Fig. 135.

Fall 1.

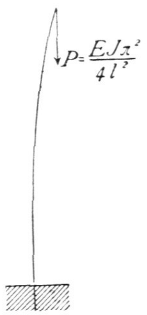


Fig. 136.

Fall 2.

Fig. 137.

Fall 3.

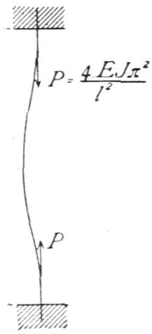
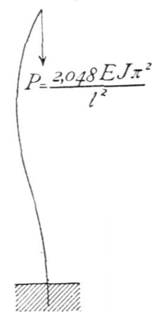


Fig. 138.

Fall 4.



Durch entſprechende Endanordnung würde man alſo die Tragfähigkeit des Stabes verſechzehnfachen können. Die angegebenen Kräfte ſind thatſächlich im Stande, den Stab zu zerknicken, und es ſind deſshalb Sicherheits-Coefficienten einzuführen.

b) Querſchnittsermittelung für gedrückte Stäbe mit Rückſicht auf den Widerſtand gegen Zerknicken.

339.
Zuläſſige Beanſpruchung.

Die unter a. für die Tragkraft der Stäbe entwickelten Formeln ſind nicht ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar. Wenn die Stablänge ſehr klein, alſo auch das im Nenner der Werthe für P, welche in den Fig. 135 bis 138 eingeſchrieben ſind, vorkommende l^2 ſehr klein wird, ſo ergeben ſich für P ſehr groſse Werthe, gröſsere Werthe, als die Druckfeſtigkeit des Stabes geſtattet. Soll der Stab nicht durch einfachen Druck zerſtört werden, ſo darf die Kraft P nicht ſo groſs werden, daſs die Druckbeanſpruchung pro Flächeneinheit des Querſchnittes die Druckfeſtigkeit erreicht. Führt man Sicherheits-Coefficienten ein und bezeichnet die zuläſſige Beanſpruchung auf einfachen Druck pro Flächeneinheit der Querſchnittsfläche F mit K, ſo darf höchſtens ſtattfinden:

$$P = F K \qquad \text{127.}$$

Mit Rückſicht auf Widerſtand gegen Zerknicken darf höchſtens ſtattfinden, wenn s der Sicherheits-Coefficient und C ein Coefficient iſt, der von der Endbefeſtigung abhängt,

$$P = \frac{C E \mathfrak{J}}{s\, l^2} \qquad \text{128.}$$

Gröſser als der Werth in Gleichung 127. iſt, darf P mit Rückſicht auf die zuläſſige Druckbeanſpruchung nicht werden; gröſser, als der Werth in Gleichung 128. iſt, darf P des Zerknickens wegen nicht werden; es iſt alſo ſtets der kleinere dieſer beiden Werthe für diejenige Belaſtungsgröſse maſsgebend, welche dem Stabe zugemuthet werden darf. Bei groſser Stablänge l ergiebt die Gleichung 128., bei geringer Stablänge l die Gleichung 127. kleinere Werthe für P. Der Grenzwerth von l, etwa l_1, wird derjenige ſein, für welchen aus beiden Gleichungen derſelbe Werth von P folgt. Dieſer Grenzwerth ergiebt ſich durch Gleichſetzung der beiden Werthe von P in den Relationen 127. und 128. zu

$$l_1 = \sqrt{C}\,\sqrt{\frac{E}{K s}}\,\sqrt{\frac{\mathfrak{J}}{F}} \qquad \text{129.}$$

Falls die Stablänge kleiner ist, als l_1, so ist Gleichung 127., falls sie grösser ist, als l_1, so ist Gleichung 128. anzuwenden.

Wenn zur Berechnung der Querschnittsfläche F die Gleichung 127. benutzt werden kann, so findet im ganzen Querschnitt eine gleichmäfsige Beanspruchung K statt; es wird also eine volle Ausnutzung des Materials erreicht; muss dagegen die Gleichung 128. der Berechnung zu Grunde gelegt werden, so ist dies nicht der Fall, weil alsdann eine wesentlich geringere Beanspruchung pro Flächeneinheit des Querschnittes stattfindet. 340. Querschnitts-ermittelung.

Man wird demnach rationeller Weise den Querschnitt stets so zu disponiren streben, dass die Gleichung 127. angewendet werden kann, also die Querschnittsform und -Grösse nach der Gleichung 129. bestimmen. Wenn diese Gleichung erfüllt ist, so gilt auch die einfache Druckgleichung, und man kann alsdann den Querschnitt ohne Rücksicht auf Zerknicken berechnen. Die Coefficienten E, K und s, welche unter dem zweiten Wurzelzeichen der Gleichung 129. vereinigt sind, haben für alle Stäbe aus demselben Material gleiche Werthe; dabei soll von einer Verwerthung der *Wöhler*'schen Versuchsresultate (vergl. Art. 283, S. 248) und demgemäss von einer Annahme variabeler Werthe für K abgesehen werden. Wird als Flächeneinheit das Quadratcentimeter, als Krafteinheit das Kilogramm angenommen, und werden für K und E die Werthe aus der Tabelle auf S. 247 eingeführt, so ist

für Schmiedeeisen:	für Gusseisen:	für Holz:
$E = 200\,000$	$1\,000\,000$	$120\,000$ kg pro 1 qcm
$K = 700$	500	65 » »
$s = 5$	8	10
$\sqrt{\frac{E}{Ks}} = 23{,}9$	$15{,}8$	$13{,}6$

Der Coefficient C unter dem ersten Wurzelzeichen der Gleichung 129. ist von der Form, Länge und dem Material des Stabes ganz unabhängig; derselbe hängt nach Obigem nur von der Art der Endbefestigung ab. Für die in den Fig. 135 bis 138 dargestellten Fälle hat C folgende Werthe:

Fall 1:	Fall 2:	Fall 3:	Fall 4:
$C = \frac{\pi^2}{4}$	$= \pi^2$	$= 4\,\pi^2$	$= 2\,\pi^2$ (genügend genau)
$\sqrt{C} = 1{,}57$	$= 3{,}14$	$= 6{,}28$	$= 4{,}44.$

Die beiden Grössen J und F endlich, welche sich unter dem dritten Wurzelzeichen der Gleichung 129. befinden, sind von der Form und Grösse der Querschnittsfläche abhängig. Die einfache Druckgleichung wird demnach anwendbar sein, wenn J und F in solchem Verhältniss zur Stablänge construirt werden, dass die Gleichung 127. erfüllt ist.

Wir wollen eine, in der Regel die kleinste Querschnittsdimension des Stabes mit h, einen von der Querschnittsform abhängigen Coefficienten mit c bezeichnen und setzen

$$J = c\,F\,h^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 130.$$

Alsdann ist $\sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{c\,F\,h^2}{F}} = h\sqrt{c}$, und Gleichung 129. übergeht in

$$\frac{l_1}{h} = \sqrt{C}\,\sqrt{\frac{E}{Ks}}\,\sqrt{c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 131.$$

In diefer Gleichung ift, wenn die Querfchnittsform beftimmt ift, Alles gegeben bis auf h. Es ift defshalb für diefe Dimenfion meiftens derjenige Minimalwerth leicht zu ermitteln, bei welchem Gleichung 131. erfüllt ift, für welchen alfo die Querfchnittsberechnung nach der einfachen Druckgleichung vorgenommen werden kann.

Die Werthe von $\frac{l_1}{h}$, welche fich nach Obigem für die verfchiedenen Materialien und verfchiedenen Befeftigungsweifen ergeben, find in der nachfolgenden Tabelle zufammengeftellt:

Conftructions-material.	Allgemeine Formel.	Fall 1: Ein Ende eingefpannt, das andere frei drehbar.	Fall 2: Beide Enden frei drehbar.	Fall 3: Beide Enden eingefpannt.	Fall 4: Ein Ende eingefpannt, das andere in der Verticalen geführt.
Schmiedeeifen .	$\frac{l_1}{h} = 23{,}9 \sqrt{C} \sqrt{c}$	$= 37{,}52 \sqrt{c}$	$= 75{,}04 \sqrt{c}$	$= 150{,}1 \sqrt{c}$	$= 106 \sqrt{c}$
Gufseifen . . .	$\frac{l_1}{h} = 15{,}8 \sqrt{C} \sqrt{c}$	$= 24{,}8 \sqrt{c}$	$= 49{,}6 \sqrt{c}$	$= 95{,}2 \sqrt{c}$	$= 70{,}15 \sqrt{c}$
Holz	$\frac{l_1}{h} = 13{,}6 \sqrt{C} \sqrt{c}$	$= 21{,}35 \sqrt{c}$	$= 42{,}7 \sqrt{c}$	$= 85{,}4 \sqrt{c}$	$= 60{,}38 \sqrt{c}$

Mittels diefer Tabelle find für die verfchiedenen Querfchnitte der Praxis die Grenzwerthe l_1, bezw. h meiftens ohne Schwierigkeit zu ermitteln, und es foll das einzufchlagende Verfahren weiter unten für eine Reihe von Querfchnitten gezeigt werden.

341. Querfchnitts-ermittelung für lange Stäbe.

Bei fehr grofsen Stablängen ergeben fich häufig für h aus der Gleichung 131. Werthe, welche praktifch nicht wohl ausführbar find; in diefem Falle kann man die Bedingung einer vollftändigen Querfchnittsausnutzung nicht mehr aufrecht erhalten, und man mufs den Querfchnitt des Stabes nach der Zerknickungsformel, Gleichung 128., berechnen.

Mit einigen Modificationen kann aber auch hier der im vorhergehenden Artikel gezeigte Rechnungsgang beibehalten werden. Wir bezeichnen zu dem Zwecke mit k diejenige Spannung, welche pro Flächeneinheit in dem mit Rückficht auf Widerftand gegen Zerknicken berechneten Querfchnitt entfteht; alsdann ift, wenn die Querfchnittsfläche wieder $= F$ ift,

$$k = \frac{P}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 132.$$

Nun ift aber nach Gleichung 128. die zuläffige Tragkraft

$$P = \frac{C E \mathfrak{J}}{s l^2},$$

alfo die zuläffige Beanfpruchung pro Flächeneinheit der Querfchnittsfläche

$$k = \frac{C E \mathfrak{J}}{s F l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 133.$$

und, wenn wiederum $\mathfrak{J} = c F h^2$ eingefetzt wird,

$$k = \frac{C E c}{s} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 134.$$

Berechnet man nach diefer Formel die zuläffige Beanfpruchung für gegebene

Verhältniſſe von $\frac{h}{l}$ und ſetzt man den gefundenen Werth in Gleichung 132. ein, ſo ergiebt ſich die nöthige Querſchnittsfläche aus derſelben zu

$$F = \frac{P}{k} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 135.$$

Selbſtverſtändlich darf k nie gröſser werden als K. Es wird aber k zu K, wenn l zu l_1 wird. Denn durch Einſetzung des Werthes l_1 in Gleichung 134. für l wird dieſelbe identiſch mit Gleichung 131. Es gelten alſo nur diejenigen Werthe für k, welche kleiner als K ſind.

Nach der Formel 134. laſſen ſich Tabellen für die verſchiedenen Querſchnittsformen berechnen, aus denen ſodann für die möglichen Werthe von $\frac{h}{l}$ die Werthe von k leicht entnommen werden können.

Für die Haupt-Conſtructionsmaterialien und die Hauptfälle der Praxis ſind die aus Gleichung 134. ſich ergebenden Ausdrücke in der nachfolgenden Tabelle zuſammengeſtellt.

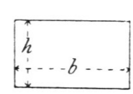
Conſtructions-material	Allgemeine Formel	Fall 1: Ein Ende eingeſpannt, das andere frei drehbar	Fall 2: Beide Enden frei drehbar	Fall 3: Beide Enden eingeſpannt	Fall 4: Ein Ende eingeſpannt, das andere vertical geführt
Schmiedeeiſen	$k = 400\,000\, c\, C \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 986\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 3\,944\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 15\,776\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 7\,888\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$
Guſseiſen . .	$k = 125\,000\, c\, C \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 307\,500\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 1\,230\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 4\,920\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 2\,460\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$
Holz	$k = 12\,000\, c\, C \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 29\,520\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 118\,080\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 472\,320\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 236\,160\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$

Es wird ſich nunmehr darum handeln, für die wichtigeren, in der Praxis vorkommenden Querſchnittsformen von auf Druck, bezw. Zerknickung beanſpruchten Stäben die Werthe von l_1 und k zu ermitteln. Bei dieſen Unterſuchungen und Berechnungen werden wir den Fall 2, bei welchem beide Enden frei drehbar ſind, zu Grunde legen, da derſelbe der häufigſte iſt und die anderen Fälle durch Multiplication mit bezw. $\frac{1}{4}$, 4 und 2 leicht auf denſelben zurückgeführt werden können. 342. Ermittelung von l_1 und k für:

1) Rechteckiger Querſchnitt (Fig. 139). Die beiden Dimenſionen deſſelben ſeien h und b, wobei $h < b$; alsdann iſt 343. rechteckige Querſchnitte.

$$c = \frac{\mathfrak{J}}{F h^2} = \frac{b h^3}{12\, b h^3} = \frac{1}{12} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0{,}289.$$

Fig. 139.



Nach Gleichung 131. wird für den zweiten Zerknickungsfall

für Schmiedeeiſen: Guſseiſen: Holz:

$$\frac{l_1}{h} = 21{,}68 \qquad = 14{,}33 \qquad = 12{,}34 \quad \ldots \quad 136$$

Soll alſo die einfache Druckgleichung anwendbar ſein, ſo darf die Stablänge nicht mehr als rot. das 21-fache, bezw. das 14- und 12-fache der kleineren Querſchnittsdimenſion betragen.

Da $h < b$ angenommen wurde, wird h bei gleicher Gröſse der Querſchnittsfläche am gröſsten, wenn $h = b$, d. i. wenn das Rechteck zum Quadrat wird. Der günſtigſte Rechteckquerſchnitt für gedrückte Stäbe iſt alſo der quadratiſche.

In den meiſten Fällen ergiebt die Ermittelung von h aus der Gleichung 136. ſo groſse Werthe, daſs die Gleichung $F = \frac{P}{K}$ nicht mehr zutrifft; alsdann iſt k nach Gleichung 134. zu beſtimmen. Man erhält wiederum für den Fall 2 abgerundet

$$k = 329\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad = 102\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad = 9800 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad 137.$$
(für Schmiedeeiſen: / Guſseiſen: / Holz:)

Für eine Anzahl häufig vorkommender Werthe von $\frac{h}{l}$ ſind die zuläſſigen Beanſpruchungen k berechnet und in der Tabelle auf S. 308 zuſammengeſtellt.

344. kreisförmige Querſchnitte.

2) Kreisförmiger Querſchnitt. Iſt der Durchmeſſer d, ſo wird

$$F = \frac{d^2 \pi}{4}, \quad \mathfrak{J} = \frac{d^4 \pi}{64}, \quad h = d,$$

$$c = \frac{\mathfrak{J}}{F h^2} = \frac{4\, d^4 \pi}{64\, d^2 \pi\, d^2} = \frac{1}{16} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0{,}25.$$

Wiederum für den Fall 2 wird aus Gleichung 131.

für Schmiedeeiſen: Guſseiſen: Holz:

$$\frac{l_1}{h} = 18{,}76 \qquad = 12{,}4 \qquad (= 10{,}7) \quad \ldots\ldots \quad 138.$$

Der Werth für Holz iſt eingeklammert, weil dieſe Querſchnittsform beim Holz nur ausnahmsweiſe vorkommt.

Aus Gleichung 134. ergiebt ſich für den Fall 2 und

für Schmiedeeiſen: Guſseiſen:

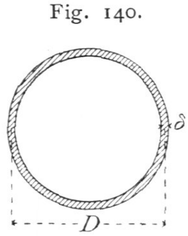
$$k = 246\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \qquad = 76\,900 \left(\frac{h}{l}\right)^2, \quad \ldots\ldots \quad 139$$

woraus man die in der Tabelle auf S. 308 angegebenen Werthe von k erhält.

345. kreisringförmige Querſchnitte.

3) Kreisringförmiger Querſchnitt (Fig. 140). Iſt die als gering angenommene Wandſtärke gleich δ, der mittlere Durchmeſſer D, ſo iſt annähernd

Fig. 140.



$$F = D \pi \delta, \quad \mathfrak{J} = \frac{D^3 \pi \delta}{8}, \quad h = D,$$

$$c = \frac{\mathfrak{J}}{F h^2} = \frac{D^3 \pi \delta}{8\, D \pi \delta\, D^2} = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0{,}353.$$

Nach Gleichung 131. wird für Fall 2 und

für Schmiedeeiſen: Guſseiſen:

$$\frac{l_1}{h} = 26{,}49 \qquad = 17{,}5 \quad \ldots\ldots \quad 140.$$

Die Conſtruction der Enden iſt bei den guſseiſernen Säulen meiſtens eine derartige, daſs man den Fall 4 der Rechnung zu Grunde legen, alſo annehmen kann, das untere Ende ſei eingeſpannt, das obere vertical geführt. Alsdann iſt (ſiehe die Tabelle auf S. 304)

$$\frac{l_1}{h} = 70{,}15 \cdot 0{,}353 = 24{,}76 = \frac{l_1}{D}, \quad D = 0{,}04\, l,$$

$$\delta^{\mathrm{cm}} = \frac{P}{D \pi K} = \frac{25\, P}{l \pi K} = 0{,}00016\, \frac{P^{\mathrm{kg}}}{l^{\mathrm{m}}}.$$

Nach Gleichung 134. ergiebt ſich

für Schmiedeeiſen: Guſseiſen:

$$\text{für Fall 2:} \quad k = 490\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \qquad = 153\,750 \left(\frac{h}{l}\right)^2,$$

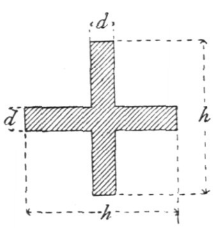
$$\text{für Fall 4:} \quad k = 980\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \qquad = 307\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2.$$

346. kreuzförmige Querſchnitte.

4) Kreuzförmiger Querſchnitt.

α) Guſseiſen. Wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich iſt, ſo wird man den Querſchnitt am beſten ſo disponiren, daſs die Trägheitsmomente für alle Schwerpunktsaxen gleich ſind, d. h. daſs die beiden Hauptträgheitsmomente gleich ſind. Dieſe Gleichheit findet ſtatt, wenn die beiden Kreuzarme gleiche Länge und gleiche Dicke haben (Fig. 141). Alsdann iſt

Fig. 141.



$$\mathfrak{J} = \frac{1}{12}\left[d h^3 + h d^3 - d^4\right] = \frac{d h^3}{12}\left[1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2 - \left(\frac{d}{h}\right)^3\right].$$

In den meiſten Fällen iſt $\frac{d}{h}$ ein kleiner Bruch, ſo daſs ohne merklichen Fehler $\left(\frac{d}{h}\right)^2$ und $\left(\frac{d}{h}\right)^3$ vernachläſſigt werden können, jedenfalls dann, wenn der vorläufigen Querſchnittsbeſtimmung eine nachträgliche genauere Berechnung folgt. Man erhält alsdann

$$\mathcal{J} = \frac{d\,h^3}{12}, \quad F = 2\,h\,d - d^2 = 2\,h\,d\left(1 - \frac{d}{2\,h}\right) \text{ oder angenähert } F = 2\,h\,d;$$

$$c = \frac{\mathcal{J}}{F h^2} = \frac{d\,h^3}{12 \, . \, 2\,h^3\,d} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0{,}204.$$

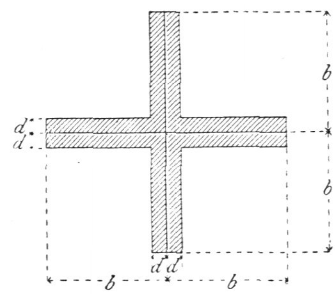
Auf Grundlage der Gleichungen 131. und 134. wird für den Fall 2:

$$\frac{l_1}{h} = 10{,}12 \quad \text{und} \quad k = 51\,250\left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 141.$$

Hiernach ſind die betreffenden Werthe in der Tabelle auf S. 308 berechnet.

β) Schmiedeeiſen. Bei dieſem Material ſei nur der aus 4 gleichſchenkeligen Winkeleiſen nach Fig. 142 zuſammengeſetzte Querſchnitt betrachtet. Es iſt

Fig. 142.



$$F = 4\,(2\,b\,.\,d - d^2) = 8\,b\,d - 4\,d^2 \text{ oder angenähert } F = 8\,b\,d;$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12}\left[2\,d\,.\,(2\,b)^3 + 2\,b\,.\,(2\,d)^3 - 2\,d\,(2\,d)^3\right],$$

$$\mathcal{J} = \frac{16}{12}\,b^3\,d\left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3\right] \text{ oder angenähert } \mathcal{J} = \frac{16}{12}\,b^3\,d;$$

$$h = 2\,b, \quad c = \frac{16\,b^3\,d}{12\,.\,8\,b\,d\,.\,4\,b^2} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0{,}204.$$

Demnach iſt

$$\frac{l_1}{h} = \frac{l_1}{2\,b} = 15{,}31 \quad \text{und} \quad k = 164\,000\left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad . \quad 142.$$

5) Das einfache gleichſchenkelige Winkeleiſen (Fig. 143). Das Trägheitsmoment unten ſtehenden Kreuzquerſchnittes iſt bei geringer Schenkelſtärke für alle Schweraxen (ſiehe Art. 346) 347. L-förmige Querſchnitte.

$\mathcal{J} = \frac{d\,h^3}{12}$, und da $h = 2\,b$, auch $\mathcal{J} = \frac{2\,d\,b^3}{3}$.

Fig. 143.

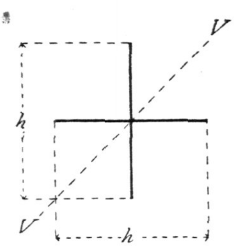
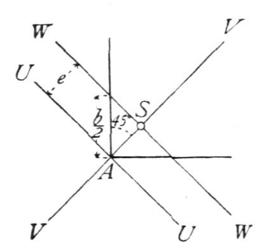


Fig. 144.



Zu dieſem Trägheitsmomente trägt der Theil an der einen Seite der Axe VV genau eben ſo viel bei, wie der Theil an der anderen Seite. Wir können alſo auch angenähert annehmen, daſs für jede beliebige durch A gelegte Axe das Trägheitsmoment des Winkeleiſens halb ſo groſs iſt, als der obige Ausdruck, d. h. daſs für jede durch A gelegte Axe, alſo auch für die Symmetrieaxe VV (Fig. 144) ſtattfindet:

$$i_V = i_U = \frac{d\,b^3}{3}.$$

Wir ſuchen das Trägheitsmoment für diejenige Schwerpunktsaxe, in Bezug auf welche es ein Minimum wird; ein Minimum wird das Trägheitsmoment für die zur Symmetrieaxe VV im Schwerpunkt normale Hauptaxe WW. Demnach iſt i_W zu ermitteln. Es iſt nach Gleichung 42.

$$i_U = i_W + F\,e^2 \quad \text{und} \quad i_W = i_U - F\,e^2 = \frac{d\,b^3}{3} - 2\,b\,d\,e^2.$$

Der Schwerpunkt S iſt aber der Schnittpunkt der Symmetrieaxe VV mit der Verbindungslinie der beiden Schenkelſchwerpunkte (wenigſtens für den vorliegenden Zweck genau genug) alſo:

$$\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{e}{\frac{b}{2}} = \frac{2\,e}{b} \quad \text{und} \quad e^2 = \frac{b^2}{4\,.\,2} = \frac{b^2}{8},$$

mithin

$$i_W = \frac{d\,b^3}{3} - \frac{2\,b^3\,d}{8} = \frac{d\,b^3}{12}, \quad c = \frac{i_W}{F\,h^2} = \frac{d\,b^3}{12\,.\,2\,b\,d\,b^2} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0{,}204.$$

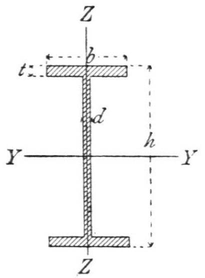
Man erhält nunmehr

$$\frac{l_1}{b} = \frac{l_1}{h} = 15{,}31 \quad \text{und} \quad k = 164\,000\left(\frac{b}{l}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 143.$$

348. **I**-förmige Querfchnitte.

6) Der **I**-förmige Walzbalken-Querfchnitt (Fig. 145, Deutfche Normalprofile, Art. 188, S. 198). $\mathfrak{J}_{min}$ findet in Bezug auf die Z-Axe ftatt. Es ift

Fig. 145.



$$\mathfrak{J}_Z = \mathfrak{J} = \frac{1}{12}\left[2\,t\,b^3 + d^3\,(h - 2\,t)\right] = \frac{t\,b^3}{12}\left[2 + \left(\frac{d}{b}\right)^3\left(\frac{h}{t} - 2\right)\right].$$

Unbedenklich kann man angenähert fchreiben:

$$F = 2\,b\,t + d\,h \quad \text{und} \quad \mathfrak{J} = \frac{t\,b^3}{6}.$$

Die früher im Ausdrucke für c mit h bezeichnete Gröfse ift hier gleich b, fonach

$$c = \frac{t\,b^3}{6\,(2\,b\,t + d\,h)\,b^2} = \frac{1}{6\left(2 + \frac{d\,h}{b\,t}\right)} \quad \ldots\ldots \quad 144.$$

Für die Normalprofile Nr. 8 bis 24, welche hier vorzugsweife in Betracht kommen, liegt c zwifchen den Grenzen $0{,}0511$ und $0{,}0476$, und es ift im Mittel

$$c = 0{,}049 \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0{,}22.$$

Man erhält aus diefen Mittelwerthen für den Fall 2:

$$\frac{l_1}{h} = 16{,}51 \quad \text{und} \quad k = 19\,300\left(\frac{l}{b}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 145.$$

Aus den im Vorftehenden gefundenen Refultaten find für eine Reihe von Werthen des $\frac{h}{l}$ und für eine Anzahl häufig vorkommender Querfchnittsformen die zuläffigen Beanfpruchungen ausgerechnet und in nachfolgender Tabelle zufammengeftellt.

Tabelle

der zuläffigen Beanfpruchungen k (in Kilogramm pro 1 qcm Querfchnittsfläche) für lange gedrückte Stäbe. Fall 2 [162]): Drehbare Enden (Fig. 136 auf S. 302).

$\frac{l}{h}$	Rechteckquerfchnitt			Kreisquerfchnitt		Kreisring-querfchnitt		Kreuz-quer-fchnitt	Winkel-eifen	**I**-Quer-fchnitt
	Schmiede-eifen	Gufseifen	Holz	Schmiede-eifen	Gufseifen	Schmiede-eifen	Gufseifen	Gufseifen	Schmiede eifen	Schmiede-eifen
11	—	—	—	—	—	—	—	423	—	—
12	—	—	—	—	—	—	—	356	—	—
13	—	—	58	—	473	—	—	303	—	—
14	—	—	50	—	392	—	—	261	—	—
15	—	455	43,5	—	340	—	—	228	—	—
16	—	400	38	—	300	—	—	200	—	—
17	—	355	34	—	266	—	—	177	623	667
18	—	313	30	—	237	—	474	158	555	596
19	—	284	27	683	213	—	426	142	498	535
20	—	256	24,5	616	192	—	384	128	450	482
22	680	212	20	509	159	—	317	106	372	400
24	571	178	17	428	133	—	267	89	312	335
25	526	164	15,7	394	123	—	246	82	288	308
26	487	151	14	364	113	—	227	—	266	285
27	451	140	13	338	105	672	210	—	247	265
28	420	131	12,5	314	98	625	196	—	229	246
29	391	122	11,6	293	91,4	582	183	—	214	229
30	365	114	11,0	274	85	544	171	—	200	214
32	321	100	9,5	240	75	478	150	—	176	188
35	268	83	8	201	63	400	125	—	140	166
40	205	64	6	154	48	306	96	—	112	120

162) Für den Fall 1 (ein Ende eingefpannt, das andere frei drehbar, Fig. 135 auf S. 302), für den Fall 3 (beide Enden eingefpannt, Fig. 137 auf S. 302) und für den Fall 4 (ein Ende eingefpannt, das andere vertical geführt, Fig. 138 auf S. 302) find die in diefer Tabelle angegebenen Werthe von k mit bezw. $\frac{1}{4}$, 4 und 2 zu multipliciren. Die erhaltenen Werthe find felbftredend nur zu gebrauchen, wenn fie kleiner als K find; anderen Falls ift K der Berechnung zu Grunde zu legen.

Der Gebrauch der in den Art. 339 bis 342 (S. 302 bis 305) vorgeführten allgemeinen Regeln, fo wie der für verfchiedene Querschnittsformen entwickelten Ableitungen in den Art. 343 bis 348 (S. 305 bis 308) mag an einigen Beifpielen erläutert werden. 349. Beifpiele.

1) In einem aus Gufseifen mit kreisförmigem Querfchnitte herzuftellenden Stabe herrfche ein Maximaldruck $P = 3300$ kg. Die Länge l des Stabes betrage 100 cm; der Kreisdurchmeffer d foll beftimmt werden unter Zugrundelegung des Falles 2.

Soll man nach der einfachen Druckgleichung rechnen dürfen, fo mufs nach Relation 138. $\frac{l_1}{d} = 12{,}4$ fein. Es würde $f = \frac{3300}{500} = 6{,}6$ qcm und $d = \sqrt{\frac{4f}{\pi}} = 2{,}9$ cm, woraus fich $\frac{l}{d} = \frac{100}{2{,}9} = 34{,}4$ ergiebt. Bei diefem Verhältnifs ift die einfache Druckgleichung alfo nicht mehr anwendbar. Wählt man den Durchmeffer vorläufig etwas ftärker als $2{,}9$, etwa $d = 5$ cm, fo wird $\frac{l}{d} = 20$ und nach der Tabelle auf S. 308 $k = 192$.

Alsdann ift $f = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{3300}{192} = 17$ qcm und $d = 4{,}7$ cm. Der zu 5 cm angenommene Durchmeffer würde alfo als angemeffen zu bezeichnen fein.

2) Für denfelben Stab foll der Querfchnitt als Kreuzquerfchnitt beftimmt werden. Wenn die einfache Druckgleichung angewendet wird, ergiebt fich $f = \frac{3300}{500} = 6{,}6$ qcm. Wählt man etwa vorläufig $d = 1$ cm und $h = 6$ cm, demnach die Querfchnittsfläche $= 6 + 5 = 11$ qcm, fo ergiebt fich $\frac{l}{h} = \frac{100}{6} = 16{,}67$ und nach der Tabelle auf S. 308 (durch Interpolation) $k = 184$ kg. Mithin beträgt die erforderliche Querfchnittsfläche $f = \frac{3300}{184} = 18$ qcm, und es ift defshalb noch eine Vergröfserung des Querfchnittes vorzunehmen.

Wird $h = 7$ cm gewählt, fo ift $\frac{l}{h} = \frac{100}{7} = 14$ und nach der Tabelle auf S. 308 $k = 261$ kg. Sonach wird nunmehr $f = \frac{3300}{261} = 12{,}6$ qcm, während der gewählte Querfchnitt 13 qcm mifft, alfo faft genau übereinftimmt.

3) In einem aus Schmiedeeifen zu conftruirenden Stabe herrfche der Maximaldruck $P = 3300$ kg. Es fei $l = 100$ cm; der Stab werde aus einem einfachen Winkeleifen conftruirt, deffen Dimenfionen zu beftimmen find. Es ift der Zerknickungsfall 4 zu Grunde zu legen.

Bei allen Querfchnittsbeftimmungen für fchmiedeeiferne Stäbe foll, fobald Zerknicken in Frage kommt, im Folgenden von der Verfchwächung durch Nietlöcher abgefehen werden, weil auf diefelbe auch in der Herleitung der Formeln für k und l_1 keine Rückficht genommen ift. Es fteht übrigens nichts im Wege, eine nachträgliche Correctur in diefer Hinficht vorzunehmen. Wenn dagegen die volle Beanfpruchung K als zuläffig fich ergiebt, fo ift die Verfchwächung durch Niete zu berückfichtigen.

Würde man für einfachen Druck conftruiren, fo würde fich der Querfchnitt $f = \frac{3300}{700} = 4{,}7$ qcm ergeben.

Es möge ein Winkeleifen mit den Dimenfionen $5{,}5 \times 5{,}5 \times 0{,}8$ gewählt werden; alsdann ift $\frac{l}{h} = \frac{100}{5{,}5} = 18$; für den Fall 2 ift nach der Tabelle auf S. 308 $k = 555$ kg, für den Fall 4 alfo gröfser, als 700 kg. Es braucht daher hier auf Zerknicken keine Rückficht genommen zu werden. Der Brutto-Querfchnitt des erwähnten Winkeleifens beträgt $8{,}16$ qcm (fiehe die Deutfchen Normalprofile für gleichfchenkelige Winkeleifen auf S. 194 und 195), der Netto-Querfchnitt nach Abzug eines Nietloches von $1{,}6$ cm Durchmeffer $8{,}16 - 1{,}28 = 6{,}88$ qcm. Es könnte alfo eventuell noch ein kleineres Winkeleifen-Caliber gewählt werden.

4) Es fei $P = 9500$ kg und $l = 300$ cm; der Stab fei aus Eichenholz mit quadratifchem Querfchnitt herzuftellen, und es foll der Fall 4 zu Grunde gelegt werden.

Für einfachen Druck wäre $f = \frac{9500}{65} = 146$ qcm. Wählt man die Seite des Quadrats 14 cm, fo wird $\frac{l}{h} = \frac{300}{14} = \backsim 22$ und nach der Tabelle auf S. 308 $k = 2 \,.\, 20 = 40$ kg. Mithin mufs

$f = \frac{9500}{40} = 237^{\text{qcm}}$ ſein. Bei den gewählten Dimenſionen iſt $f = 14^2 = 196^{\text{qcm}}$, alſo zu klein.

Wählt man die Seite des Quadrates gleich $14{,}5^{\text{cm}}$, ſo wird $\frac{l}{h} = \frac{300}{14{,}5} = 20{,}7$ und nach Gleichung 137.

$$k = \frac{2 \cdot 9800}{(20{,}7)^2} = \backsim 46^{\text{kg}}.$$

Hieraus findet man

$$f = \frac{9500}{46} = 213^{\text{qcm}}.$$

Der gewählte Querſchnitt hat eine Fläche von $14{,}5 \cdot 14{,}5 = 210{,}25^{\text{qcm}}$, iſt alſo als genügend zu betrachten.

Weitere Beiſpiele für complicirtere Querſchnitte folgen im nächſten Artikel.

350. Querſchnitts-ermittelung bei complicirten Querſchnitten.

Wenn die Form des Querſchnittes einigermaſsen complicirt iſt, ſo ſtöſst die Aufſtellung einfacher und genauer Formeln für c und k auf Schwierigkeiten. Alsdann empfiehlt es ſich, aus der Gleichung 128. diejenige Gröſse des Trägheitsmomentes zu berechnen, welche der Querſchnitt bei gegebener Länge des Stabes und gegebenem Werthe von P zum Mindeſten haben muſs. Es ergiebt ſich aus Gleichung 128. für das Trägheitsmoment der Werth

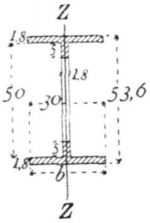
$$\mathcal{J} = \frac{P s l^2}{C E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 146.$$

Der Querſchnitt iſt nun ſo zu entwerfen, daſs deſſen kleinſtes Trägheitsmoment wenigſtens ſo groſs iſt, wie der aus Gleichung 146. für $\mathcal{J}$ ermittelte Werth; gleichzeitig muſs aber die Querſchnittsfläche F mindeſtens ſo groſs ſein, um der Gleichung 127. zu genügen.

Je mehr ſich der Flächeninhalt des Querſchnittes, welcher dem nothwendigen Trägheitsmomente entſpricht, dem Quotienten $\frac{P}{K}$ nähert, deſto zweckmäſsiger iſt nach Früherem die Conſtruction. Man nimmt gewöhnlich zunächſt einen Querſchnitt an, für welchen $F = \frac{P}{K}$ ſtattfindet und ermittelt das Trägheitsmoment desſelben. Genügt daſſelbe nicht, ſo iſt die Querſchnittsfläche entſprechend zu vergröſsern, bis das verlangte $\mathcal{J}$ vorhanden iſt. Dieſes Verfahren ſoll an einigen Beiſpielen gezeigt werden.

Beiſpiele. 1) In einer guſseiſernen Stütze ſei der Maximaldruck $P = 50\,000^{\text{kg}}$; die Länge der Stütze ſei $l = 450^{\text{cm}}$; die Enden ſollen als bewegliche vorausgeſetzt werden; die Querſchnittsform ſei die neben ſtehende (Fig. 146); die Querſchnittsdimenſionen ſind zu ermitteln.

Fig. 146.



Für einfachen Druck muſs $F = \frac{50\,000}{500} = 100^{\text{qcm}}$ und nach Gleichung 146.

$$\mathcal{J} = \frac{50\,000 \cdot 8 \cdot 450 \cdot 450}{10 \cdot 1\,000\,000} = 8100 \text{ ſein.}$$

Die Höhe des Querſchnittes ſei durch conſtructive Rückſichten zu $53{,}6^{\text{cm}}$ vorgeſchrieben, die Stärke des Steges und der Gurte ſei $1{,}8^{\text{cm}}$; alsdann findet, wenigſtens bei nicht auſsergewöhnlich groſser Breite der Gurtungen, das Minimal-Trägheitsmoment für die Axe ZZ ſtatt, und es iſt

$$\mathcal{J} = \frac{2 \cdot 1{,}8 \cdot b^3}{12} + \frac{50 \cdot 1{,}8^3}{12} = 0{,}3\, b^3 + 24{,}3 = 8100,$$

woraus ſich für $b = \backsim 30^{\text{cm}}$ ergiebt.

Die Querſchnittsfläche wird $F = 2 \cdot 1{,}8 \cdot 30 + 50 \cdot 1{,}8 = 198^{\text{qcm}}$, während nur 100^{qcm} Querſchnittsfläche nöthig ſind. Daraus folgt, daſs unbedenklich ein Theil des Stegs auf einzelne Theile der Höhe fortfallen kann; alsdann bleibt als Querſchnittsfläche der ſchraffirte Theil übrig, und zwar in dieſem Falle $F = 2 \cdot 30 \cdot 1{,}8 + 2 \cdot 5 \cdot 1{,}8 = 126^{\text{qcm}}$, und es genügt dieſe Querſchnittsgröſse. Auch das Trägheitsmoment wird durch Fortfall des Steges nur unweſentlich alterirt.

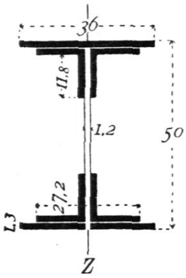
2) In einem fchmiedeeifernen Stabe herrfcht ein Druck $P = 130\,000^{\text{kg}}$; die Stablänge betrage 600^{cm}, der Stab fei beiderfeits eingefpannt.

Nach Gleichung 146. wird

$$\mathcal{J} = \frac{130\,000\,.\,5\,.\,600\,.\,600}{4\,.\,10\,.\,2\,000\,000} = 2925\,;$$

ferner mufs $F = \dfrac{130\,000}{700} = 186^{\text{qcm}}$ fein.

Fig. 147.



Der Querfchnitt (Fig. 147) wurde vorläufig, wie folgt, zufammengefetzt:

4 Winkeleifen zu $13 \times 13 \times 1{,}2^{\text{cm}} = 29{,}8^{\text{qcm}}$	. . . . =	$119{,}2^{\text{qcm}}$
1 obere Deckplatte $36 \times 1{,}3^{\text{cm}}$	. . . . =	$46{,}8$ »
1 untere Deckplatte $34{,}8 \times 1{,}3^{\text{cm}}$	. . . . =	$45{,}2$ »
Summe des Brutto-Querfchnittes		$211{,}2^{\text{qcm}}$
Ab für 4 Nietlöcher $4 \times 2{,}5 \times 2{,}3^{\text{cm}}$	. . . . =	$23{,}0$ »
bleibt Netto-Querfchnitt		$188{,}2^{\text{qcm}}$.

Für diefen Querfchnitt findet $\mathcal{J}_{min}$ für die ZZ-Axe ftatt und es ift

$$\mathcal{J}_Z = \frac{1}{12}\left[2\,.\,1{,}3\,.\,36^3 + 2\,.\,1{,}2\,.\,27{,}2^3 + 2\,.\,11{,}8\,.\,3{,}6^3 - (2\,.\,13 + 1{,}3)\,1{,}2^3\right] - 4\,.\,2{,}5\,.\,2{,}3\,.\,7^2 = 13\,094.$$

Das Trägheitsmoment ift alfo wefentlich gröfser, als es zu fein braucht, der Querfchnitt fonach genügend.

Sehr einfach geftaltet fich die Rechnung, wenn man den Querfchnitt aus folchen Normal-Profileifen bildet, für welche die Minimal-Trägheitsmomente in den Tabellen auf S. 194 bis 198 angegeben find. Man berechnet das nothwendige Trägheitsmoment und die nöthige Querfchnittsfläche aus den beiden Gleichungen 146., bezw. 127. und fucht aus den Tabellen ein Profileifen, bezw. einen aus Profileifen zufammengefetzten Querfchnitt, deffen Minimal-Trägheitsmoment und Querfchnittsfläche den verlangten zum Mindeften gleich find.

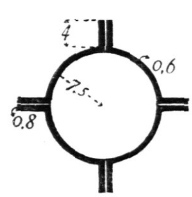
Beifpiel 3. In einem fchmiedeeifernen Stabe herrfche ein Druck $P = 18\,000^{\text{kg}}$; die Stablänge fei $l = 500^{\text{cm}}$; die Stabenden feien drehbar, mithin Fall 2 zu Grunde zu legen.

Es mufs nach Gleichung 146. $\mathcal{J} = \dfrac{18\,000\,.\,5\,.\,500\,.\,500}{10\,.\,2\,000\,000} = 1125$ und nach Gleichung 127. $F = \dfrac{18\,000}{700} = 26^{\text{qcm}}$ fein.

Soll der Stab aus einem **I**-förmigen Walzbalken gebildet werden, fo ift das Caliber Nr. 38 (fiehe die Tabelle in Art. 183, S. 198) zu wählen; bei demfelben ift $\mathcal{J}_{min} = 1138$, F (nach Abzug für Niete) $= 107{,}5 - 4\,.\,2\,.\,2{,}05 = 91{,}1^{\text{qcm}}$ und das Gewicht pro 1^{m} $83{,}9^{\text{kg}}$.

Wollte man ftatt deffen einen aus 4 kreuzförmig geftellten Winkeleifen gebildeten Querfchnitt verwenden, fo könnte man 4 Winkeleifen Nr. 9 (fiehe die Tabelle in Art. 182, S. 195) à $9 \times 9 \times 1{,}3^{\text{cm}}$ verwenden, deren $\mathcal{J} = 1284$ ift, alfo genügt; dabei ift der Netto-Querfchnitt $F = 4\,.\,21{,}7 - 2\,.\,2\,.\,2\,.\,1{,}3$ (für Niete) $= 76{,}4^{\text{qcm}}$ und das Gewicht $4\,.\,16{,}9^{\text{kg}} = 67{,}6^{\text{kg}}$. Rationeller ift die Verwendung von 4 Winkeleifen Nr. 10 à $10 \times 10 \times 1^{\text{cm}}$ mit $\mathcal{J} = 1346$, $F = 4\,.\,19 - 4\,.\,2\,.\,1 = 68^{\text{qcm}}$ und einem Gewicht pro 1^{m} von $4\,.\,14{,}8^{\text{kg}} = 59{,}2^{\text{kg}}$.

Fig. 148.



Würde endlich der Querfchnitt aus 4 Quadranteifen (nach Fig. 148) conftruirt, fo wird bei neben ftehendem Querfchnitt (nach der Tabelle in Art. 187, S. 197) $\mathcal{J} = 2046$, $F = 54{,}9 - 4\,.\,2\,.\,0{,}8$ (für Niete) $= 48{,}59^{\text{qcm}}$, und das Gewicht beträgt $42{,}9^{\text{kg}}$.

Am ungünftigften ift demnach im vorliegenden Falle das **I**-Profil mit $83{,}9^{\text{kg}}$ Gewicht; alsdann folgt das kreuzförmige Profil mit $59{,}2^{\text{kg}}$, und am günftigften ift das aus Quadranteifen zufammengefetzte röhrenförmige Profil mit $42{,}9^{\text{kg}}$ Gewicht.