c) Empirifche Formeln.

351. Allgemeine Formel.

Der Umftand, dafs man je nach der gröfseren oder geringeren Länge des Stabes mit verfchiedenen Formeln rechnen mufs, ift ein Uebelftand, dem man durch Einführung empirifcher Formeln abzuhelfen geftrebt hat. Eine folche empirifche Formel mufs für P bei kleinen Werthen von l nahezu oder genau die für einfachen Druck entwickelte Gleichung 127., dagegen bei grofsen Werthen von l die mit Rückficht auf Zerknicken gefundene Gleichung 128. ergeben. Diefen Anforderungen entfpricht folgende Formel [163]):

$$P = \frac{K F \mathfrak{J}}{\mathfrak{J} + \frac{K s F l^2}{C E}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 147.$$

in welcher alle Buchftaben die früheren Bedeutungen haben.

Für $l = 0$ wird entfprechend der für kurze Stäbe aufgeftellten Gleichung 127. auch hier $P = K F$; für den Werth $l = \infty$ mag obiger Formel die Geftalt

$$P = \frac{K F}{1 + \frac{K s F l^2}{C \mathfrak{J} E}}$$

gegeben werden. Ift l fehr grofs, bezw. $= \infty$, fo ift das erfte Glied im Nenner verfchwindend klein gegen das zweite; die Formel lautet alsdann

$$P = \frac{K F}{\frac{K s F l^2}{C E \mathfrak{J}}} = \frac{C \mathfrak{J} E}{s l^2},$$

demnach übereinftimmend mit der Formel 128. für lange Stäbe. Die Formel 147. kann alfo als empirifche Formel angewendet werden und giebt auch ziemlich gut mit den Verfuchen übereinftimmende Werthe. Aus derfelben folgt

$$\frac{P}{K} = \frac{F \mathfrak{J}}{\mathfrak{J} + \frac{K s}{C E} F l^2},$$

und wenn der nur vom Material des Stabes und der Endbefeftigung abhängige Factor $\frac{K s}{C E} = \alpha$ gefetzt wird,

$$\frac{P}{K} = \frac{F \mathfrak{J}}{\mathfrak{J} + \alpha F l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 148.$$

$\frac{P}{K}$ ift diejenige Querfchnittsfläche, welche der Stab haben müffte, wenn er einfachen Druck zu erleiden hätte. Wir bezeichnen diefelbe mit f, alsdann ift

$$f = \frac{F \mathfrak{J}}{\mathfrak{J} + \alpha F l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 149.$$

Die Gleichung 149. kann benutzt werden, um die wirklich nöthige Querfchnittsfläche zu berechnen. Denn es ift aus Gleichung 149.

$$F = \frac{f \mathfrak{J}}{(\mathfrak{J} - \alpha f l^2)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 150.$$

---

163) Schäffer. Beftimmung der zuläffigen Spannung und der Querfchnitte für Eifenconftructionen. Deutfche Bauz. 1877, S. 498.

Das zur Ermittelung der nothwendigen Querſchnittsform und -Gröſse einzuſchlagende Verfahren iſt nun folgendes. Der Maximaldruck P, welcher auf den Stab wirken kann, iſt bekannt, durch Rechnung oder Conſtruction gefunden; alsdann iſt $f = \frac{P}{K}$ ebenfalls leicht zu ermitteln. Man conſtruire nun einen dieſer Querſchnittsfläche entſprechenden Querſchnitt und ermittele das kleinſte Trägheitsmoment deſſelben für eine Schweraxe, alſo $\mathfrak{J}$. Bekannt ſind jetzt die Gröſsen f, $\mathfrak{J}$, α und l, und die Gleichung 150. ergiebt nun die dem Querſchnitt wirklich zu gebende Flächengröſse F. Fällt dieſelbe gröſser aus, als die angenommene Querſchnittsfläche, ſo iſt letztere entſprechend zu vergröſsern, das neue Trägheitsmoment einzuſetzen, F aus Gleichung 150. aufs Neue zu berechnen und dieſes Verfahren ſo lange zu wiederholen, bis eine genügende Uebereinſtimmung der wirklichen Querſchnittsfläche mit der nöthigen ſtattfindet. Dabei hat man ſich jedoch vor dem Fehler zu hüten, bei den ſpäteren Berechnungen den neuen Werth der Querſchnittsfläche für f einzuführen, da ja f nicht die wirkliche Querſchnittsfläche, ſondern den für einen beſtimmten Stab ganz conſtanten Werth $\frac{P}{K}$ angiebt. Bei einiger Uebung iſt es leicht, bereits bei der zweiten Rechnung eine entſprechende Querſchnittsfläche zu finden.

Die mehrmalige Berechnung des Trägheitsmomentes iſt unbequem und kann auf die nachſtehend angegebene Weiſe vermieden werden. 352. Vereinfachung.

Nach Gleichung 130. iſt $\mathfrak{J} = c\,F h^2$, worin c ein von der ſpeciellen Querſchnittsform abhängiger Coefficient, h eine Dimenſion des Querſchnittes iſt. Wird dieſer Werth in Gleichung 150. eingeführt, ſo wird:

$$F = \frac{f\,c\,F\,h^2}{c\,F\,h^2 - \alpha f\,l^2} \quad \text{oder} \quad F\,c\,h^2 = f\,(c\,h^2 + \alpha\,l^2),$$

$$\frac{F}{f} = 1 + \frac{\alpha}{c}\left(\frac{l}{h}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 151.$$

Für eine Reihe nicht zu complicirter Querſchnittsformen: Quadrat, Kreis, Kreuz-, Winkel-, I-Eiſen etc. iſt, wie in den Art. 343 bis 348 (S. 305 bis 308) gezeigt wurde, c ohne beſondere Schwierigkeiten zu beſtimmen; für α giebt die nachſtehende Tabelle die betreffenden Werthe an. Sonach iſt mittels Gleichung 151. F leicht zu ermitteln.

Tabelle für die Werthe von $\alpha = \frac{K\,s}{C\,E}$.

Conſtructions-material	Allgemeine Formel	Fall 1: Ein Ende eingeſpannt, das andere frei drehbar	Fall 2: Beide Enden frei drehbar	Fall 3: Beide Enden eingeſpannt	Fall 4: Ein Ende eingeſpannt, das andere vertical geführt
Schmiedeeiſen	$\frac{0{,}00175}{C}$	0,00072	0,00018	0,000045	0,00009
Guſseiſen	$\frac{0{,}004}{C}$	0,0016	0,0004	0,0001	0,0002
Holz	$\frac{0{,}0054}{C}$	0,0022	0,00054	0,00013	0,00026

353. Anwendung auf verfchiedene Querfchnitte.

Die Gleichung 151. ergiebt für die verfchiedenen, in den Art. 343 bis 348 (S. 305 bis 308) behandelten Querfchnittsformen, wenn die dort ermittelten Werthe für c zu Grunde gelegt werden, folgende fpecielle Gleichungen:

1) Rechteck und Quadrat: $\frac{F}{f} = 1 + 12\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2.$

2) Kreis: $\frac{F}{f} = 1 + 16\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2.$

3) Kreisring: $\frac{F}{f} = 1 + 8\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2.$

4) Kreuzquerfchnitt: $\frac{F}{f} = 1 + 24\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2.$

5) Einfaches gleichfchenkeliges Winkeleifen: $\frac{F}{f} = 1 + 24\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2.$

6) I-förmiger Walzbalken-Querfchnitt: $\frac{F}{f} = 1 + 20{,}4\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2.$

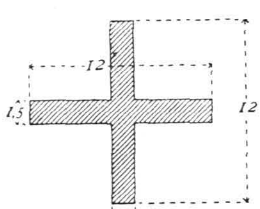
Diefe aus der empirifchen Formel 147. abgeleiteten, eben angegebenen Formeln ergeben naturgemäfs Refultate, welche mit den auf frühere Weife gefundenen nicht genau übereinftimmen; denn die Formel 147. ift, wie oben gezeigt, nur für die Grenzwerthe von l, d. h. für $l = 0$ und $l = \infty$, richtig, ftimmt aber für die Mittelwerthe nicht genau. Es dürfte fich defshalb empfehlen, die hier angegebenen Formeln nur für eine vorläufige Querfchnittsbeftimmung zu benutzen und nachher auf Grund der genaueren Formeln eine Rectification vorzunehmen.

354. Beifpiele.

Die Anwendung obiger Formeln foll an einigen Beifpielen gezeigt werden.

1) Es fei für einen gufseifernen Stab mit beweglichen Enden und kreuzförmigem Querfchnitt (Fig. 149) $P = 4800^{\text{kg}}$, $l = 200^{\text{cm}}$. Alsdann ift $f = \frac{4800}{500} = 9{,}6^{\text{qcm}}$ und bei vorläufig, wie in Fig. 149, angenommenem Querfchnitt $\frac{l}{h} = \frac{200}{12} = 16{,}7$. Hiernach wird $\frac{F}{f} = 1 + 24 \cdot 0{,}0004 \cdot 16{,}7^2 = 3{,}68$ und $F = 9{,}6 \cdot 3{,}68 = 35{,}33^{\text{qcm}}$. Der gewählte Querfchnitt hat $1{,}5 \cdot 2 \cdot 12 - 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 33{,}75^{\text{qcm}}$, womit man fich wohl begnügen kann.

Fig. 149.



2) Es fei $P = 3300^{\text{kg}}$, $l = 100^{\text{cm}}$; der Stab werde durch ein einfaches gleichfchenkeliges Winkeleifen gebildet; der Fall 4 kann angenommen werden. Zunächft ift $f = \frac{3300}{700} = \backsim 4{,}7^{\text{qcm}}$. Gewählt werde ein Winkeleifen von $5{,}5 \times 5{,}5 \times 0{,}8^{\text{cm}}$; alsdann ift $\frac{l}{h} = \frac{100}{5{,}5} = 18$, ferner

$$\frac{F}{f} = 1 + 24 \cdot 0{,}00009 \cdot 18^2 = 1{,}7 \quad \text{und} \quad F = 1{,}7 \cdot 4{,}7 = 7{,}99^{\text{qcm}}.$$

Das gewählte Winkeleifen hat eine Querfchnittsfläche von $8{,}16^{\text{qcm}}$, ift alfo genügend.

3) In einem Holzftabe mit quadratifchem Querfchnitt und nicht beweglichen Enden, bei welchem Fall 4 vorausgefetzt werden kann, herrfcht ein Druck $P = 9500^{\text{kg}}$; wenn ferner $l = 300^{\text{cm}}$ angenommen wird, ift $f = \frac{9500}{65} = 146^{\text{qcm}}$. Wird vorläufig die Querfchnittsfeite mit 18^{cm} gewählt, fo ift $\frac{l}{h} = \frac{300}{18} = 16{,}7$; es wird ferner $\frac{F}{f} = 1 + 12\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2 = 1 + 12 \cdot 0{,}00026 \cdot 279 = 1{,}87$ und $F = 1{,}87 \cdot 146 = 273^{\text{qcm}}$. Der angenommene Querfchnitt mifft $18 \cdot 18 = 326^{\text{qcm}}$, ift alfo zu grofs.

Wird $h = 17^{\text{cm}}$ gewählt, fo wird $\frac{l}{h} = \frac{300}{17} = 18$, weiters $\frac{F}{f} = 1 + 12 \cdot 0{,}00026 \cdot 324 = 2{,}01$ und $F = 2{,}01 \cdot 146 = 293^{\text{qcm}}$. Der nunmehr gewählte Querfchnitt hat eine Fläche von $17 \cdot 17 = 289^{\text{cm}}$, ftimmt alfo gut überein.

Nach der genaueren Berechnung auf S. 309 (unter 4) ergab fich ein quadratifcher Querfchnitt von nur $14{,}5^{\text{qcm}}$ Seitenlänge fchon als genügend.