

Fall ist also statisch bestimmt. Sind dagegen drei Stützpunkte vorhanden, so haben wir drei Unbekannte (D_0 , D_1 und D_2), aber nur zwei Gleichungen, also einen statisch unbestimmten Fall.

Man nennt die Träger, welche mehr als zwei Stützpunkte haben, *continuirliche Träger*. Dieselben sind demnach statisch unbestimmte Träger.

Man hat von den statisch bestimmten, bezw. statisch unbestimmten Trägern wohl zu unterscheiden die statisch bestimmten, bezw. unbestimmten Systeme. Während es sich bei den ersteren um die Ermittlung der äußeren Kräfte handelt, ist bei den statisch bestimmten, bezw. unbestimmten Systemen die Frage, ob zur Ermittlung der inneren Kräfte die Gesetze der Statik fester Körper ausreichen oder nicht.

a) Äußere Kräfte der Balkenträger.

Die Querschnitte der Balken sind so zu bestimmen, daß die zulässigen Beanspruchungen auch unter ungünstigsten Bedingungen in keinem Theile der Querschnittsflächen je überschritten werden. Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde, sind aber für die in den einzelnen Fasern entstehenden Beanspruchungen oder Spannungen die äußeren Kräfte maßgebend, insbesondere zwei von den äußeren Kräften abhängige Größen: die Biegemomente, auch kurz Momente genannt, und die Transversalkräfte, bei nur verticalen Kräften wohl auch Verticalkräfte genannt (vergl. Art. 295, S. 257). Für jeden Querschnitt ergibt sich bei einer gegebenen Belastung ein ganz bestimmtes Moment und eine ganz bestimmte Transversalkraft. Wir haben bei den vertical belasteten Balkenträgern nur mit verticalen Kräften zu thun und werden demnach zunächst und, falls das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird, stets solche voraussetzen.

358.
Momente
und
Transversal-
kräfte.

Ferner werden wir die Transversalkräfte als positiv einführen, wenn sie auf den Trägertheil links von dem betrachteten Querschnitt nach oben, bezw. auf den Trägertheil rechts von dem betrachteten Querschnitt nach unten wirken; als negativ, wenn sie auf den Theil links nach unten, bezw. auf den Theil rechts nach oben wirken. Die Momente nennen wir positiv, wenn sie auf den Theil links vom Querschnitt nach rechts drehend, also in der Richtung des Uhrzeigers, bezw. auf den Theil rechts vom Querschnitt nach links drehend wirken, d. h. den Balken so zu drehen streben, daß er seine convexe Seite nach unten kehrt.* Die entgegengesetzte Drehrichtung werden wir als negativ einführen, d. h. diejenige Drehrichtung, welche den Balken in eine nach oben convexe Lage dreht.

Die Belastungen sind entweder nach einem bestimmten Gesetze *continuirlich* über den Träger vertheilt — im Hochbau meistens gleichmäßig über die Horizontalprojection der Trägeraxe, oder sie greifen in einzelnen Punkten als concentrirte Lasten an. Zu den gleichmäßig über die Horizontalprojection vertheilten Belastungen rechnen wir die Eigengewichte der Träger, welche Annahme genügend genau ist, auch wenn die Trägerquerschnitte nicht constant sind.

359.
Belastungen.

Für die gewöhnlichen Decken-Constructionen können die in nachfolgenden Tabellen angegebenen Eigengewichte angenommen werden¹⁶⁴⁾. Die Eigengewichte und mobilen Belastungen der Dächer folgen im nächsten Kapitel.

¹⁶⁴⁾ Nach: Heinzerling, F. Die angreifenden und widerstehenden Kräfte der Brücken- und Hochbau-Constructionen. 2. Aufl. Berlin 1876. S. 58 u. ff.
Deutscher Baukalender 1882.

Tabelle I.
Eigengewichte
von Decken-Constructionen (Zwifchendecken).

Bezeichnung der Construction	Entfernung der Balken von Mitte zu Mitte			
	0,90 ^m		1,20 ^m	
	Balkenstärke in Centim.			
	20×25	25×30	20×25	25×30
Balken mit Fussboden- dielen	61	81	56	66
Einfache Caffetten- Decke ohne Stuck	122	142	112	132
Einfache Caffetten- Decke mit halbem Windelboden und Stuck	279	330	305	376
Geftreckter Windel- boden mit Lehm	203	228	198	213
Halber Windelboden	254	305	279	345
Ganzer Windelboden	355	406	380	447

Kilogr. pro 1^{qm} Deckenfläche.

Tabelle II.
Mobile Belastungen
von Decken-Constructionen (Zwifchendecken).

Belastung	
in Wohnräumen	152
» Tanzsälen	253
» Heuböden	406
» Fruchtböden	457
» Waarenspeichern	760
durch Menschengedränge:	
genügende Annahme	400
größte Annahme	560

Kilogr. pro
1^{qm}
Decken-
fläche.

Das Gewicht der Windelböden erhöht sich für eine Zunahme der Balkenhöhe von je 2,5^{cm} um ca. 25^{kg} pro 1^{qm} Deckenfläche.

Tabelle III.
Gewichte der Decken-Constructionen einchl. der mobilen Belastung.

Art der Decke	Ge- wicht	Art der Decke	Ge- wicht
Balkenlage mit einfacher Dielung ohne Stakung	280	Gewölbte Decken zwischen eisernen Trä- gern, 1/2 Stein stark, mit Hintermauerung, Fussbodenlage und Dielung	750
desgl. gestakter Windelboden mit Lehm- Estrich	430	Dieselbe Decke ohne Fussboden	700
desgl. ausgefakt und verschalt in Wohn- häusern	500	dieselbe, 1/4 Stein stark, mit Fussboden	525
desgl. bei Tanzsälen	710	dieselbe, ohne Fussboden	485
desgl. in Werkstätten	760	Decke in Salzspeichern, wenn 3 Tonnen- reihen über einander liegen	800
desgl. mit ganzem Windelboden	580	Balkenlage in Kornspeichern	850
Dachbalkenlage in Wohngebäuden	735	Balkenlage in Wollspeichern	750

Kilogr.
pro 1^{qm}
Decken-
fläche.

Kilogr.
pro 1^{qm}
Decken-
fläche.

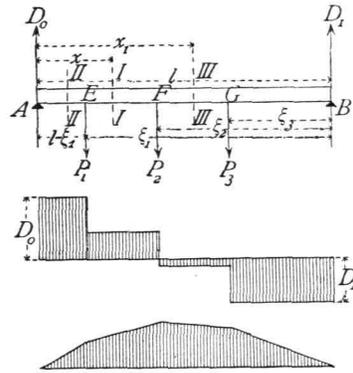
In den folgenden Artikeln soll für die wichtigsten Balkenträger und für verschiedene Belastungsarten die Ermittlung der Auflager-Reactionen, der Transversalkräfte und Momente auf dem Wege der Rechnung und eventuell auch auf dem der Construction gezeigt werden.

1) Balkenträger auf zwei Stützen.

Bei den Balkenträgern auf zwei Stützen können für die im Hochbauwesen vorkommenden Belastungsarten hauptsächlich die nachstehenden vier Fälle unterschieden werden.

Erster Fall: Der Träger wird durch beliebige Einzellasten belastet. Die Stützweite des Balkenträgers (Fig. 153 a) sei (von Auflagermitte zu Auflagermitte gerechnet) l ; der Träger werde durch die neben stehend näher bezeichneten Einzellasten P_1, P_2, P_3 belastet. Es sind die Transversalkräfte und Momente für sämtliche Querschnitte des Balkens zu ermitteln.

Fig. 153.



a) Berechnung. Zunächst sind die nicht gegebenen äußeren Kräfte, die Auflager-Reaktionen D_0 und D_1 zu bestimmen. Da Gleichgewicht stattfindet, so ist die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null. Um D_0 zu ermitteln, wählt man zweckmäÙig einen Punkt auf der Richtungslinie von D_1 als Drehpunkt, damit die zweite Unbekannte D_1 das statische Moment Null habe, also nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkomme. Alsdann ist, wenn B als Drehpunkt für die Gleichung der statischen Momente gewählt wird:

$$0 = D_0 l - P_1 \xi_1 - P_2 \xi_2 - P_3 \xi_3,$$

$$D_0 = \frac{P_1 \xi_1}{l} + \frac{P_2 \xi_2}{l} + \frac{P_3 \xi_3}{l} = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) \dots \dots \dots 152.$$

Wählt man in gleicher Weise ein zweites Mal A als Drehpunkt, so ergibt sich

$$D_1 = \frac{P_1 (l - \xi_1)}{l} + \frac{P_2 (l - \xi_2)}{l} + \frac{P_3 (l - \xi_3)}{l} = \sum_0^l \left[\frac{P (l - \xi)}{l} \right] \dots \dots \dots 153.$$

Der Beitrag, welchen jede Einzellast zur Gesamt-Auflager-Reaction leistet, ist, wie man aus den Gleichungen 152. und 153. ersieht, ganz unabhängig von der GröÙe und Art der übrigen Belastungen; die Auflager-Reaktionen sind die bezw. Summen der durch die einzelnen Lasten erzeugten Partial-Auflager-Reaktionen.

Nunmehr lassen sich die Transversalkräfte ermitteln.

Für einen beliebigen Querschnitt II , im Abstände x vom linken Auflager A , ist die Transversalkraft, als Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden äußeren Kräfte,

$$Q_x = D_0 - P_1 = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) - P_1 \dots \dots \dots 154.$$

In diesem Ausdrucke kommt die Abscisse x des Querschnittes gar nicht vor; die Transversalkraft ist also, so lange der angegebene Ausdruck überhaupt gilt, ganz unabhängig von x , d. h. constant. Der Ausdruck gilt aber nur für die Querschnitte zwischen E und F ; denn für einen Querschnitt links von E , etwa für $II II$, ist

$$Q_{II} = D_0 = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right);$$

für einen solchen rechts von F , etwa für $III III$, ist

$$Q_{III} = D_0 - P_1 - P_2 = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) - (P_1 + P_2) = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) - \sum_0^{\xi_2} (P).$$

Es folgt daraus: Falls eine Belastung nur durch Einzellasten stattfindet, ist die Transversalkraft für alle Querschnitte zwischen je zwei Lastpunkten, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt constant; eine Aenderung der Transversalkraft findet nur in den Lastpunkten statt.

Die Transversalkraft hat denselben Werth, wenn der Trägertheil rechts von dem betreffenden Querschnitt betrachtet wird. Für den Querschnitt II ergibt sie sich für diesen Fall zu

$$Q_x^I = -D_1 + P_2 + P_3 = -\frac{P_1(l - \xi_1)}{l} - \frac{P_2(l - \xi_2)}{l} - \frac{P_3(l - \xi_3)}{l} + P_2 + P_3,$$

$$Q_x^I = \frac{P_1 \xi_1}{l} + \frac{P_2 \xi_2}{l} + \frac{P_3 \xi_3}{l} - P_1 = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) - P_1,$$

d. h. genau wie in Gleichung 154.

Dieses Resultat ist selbstverständlich, weil die auf beide Trägertheile wirkenden Resultanten einander genau gleich sein müssen, damit Gleichgewicht stattfindet; der entgegengesetzte Sinn beider Transversalkräfte ist durch das Vorzeichen berücksichtigt, indem die nach oben auf den Theil rechts wirkenden Kräfte negativ eingeführt sind.

Das Gesetz der Aenderung der Transversalkräfte wird sehr anschaulich, wenn man in jedem Querschnitte die dafelbst stattfindende Transversalkraft als Ordinate nach beliebigem, aber für alle Querschnitte gleichem Maßstabe aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Es ergibt sich die in Fig. 153 *b* gezeichnete Linie, in welcher die positiven Werthe von der Abscisse nach oben, die negativen Werthe nach unten getragen sind.

Schließlich erübrigt noch die Bestimmung der Momente.

Für den Querschnitt II ist:

$$M_I = D_0 x - P_1(x - l + \xi_1) = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) x - P_1(x - l + \xi_1) \quad \dots \quad 155.$$

Für den Querschnitt III ist

$$M_{III} = D_0 x_1 - P_1(x_1 - l + \xi_1) - P_2(x_1 - l + \xi_2) = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) x_1 - \sum_0^{x_1} P(x_1 - l + \xi) \quad 156.$$

Innerhalb je zweier Lastpunkte, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt ändert sich demnach das Moment nach dem Gesetze einer geraden Linie; denn für verschiedene Werthe von x_1 , bzw. x bleiben alle in den Gleichungen 155. und 156. vorkommenden Ausdrücke mit Ausnahme von x_1 und x constant; diese einzigen Variablen kommen aber nur in der ersten Potenz vor. Trägt man also auch hier in den verschiedenen Querschnitten die Werthe von M als Ordinaten auf, so erhält man als Verbindungslinien der Endpunkte gerade Linien; in jedem Lastpunkt ändert sich der Ausdruck für M , also auch die Gerade. In Fig. 153 *c* ist die Aenderung der Momente graphisch dargestellt.

Da eine Gerade ihre größte Ordinate nur am Anfangspunkte oder Endpunkte haben kann, letztere aber mit den Lastpunkten zusammenfallen, so folgt, daß die größten Momentenwerthe an den Lastpunkten stattfinden.

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Unterzug (Fig. 154) von 8^m Stützweite trägt 7 Balken, deren Abstand von Mitte zu Mitte je 1^m betrage. Jeder Balken belaste den Unterzug mit einem Gewicht gleich 3000 kg. Es sind die Auflager-Reactionen, Transversalkräfte und Momente zu ermitteln. Nach Gleichung 152. ist

$$D_0 = \sum_0^l \left(\frac{3000 \cdot \xi}{8} \right) = \frac{3000}{8} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 10\,500 \text{ kg},$$

eben so nach Gleichung 153.

$$D_1 = \frac{3000}{8} \cdot 28 = 10\,500 \text{ kg}.$$

In Fällen, wie der vorliegende, wo die Belastungen symmetrisch zur Mitte des Balkens liegen und die Abstände derselben gleich sind, faßt man bequemer alle Lasten zu einer Resultirenden, hier ihrer

Summe zusammen, die in der Balkenmitte angreift. Es ist alsdann $R = 7 \cdot 3000 = 21\,000\text{ kg}$ und

$$D_0 = \frac{21\,000}{l} \cdot \frac{l}{2} = 10\,500\text{ kg} = D_1.$$

Die Transversalkräfte sind für die verschiedenen Querschnitte zwischen A und $I = 10\,500\text{ kg}$,

- » I » $II = 10\,500 - 3000 = 7500\text{ kg}$,
- » II » $III = 10\,500 - 3000 - 3000 = 4500\text{ kg}$,
- » III » $IV = 10\,500 - 3 \cdot 3000 = 1500\text{ kg}$,
- » IV » $V = 10\,500 - 4 \cdot 3000 = -1500\text{ kg}$,
- » V » $VI = 10\,500 - 5 \cdot 3000 = -4500\text{ kg}$,
- » VI » $VII = 10\,500 - 6 \cdot 3000 = -7500\text{ kg}$,
- » VII » $B = 10\,500 - 7 \cdot 3000 = -10\,500\text{ kg}$.

Im Lastpunkte IV (in der Trägermitte) geht die Transversalkraft von den positiven zu den negativen Werthen über.

Die Momente in den Lastpunkten sind:

- $M_I = 10\,500 \cdot 1 = 10\,500\text{ kgm} = 1\,050\,000\text{ kgcm}$,
- $M_{II} = 10\,500 \cdot 2 - 3000 \cdot 1 = 18\,000\text{ kgm} = 1\,800\,000\text{ kgcm}$,
- $M_{III} = 10\,500 \cdot 3 - 3000 \cdot 1 - 3000 \cdot 2 = 22\,500\text{ kgm} = 2\,250\,000\text{ kgcm}$,
- $M_{IV} = 10\,500 \cdot 4 - 3000(1 + 2 + 3) = 24\,000\text{ kgm} = 2\,400\,000\text{ kgcm}$,
- $M_V = 10\,500 \cdot 5 - 3000(1 + 2 + 3 + 4) = 22\,500\text{ kgm} = 2\,250\,000\text{ kgcm} = M_{III}$,
- $M_{VI} = M_{II}$, $M_{VII} = M_I$, $M_A = M_B = 0$.

Hiernach sind die Momente und Transversalkräfte in Fig. 154 *c* und 154 *b* aufgetragen.

β) Graphische Ermittlung. Um die Auflager-Reaktionen zu ermitteln, construirt man für die gegebenen Kräfte das Kraft- und Seilpolygon.

Das Kraftpolygon wird hier, da alle Kräfte gleiche Richtung haben, eine Gerade sein. Es sei (Fig. 155) $P_1 = \alpha\beta$, $P_2 = \beta\gamma$, $P_3 = \gamma\delta$; alsdann wird D_1 an δ zu tragen sein. Die Größe von D_0 und D_1 ist vorläufig unbekannt; jedoch wissen wir, daß das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte sich schließt; der Endpunkt von D_0 fällt also mit α zusammen, und es ist $\delta\alpha = D_0 + D_1$. Wo der Endpunkt von D_1 , welcher Punkt auch der Anfangspunkt von D_0 ist, auf der Linie $\delta\alpha$ liegt, ist noch nicht bekannt; die Ermittlung dieses Punktes geschieht mit Hilfe des Seilpolygons. Letzteres muß sich gleichfalls schließen, weil die Kräfte im Gleichgewicht sind. Man construirt also für einen beliebigen Pol O das Seilpolygon $a I III III b$; die letzte Seite des Seilpolygons ist demnach die Verbindungslinie der beiden Punkte a und b , d. h. desjenigen Punktes, in dem sich die der ersten Last vorhergehende Seilpolygonseite mit der linken Auflager-Verticalen schneidet, und desjenigen Punktes, in welchem sich die auf die letzte Last folgende Seilpolygonseite mit der rechten Auflager-Verticalen trifft. Man nennt diese Linie die Schlußlinie des Seilpolygons. Im Punkte a halten sich nun folgende Kräfte im Gleichgewicht: die Auflager-Reaction D_0 , die Spannung in der Seilpolygonseite $a I$

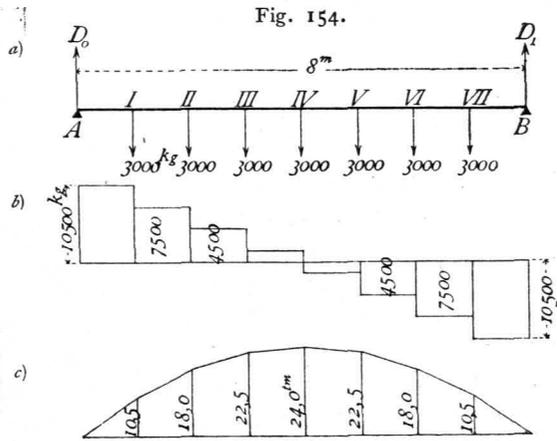
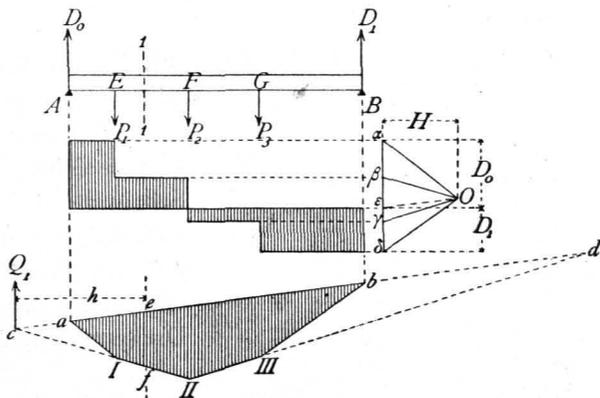


Fig. 155.



und diejenige in der Seilpolygonseite oder Schluslinie ab . Von allen drei Kräften sind die Richtungen gegeben, von einer — der Seilspannung in aI — auch die GröÙe; dieselbe ist gleich $O\alpha$. Man kann also für diese drei Kräfte das Kraftpolygon, hier das Kraftdreieck, construiren, indem man durch den einen Endpunkt der bekannten Kraft $O\alpha$, durch α eine Parallele zur Richtung von D_0 , durch den anderen Endpunkt, durch O eine Parallele zur Schluslinie ab zieht. Der Schnittpunkt ε beider Linien ergibt in $\varepsilon\alpha$ die GröÙe von D_0 , woraus folgt, daß $\delta\varepsilon = D_1$ ist. Es ergibt sich hieraus die Regel:

Die Auflager-Reactionen werden erhalten, indem man für einen beliebigen Pol das Seilpolygon construirt, die Schluslinie und parallel zu dieser eine Linie durch den Pol zieht. Letztere theilt die Kraftlinie in zwei Theile, welche nach GröÙe und Richtung die Auflager-Reactionen darstellen.

Die Transversalkräfte lassen sich auf graphischem Wege in folgender Weise ermitteln.

Für alle Querschnitte von A bis E ist die Transversalkraft gleich D_0 , d. h. gleich $\varepsilon\alpha$ (Fig. 155). Zieht man also durch ε und α je eine Horizontale, so giebt deren Abstand die GröÙe der Transversalkraft zwischen A und E an. Zwischen E und F ist die Transversalkraft gleich $D_0 - P_1 = \varepsilon\alpha - \alpha\beta = \varepsilon\beta$; man ziehe also durch β eine horizontale Linie; alsdann giebt deren Abstand von der durch ε gezogenen Geraden an jeder Stelle zwischen E und F die GröÙe der Transversalkraft. Eben so ist zwischen F und G die Strecke $\varepsilon\gamma$, zwischen G und B die Strecke $\varepsilon\delta$ die Transversalkraft.

Die Transversalkraft als Mittelkraft aller an der einen Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte geht nach Art. 267, S. 239 durch den Schnittpunkt derjenigen Seilpolygonseiten, welche die beiden äußersten Kräfte begrenzen. Für einen Querschnitt zwischen E und F sind die beiden bezw. Seilpolygonseiten die Linien II und ab ; die Transversalkraft geht also durch c . Für jeden Querschnitt zwischen II und III geht die Transversalkraft durch d etc.

Die graphische Bestimmung der Momente geschieht in nachstehender Weise.

Für einen beliebigen Querschnitt II (Fig. 155) ist das Moment gleich dem Moment der Mittelkraft, d. h. hier der Transversalkraft. Es ist demnach $M_1 = Q_1 h$. Nun ist $\Delta cef \sim \Delta O\varepsilon\beta$, mithin $\frac{ef}{h} = \frac{\varepsilon\beta}{H}$, und, da $\varepsilon\beta = Q_1$ ist, $ef = \frac{Q_1 h}{H} = \frac{M_1}{H}$, also $M_1 = H \cdot ef$.

In vorstehendem Ausdruck für M ist H , der horizontale Abstand des Poles von der Kraftlinie oder die Poldistanz, für alle Querschnitte constant; die GröÙe des Momentes ist also mit ef , d. h. der verticalen Höhe des Seilpolygons variabel. Daraus folgt:

Das Moment in jedem Querschnitte ist gleich dem Producte aus dem verticalen Abstände der Seilpolygonseiten bei diesem Querschnitte in die Poldistanz. Die vom Seilpolygon gebildete Fläche heißt die Momentenfläche.

Die Momente sind Producte aus Kräften und Längen; H ist eine Kraft, wie alle Strahlen und Linien im Kraftpolygon, und kann nach Obigem beliebig angenommen werden, etwa mit 10^t , 20^t etc. Da das Moment in irgend einem Querschnitt einen ganz bestimmten Werth hat, der natürlich von einem beliebig gewählten H unabhängig ist, so wird die Höhe des Seilpolygons desto größer, je kleiner H ist und umgekehrt.

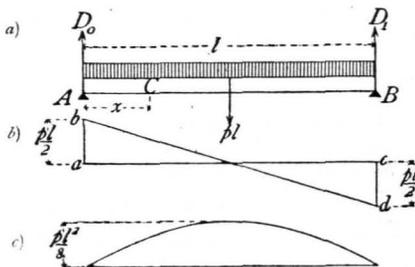
Zweiter Fall: Der Träger wird über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belaftet.

Fig. 156.

a) Berechnung. Die Belastung pro Längeneinheit des Trägers (Fig. 156) sei p , die Stützweite desselben sei l ; alsdann ist die Resultirende gleich der Gesamtlast, also gleich $p l$ und greift in der Trägermitte an. Die Gleichung der statischen Momente für B als Drehpunkt heißt demnach

$$D_0 l - p l \frac{l}{2} = 0,$$

361.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.



und es wird

$$D_0 = \frac{p l}{2}; \text{ eben so } D_1 = \frac{p l}{2} \dots \dots \dots 157.$$

Die Transversalkraft beträgt für einen beliebigen Querschnitt C im Abstände x von A

$$Q_x = D_0 - p x = \frac{p l}{2} - p x = \frac{p}{2} (l - 2 x) \dots \dots \dots 158.$$

Die graphische Darstellung der Veränderung der Transversalkraft ergibt die Linie der Gleichung 158., d. h. eine Gerade. Für $x = 0$ ist $Q_0 = \frac{p l}{2}$; für $x = l$ ist $Q_l = -\frac{p l}{2}$. Q_x wird Null für $l - 2 x = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$. Die Ordinaten der Linie $b d$ (Fig. 156 *b*) ergeben die Transversalkräfte.

Das Moment für den Punkt C ist

$$M_x = D_0 x - p x \frac{x}{2} = \frac{p l}{2} x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l x - x^2) \dots \dots \dots 159.$$

Die graphische Darstellung der Momente für die verschiedenen Querschnitte ergibt die Curve der Gleichung 159., d. h. eine Parabel. Für $x = 0$ ist $M_0 = 0$; für $x = l$ ist $M_l = 0$. M_x wird ein Maximum für $\frac{d M_x}{d x} = \frac{p}{2} (l - 2 x) = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$; demnach

$$M_{max} = \frac{p}{2} \left[l \frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] = \frac{p l^2}{8} \dots \dots \dots 159a.$$

Hiernach kann die Parabel leicht construirt werden (Fig. 156 *c*).

Beispiele. 1) Ein Corridor von 4 m Lichtweite ist mit einer Decke aus Kappengewölben zwischen eisernen I-Trägern zu überdecken; die Spannweite der Kappen sei 2,2 m; die Träger sollen berechnet werden.

Die Stützweite der Träger, d. h. die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte, kann zu 4,3 m, d. i. zu 430 cm angenommen werden; alsdann ist $l = 430$ cm. Auf das laufende Meter des Trägers kommt eine zu tragende Grundfläche von 2,2 m Breite und 1 m Länge; mithin ist die Last pro laufendes Meter Träger, bei einer Maximalbelastung von 750 kg pro 1 qm Grundfläche, gleich $2,2 \cdot 750 = 1650$ kg und pro laufendes Centimeter Träger $p = 16,5$ kg. Die Auflager-Reactionen sind also nach Gleichung 157.

$$D_0 = D_1 = \frac{16,5 \cdot 430}{2} = 3547 \text{ kg}$$

und das Moment nach Gleichung 159a.

$$M_{max} = M_{mitte} = \frac{16,5 \cdot 430^2}{8} = 381\,356 \text{ kgcm.}$$

Nun ist der Querschnitt nach Art. 301, S. 263 so zu bestimmen, das $\frac{F}{a} = \frac{M}{K} = \frac{381\,356}{700} = 544,8$ ist. Falls ein I-Querschnitt gewählt wird, ist Nr. 28 der »Deutschen Normalprofile« (vergl. die Tabelle auf S. 198) zu wählen, da bei demselben $\frac{F}{a} = 547$ ist ¹⁶⁵⁾.

¹⁶⁵⁾ Man muß beim Einsetzen der Zahlenwerthe für p und l vorsichtig sein. Es ist eigentlich selbstverständlich, das, wenn man l in Metern einführt, p die Belastung für das laufende Meter Träger bedeutet, und wenn l in Centimetern eingeführt wird, p die Belastung für das laufende Centimeter Träger bedeutet. Giebt man ferner K , die zulässige Bannspruchung in Kilogramm pro 1 qcm und das Moment M in Kilogramm-Centimetern an, so sind in Gleichung 36.: $\frac{F}{a} = \frac{M}{K}$ die Werthe für F und a auf Centimeter bezogen einzusetzen. Dennoch dürfte es nicht überflüssig sein, hier besonders darauf aufmerksam zu machen, das von Anfängern und Ungeübten oft in dieser Hinsicht Fehler gemacht werden. Es empfiehlt sich, stets alles auf Centimeter und Kilogramm bezogen einzuführen.

2) Es sollen die Dimensionen bestimmt werden, welche einem Deckenbalken aus Kiefernholz bei einer Lichtweite von 6 m zu geben sind, wenn die Balkenentfernung von Mitte zu Mitte 0,9 m und die Gesamtbelastung der betreffenden Decke (Eigengewicht und mobile Last) 500 kg pro 1 qm beträgt.

Das laufende Meter Balken hat eine Grundfläche von 0,9 m Breite zu tragen, d. h. eine Last von $0,9 \cdot 500 = 450 \text{ kg}$; mithin beträgt die Belastung pro laufendes Centimeter des Balkens $p = 4,5 \text{ kg}$. Die von Auflagermitte zu Auflagermitte zu rechnende Stützweite l nehmen wir zu $6,3 \text{ m} = 630 \text{ cm}$ an. Das größte Moment, welches hier, da der Balkenquerschnitt constant ist, der Berechnung des ganzen Balkens zu Grunde gelegt werden muss, findet in der Balkenmitte statt, und es ist nach Gleichung 159a.

$$M_{max} = \frac{4,5 \cdot 630^2}{8} = 223\ 256 \text{ kgcm};$$

mithin nach Art. 303, S. 264

$$\frac{f}{a} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{223\ 256}{60} = 3721.$$

Da nun nach Gleichung 43. $f = \frac{b h^3}{12}$, ferner $a = \frac{h}{2}$ ist, wird $\frac{b h^2}{6} = 3721$, und wenn $b = 25 \text{ cm}$ angenommen wird,

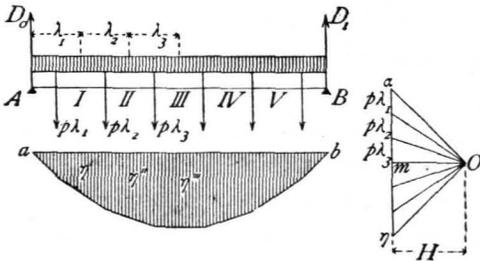
$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 3721}{25}} = 29,9 \text{ cm} \approx 30 \text{ cm}.$$

Es genügt fonach ein Querschnitt von $25 \times 30 \text{ cm}$.

β) Graphische Ermittlung. Im vorliegenden Falle werden die Auflager-Reaktionen, Momente und Transversalkräfte eben so ermittelt, wie oben für Einzel-lasten gezeigt worden ist.

Man zerlegt die ganze Belastung in einzelne Theile $p \lambda_1, p \lambda_2, p \lambda_3 \dots$ (Fig. 157) von den Längen

Fig. 157.



$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$. Diese Einzellasten wirken in den Mitten der Abtheilungen λ . Für diese Einzellasten wird nun Kraft- und Seilpolygon construiert und die Schlusslinie ab gezogen; alsdann giebt die durch O zu ab gezogene Parallele Om die Auflager-Reaktionen $D_1 = \gamma m$ und $D_0 = m a$.

Das Seilpolygon ist eine gebrochene Linie, welche sich einer Curve desto mehr nähert, je kleiner die einzelnen Abtheilungen gewählt werden. In Wirklichkeit entspricht der stetigen Belastung eine stetig gekrümmte Linie, eine Curve als Seilpolygon. Die gezeigte Construction ergibt eine Reihe von Punkten dieser Curve. In denjenigen

Querschnitten nämlich, welche einer Abtheilungsgrenze entsprechen, in $I, II, III \dots$, ist das durch die concentrirten Lasten erzeugte Moment genau eben so groß, wie dasjenige durch die stetige Belastung bis zu diesem Querschnitte, und zwar ist nach Früherem $M_I = H \gamma'$, $M_{II} = H \gamma''$, $M_{III} = H \gamma''' \dots$. Diese Ordinaten $\gamma', \gamma'', \gamma''' \dots$, kurz alle Ordinaten, welche den Abtheilungsgrenzen entsprechen, sind also genau richtig, so dass die genaue Curve leicht construiert werden kann.

Dritter Fall: Der Träger wird auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Eine Belastung $p dx$ im Abstände x (Fig. 158) vom linken Auflager A erzeugt die Auflager-Reaktionen

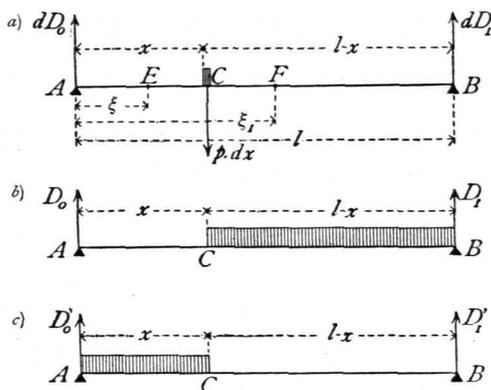
$$d D_0 = p dx \frac{l-x}{l} \quad \text{und} \quad d D_1 = p dx \frac{x}{l}.$$

Die Transversalkraft ist für jeden Querschnitt E links vom Lastpunkte C $Q = d D_0 = p dx \frac{l-x}{l}$, d. h. positiv, für jeden Querschnitt F rechts vom Lastpunkte $Q_1 = d D_0 - p dx = - \frac{p x dx}{l}$, d. h. negativ. Daraus folgt das Ge-

362.
Partielle
gleichförmig
vertheilte
Belastung.

Fig. 158.

setz: Jede Belastung rechts von einem Querschnitte erzeugt in demselben eine positive, jede Belastung links von einem Querschnitte erzeugt in demselben eine negative Transversalkraft. In irgend einem Querschnitt, etwa C , wird demnach Q_{max} stattfinden, wenn die ganze Abtheilung rechts von C belastet, der übrige Trägertheil unbelastet ist (Fig. 158 *b*). Q_{min} wird stattfinden, wenn die Abtheilung AC links von C belastet, die Abtheilung CB unbelastet ist (Fig. 158 *c*).



Man erhält für die erstere Belastungsart

$$D_0 = Q_{max} = \int_x^l p \, dx \left(\frac{l-x}{l} \right) = \frac{p}{2l} (l-x)^2; \dots \dots \dots 160.$$

für die zweite Belastungsart

$$Q_{min} = \int_0^x - \frac{p x \, dx}{l} = - \frac{p}{2l} x^2 \dots \dots \dots 161.$$

Das Moment für irgend einen Querschnitt E (Fig. 158) links vom Lastpunkt C ist

$$dM = \xi \, dD_0 = p \frac{l-x}{l} \xi \, dx,$$

d. h. positiv; für einen Querschnitt F rechts vom Lastpunkt C ist

$$dM_1 = \xi_1 \, dD_0 - p \, dx (\xi_1 - x) = p x \, dx \frac{l - \xi_1}{l},$$

d. h. ebenfalls positiv. Hieraus folgt: Jede Belastung erzeugt in allen Querschnitten positive Momente. In jedem Querschnitt findet demnach das größte Moment bei totaler Belastung des Trägers mit der gleichförmigen Belastung p pro Längeneinheit statt. Bei dieser Belastung ist nach Gleichung 159. für einen Querschnitt mit der Abscisse x

$$M_x = \frac{p}{2} (lx - x^2),$$

und es ist dies das größte Moment im betreffenden Querschnitt.

Vierter Fall: Der Träger wird durch eine über seine ganze Länge gleichförmig vertheilte Belastung und durch Einzellaften belastet.

In Art. 360 ist nachgewiesen, daß jede Last eine von den anderen sonst noch auf dem Balken befindlichen Lasten unabhängige Auflager-Reaction erzeugt, und daß die Gesamt-Auflager-Reaction gleich der algebraischen Summe der Partial-Reactionen ist. Daraus folgt, daß auch die Transversalkräfte und Momente für alle Querschnitte gleich den algebraischen Summen der bezw. Partial-Transversalkräfte und -Momente sind.

Wir brauchen also im vorliegenden Falle nur die Reactionen, Transversalkräfte und Momente, welche bei den einzelnen bereits betrachteten Belastungen, derjenigen durch Einzellaften und derjenigen durch gleichförmig vertheilte Last, sich ergeben haben, algebraisch zu addiren.

363.
Gleichförmig
vertheilte
Last u.
Einzellaften.

Hiernach betragen die Auflager-Reactionen (Fig. 159)

$$D_0 = \frac{p l}{2} + \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{p l}{2} + \sum_0^l \left[\frac{P(l - \xi)}{l} \right] \quad \dots \quad 162.$$

Die Transversalkraft für einen Punkt G mit der Abciffen x_1 ist

$$Q_{x_1} = D_0 - P_1 - p x_1 = \sum_0^{x_1} \left(\frac{P \xi}{l} \right) - \sum_0^{x_1} (P) + \frac{p}{2} (l - 2 x_1) \quad \dots \quad 163.$$

und für den Punkt L mit der Abciffen x_2

$$Q_{x_2} = D_0 - P_1 - P_2 - p x_2 = \sum_0^{x_2} \left(\frac{P \xi}{l} \right) - \sum_0^{x_2} (P) + \frac{p}{2} (l - 2 x_2).$$

Das Moment für den Punkt G ist

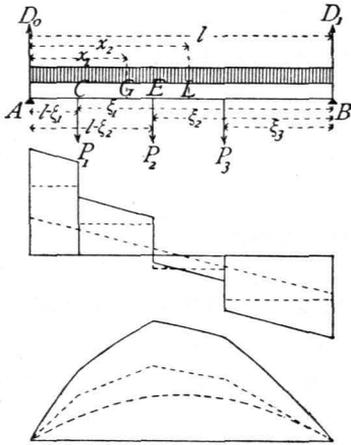
$$M_{x_1} = D_0 x_1 - P_1(x_1 - l + \xi_1) - \frac{p x_1^2}{2} = \sum_0^{x_1} \left(\frac{P \xi}{l} \right) x_1 - \sum_0^{x_1} [P(x_1 - l + \xi)] + \frac{p}{2} (l x_1 - x_1^2) \quad 164.$$

und für den Punkt L

$$M_{x_2} = D_0 x_2 - P_1(x_2 - l + \xi_1) - P_2(x_2 - l + \xi_2) - \frac{p x_2^2}{2},$$

$$M_{x_2} = \sum_0^{x_2} \left(\frac{P \xi}{l} \right) x_2 - \sum_0^{x_2} [P(x_2 - l + \xi)] + \frac{p}{2} (l x_2 - x_2^2) \quad \dots \quad 165.$$

Fig. 159.



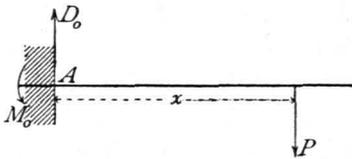
Die graphische Darstellung der in den verschiedenen Querschnitten stattfindenden Transversalkräfte und Momente wird gleichfalls erhalten, indem man die bei den einzelnen Belastungsarten sich ergebenden Ordinaten der bezüglichen Darstellungen algebraisch addirt. Es ergeben sich die in Fig. 159 gezeichneten Linienzüge, in denen die positiven Werthe nach oben, die negativen nach unten abgetragen sind. Die punktirten Linien geben die Werthe von Q und M für Belastung nur durch Einzellasten, bezw. für gleichförmig vertheilte Last; die voll gezogenen Linien geben die Summen.

Die Ermittlung der Momente etc. auf graphischem Wege ergibt sich aus dem auf S. 321 Gefagten so einfach, daß darauf nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

2) Confole-Träger.

Confole-Träger sind am einen Ende unterstützte, am anderen Ende freischwebende Träger. Als äußere Kräfte wirken auf dieselben die Belastungen und die Reactionen der Unterstüßungsstelle. Letztere lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln.

Fig. 160.



Damit der Träger im Gleichgewicht sei, muß zunächst die algebraische Summe der Verticalkräfte gleich Null sein, d. h., wenn die verticale Componente der Reaction bei A (Fig. 160) gleich D_0 ist, wird $0 = D_0 - P$ oder

$$D_0 = P \quad \dots \quad 166.$$

Eine äußere horizontale Belastung sei nicht vorhanden; es wird also die Reaction keine horizontale Componente haben. Es muß aber auch die algebraische

364.
Princip.

Summe der statischen Momente für einen beliebigen Punkt der Ebene, also etwa für A , gleich Null sein; mithin muß, da das Moment der gegebenen Kräfte für A nicht gleich Null ist, D_0 aber für den Drehpunkt A kein statisches Moment hat, an der Unterstützungsstelle noch eine Anzahl von Kräften wirken, deren resultierendes Moment mit demjenigen der Belastungen zusammen die Summe Null ergibt. Bei A wirkt also ein Moment M_0 , dessen Größe sich ergibt zu

$$M_0 = - P x \dots \dots \dots 167.$$

Dieses Moment, dessen Drehrichtung, wie das Vorzeichen anzeigt, derjenigen von P entgegengesetzt ist, kann auf verschiedene Weise erzeugt werden, am einfachsten durch Einmauerung, bezw. Einspannung des Balkens.

Soll für jede Belastungsart Gleichgewicht vorhanden sein, so muß der Balken derart eingemauert werden, daß das von der Mauer geleistete Moment auch die größten Werthe des Momentes der Belastungen aufheben kann. Das Moment der Mauer wird durch das über dem eingemauerten Balkentheile liegende Mauergewicht geleistet, wonach dieses eventuell zu bestimmen ist.

Auch in anderer Weise kann ein Moment in A erzeugt werden, z. B. dadurch, daß der Balken über den Punkt A hinaus, bis zu einer zweiten Stütze B verlängert wird, in welchem Falle die Belastung des Balkentheiles AB das Moment M_0 leistet.

Die Console-Träger sind statisch bestimmt, da die beiden Unbekannten: die Auflager-Reaction D_0 und das Moment M_0 , nach den Gesetzen der Statik ermittelt werden können. Wir suchen im Folgenden die Auflager-Reaction, die Transversalkräfte und die Momente, wie beim Balkenträger auf zwei Stützen, und unterscheiden betreff der Belastungsart drei Fälle.

Erster Fall: Der Console-Träger wird durch beliebige Einzellaften belastet.

365.
Belastung
durch
Einzellaften.

a) Berechnung. Die freie Balkenlänge AB (Fig. 161) sei $= l$; alsdann ist die Auflager-Reaction

$$D_0 = P_1 + P_2 + P_3 = \sum_0^l (P) \dots \dots \dots 168.$$

und das Moment

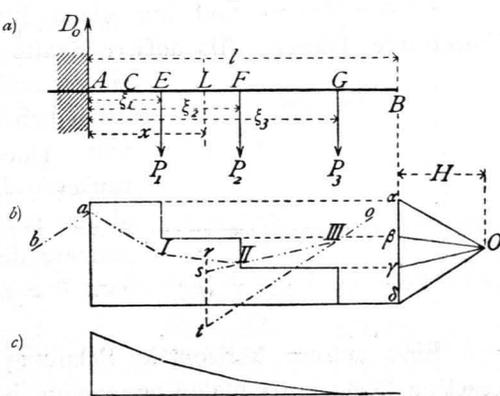
$$M_0 = - (P_1 \xi_1 + P_2 \xi_2 + P_3 \xi_3) = - \sum_0^l (P \xi) \dots \dots \dots 169.$$

Für einen beliebigen Querschnitt C zwischen A und E ist die Transversalkraft $Q = D_0 - \sum (P)$; diesen Werth hat Q für alle Punkte zwischen A und E . Für irgend einen Querschnitt L zwischen E und F ist $Q_1 = D_0 - P_1$; sonach wird allgemein

$$Q = \sum_0^l (P) - \sum_0^x (P) = \sum_x^l (P) \dots \dots \dots 170.$$

Die Transversalkraft in jedem Querschnitte ist also gleich der Summe der zwischen diesem Querschnitte und dem freien Ende befindlichen Lasten.

Fig. 161.



Es folgt dies schon aus der Definition der Transversalkraft. Als graphische Darstellung der Veränderung der Transversalkräfte ergibt sich die umflehende Construction (Fig. 161 b).

Für einen beliebigen Punkt L mit der Abscisse x wird das Moment $M = - [P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x)]$; allgemein wird sonach

$$M = - \sum_x^l [P (\xi - x)] \dots \dots \dots 171.$$

Die graphische Darstellung der Momente zwischen zwei Lastpunkten ist also eine Gerade, wie in Fig. 161 c gezeichnet.

β) Graphische Ermittlung. Man construirt das Kraftpolygon $\alpha \beta \gamma \delta \alpha$ und das Seilpolygon $a III III 0$, letzteres für eine beliebige Poldistanz H . Da $D = \delta \alpha$ ist, so ergeben sich die verschiedenen Werthe von Q leicht, wie in Fig. 161 angegeben.

Für den Punkt L ist

$$M = - [P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x)].$$

Nun ist $\Delta s t III \sim \Delta \gamma \delta O$, d. h. $\frac{\overline{st}}{\xi_3 - x} = \frac{\gamma \delta}{H} = \frac{P_3}{H}$ und $H \cdot \overline{st} = P_3 (\xi_3 - x)$; weiters ist $\Delta r s II \sim \Delta \beta \gamma O$, d. h. $\frac{\overline{rs}}{\xi_2 - x} = \frac{\beta \gamma}{H} = \frac{P_2}{H}$ und $H \cdot \overline{rs} = P_2 (\xi_2 - x)$. Hiernach wird abfolut genommen

$$M = P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x) = H (\overline{st} + \overline{rs}) = H \cdot \overline{rt}.$$

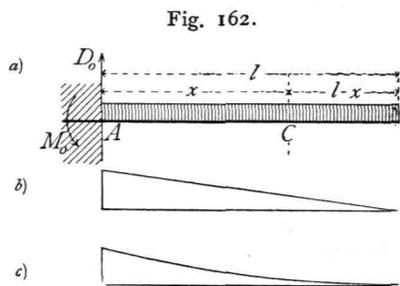
Das Moment ist gleich dem Product aus der Poldistanz in die verticale Höhe des Seilpolygons an der betreffenden Stelle, falls diese von der verlängerten Seilpolygonseite aus gerechnet wird, welche auf die dem Balkenende zunächst liegende Kraft folgt.

Das hier gefundene Resultat stimmt mit demjenigen des Art. 360, S. 322 überein; auch hier schließt das Seilpolygon; denn ein Kräftepaar, wie es hier bei A wirkt, ist eine unendlich kleine, unendlich ferne Kraft. Außer den Lasten P und der Auflager-Reaction D wirkt also noch eine unendlich ferne Kraft, deren Schnittpunkt mit der Seilpolygonseite ab aufzufuchen und mit III zu verbinden ist, um die Schlusslinie zu erhalten. Man sieht, die durch III parallel zu ab gezogene Seilpolygonseite ist die Schlusslinie.

Zweiter Fall: Der Console-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Für den Auflagerpunkt A (Fig. 162) ergibt sich die Auflager-Reaction und das Moment mit

$$D_0 = pl \text{ und } M_0 = - \frac{p l^2}{2}; \dots 172.$$



für einen Punkt C mit der Abscisse x beträgt die Transversalkraft und das Moment

$$Q_x = p (l - x) \text{ und } M_x = - \frac{p (l - x)^2}{2} \dots 173.$$

Die graphische Darstellung der Werthe von Q ist eine Gerade; für $x = 0$ ist $Q_0 = pl$, für $x = l$ ist $Q_l = 0$. Diejenige der Werthe von M ist eine Parabel; für $x = 0$ ist $M_0 = - \frac{p l^2}{2}$; für $x = l$ ist $M_l = 0$. Da ferner für $x = l$ auch $\frac{d M_x}{d x} = + p (l - x)$ Null wird, so ist die Abscissenaxe im Punkte $x = l$ eine Tangente an die Parabel. Die Momente und Transversalkräfte sind in Fig. 162 c

366.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

und 162 b graphisch dargestellt. Der größte Werth des Momentes und der Transversalkraft findet an derselben Stelle, an der Einspannungsfstelle statt.

Die graphische Ermittlung von D_0 , Q und M bietet hier keine Vortheile, ist auch leicht nach den für Einzellasten gegebenen Regeln vorzunehmen.

Dritter Fall: Der ConSOLE-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Belastung und durch Einzellasten belastet.

367.
Gleichförmig
vertheilte
Last u.
Einzellasten.

Die Auflager-Reactionen, Transversalkräfte und Momente ergeben sich als die Summe der bei den partiellen Belastungen stattfindenden Reactionen, Transversalkräfte und Momente. Es wird deshalb genügen, hier die Werthe anzugeben (Fig. 163):

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= P_1 + P_2 + P_3 + p l = \sum_0^l P + p l; \\ Q_x &= \sum_x^l P + p (l - x); \\ M_x &= - \sum_x^l [P (\xi - x)] - \frac{p (l - x)^2}{2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 174.$$

Eben so wird die Veränderlichkeit der Q und M graphisch dargestellt durch graphische Addition der für die Partialbelastungen sich ergebenden Werthe von Q und M .

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Balkonträger von 2 m freier Länge hat als Eigengewicht eine gleichmäsig vertheilte Belastung von 500 kg pro lauf. Meter und eine Nutzlast von 800 kg pro lauf. Meter zu tragen, außerdem noch das Gewicht der Brüstung mit 800 kg in 1,8 m Abstand von der Wand. Es ist demnach, wenn Alles auf Centimeter reducirt wird, $g = 5$ kg, $p = 8$ kg, $P = 800$ kg, $\xi = 180$ cm und $l = 200$ cm.

Die Nutzlast habe nur eine Länge von 170 cm.

Als Berechnungsweite darf man in den meisten Fällen nicht die freie Länge bis zur Wand einführen, sondern muß diejenige bis zur Auflagermitte nehmen, welche hier etwa 25 cm hinter der Mauerkante liegen möge. Alsdann ist für den Punkt A (Fig. 164), wenn M_g das Maximalmoment für permanente, M_p dasjenige für mobile Last bezeichnet, abfolut genommen:

$$M_g = P(\xi + 25) + g l \left(\frac{l}{2} + 25 \right) = 800 \cdot 205 + 1000 \cdot 125 = 289\,000 \text{ kgcm},$$

$$M_p = p \cdot 170 \left(\frac{170}{2} + 25 \right) = 8 \cdot 170 \cdot 110 = 149\,600 \text{ kgcm}.$$

Der Querschnitt an der Stelle A ist so zu bestimmen, daß nach Gleichung 39. und 41. stattfindet

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{M_g}{K_1} + \frac{M_p}{(1 - \alpha_1) K_1} = \frac{289\,000}{1200} + \frac{149\,600}{720} = 448,6.$$

Nr. 26 der »Deutschen Normalprofile für I-Eisen« (siehe Seite 198) hat ein Widerstandsmoment $\frac{\mathcal{F}}{a} = 446$ und dürfte für vorliegenden Fall ausreichend sein.

Fig. 163.

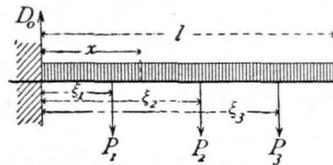
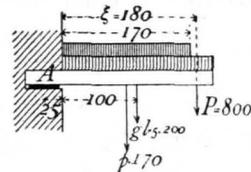


Fig. 164.



3) Continuirliche Gelenkträger.

Die Querschnittsgröße der Träger und damit die zu denselben gebrauchte Materialmenge ist wesentlich von der Größe der in den einzelnen Querschnitten stattfindenden Maximalmomente abhängig. Eine Verminderung der Momente hat auch eine Querschnittsverringerung zur Folge. Eine solche Verringerung der Momente wird den gewöhnlichen Trägern auf zwei Stützen gegenüber durch die fog. continuirlichen Gelenkträger erreicht, bei denen die Stützpunkte eines Theiles

368.
Princip.

der Träger durch Confolen der Nachbarträger gebildet werden. Man erhält dadurch für die verschiedenen Oeffnungen verschiedene Trägerarten, und zwar wechselt immer ein Träger mit einer, bzw. zwei Confolen an den Enden und ein solcher ohne Confolen ab.

Für drei neben einander liegende Oeffnungen *I, II, III* sind die hauptsächlich vorkommenden Combinationen in Fig 165 u. 166 dargestellt. Entweder hat, wie in

Fig. 165.

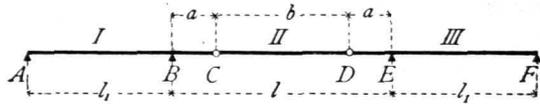


Fig. 166.

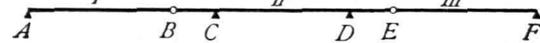


Fig. 165 gezeichnet, jeder Seitenträger *I* und *III* eine über das Auflager *B*, bzw. *E* vorragende Console *BC*, bzw. *DE*, auf deren Enden der Mittelträger *CD* frei aufruhet, oder der Mittelträger *CD* hat, wie in

Fig. 166, jederseits eine Console *BC*, bzw. *DE*, und die Seitenträger *AB* und *EF* ruhen aufser auf den Endstützpunkten *A*, bzw. *F* auf den Enden *B* und *E* der erwähnten Confolen. Durch diese Constructionsart werden einmal die Momente in den Trägern, an deren Enden die Confolen sind, in Folge der Console-Belastungen wesentlich vermindert, auferdem aber auch die Längen der frei aufliegenden Träger — in Fig. 165 des Trägers über Oeffnung *II*, in Fig. 166 der Träger über Oeffnung *I* und *III* — verkürzt, wodurch wiederum die Momente sich verringern.

Im Folgenden soll nur der für den Hochbau vorwiegend wichtige Belastungsfall einer gleichmäfsig vertheilten totalen Belastung ins Auge gefaßt werden, und zwar für die beiden angegebenen Combinationen.

369.
Erste
Combination.

Erste Combination: Die Confolen befinden sich an den Seitenträgern (Fig. 165).

α) Seitenträger mit einseitiger Console. Es sei $AB = l_1$, $BE = l$, $BC = DE = a$ und $CD = b$, also $l = 2a + b$; es sei ferner die Belastung pro Längeneinheit des Trägers p . Alsdann wirkt aufer dieser Belastung auf den Seitenträger in *C* eine Kraft nach unten, welche der in dem Punkte *C* auf den Balken *CD* nach oben wirkenden Auflager-Reaction (nach dem Gesetze der Wechselwirkung, vergl. Art. 259, S. 234) genau gleich ist, d. h. eine Kraft $\frac{pb}{2}$. Die

Reaction im Auflagerpunkte *A* (Fig. 167 a) ergibt sich durch Aufstellung der Gleichung der statischen Momente für Punkt *B* zu

$$D_0 = \frac{p l_1}{2} - \frac{p}{2} \frac{a b + a^2}{l_1}$$

Setzen wir die Constante $\frac{a b + a^2}{l_1} = c_1$, so ist

$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 - c_1) \dots \dots \dots 175.$$

Weiters ist die Reaction im Auflagerpunkte *B*

$$D_1 = \frac{p l_1}{2} + \frac{p b}{2} \cdot \frac{l_1 + a}{l_1} + p a \frac{l_1 + \frac{a}{2}}{l_1} = \frac{p}{2} (l_1 + c_1 + 2a + b) \dots 176.$$

In der Strecke *AB* beträgt die Transversalkraft für einen Punkt *L* mit der Abciffe *x*, von *A* aus gerechnet,

$$Q_x = D_0 - p x = \frac{p}{2} (l_1 - c_1 - 2 x), \dots \dots \dots 177.$$

d. h. die graphische Darstellung ist eine Gerade. Für $x = 0$ ist $Q_0 = \frac{p}{2} (l_1 - c_1)$; für $x = l_1$ ist $Q_{l_1} = -\frac{p}{2} (l_1 + c_1)$; die Transversalkraft wird Null für $x_0 = \frac{l_1 - c_1}{2}$.

In der Strecke BC ist die Transversalkraft für einen Punkt L_1 mit der Abscisse x_1 , von C aus gerechnet,

$$Q_{x_1} = \frac{p}{2} (b + 2 x_1), \dots \dots \dots 178.$$

d. h. die graphische Darstellung derselben ist eine Gerade. Für $x_1 = 0$ ist $Q_0 = \frac{p b}{2}$; für $x_1 = a$ ist $Q_a = \frac{p}{2} (b + 2 a)$. Die Transversalkräfte sind in Fig. 167 *b* graphisch dargestellt.

In der Strecke AB ist das Moment für den Punkt L

$$M_x = D_0 x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l_1 - c_1) x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l_1 x - x^2) - \frac{p c_1 x}{2} \dots \dots 179.$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks ist das Moment, welches in einem frei aufliegenden Balken AB von der Länge l_1 entstehen würde;

in Folge der Console und ihrer Belastung erhalten wir demnach hier an jeder Stelle ein um $\frac{p c_1 x}{2}$ kleineres Moment. Die

graphische Darstellung giebt eine Parabel $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 167 *c*); die Linie $\alpha\delta$ ist die Linie der Gleichung $y = -\frac{p c_1 x}{2}$. Trägt

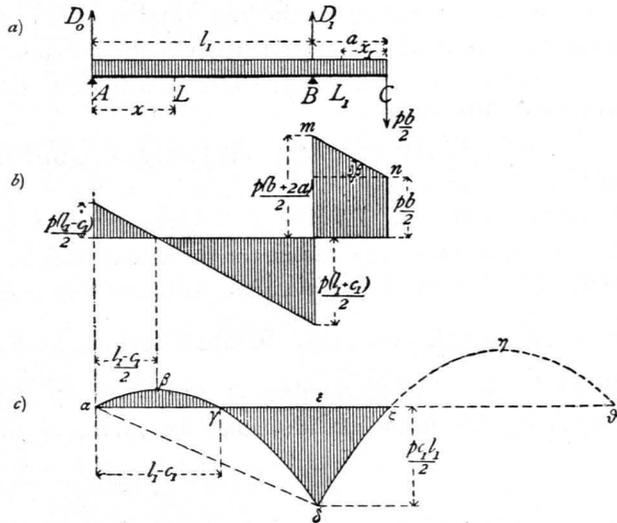
man also von dieser aus die Ordinaten $z = \frac{p}{2} (l_1 x - x^2)$ auf, so ergeben die von $\alpha\epsilon$ aus gemessenen Ordinaten die Momente an den einzelnen Stellen. Für $x = 0$ ist $M_x = 0$;

für $x = l_1$ ist $M_{l_1} = -\frac{p c_1 l_1}{2} = \epsilon\delta$. M_x wird Null für jenen Werth von x , für welchen stattfindet: $0 = \frac{p}{2} (l_1 - x) - \frac{p c_1}{2}$, d. h. für $x_0 = l_1 - c_1$; $\alpha\gamma$ ist also gleich

$l_1 - c_1$. M_x hat sein Maximum für $\frac{dM_x}{dx} = 0$, d. h. für $x_{max} = \frac{l_1 - c_1}{2}$, und es ist

$$M_{max} = \frac{p}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} \cdot \frac{l_1 + c_1}{2} - \frac{p c_1}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} = \frac{p (l_1 - c_1)^2}{8}.$$

Fig. 167.



In der Strecke BC ist das Moment für den Punkt L_1

$$M_{x_1} = -\frac{p b}{2} x_1 - \frac{p x_1^2}{2} = -\frac{p}{2} (b x_1 + x_1^2), \dots 180.$$

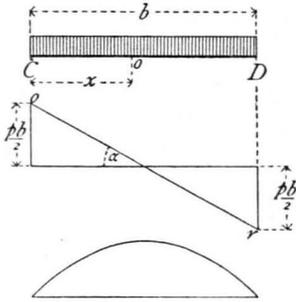
d. h. die graphische Darstellung liefert eine Parabel. M_{x_1} wird Null für $x_1 = 0$ und für $b x_1 + x_1^2 = 0$, d. h. für $x_1 = -b$, also für Punkt C , und wenn die Curve über den Nullpunkt C nach rechts auf die negative Seite der Abscissenaxe fortgesetzt wird, für den Punkt D (Fig. 165). Ferner wird M_{x_1} ein Maximum für $0 = b + 2x_1$, d. h. es wird $x_{1max} = -\frac{b}{2}$. Für $x_1 = a$, d. h. für den Auflagerpunkt B wird

$$M_{x_1} = -\frac{p}{2} (a b + a^2) = -\frac{p}{2} c_1 l_1 \text{ wie bereits oben gefunden. Hiernach ist die}$$

Parabel $\delta \zeta \eta \vartheta$ in Fig. 167 c construiert.

β) Balkenträger auf den beiden Confolen. Für diesen Träger CD (Fig. 168) gilt das unter 1. für den Träger auf zwei Stützen Gefundene. Es ist also für einen Punkt o mit der Abscisse x

Fig. 168.

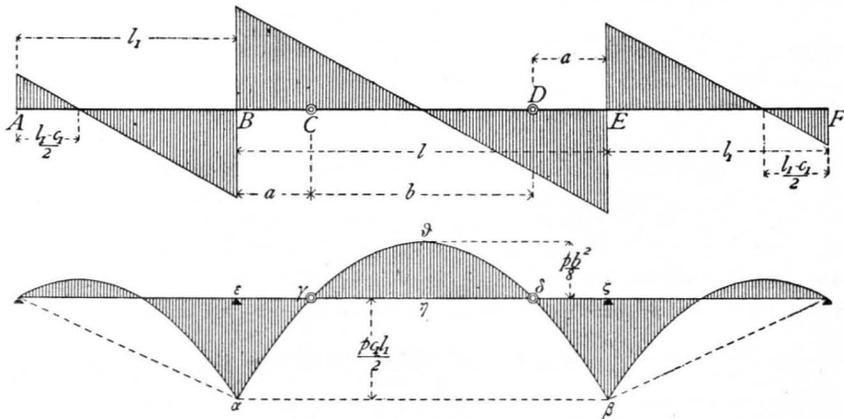


$$Q_x = \frac{p}{2} (b - 2x) \text{ und } M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2). \quad 181.$$

Die graphischen Darstellungen der Transversalkräfte und Momente giebt die Fig. 168.

γ) Ganzer Träger. Betrachtet man nun den ganzen Träger (Fig. 169), so sieht man zunächst, dass die Transversalkräfte und Momente in C gleiche Größe haben, ob man vom Träger ABC oder vom Träger CD ausgeht. Auch die Neigung der Linie or , welche die Transversalkraft auf CD darstellt (Fig. 168), ist mit derjenigen von mn (Fig. 167 b), welche die Transversalkraft der Strecke BC darstellt, identisch; denn es ist

Fig. 169.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{p b}{2}}{\frac{2}{2}} = p \text{ und } \operatorname{tg} \beta = \frac{p a}{a} = p, \text{ d. h. } \beta = \alpha;$$

demnach bilden die beiden Linien or und mn eine einzige Linie. Auch die

Momentencurven beider Theile find identisch; denn für die Abtheilung BC ist nach Gleichung 180. $M_{x_1} = -\frac{p}{2} (b x_1 + x_1^2)$ und für negative x_1 , d. h. für Punkte, welche rechts von C liegen, ist $M_{x_1} = -\frac{p}{2} (-b x_1 + x_1^2) = +\frac{p}{2} (b x_1 - x_1^2)$. Dies ist aber nach Gleichung 181. der Werth, welcher sich für das Moment auf der Strecke CD ergibt. Die in Fig. 167 c punktirte Curve $\zeta \eta \vartheta$ ist also die richtige Momentencurve.

In Fig. 169 find die Momente und Transversalkräfte für den ganzen Träger angegeben.

δ) Vergleich mit dem Träger auf zwei Stützen. Für den mittleren Träger $BCDE$ (Fig. 169) find die Transversalkräfte genau, wie bei einem frei aufliegenden Träger von der Spannweite $l = 2a + b$; für die Seitenträger find die Transversalkräfte an jeder Stelle um $\frac{p c_1}{2}$ kleiner, als beim einfachen, auf den Stützen A und B aufruhenden Balkenträger. Die absoluten Werthe der Transversalkräfte find also auf der positiven Seite um $\frac{p c_1}{2}$ kleiner, auf der negativen Seite um $\frac{p c_1}{2}$ gröfser, als dort.

Was die Momente anbelangt, so ist für die Seitenträger oben bereits nachgewiesen, dafs das Moment an jeder Stelle um $\frac{p c_1 x}{2}$ kleiner ist, als beim frei aufliegenden Balkenträger von der Spannweite l_1 . Falls der Mittelträger in B und E frei aufläge, würde an einer beliebigen Stelle mit der Abciffe ξ von B aus gemessen das Moment $M_\xi = \frac{p}{2} (l \xi - \xi^2) = \frac{p}{2} [(b + 2a) \xi - \xi^2] = p a \xi + \frac{p}{2} b \xi - \frac{p \xi^2}{2}$ sein, oder, wenn man des bequemeren Vergleiches halber die Abciffen vom Punkt C aus rechnet und mit x bezeichnet (nach rechts positiv), so wird $\xi = a \pm x$ und nach einigen Umformungen $M_x = \frac{p}{2} (b x - x^2) + \frac{p}{2} c_1 l_1$. Für den Mittelträger $BCDE$ mit den Gelenken in C und D ist nach Gleichung 181. das Moment $M_x = \frac{p}{2} (b x - x^2)$, also um $\frac{p}{2} c_1 l_1$ kleiner, als wenn die Auflagerung in gewöhnlicher

Weise in B und E erfolgte. Nun ist aber diese Differenz $\frac{p}{2} c_1 l_1$ gerade das negative Moment an den Stützen B und E ; die von der Horizontalen $\alpha \beta$ in Fig. 169 aus gemessenen Ordinaten ergeben daher die Momente des in B und E frei aufliegenden Trägers. Construiert man demnach die Parabel der Gleichung $\frac{p}{2} (l \xi - \xi^2)$ in gewöhnlicher Weise und zieht durch die Punkte γ und δ , in welchen die Verticalen der Confolenenden die Curve schneiden, eine Horizontale $\varepsilon \zeta$, so find die von dieser Horizontalen aus gemessenen Ordinaten die Momente.

Es empfiehlt sich oft, die Confolenlänge fo zu bestimmen, dafs das negative Moment über den Stützen genau fo groß ist (absolut genommen), wie das positive Moment in der Mitte. Man theile dann einfach die Pfeilhöhe der Parabel $\alpha \vartheta \beta$ in zwei gleiche Theile und ziehe durch den Theilpunkt eine Horizontale; alsdann geben die Längen $\varepsilon \gamma$, bezw. $\delta \zeta$ die Längen der Confolen.

Schließlich ist der Vergleich noch in Betreff der Materialmenge anzustellen. Die Querschnittsfläche ist nach Früherem hauptsächlich von der Gröfse des Maximalmomentes in den verschiedenen Querschnitten abhängig. Ist aber die Querschnittsfläche der Gröfse von M proportional, so ist die Materialmenge auf die Länge dx dem Werthe $M dx$, auf die Gesamtlänge dem Werthe $\int M dx$ proportional. $\int M dx$ ist aber die Fläche, welche zwischen der Momentencurve und derjenigen Horizontalen liegt, von welcher aus die Ordinaten abgetragen werden, also für den Fall des Trägers BE auf den Stützen B und E die Fläche $\alpha \gamma \vartheta \delta \beta \alpha$, für den hier vorliegenden Fall des Trägers CD und der Confolen BC und DE (Fig. 169) die Fläche $\alpha \varepsilon \gamma + \gamma \eta \vartheta \delta + \delta \zeta \beta$, wobei selbstverständlich alle Flächen positiv gerechnet werden, da es für die Querschnittsgröfse gleichgiltig ist, ob das Moment positiv oder negativ ist. Wie man durch einen Blick auf die neben stehende Figur sieht, ist die Momentenfläche, mithin auch der Materialverbrauch, im zweiten Falle wesentlich kleiner, als im ersten.

Bei gegebener Weite l wird der Materialverbrauch für die Mittelöffnung BE ein Minimum sein, wenn der Flächeninhalt der Momentenfläche ein Minimum wird. Als Momentenfläche ergibt sich leicht

$$\gamma \eta \delta \vartheta + \alpha \varepsilon \gamma + \delta \zeta \beta = \frac{p}{12} (2b^3 + 6c_1 l_1 l - l^3);$$

wenn $c_1 = \frac{a^2 + ab}{l_1}$ und $a = \frac{l-b}{2}$ eingesetzt wird, erhält man nach einfachen Umformungen

$$f = \frac{p}{12} \left(2b^3 + \frac{l^3}{2} - \frac{3}{2} l b^2 \right).$$

Das Minimum des Flächeninhaltes findet statt für $\frac{df}{db} = 0$, d. h. für $6b^2 - 3lb = 0$ oder $b = \frac{l}{2}$. Wird für b dieser Werth in obige Gleichung für f eingeführt, so wird $f_{min} = \frac{pl^3}{32}$.

Für einen Balken auf zwei Stützen mit der Stützweite l ist die Momentenfläche $f_1 = \frac{2}{3} l \frac{pl^2}{8} = \frac{pl^3}{12}$. Die Ersparnis bei der günstigsten Anordnung, bei welcher $BC = DE = \frac{l}{4}$ ist, ist also proportional dem Werthe $f_1 - f_{min}$.

Zweite Combination: Die Consolen befinden sich am Mittelträger.

α) Mittelträger mit beiderseitigen Consolen. Die Länge des Mittelfeldes (Fig. 170) sei l_1 , diejenige der Console sei a und die Länge jedes Seitenträgers b ; alsdann ist bei totaler Belastung die Auflager-Reaction

$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 + 2a + b) = D_1 \quad . \quad 182.$$

In der Strecke BC ist die Transversalkraft

$$Q_x = -\frac{pb}{2} - px \quad . \quad . \quad 183.$$

Für $x=0$ ist $Q_0 = -\frac{pb}{2}$; für $x=a$ ist $Q_a = -\frac{pb}{2} - pa = -\frac{p}{2} (b + 2a)$.

In der Strecke CD ist die Transversalkraft

$$Q_{x_1} = D_0 - \frac{pb}{2} - pa - px_1 = \frac{p}{2} (l_1 - 2x_1), \quad . \quad . \quad . \quad 184.$$

d. h. genau so groß, wie ohne Console. Für $x_1=0$ ist $Q_0 = \frac{pl_1}{2}$; für $x_1=l_1$ ist

$$Q_{l_1} = -\frac{pl_1}{2}.$$

In der Strecke DE ist die Transversalkraft eben so groß wie in BC ; nur ist hier positiv, was dort negativ ist. Die graphische Darstellung der Transversalkräfte giebt Fig. 171 a.

In den Strecken BC und DE haben die Momente die gleichen Werthe, wie bei den in Art. 369, S. 332 behandelten Consolen. Es ist demnach, vom Punkte B aus gerechnet,

$$M_x = -\frac{pb}{2} x - \frac{px^2}{2} = -\frac{p}{2} (bx + x^2) \quad . \quad . \quad . \quad 185.$$

Für $x=0$ ist $M_0=0$; für $x=a$ ist $M_a = -\frac{p}{2} (ab + a^2) = -\frac{p}{2} c_1 l_1$.

In der Strecke CD ist das Moment

$$M_{x_1} = D_0 x_1 - \frac{px_1^2}{2} - pa \left(\frac{a}{2} + x_1 \right) - \frac{pb}{2} (a + x_1) = \frac{p}{2} (l_1 x_1 - x_1^2) - \frac{p}{2} c_1 l_1 \quad 186.$$

370.
Zweite
Combination.

Fig. 170.

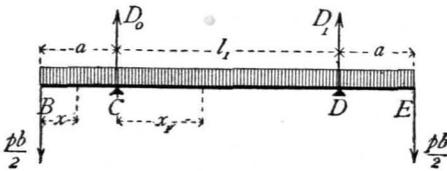
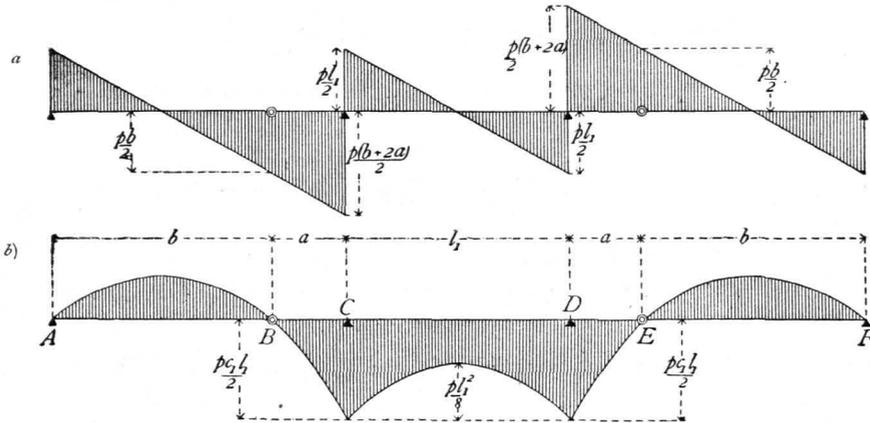


Fig. 171.



Der erste Theil des Momentes ist das Moment für einen frei aufliegenden Balken von der Stützweite l_1 ; der zweite Theil ist das Moment über der Stütze C , bezw. D .

Also auch hier gilt dasselbe, was im vorhergehenden Artikel über den dortigen Mittelträger gesagt wurde. Die graphische Darstellung der Momente ist in Fig. 171 b gegeben.

β) Seitenträger. Die Seitenträger sind frei auf zwei Stützpunkten gelagerte Träger, für welche Alles gilt, was in Art. 361, S. 323 entwickelt wurde. Demnach ist, wenn der linke Auflagerpunkt hier als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt wird,

$$Q_x = \frac{p}{2} (b - 2x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2), \quad \dots \quad 186_a.$$

und es ergibt sich leicht, wie in Art. 369, dass die Curven für die Momente und die Transversalkräfte identisch sind mit denjenigen, welche für die Console BC gefunden worden sind.

Die Momente und Transversalkräfte für die verschiedenen Querschnitte sind in Fig. 171 graphisch aufgetragen.

Zum Schlusse erübrigt noch eine Untersuchung über das günstigste Verhältniss der Gröfsen a und b , d. h. über jenes Verhältniss, welches den geringsten Materialaufwand bedingt.

371.
Günstiges
Verhältniss
von a und b .

Im Hochbau wird man meistens Träger mit constantem oder nahezu constantem Querschnitt verwenden; derselbe muss alsdann so groß sein, wie das größte überhaupt im Träger vorkommende Moment es verlangt. Die Anordnung wird demnach praktisch so getroffen, dass die in den verschiedenen Stellen stattfindenden Maximalmomente einander (absolut genommen) gleich sind.

Beim Träger mit beiderseitigen Consolen (Art. 370, S. 334; Fig. 166) finden die größten Momente über den Stützen C , bezw. D und in der Mitte der Oeffnung statt. Die Bedingung, dass dieselben einander (absolut genommen) gleich sein sollen, giebt eine Gleichung für die günstigste Länge von a . Es ist

$$M_c = \frac{p}{2} c_1 l_1 \quad \text{und} \quad M_{mitte} = \frac{p l_1^2}{8} - \frac{p}{2} c_1 l_1.$$

Es muß demnach $\frac{p}{2} c_1 l_1 = \frac{p l_1^2}{8} - \frac{p}{2} c_1 l_1$ sein, woraus $\frac{l_1}{8} = c_1$. Da nun $c_1 = \frac{a^2 + a b}{l_1}$ ist, wird $a^2 + a b = \frac{l_1^2}{8}$; da ferner $b = l - a$, wird

$$a^2 + a l - a^2 = \frac{l_1^2}{8} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{l} = \frac{1}{8} \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 187.$$

Für $l_1 = l$ würde $a = \frac{l}{8}$; für $l_1 = \frac{4}{3} l$ würde $a = \frac{2}{9} l$ etc.

Beim Träger mit einseitiger Console (Art. 369, S. 330; Fig. 165) würde sich dieses Verhältniß in folgender Weise ergeben. Das Moment über dem Auflager ist $\frac{p}{2} c_1 l_1$; das Maximalmoment in der Oeffnung ist $M_{max} = \frac{p}{8} (l_1 - c_1)^2$; mithin ist die Bedingungsgleichung

$$\frac{p}{8} (l_1 - c_1)^2 = \frac{p}{2} c_1 l_1.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt $c_1 = l_1 (3 - \sqrt{8}) = 0,172 l_1$ und, da $c_1 = \frac{a^2 + a b}{l_1}$, ferner $b = l - 2 a$, so wird nach einfachen Umformungen

$$\frac{a}{l} = \frac{1 - \sqrt{1 - 0,688 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2}}{2} \dots \dots \dots 188.$$

Für die verschiedenen Werthe von $\frac{l_1}{l}$ ergeben sich aus den Gleichungen 187. und 188. die nachfolgenden Werthe für $\frac{a}{l}$:

$\frac{l_1}{l} =$		0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$\frac{a}{l}$	Träger mit beiderseitiger Console	0,06	0,08	0,11	0,125	0,15	0,18	0,21
$\frac{a}{l}$	Träger mit einseitiger Console	0,093	0,125	0,168	0,22	0,30	—	—

Von einer genauen Untersuchung darüber, bei welchem Verhältniß der Spannweiten l und l_1 und der Consolelängen a die Momentenfläche und damit der Materialverbrauch ein Minimum würde, kann hier abgesehen werden, da man im Hochbau nur ganz ausnahmsweise so große derartige Träger anordnet, daß man sich der theoretischen Materialmenge einigermaßen nähert.

4) Continuirliche Träger.

Die continuirlichen Träger oder die Träger auf mehr als zwei Stützpunkten sind nach Art. 357, S. 317 statisch unbestimmt. Die Auflager-Reactionen werden mit Hilfe der Elasticitätslehre ermittelt, indem die Deformationen des Balkens bestimmt werden. Diese Operationen sind in vielen Fällen ziemlich umständlich, und

372.
Auflager-
Reactionen u.
Momente.

es erscheint bei der verhältnismässig geringen Verwendung dieser Träger und um den hier disponibeln Raum nicht zu überschreiten, als genügend, für eine Reihe von gewöhnlichen Belastungsfällen die Grösse der Auflager-Reactionen und der wichtigsten Momente anzugeben¹⁶⁶⁾.

Im Folgenden bezeichnen: $D_0, D_1, D_2 \dots$ die Auflager-Reactionen in den verschiedenen Stützpunkten $0, 1, 2 \dots$; $M_0, M_1, M_2 \dots$ die Momente an diesen Stützpunkten; $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3 \dots$ die Maximalmomente in den Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$; l die Stützweite jeder Oeffnung, falls alle Stützweiten gleich gross sind; $l_1, l_2, l_3 \dots$ die Stützweiten der Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$, falls nicht alle Stützweiten gleich gross sind; $p_1, p_2, p_3 \dots$ die gleichförmig vertheilten Belastungen pro Längeneinheit in den Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$ des Trägers.

α) Sämmtliche Oeffnungen haben die gleiche Stützweite l und die gleiche totale Belastung p pro Längeneinheit zu tragen. Die mafsgebenden Werthe von M, D und \mathfrak{M} sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Anzahl der Oeffnungen.																	
2			3			4			2			3			4		
$M_0 =$	0	0	0	}	$p l^2$	$D_0 =$	0,375	0,100	0,3929	}	$p l$	$\mathfrak{M}_1 =$	0,07031	0,08	0,0771	}	$p l^2$
$M_1 =$	0,125	0,10	0,10714			$D_1 =$	1,250	1,100	1,1428			$\mathfrak{M}_2 =$	0,07031	0,025	0,0863		
$M_2 =$	0	0,10	0,0714			$D_2 =$	0,375	1,100	0,9186			$\mathfrak{M}_3 =$	—	0,08	0,0863		
$M_3 =$	—	0	0,10714			$D_3 =$	—	0,400	1,1428			$\mathfrak{M}_4 =$	—	—	0,0771		
$M_4 =$	—	—	0			$D_4 =$	—	—	0,3929								

β) Die Oeffnungen sind ungleich weit und haben die totalen Belastungen $p_1, p_2, p_3 \dots$ pro Längeneinheit zu tragen.

Nehmen wir zunächst zwei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1 und l_2 an, so ist

$$M_0 = M_2 = 0, \quad M_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}, \quad \dots \quad 189.$$

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_1 (l_1 + l_2)}, & D_1 &= \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_1 l_2} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}, \\ D_2 &= \frac{p_2 l_2}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_2 (l_1 + l_2)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 190.$$

¹⁶⁶⁾ Für das Studium der »Theorie der continuirlichen Träger« seien folgende Schriften empfohlen:

Clapeyron. *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés. Comptes rendus, tome 45ème*, S. 1076.
 Mohr. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen. *Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover* 1860, S. 323; 1868, S. 19.
 Culmann, K. Die graphische Statik. Zürich 1866. S. 273.
 Winkler, E. Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit etc. I. Theil. Prag 1867. S. 112.
 Ritter, W. Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken. Zürich 1871.
 Lippich, F. Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes. *Allg. Bauz.* 1871, S. 104 u. 175. (Auch als Separat- abdruck erschienen: Wien 1871.)
 Weyrauch, J. J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.
 Winkler, E. Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken. I. Heft. Aeusere Kräfte gerader Träger. 2. Aufl. Wien 1875. S. 53.
 Laifse, F. u. A. Schübler. Der Bau der Brückenträger mit besonderer Rückficht auf Eisen-Constructionen. I. Theil. 4. Aufl. Stuttgart 1876. S. 161.
 Schäffer. Belastungsgesetze für den continuirlichen geraden stabförmigen Körper von constantem Querschnitt. *Zeitfchr. f. Bauw.* 1876, S. 239.
 Grashof, F. Theorie der Elasticität und Festigkeit etc. 2. Aufl. Berlin 1878. S. 100.
 Landsberg. Beitrag zur graphischen Berechnung continuirlicher Träger. *Centrabl. d. Bauverw.* 1881, S. 164 u. 174.
 Canovetti. *Théorie des poutres continues etc.* Paris 1882.

Bei drei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1 , l_2 und l_1 ergeben sich folgende Resultate:

$$M_0 = M_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4(3l_2 + 2l_1)} \quad \dots \quad 191.$$

$$D_0 = D_3 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)}, \quad D_1 = D_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2} \quad 192.$$

b) Innere Kräfte der Gitterträger.

373.
Allgemeines.

Die Balkenträger sind entweder vollwandige Träger oder gegliederte Träger, letztere gewöhnlich Gitterträger genannt. Bei den ersteren bildet der ganze Querschnitt eine zusammenhängende Fläche; bei den letzteren besteht derselbe aus zwei getrennten Theilen, den sog. Gurtungsquerschnitten; beide Gurtungen sind durch ein System von Stäben mit einander verbunden.

Die Ermittlung der Spannungen, welche in den vollwandigen Trägern, wozu die hölzernen und gußeisernen Balken, die Walzbalken und Blechträger gehören, durch die äußeren Kräfte erzeugt werden, ist bereits im 4. Kapitel des 1. Abschnittes vorgeführt worden; dafelbst ist auch die Querschnittsbestimmung für diese Balken gezeigt. Im vorliegenden Kapitel sollen deshalb nur die in den Gitterträgern entstehenden inneren Kräfte entwickelt werden.

Gitterträger sind aus einzelnen Stäben combinirte Träger. Die Kreuzungspunkte der einzelnen Stäbe heißen Knotenpunkte. Jeder Gitterträger hat eine obere Gurtung und eine untere Gurtung. Zur Verbindung beider dient das zwischen ihnen angeordnete Gitterwerk.

374.
Classification
der
Gitterträger.

Nach der Form der Gurtung unterscheidet man:

1) Parallelträger, d. h. Träger, deren beide Gurtungen parallel (gewöhnlich auch horizontal) sind.

2) Träger mit einer krummen und einer geraden Gurtung oder mit zwei krummen Gurtungen. Die ersteren nennt man, wenn die Endhöhe des Trägers gleich Null ist und die obere Gurtung krumm, die untere Gurtung gerade ist, Bogenföhnensträger; wenn die untere Gurtung gekrümmt, die obere Gurtung gerade ist, Fischbauchträger. Je nach der Curve der Krümmung unterscheidet man Parabelträger, Hyperbel- (Schwedler-) Träger, Ellipsensträger etc.

3) Dreieck- und Trapezträger, d. h. Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bezw. ein Paralleltapez bilden.

Nach der Anordnung des Gitterwerkes werden unterschieden:

1) Träger mit einfachem Gitterwerk oder Träger, bei denen nur zwei Lagen von Gitterstäben vorhanden sind;

2) Träger mit combinirtem Gitterwerk, falls drei Lagen von Gitterstäben vorhanden sind.

Wir werden uns mit den letzteren nur in so fern beschäftigen, als man die Träger mit Gegendagonalen zu denselben rechnen kann.

Eintheiliges Gitterwerk ist solches, bei welchem sich jeder Gitterstab nur in den Gurtungen mit den anderen Gitterstäben kreuzt; mehrtheiliges Gitterwerk ist solches, bei welchem jeder Gitterstab sich aufer in den Gurtungen noch ein oder mehrere Male mit anderen Gitterstäben kreuzt.

Für die Zwecke des Hochbaues ist wohl immer das eintheilige Gitterwerk