_1(x_2 - l + \xi_1) - P_2(x_2 - l + \xi_2) - \frac{p x_2^2}{2},$$

$$M_{x_2} = \sum_0^{x_2} \left( \frac{P \xi}{l} \right) x_2 - \sum_0^{x_2} [P(x_2 - l + \xi)] + \frac{p}{2} (l x_2 - x_2^2) \quad \dots \quad 165.$$

Fig. 159.



Die graphische Darstellung der in den verschiedenen Querschnitten stattfindenden Transversalkräfte und Momente wird gleichfalls erhalten, indem man die bei den einzelnen Belastungsarten sich ergebenden Ordinaten der bezüglichen Darstellungen algebraisch addirt. Es ergeben sich die in Fig. 159 gezeichneten Linienzüge, in denen die positiven Werthe nach oben, die negativen nach unten abgetragen sind. Die punktirten Linien geben die Werthe von  $Q$  und  $M$  für Belastung nur durch Einzellasten, bezw. für gleichförmig vertheilte Last; die voll gezogenen Linien geben die Summen.

Die Ermittlung der Momente etc. auf graphischem Wege ergibt sich aus dem auf S. 321 Gefagten so einfach, daß darauf nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

2) Console-Träger.

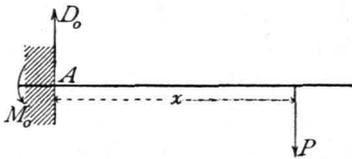
Console-Träger sind am einen Ende unterstützte, am anderen Ende freischwebende Träger. Als äußere Kräfte wirken auf dieselben die Belastungen und die Reactionen der Unterstüßungsstelle. Letztere lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Damit der Träger im Gleichgewicht sei, muß zunächst die algebraische Summe der Verticalkräfte gleich Null sein, d. h., wenn die verticale Componente der Reaction bei  $A$  (Fig. 160) gleich  $D_0$  ist, wird  $0 = D_0 - P$  oder

$$D_0 = P \quad \dots \quad 166.$$

Eine äußere horizontale Belastung sei nicht vorhanden; es wird also die Reaction keine horizontale Componente haben. Es muß aber auch die algebraische

364.  
Princip.

Fig. 160.



Summe der statischen Momente für einen beliebigen Punkt der Ebene, also etwa für  $A$ , gleich Null sein; mithin muß, da das Moment der gegebenen Kräfte für  $A$  nicht gleich Null ist,  $D_0$  aber für den Drehpunkt  $A$  kein statisches Moment hat, an der Unterstützungsstelle noch eine Anzahl von Kräften wirken, deren resultierendes Moment mit demjenigen der Belastungen zusammen die Summe Null ergibt. Bei  $A$  wirkt also ein Moment  $M_0$ , dessen Größe sich ergibt zu

$$M_0 = - P x \dots \dots \dots 167.$$

Dieses Moment, dessen Drehrichtung, wie das Vorzeichen anzeigt, derjenigen von  $P$  entgegengesetzt ist, kann auf verschiedene Weise erzeugt werden, am einfachsten durch Einmauerung, bezw. Einspannung des Balkens.

Soll für jede Belastungsart Gleichgewicht vorhanden sein, so muß der Balken derart eingemauert werden, daß das von der Mauer geleistete Moment auch die größten Werthe des Momentes der Belastungen aufheben kann. Das Moment der Mauer wird durch das über dem eingemauerten Balkentheile liegende Mauergewicht geleistet, wonach dieses eventuell zu bestimmen ist.

Auch in anderer Weise kann ein Moment in  $A$  erzeugt werden, z. B. dadurch, daß der Balken über den Punkt  $A$  hinaus, bis zu einer zweiten Stütze  $B$  verlängert wird, in welchem Falle die Belastung des Balkentheiles  $AB$  das Moment  $M_0$  leistet.

Die Console-Träger sind statisch bestimmt, da die beiden Unbekannten: die Auflager-Reaction  $D_0$  und das Moment  $M_0$ , nach den Gesetzen der Statik ermittelt werden können. Wir suchen im Folgenden die Auflager-Reaction, die Transversalkräfte und die Momente, wie beim Balkenträger auf zwei Stützen, und unterscheiden betreff der Belastungsart drei Fälle.

Erster Fall: Der Console-Träger wird durch beliebige Einzellaften belastet.

365.  
Belastung  
durch  
Einzellaften.

a) Berechnung. Die freie Balkenlänge  $AB$  (Fig. 161) sei  $= l$ ; alsdann ist die Auflager-Reaction

$$D_0 = P_1 + P_2 + P_3 = \sum_0^l (P) \dots \dots \dots 168.$$

und das Moment

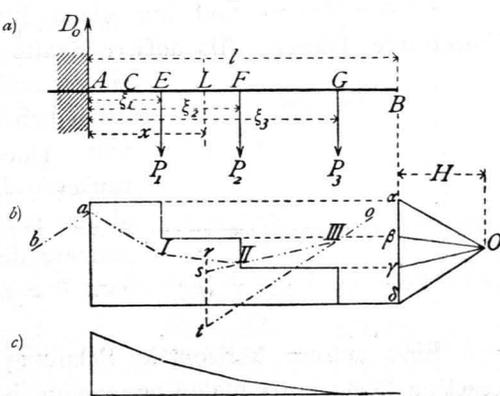
$$M_0 = - (P_1 \xi_1 + P_2 \xi_2 + P_3 \xi_3) = - \sum_0^l (P \xi) \dots \dots \dots 169.$$

Für einen beliebigen Querschnitt  $C$  zwischen  $A$  und  $E$  ist die Transversalkraft  $Q = D_0 - \sum (P)$ ; diesen Werth hat  $Q$  für alle Punkte zwischen  $A$  und  $E$ . Für irgend einen Querschnitt  $L$  zwischen  $E$  und  $F$  ist  $Q_1 = D_0 - P_1$ ; fonach wird allgemein

$$Q = \sum_0^l (P) - \sum_0^x (P) = \sum_x^l (P) \dots \dots \dots 170.$$

Die Transversalkraft in jedem Querschnitte ist also gleich der Summe der zwischen diesem Querschnitte und dem freien Ende befindlichen Lasten.

Fig. 161.



Es folgt dies schon aus der Definition der Transversalkraft. Als graphische Darstellung der Veränderung der Transversalkräfte ergibt sich die umflehende Construction (Fig. 161 b).

Für einen beliebigen Punkt  $L$  mit der Abscisse  $x$  wird das Moment  $M = - [P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x)]$ ; allgemein wird sonach

$$M = - \sum_x^l [P (\xi - x)] \dots \dots \dots 171.$$

Die graphische Darstellung der Momente zwischen zwei Lastpunkten ist also eine Gerade, wie in Fig. 161 c gezeichnet.

β) Graphische Ermittlung. Man construirt das Kraftpolygon  $\alpha \beta \gamma \delta \alpha$  und das Seilpolygon  $a III III 0$ , letzteres für eine beliebige Poldistanz  $H$ . Da  $D = \delta \alpha$  ist, so ergeben sich die verschiedenen Werthe von  $Q$  leicht, wie in Fig. 161 angegeben.

Für den Punkt  $L$  ist

$$M = - [P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x)].$$

Nun ist  $\Delta s t III \sim \Delta \gamma \delta O$ , d. h.  $\frac{\overline{st}}{\xi_3 - x} = \frac{\gamma \delta}{H} = \frac{P_3}{H}$  und  $H \cdot \overline{st} = P_3 (\xi_3 - x)$ ; weiters ist  $\Delta r s II \sim \Delta \beta \gamma O$ , d. h.  $\frac{\overline{rs}}{\xi_2 - x} = \frac{\beta \gamma}{H} = \frac{P_2}{H}$  und  $H \cdot \overline{rs} = P_2 (\xi_2 - x)$ . Hiernach wird abfolut genommen

$$M = P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x) = H (\overline{st} + \overline{rs}) = H \cdot \overline{rt}.$$

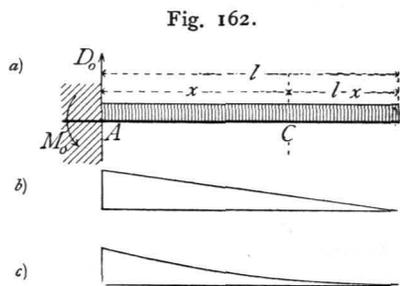
Das Moment ist gleich dem Product aus der Poldistanz in die verticale Höhe des Seilpolygons an der betreffenden Stelle, falls diese von der verlängerten Seilpolygonseite aus gerechnet wird, welche auf die dem Balkenende zunächst liegende Kraft folgt.

Das hier gefundene Resultat stimmt mit demjenigen des Art. 360, S. 322 überein; auch hier schließt das Seilpolygon; denn ein Kräftepaar, wie es hier bei  $A$  wirkt, ist eine unendlich kleine, unendlich ferne Kraft. Außer den Lasten  $P$  und der Auflager-Reaction  $D$  wirkt also noch eine unendlich ferne Kraft, deren Schnittpunkt mit der Seilpolygonseite  $ab$  aufzufuchen und mit  $III$  zu verbinden ist, um die Schlusslinie zu erhalten. Man sieht, die durch  $III$  parallel zu  $ab$  gezogene Seilpolygonseite ist die Schlusslinie.

Zweiter Fall: Der Console-Träger wird durch eine gleichförmig verteilte Last belastet.

Für den Auflagerpunkt  $A$  (Fig. 162) ergibt sich die Auflager-Reaction und das Moment mit

$$D_0 = pl \text{ und } M_0 = - \frac{p l^2}{2}; \dots 172.$$



für einen Punkt  $C$  mit der Abscisse  $x$  beträgt die Transversalkraft und das Moment

$$Q_x = p (l - x) \text{ und } M_x = - \frac{p (l - x)^2}{2} \dots 173.$$

Die graphische Darstellung der Werthe von  $Q$  ist eine Gerade; für  $x = 0$  ist  $Q_0 = pl$ , für  $x = l$  ist  $Q_l = 0$ . Diejenige der Werthe von  $M$  ist eine Parabel; für  $x = 0$  ist  $M_0 = - \frac{p l^2}{2}$ ; für  $x = l$  ist  $M_l = 0$ . Da ferner für  $x = l$  auch  $\frac{d M_x}{d x} = + p (l - x)$  Null wird, so ist die Abscissenaxe im Punkte  $x = l$  eine Tangente an die Parabel. Die Momente und Transversalkräfte sind in Fig. 162 c

366.  
Gleichförmig  
verteilte  
Belastung.

und 162 b graphisch dargestellt. Der größte Werth des Momentes und der Transversalkraft findet an derselben Stelle, an der Einspannungsfstelle statt.

Die graphische Ermittlung von  $D_0$ ,  $Q$  und  $M$  bietet hier keine Vortheile, ist auch leicht nach den für Einzellasten gegebenen Regeln vorzunehmen.

Dritter Fall: Der ConSOLE-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Belastung und durch Einzellasten belastet.

367.  
Gleichförmig  
vertheilte  
Last u.  
Einzellasten.

Die Auflager-Reactionen, Transversalkräfte und Momente ergeben sich als die Summe der bei den partiellen Belastungen stattfindenden Reactionen, Transversalkräfte und Momente. Es wird deshalb genügen, hier die Werthe anzugeben (Fig. 163):

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= P_1 + P_2 + P_3 + p l = \sum_0^l P + p l; \\ Q_x &= \sum_x^l P + p (l - x); \\ M_x &= - \sum_x^l [P (\xi - x)] - \frac{p (l - x)^2}{2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 174.$$

Eben so wird die Veränderlichkeit der  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt durch graphische Addition der für die Partialbelastungen sich ergebenden Werthe von  $Q$  und  $M$ .

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Balkonträger von 2 m freier Länge hat als Eigengewicht eine gleichmäsig vertheilte Belastung von 500 kg pro lauf. Meter und eine Nutzlast von 800 kg pro lauf. Meter zu tragen, außerdem noch das Gewicht der Brüstung mit 800 kg in 1,8 m Abstand von der Wand. Es ist demnach, wenn Alles auf Centimeter reducirt wird,  $g = 5$  kg,  $p = 8$  kg,  $P = 800$  kg,  $\xi = 180$  cm und  $l = 200$  cm.

Die Nutzlast habe nur eine Länge von 170 cm.

Als Berechnungsweite darf man in den meisten Fällen nicht die freie Länge bis zur Wand einführen, sondern muß diejenige bis zur Auflagermitte nehmen, welche hier etwa 25 cm hinter der Mauerkante liegen möge. Alsdann ist für den Punkt A (Fig. 164), wenn  $M_g$  das Maximalmoment für permanente,  $M_p$  dasjenige für mobile Last bezeichnet, abfolut genommen:

$$M_g = P(\xi + 25) + g l \left( \frac{l}{2} + 25 \right) = 800 \cdot 205 + 1000 \cdot 125 = 289\,000 \text{ kgcm},$$

$$M_p = p \cdot 170 \left( \frac{170}{2} + 25 \right) = 8 \cdot 170 \cdot 110 = 149\,600 \text{ kgcm}.$$

Der Querschnitt an der Stelle A ist so zu bestimmen, daß nach Gleichung 39. und 41. stattfindet

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{M_g}{K_1} + \frac{M_p}{(1 - \alpha_1) K_1} = \frac{289\,000}{1200} + \frac{149\,600}{720} = 448,6.$$

Nr. 26 der »Deutschen Normalprofile für I-Eisen« (siehe Seite 198) hat ein Widerstandsmoment  $\frac{\mathcal{F}}{a} = 446$  und dürfte für vorliegenden Fall ausreichend sein.

Fig. 163.

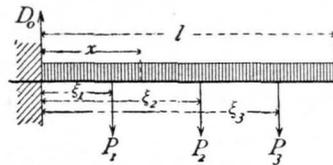
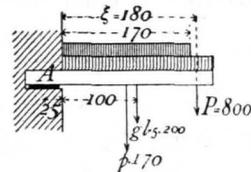


Fig. 164.



### 3) Continuirliche Gelenkträger.

Die Querschnittsgröße der Träger und damit die zu denselben gebrauchte Materialmenge ist wesentlich von der Größe der in den einzelnen Querschnitten stattfindenden Maximalmomente abhängig. Eine Verminderung der Momente hat auch eine Querschnittsverringerung zur Folge. Eine solche Verringerung der Momente wird den gewöhnlichen Trägern auf zwei Stützen gegenüber durch die fog. continuirlichen Gelenkträger erreicht, bei denen die Stützpunkte eines Theiles

368.  
Princip.