

## 2. Abschnitt.

## Stützen und Träger.

Man bezeichnet mit dem Namen Stützen solche Bauconstructions, bei denen die Längsaxe ganz oder nahezu mit der Richtung der Belastungen zusammen fällt. Die Belastungen wirken in den meisten Fällen vertical, in der Richtung der Schwere, und es ergibt sich daraus, daß die Stützen meistens verticale oder nahezu verticale Längsaxen haben. Wir rechnen dahin die Pfeiler und die Säulen, die sich wohl auch unter dem gemeinschaftlichen Namen Freistützen zusammenfassen lassen.

Träger sind Bauconstructions, bei denen die Belastungen ausschließlich oder vorwiegend normal zur Richtung der Längsaxe wirken. Da die Belastungen meist vertical gerichtet sind, haben die Träger meist horizontale oder nur wenig davon abweichende Längsaxen.

## 1. Kapitel.

## Stützen.

Im vorliegenden Kapitel sollen überhaupt Stäbe, welche auf Zerknicken in Anspruch genommen werden, demnach nicht allein die Freistützen (Pfeiler und Säulen), sondern auch sonstige auf Zerknicken beanspruchte Constructions, wie sie bei Decken- und Dachstuhlanlagen vorkommen, in Betracht gezogen werden.

Die Stützen haben meistens nur einen Stützpunkt und einen Lastpunkt; der letztere wird oft durch die weitere Construction festgelegt. Der Stützpunkt liegt gewöhnlich am unteren Ende, der Lastpunkt am oberen Ende der Stütze.

## a) Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken.

332.  
Voraus-  
setzungen.

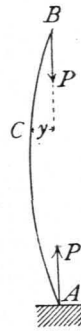
Wenn auf einen Stab mit gerader Axe zwei Zugkräfte  $P$  wirken, deren Richtungslinien genau mit der Stabaxe zusammenfallen, so findet in den einzelnen Fasern des Stabes nur eine Zugbeanspruchung statt. Wirken auf einen eben solchen Stab zwei Druckkräfte  $P$  ebenfalls genau in der Richtung der Axe und einander entgegengesetzt, so müßten nach Früherem in den einzelnen Fasern gleichfalls nur Druckbeanspruchungen stattfinden, welche bei constantem Stabquerschnitt in allen Fasern pro Flächeneinheit gleich wären. In Wirklichkeit kann man darauf nicht immer rechnen. Wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu seiner Querschnittsfläche groß ist, so wird unter dem Einflusse der drückenden Kräfte ein Ausbiegen stattfinden, und es wirkt alsdann auf jeden Querschnitt  $C$  (Fig. 121) außer der Axialkraft  $P$  noch ein Moment  $P_y$ . In diesem Falle findet Beanspruchung des Stabes auf Zerknicken statt, und es ist derselbe mit Rücksicht auf diese Beanspruchungsweise zu berechnen.

Es kann auffallen, daß hier scheinbar ein Widerspruch zwischen der Theorie und Praxis obwaltet; in Wirklichkeit ist derselbe aber nicht vorhanden. So lange die Druckkräfte ganz genau in der Richtung der Stabaxe wirken, ist ein Ausbiegen nicht möglich; die kleinste zufällige Abweichung der Krafrichtung

von der Stabaxe erzeugt aber für jeden Punkt des Stabes ein Moment, hat also bei geringer Querschnittsfläche des Stabes ein Ausbiegen zur Folge. Man kann daher in diesem Falle von einem labilen Gleichgewichtszustand sprechen.

Ein Ausbiegen der Stabaxe kann nicht nur in der in Fig. 121 gezeichneten Richtung stattfinden, sondern ist nach allen möglichen Richtungen denkbar; es ist demnach zu untersuchen, nach welcher Richtung ein solches Ausbiegen am leichtesten stattfindet und der Querschnitt des Stabes danach zu disponiren. Für die folgenden Untersuchungen soll angenommen werden, daß: 1) als äußere Kräfte nur die Axialkräfte  $P$  wirken, 2) die Axialkräfte in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen und 3) der Stab einen constanten Querschnitt habe.

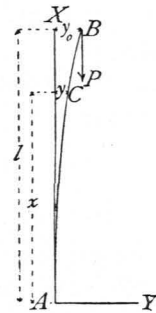
Fig. 121.



Wir legen durch den Schwerpunkt des einen Endquerschnittes des Stabes (Fig. 122) drei Coordinatenaxen: die  $X$ -Axe falle mit der ursprünglichen Lage der Stabaxe, die  $Y$ -Axe mit der einen Hauptaxe des Querschnittes zusammen; die  $Z$ -Axe stehe normal zu den beiden genannten, sie projicirt sich demnach in der  $YX$ -Ebene, d. i. der Bildebene als Punkt. Zunächst nehmen wir an, daß das Ausbiegen des Stabes in der  $YX$ -Ebene erfolge und daß der Punkt  $B$  nach der Deformation des Stabes die Ordinate  $y_0$  habe. Für irgend einen Punkt  $C$  mit der Abscisse  $x$  sei die Ordinate  $y$ ; das Moment für diesen Punkt ist  $M = P (y_0 - y)$  und die elastische Linie demnach aus der Gleichung 86. zu ermitteln. Danach wird

333-  
Elastische  
Linie.

Fig. 122.



$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P (y_0 - y)}{E \mathcal{J}} \dots \dots \dots 88.$$

Darin ist  $\mathcal{J}$  das Trägheitsmoment des Querschnittes bei  $C$ , bezogen auf diejenige Schwerpunktsaxe desselben, welche normal zur Kraftebene, also zur  $XY$ -Ebene steht. Der Querschnitt ist nach obiger Voraussetzung als constant angenommen, also auch  $\mathcal{J}$  für die Integration constant; da  $P$  und  $E$  gleichfalls constant sind, so ist bei der Integration  $\frac{P}{E \mathcal{J}}$  als ein constanten Factor einzuführen. Abkürzungsweise setzen wir

$$a^2 = \frac{P}{E \mathcal{J}}, \dots \dots \dots 89.$$

so daß die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2 (y_0 - y) \dots \dots \dots 90.$$

Die zweimalige Integration ergibt als Gleichung der elastischen Linie:

$$y = y_0 + A \sin a x + B \cos a x \dots \dots \dots 91.$$

Die beiden Constanten  $A$  und  $B$  sind für die verschiedenen Arten der Stabunterstützung verschieden.

Bekanntlich ist

$\sin \alpha = \sin (2 \pi + \alpha) = \sin (2 n \pi + \alpha)$  und  $\cos \alpha = \cos (2 \pi + \alpha) = \cos (2 n \pi + \alpha)$ , worin  $n$  eine beliebige ganze Zahl oder Null bedeutet, also gleich 0, 1, 2, 3 ... gesetzt werden kann. Es ist also auch

$$\sin a x = \sin (a x + 2 \pi) = \sin \left[ a \left( x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right] \text{ und}$$

$$\cos ax = \cos (ax + 2\pi) = \cos \left[ a \left( x + \frac{2\pi}{a} \right) \right].$$

Die Gleichung 91. kann also auch geschrieben werden:

$$y = y_0 + A \sin a \left[ \left( x + \frac{2\pi}{a} \right) \right] + B \cos \left[ a \left( x + \frac{2\pi}{a} \right) \right] \quad \dots \quad 92.$$

Die Ordinaten  $y$  zweier Punkte, deren Abcissen um  $\frac{2\pi}{a}$  von einander verschieden sind, haben daher die gleichen Werthe. Die elastische Linie ist demnach eine Wellenlinie; die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{a}, \quad \dots \quad 93.$$

und da nach Gleichung 89.  $a = \sqrt{\frac{P}{E\mathcal{F}}}$  ist,

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{E\mathcal{F}}{P}} \quad \dots \quad 94.$$

Aus dieser Gleichung kann man, falls  $E$ ,  $\mathcal{F}$  und  $P$  gegeben ist, die Wellenlänge berechnen. Ist dagegen  $\lambda$  gegeben, so kann man aus Gleichung 94. diejenige Kraft  $P$  berechnen, welche die Durchbiegungen  $y$  erzeugen kann. Es folgt aus Gleichung 94.

$$P = \frac{4\pi^2 E\mathcal{F}}{\lambda^2} \quad \dots \quad 95.$$

Es soll hier noch auf eine wichtige Eigenthümlichkeit der allgemeinen Gleichung 90. hingewiesen werden. Dieselbe bleibt giltig, wenn man beiderseits mit der Zahl  $m$  multiplicirt; sie heisst alsdann:

$$m \frac{d^2 y}{d x^2} = m a^2 (y_0 - y) = a^2 (m y_0 - m y).$$

Es sei  $m y_0 = \eta_0$  und  $m y = \eta$ ; alsdann ist auch  $m \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 \eta}{d x^2}$ , also

$$\frac{d^2 \eta}{d x^2} = a^2 (\eta_0 - \eta) \quad \dots \quad 96.$$

Die Gleichung 90. gilt also für beliebig grofse Werthe von  $y$ . Ergeben sich demnach unter Einwirkung einer Kraft  $P$  die Durchbiegungen  $y$  als möglich, so können dieselben auch  $m$ -mal so grofs, d. h. beliebig grofs werden, also auch so grofs, dafs der Stab zerknickt wird.

Der Werth von  $P$  in Gleichung 95., welcher die Durchbiegungen  $y$  erzeugen kann, kann also auch den Stab zerknicken.  $P$  ist sonach der Grenzwert der Tragkraft.

Bei der vorstehenden Ableitung ist angenommen worden, dafs die Ausbiegung in der  $XY$ -Ebene erfolge; dieselbe kann aber auch in der  $XZ$ -Ebene stattfinden. Die Entwicklung für diesen Fall bleibt genau dieselbe, wie die obige, und man erhält für  $P$  denselben Ausdruck, wie dort; nur ist alsdann unter  $\mathcal{F}$  das Trägheitsmoment des Querschnittes bezogen auf die zur  $XZ$ -Ebene normale Schwerpunktsaxe zu verstehen, welche Axe parallel zur  $Y$ -Axe ist. Nennen wir dasselbe  $\mathcal{F}_1$ , die entsprechenden Werthe von  $P$  und  $\lambda$  aber  $P_1$  und  $\lambda_1$ , so ist:

$$P_1 = \frac{4\pi^2 E\mathcal{F}_1}{\lambda_1^2} \quad \dots \quad 97.$$

Ein Ausbiegen des Stabes kann nun sowohl in der  $XY$ -Ebene, wie in der  $XZ$ -Ebene stattfinden; die wirkliche dem Stabe zuzumuthende Belastung darf den Grenzwert nicht erreichen. Die Gleichungen 95. und 97. geben zwei Grenzwerte, und es ist naturgemäss der kleinere von beiden als maßgebend einzuführen. Nimmt man in beiden Richtungen gleiche  $\lambda$  an, so unterscheiden sich beide Grenzwerte nur durch die Werthe der Trägheitsmomente. Es ist demnach in den Ausdruck für  $P$  von den beiden Hauptträgheitsmomenten das kleinere einzusetzen.

Wenn die Ausbiegung nach allen Richtungen möglich ist, so kann man mit hinreichender Genauigkeit annehmen, daß dieselbe normal zu derjenigen Hauptaxe erfolgt, welcher das kleinere Hauptträgheitsmoment entspricht; denn dieses ist nach Art. 314, S. 270 das kleinste der für alle Schweraxen möglichen Trägheitsmomente. Von einer genauen Untersuchung, nach welcher Richtung die Ausbiegung erfolgen wird, kann hier füglich abgesehen werden.

Für die weiteren Betrachtungen sind die verschiedenen möglichen Fälle ins Auge zu fassen.

1) Einseitig eingespannter, an dem einen Ende axial belasteter Stab (Fig. 123). Aus der allgemeinen Gleichung 91. für die elastische Linie folgt

$$\frac{dy}{dx} = Aa \cos ax - Ba \sin ax \dots\dots\dots 98.$$

334.  
Einseitig  
eingespannter  
Stab.

Wir bestimmen die Constanten  $A$  und  $B$  aus den besonderen Bedingungen für diesen Fall.

Für  $x=0$  ist  $\frac{dy}{dx} = 0$ , demnach in Gleichung 98.  $0 = Aa$  oder, da  $a$  nicht gleich Null ist,  $A = 0$ . Eben so ist für  $x=0$  auch  $y=0$ , daher in Gleichung 91.  $0 = y_0 + B$  oder  $B = -y_0$ . Sonach lautet die Gleichung der elastischen Linie für diesen Fall

$$y = y_0 - y_0 \cos ax = y_0 (1 - \cos ax) \dots\dots 99.$$

Für  $x=l$  wird  $y=y_0$ , demnach  $y_0 = y_0 (1 - \cos al)$  oder

$$\cos al = 0 \dots\dots\dots 100.$$

Damit letztere Gleichung erfüllt werde, muß

$$al = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 101.$$

sein, worin  $n$  die Werthe 0, 1, 2, 3 ... annehmen kann.

Aus Gleichung 93. folgt nun für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi l \cdot 2}{(2n + 1)\pi} = \frac{4l}{2n + 1} \dots\dots\dots 102.$$

Damit ist nun auch die Größe des Grenzwertes der Belastung für diesen Fall gefunden; man braucht nur in die Gleichung 95. für  $\lambda$  den soeben ermittelten Werth einzuführen. Alsdann wird

$$P = \frac{4E\mathcal{J}\pi^2}{16l^2} (2n + 1)^2 = \frac{E\mathcal{J}\pi^2}{4l^2} (2n + 1)^2 \dots\dots\dots 103.$$

Für die verschiedenen Werthe von  $n$  ergeben sich auch verschiedene Werthe für  $P$  und  $\lambda$ .

Für  $n=0$  ist  $\lambda = 4l$ , also die ganze Wellenlänge 4-mal so groß, als die freie Stablänge; dieser Fall ist in Fig. 124 dargestellt. Alsdann ist

$$P = \frac{E\mathcal{J}\pi^2}{4l^2} \dots\dots\dots 104.$$

Fig. 123.

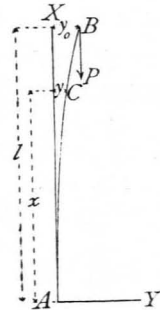


Fig. 124.

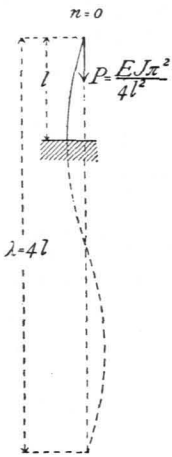


Fig. 125.

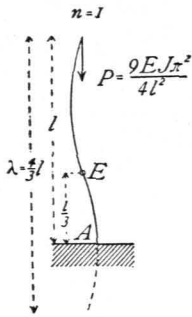
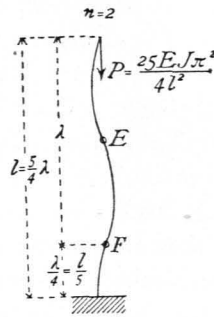


Fig. 126.



Für  $n = 1$  wird  $\lambda = \frac{4}{3} l$ , also die freie Länge  $l$  gleich  $\frac{3}{4}$  einer Wellenlänge. Dieser Fall ist in Fig. 125 dargestellt, und es ist

$$P = \frac{9 EJ \pi^2}{4 l^2} \cdot 105.$$

Dieser Fall tritt

ein, wenn der Punkt  $E$  in dem Abstände  $\frac{l}{3}$  von  $A$  fixirt ist.

Für  $n = 2$  ist  $\lambda = \frac{4}{5} l$ , also  $l = \frac{5}{4} \lambda$  und

$$P = \frac{25 EJ \pi^2}{4 l^2} \cdot \dots \cdot 106.$$

Die Punkte  $E$  und  $F$  (Fig. 126) in den Abständen  $\frac{1}{5} l$  und  $\frac{3}{5} l$  sind fixirt.

Man sieht, wie wesentlich der Grenzwert  $P$  durch rationelle Construction erhöht werden kann.

335.  
Stab  
mit freien  
Enden.

2) Stab mit beiderseits frei drehbaren Enden (Fig. 127). Die symmetrische Belastung des Stabes wird zur Folge haben, dass beide Stabhälften, oberhalb und unterhalb der Stabmitte, sich genau gleich verhalten; man kann demnach diesen Fall auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, dass man den Anfangspunkt des Coordinatensystems in die Stabmitte legt. Jede Hälfte verhält sich dann genau eben so, wie der Stab im vorigen Artikel; die zerknickende Kraft  $P$ , d. h. der Grenzwert von  $P$  ist demnach aus der Gleichung 103. zu entnehmen, jedoch mit der Modification, dass statt des dortigen  $l$  hier  $\frac{l}{2}$  einzusetzen ist, weil die dort mit  $l$  bezeichnete Länge hier nur  $\frac{l}{2}$  beträgt.

Fig. 127.

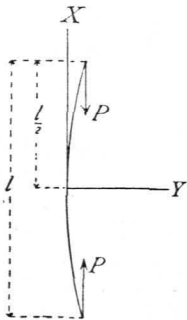
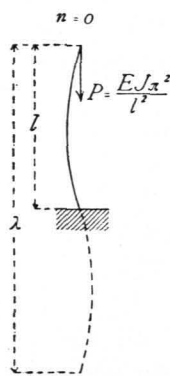


Fig. 128.



Für den vorliegenden Fall ist also

$$P = \frac{E \mathcal{F} \pi^2 (2n + 1)^2}{4 \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2} (2n + 1)^2 \cdot \dots \cdot 107.$$

und

$$\lambda = \frac{4 \frac{l}{2}}{2n + 1} = \frac{2l}{2n + 1} \cdot \dots \cdot 108.$$



Für  $n = 0$  (Fig. 128) ist  $\lambda = 2l$  und  $P = \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2} \dots \dots \dots 109.$

Für  $n = 1$  (Fig. 129) ist  $\lambda = \frac{2}{3} l$ ,  $l = \frac{3}{2} \lambda$  und  $P = \frac{9 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2} \dots \dots \dots 110.$

Die beiden Punkte  $E$  und  $F$  sind in diesem durch Fig. 129 dargestellten Falle fixirt.

Ist ein Punkt  $E$  in der Mitte der Stablänge fixirt (Fig. 130), so ist der Fall auf denjenigen des vorigen Artikels zurückzuführen, in dem man statt des dortigen  $l$  hier  $\frac{l}{4}$  einführt.

Alsdann ist nach Gleichung 104.

$$P = \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{4 \left(\frac{l}{4}\right)^2} = \frac{4 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2} \dots \dots \dots 111.$$

Fig. 129.

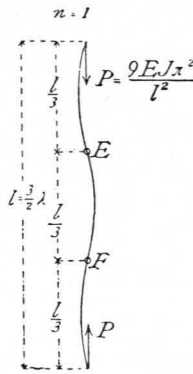
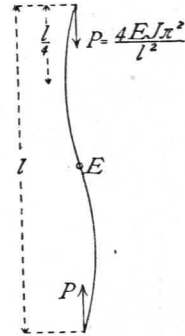


Fig. 130.



3) Stab mit eingespannten Enden (Fig. 131). Der Endpunkt  $B$  verbleibt in Folge der Einspannung in der Verticalen der Axe  $XX$ ; die Tangente an die Axe in diesem Punkte bleibt vertical. Wäre der Punkt  $B$  frei, so würde er nach der Deformation die Ordinate  $-y_0$  haben; das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf den Punkt  $A$  würde  $= -Py_0$  sein; da aber in Folge der Einspannung der Punkt  $B$  in der Verticalen bleibt, so ist das Moment der äußeren Kräfte für den Punkt  $A$  gleich Null. Die Einspannung des Stabes bei  $B$  hat demnach genau dieselbe Wirkung, wie ein Moment  $M_0$ , dessen Größe  $= Py_0$ , dessen Drehrichtung derjenigen von  $P$  entgegen gesetzt ist. Es ist also  $M_0 = Py_0$ .

336.  
Stab mit  
eingespannten  
Enden.

Für einen beliebigen Punkt  $C$  mit der Abscisse  $x$  ist das Biegemoment

$$M = M_0 - Py = Py_0 - Py = P(y_0 - y).$$

Demnach lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie auch hier wiederum (vergl. die Gleichungen 88. und 90.)

$$E \mathcal{F} \frac{d^2 y}{d x^2} = P(y_0 - y) \text{ und } \frac{d^2 y}{d x^2} = a^2 (y_0 - y).$$

$y_0$  ist hier die negative Ordinate, welche der Punkt  $B$  haben würde, wenn er frei wäre. Als Gleichung der elastischen Linie ergibt sich (eben so wie in Art. 333, S. 295)

$$y = y_0 + A \sin a x + B \cos a x,$$

und wenn der Werth  $y_0 = \frac{M_0}{P}$  eingesetzt wird,

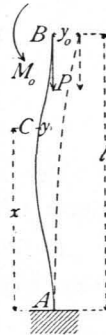
$$y = \frac{M_0}{P} + A \sin a x + B \cos a x \dots \dots \dots 112.$$

ferner

$$\frac{d y}{d x} = A a \cos a x - B a \sin a x \dots \dots \dots 113.$$

Die Constanten  $A$  und  $B$  ergeben sich in folgender Weise. Für  $x = 0$  ist  $y = 0$ , demnach in Gleichung 112.  $0 = \frac{M_0}{P} + B$  und  $B = -\frac{M_0}{P}$ . Für  $x = 0$  wird

Fig. 131.



$\frac{dy}{dx} = 0$ , folglich in Gleichung 113.  $0 = A a$  und, da  $a$  nicht gleich Null ist,  $A = 0$ . Die Gleichung der elastischen Linie lautet sonach im vorliegenden Falle:

$$y = \frac{M_0}{P} - \frac{M_0}{P} \cos ax = \frac{M_0}{P} (1 - \cos ax) \dots 114.$$

Für  $x = l$  ist  $y = 0$ , demnach  $0 = \frac{M_0}{P} (1 - \cos al)$  oder

$$\cos al = 1 \dots 115.$$

Damit diese Gleichung erfüllt werde, muß

$$al = 2n\pi \dots 116.$$

fein, worin  $n$  die Werthe 0, 1, 2, 3... haben kann.

Aus Gleichung 93. folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi l}{2n\pi} = \frac{l}{n} \text{ oder } \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{n} \dots 117.$$

Ferner wird nach Gleichung 89.

$$a^2 = \frac{P}{E \mathcal{F}} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \text{ und } P = \frac{4E \mathcal{F} \pi^2}{\lambda^2} \dots 118.$$

Die beiden Gleichungen 117. und 118. geben über die GröÙe von  $P$  Aufschluß. Es ist

für  $n = 1$ :

$$\frac{\lambda}{l} = 1 \text{ oder } \lambda = l;$$

$$P = \frac{4E \mathcal{F} \pi^2}{l^2} \dots 119.$$

für  $n = 2$ :

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{l}{2};$$

$$P = \frac{16E \mathcal{F} \pi^2}{l^2} \dots 120.$$

Der erstere Fall ist durch Fig. 132, der zweite durch Fig. 133 dargestellt; letzterer tritt ein, wenn der Punkt  $E$  in der Stabmitte fixirt ist.

4) Stab mit einem eingespannten und einem in der Verticalen geführten Ende (Fig. 134). Die Führung des Punktes  $B$  in der Verticalen  $AX$  wird durch eine auf diesen Punkt wirkende Horizontalkraft  $H$  erreicht. Für irgend einen Punkt  $C$  des gebogenen Stabes ist alsdann das Moment  $M = H(l - x) - Py$ .

Wenn  $H$  nicht wirkte, würde der Punkt  $B$  die Ordinate  $-y_0$  haben, wie punktirt; alsdann würde das Moment der Kraft  $P$  für den Punkt  $A$  betragen:  $M_0 = -Py_0$ . Im vorliegenden Falle ist das Moment der Kraft  $P$  für den Punkt  $A$  gleich Null; der Einfluß der Kraft  $H$  zeigt sich also in dem Aufheben des Momentes  $M_0$  der Kraft  $P$ . Das Moment der Kraft  $H$  in Bezug auf den Punkt  $A$  muß also dem Momente  $Py_0$  der GröÙe nach gleich, der Drehrichtung nach entgegen gesetzt sein, d. h. es muß  $Hl = Py_0$  sein.

Es ist deshalb

$$M = H(l - x) - Py = Hl - Hx - Py = P(y_0 - y) - Hx$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie (siehe Gleichung 88.)

$$E \mathcal{F} \frac{d^2 y}{dx^2} = P(y_0 - y) - \frac{Py_0}{l} x \text{ oder } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E \mathcal{F}} \left( y_0 - y - \frac{xy_0}{l} \right) \dots 121.$$

Fig. 132.

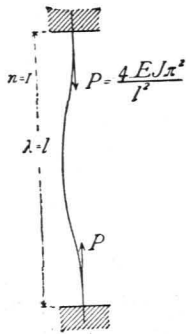
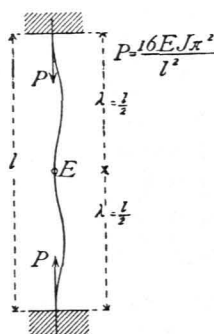
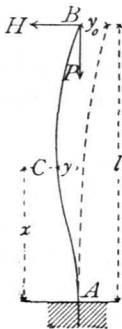


Fig. 133.



337.  
Stab mit einem  
eingespannten  
und einem  
geführten Ende.

Fig. 134.



Die Differentialgleichung wird aufgelöst, indem man  $\frac{d^2 y}{dx^2} = z$  setzt. Es sei wiederum abkürzungsweise  $\frac{P}{E \mathcal{F}} = a^2$ ; alsdann ist

$$z = a^2 \left( y_0 - y - y_0 \frac{x}{l} \right) \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = a^2 \left( -\frac{dy}{dx} - \frac{y_0}{l} \right);$$

ferner

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 z.$$

Die Auflöfung dieser Differentialgleichung ergibt wiederum genau wie in Art. 333, S. 295:

$$z = A \sin ax + B \cos ax, \dots \dots \dots 122.$$

und wenn für  $z$  der Werth eingeführt wird,

$$a^2 \left( y_0 - y - \frac{y_0 x}{l} \right) = A \sin ax + B \cos ax \dots \dots \dots 123.$$

Die Differentiation nach  $x$  ergibt:

$$-a^2 \left( \frac{dy}{dx} + \frac{y_0}{l} \right) = Aa \cos ax - Ba \sin ax \dots \dots \dots 124.$$

Die beiden Gleichungen 123. und 124. ergeben die Werthe für die Constanten  $A$  und  $B$ , wie folgt.

Für  $x = 0$  ist  $y = 0$ , also nach Gleichung 123.  $a^2 y_0 = B$ ; für  $x = 0$  ist  $\frac{dy}{dx} = 0$ , also nach Gleichung 124.  $-\frac{a^2 y_0}{l} = Aa$  und  $A = -\frac{a y_0}{l}$ . Für  $x = l$  ist  $y = 0$ , also nach Gleichung 123.  $a^2 (y_0 - y_0) = 0 = A \sin al + B \cos al$ , woraus

$$\text{tg}(al) = -\frac{B}{A} = \frac{a^2 y_0 l}{a y_0} = al \dots \dots \dots 125.$$

Diese Relation findet statt für  $al = 0$ , außerdem aber auch für den Winkel  $257^\circ 27' 12''$ ; für diesen Winkel ist  $\text{tg} al = al = 4,4934$ , also

$$P = \frac{E \mathcal{F} (4,4934)^2}{l^2} = 20,19 \frac{E \mathcal{F}}{l^2} \dots \dots \dots 126.$$

Dies ist der Werth von  $P$ , für welchen Gleichung 125. erfüllt ist und einen Sinn hat; der Werth  $al = 0$  ist nicht zu verwerthen.

In Art. 334 bis 337 sind diejenigen Werthe der zerknickenden Kraft entwickelt worden, welche für die Praxis hauptsächlich von Bedeutung sind.

338.  
Zusammen-  
stellung.

Nachstehend sind dieselben in den Fig. 135 bis 138 übersichtlich zusammen gestellt, wobei überall der Stab auf seine ganze Länge frei angenommen ist; der vierte Fall ist zum Zwecke des bequemen Vergleiches ebenfalls auf den Ausdruck  $\frac{CE \mathcal{F} \pi^2}{l^2}$  gebracht. Die Tragfähigkeit der Stäbe verhält sich demnach

in den Fällen 1      2      4      3  
wie  $\frac{1}{4}$  : 1 : 2,048 : 4.



Fig. 135.

Fall 1.

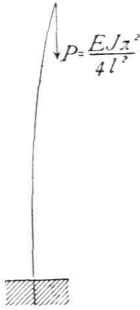


Fig. 136.

Fall 2.



Fig. 137.

Fall 3.

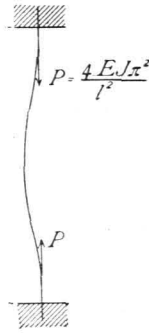
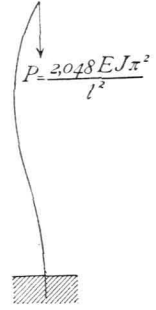


Fig. 138.

Fall 4.



Durch entsprechende Endanordnung würde man also die Tragfähigkeit des Stabes verfehzhnfacben können. Die angegebenen Kräfte sind thatfächlich im Stande, den Stab zu zerknicken, und es sind deshalb Sicherheits-Coefficienten einzuführen.

**b) Querschnittsermittlung für gedrückte Stäbe mit Rückficht auf den Widerstand gegen Zerknicken.**

339.  
Zulässige  
Beanspruchung.

Die unter a. für die Tragkraft der Stäbe entwickelten Formeln sind nicht ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar. Wenn die Stablänge febr klein, also auch das im Nenner der Werthe für  $P$ , welche in den Fig. 135 bis 138 eingefcbrieben sind, vorkommende  $l^2$  febr klein wird, fo ergeben sich für  $P$  febr grofse Werthe, gröfsere Werthe, als die Druckfestigkeit des Stabes gestattet. Soll der Stab nicht durch einfachen Druck zerstört werden, fo darf die Kraft  $P$  nicht fo grofs werden, dafs die Druckbeanspruchung pro Flächeneinheit des Querschnittes die Druckfestigkeit erreicht. Führt man Sicherheits-Coefficienten ein und bezeichnet die zulässige Beanspruchung auf einfachen Druck pro Flächeneinheit der Querschnittsfläche  $F$  mit  $K$ , fo darf höchstens stattfinden:

$$P = F K \dots\dots\dots 127.$$

Mit Rückficht auf Widerstand gegen Zerknicken darf höchstens stattfinden, wenn  $s$  der Sicherheits-Coefficient und  $C$  ein Coefficient ist, der von der Endbefestigung abhängt,

$$P = \frac{CE\mathcal{F}}{s l^2} \dots\dots\dots 128.$$

Gröfser als der Werth in Gleichung 127. ist, darf  $P$  mit Rückficht auf die zulässige Druckbeanspruchung nicht werden; gröfser, als der Werth in Gleichung 128. ist, darf  $P$  des Zerknickens wegen nicht werden; es ist also stets der kleinere dieser beiden Werthe für diejenige Belastungsgröfse maßgebend, welche dem Stabe zugemuthet werden darf. Bei grofser Stablänge  $l$  ergibt die Gleichung 128., bei geringer Stablänge  $l$  die Gleichung 127. kleinere Werthe für  $P$ . Der Grenzwertb von  $l$ , etwa  $l_1$ , wird derjenige sein, für welchen aus beiden Gleichungen derselbe Werth von  $P$  folgt. Dieser Grenzwertb ergibt sich durch Gleichsetzung der beiden Werthe von  $P$  in den Relationen 127. und 128. zu

$$l_1 = \sqrt{C} \sqrt{\frac{E}{Ks}} \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}} \dots\dots\dots 129.$$

Falls die Stablänge kleiner ist, als  $l_1$ , so ist Gleichung 127., falls sie größer ist, als  $l_1$ , so ist Gleichung 128. anzuwenden.

Wenn zur Berechnung der Querschnittsfläche  $F$  die Gleichung 127. benutzt werden kann, so findet im ganzen Querschnitt eine gleichmäßige Beanspruchung  $K$  statt; es wird also eine volle Ausnutzung des Materials erreicht; muß dagegen die Gleichung 128. der Berechnung zu Grunde gelegt werden, so ist dies nicht der Fall, weil alsdann eine wesentlich geringere Beanspruchung pro Flächeneinheit des Querschnittes stattfindet.

340.  
Querschnitts-  
ermittlung.

Man wird demnach rationeller Weise den Querschnitt stets so zu disponiren streben, daß die Gleichung 127. angewendet werden kann, also die Querschnittsform und -Größe nach der Gleichung 129. bestimmen. Wenn diese Gleichung erfüllt ist, so gilt auch die einfache Druckgleichung, und man kann alsdann den Querschnitt ohne Rücksicht auf Zerknicken berechnen. Die Coefficienten  $E$ ,  $K$  und  $s$ , welche unter dem zweiten Wurzelzeichen der Gleichung 129. vereinigt sind, haben für alle Stäbe aus demselben Material gleiche Werthe; dabei soll von einer Verwerthung der *Wöhler'schen* Versuchsergebnisse (vergl. Art. 283, S. 248) und demgemäß von einer Annahme variabler Werthe für  $K$  abgesehen werden. Wird als Flächeneinheit das Quadratcentimeter, als Kräfteinheit das Kilogramm angenommen, und werden für  $K$  und  $E$  die Werthe aus der Tabelle auf S. 247 eingeführt, so ist

für Schmiedeeisen:	für Gußeisen:	für Holz:
$E = 200\,000$	$1\,000\,000$	$120\,000$ kg pro $1\text{ qcm}$
$K = 700$	$500$	$65$ » »
$s = 5$	$8$	$10$
$\sqrt{\frac{E}{Ks}} = 23,9$	$15,8$	$13,6$

Der Coefficient  $C$  unter dem ersten Wurzelzeichen der Gleichung 129. ist von der Form, Länge und dem Material des Stabes ganz unabhängig; derselbe hängt nach Obigem nur von der Art der Endbefestigung ab. Für die in den Fig. 135 bis 138 dargestellten Fälle hat  $C$  folgende Werthe:

Fall 1:	Fall 2:	Fall 3:	Fall 4:
$C = \frac{\pi^2}{4}$	$= \pi^2$	$= 4 \pi^2$	$= 2 \pi^2$ (genügend genau)
$\sqrt{C} = 1,57$	$= 3,14$	$= 6,28$	$= 4,44.$

Die beiden Größen  $\mathcal{F}$  und  $F$  endlich, welche sich unter dem dritten Wurzelzeichen der Gleichung 129. befinden, sind von der Form und Größe der Querschnittsfläche abhängig. Die einfache Druckgleichung wird demnach anwendbar sein, wenn  $\mathcal{F}$  und  $F$  in folchem Verhältniß zur Stablänge construirt werden, daß die Gleichung 127. erfüllt ist.

Wir wollen eine, in der Regel die kleinste Querschnittsdimension des Stabes mit  $h$ , einen von der Querschnittsform abhängigen Coefficienten mit  $c$  bezeichnen und setzen

$$\mathcal{F} = c F h^2 \dots \dots \dots 130.$$

Alsdann ist  $\sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}} = \sqrt{\frac{c F h^2}{F}} = h \sqrt{c}$ , und Gleichung 129. übergeht in

$$\frac{l_1}{h} = \sqrt{C} \sqrt{\frac{E}{Ks}} \sqrt{c} \dots \dots \dots 131.$$

In dieser Gleichung ist, wenn die Querschnittsform bestimmt ist, Alles gegeben bis auf  $h$ . Es ist deshalb für diese Dimension meistens derjenige Minimalwerth leicht zu ermitteln, bei welchem Gleichung 131. erfüllt ist, für welchen also die Querschnittsberechnung nach der einfachen Druckgleichung vorgenommen werden kann.

Die Werthe von  $\frac{l_1}{h}$ , welche sich nach Obigem für die verschiedenen Materialien und verschiedenen Befestigungsweisen ergeben, sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

Constructions-material.	Allgemeine Formel.	Fall 1: Ein Ende eingepannt, das andere frei drehbar.	Fall 2: Beide Enden frei drehbar.	Fall 3: Beide Enden eingepannt.	Fall 4: Ein Ende eingepannt, das andere in der Verticalen geführt.
Schmiedeeisen .	$\frac{l_1}{h} = 23,9 \sqrt{C} \sqrt{c}$	$= 37,52 \sqrt{c}$	$= 75,04 \sqrt{c}$	$= 150,1 \sqrt{c}$	$= 106 \sqrt{c}$
Güßeisen . . . .	$\frac{l_1}{h} = 15,8 \sqrt{C} \sqrt{c}$	$= 24,8 \sqrt{c}$	$= 49,6 \sqrt{c}$	$= 95,2 \sqrt{c}$	$= 70,15 \sqrt{c}$
Holz . . . . .	$\frac{l_1}{h} = 13,6 \sqrt{C} \sqrt{c}$	$= 21,35 \sqrt{c}$	$= 42,7 \sqrt{c}$	$= 85,4 \sqrt{c}$	$= 60,38 \sqrt{c}$

Mittels dieser Tabelle sind für die verschiedenen Querschnitte der Praxis die Grenzwerte  $l_1$ , bezw.  $h$  meistens ohne Schwierigkeit zu ermitteln, und es soll das einzuschlagende Verfahren weiter unten für eine Reihe von Querschnitten gezeigt werden.

347.  
Querschnitts-  
ermittlung  
für lange  
Stäbe.

Bei sehr grossen Stablängen ergeben sich häufig für  $h$  aus der Gleichung 131. Werthe, welche praktisch nicht wohl ausführbar sind; in diesem Falle kann man die Bedingung einer vollständigen Querschnittsausnutzung nicht mehr aufrecht erhalten, und man muss den Querschnitt des Stabes nach der Zerknickungsformel, Gleichung 128., berechnen.

Mit einigen Modificationen kann aber auch hier der im vorhergehenden Artikel gezeigte Rechnungsgang beibehalten werden. Wir bezeichnen zu dem Zwecke mit  $k$  diejenige Spannung, welche pro Flächeneinheit in dem mit Rücksicht auf Widerstand gegen Zerknicken berechneten Querschnitt entsteht; alsdann ist, wenn die Querschnittsfläche wieder  $= F$  ist,

$$k = \frac{P}{F} \dots \dots \dots 132.$$

Nun ist aber nach Gleichung 128. die zulässige Tragkraft

$$P = \frac{C E \mathcal{F}}{s l^2},$$

also die zulässige Beanspruchung pro Flächeneinheit der Querschnittsfläche

$$k = \frac{C E \mathcal{F}}{s F l^2} \dots \dots \dots 133.$$

und, wenn wiederum  $\mathcal{F} = c F h^2$  eingesetzt wird,

$$k = \frac{C E c}{s} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 134.$$

Berechnet man nach dieser Formel die zulässige Beanspruchung für gegebene

Verhältniffe von  $\frac{h}{l}$  und fetzt man den gefundenen Werth in Gleichung 132. ein, fo ergiebt sich die nöthige Querschnittsfläche aus derselben zu

$$F = \frac{P}{k} \dots \dots \dots 135.$$

Selbstverständlich darf  $k$  nie gröfser werden als  $K$ . Es wird aber  $k$  zu  $K$ , wenn  $l$  zu  $l_1$  wird. Denn durch Einsetzung des Werthes  $l_1$  in Gleichung 134. für  $l$  wird dieselbe identisch mit Gleichung 131. Es gelten also nur diejenigen Werthe für  $k$ , welche kleiner als  $K$  sind.

Nach der Formel 134. lassen sich Tabellen für die verschiedenen Querschnittsformen berechnen, aus denen sodann für die möglichen Werthe von  $\frac{h}{l}$  die Werthe von  $k$  leicht entnommen werden können.

Für die Haupt-Constructionsmaterialien und die Hauptfälle der Praxis sind die aus Gleichung 134. sich ergebenden Ausdrücke in der nachfolgenden Tabelle zusammengefelt.

Constructions-material	Allgemeine Formel	Fall 1: Ein Ende eingepannt, das andere frei drehbar	Fall 2: Beide Enden frei drehbar	Fall 3: Beide Enden eingepannt	Fall 4: Ein Ende eingepannt, das andere vertical geführt
Schmiedeeisen	$k = 400\,000\,c\,C\left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 986\,000\,c\left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 3\,944\,000\,c\left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 15\,776\,000\,c\left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 7\,888\,000\,c\left(\frac{h}{l}\right)^2$
Gufseisen . . .	$k = 125\,000\,c\,C\left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 307\,500\,c\left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 1\,230\,000\,c\left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 4\,920\,000\,c\left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 2\,460\,000\,c\left(\frac{h}{l}\right)^2$
Holz . . . . .	$k = 12\,000\,c\,C\left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 29\,520\,c\left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 118\,080\,c\left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 472\,320\,c\left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 236\,160\,c\left(\frac{h}{l}\right)^2$

Es wird sich nunmehr darum handeln, für die wichtigeren, in der Praxis vorkommenden Querschnittsformen von auf Druck, bzw. Zerknickung beanspruchten Stäben die Werthe von  $l_1$  und  $k$  zu ermitteln. Bei diesen Untersuchungen und Berechnungen werden wir den Fall 2, bei welchem beide Enden frei drehbar sind, zu Grunde legen, da derselbe der häufigste ist und die anderen Fälle durch Multiplication mit bezw.  $\frac{1}{4}$ , 4 und 2 leicht auf denselben zurückgeführt werden können.

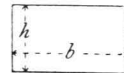
342. Ermittlung von  $l_1$  und  $k$  für:

1) Rechteckiger Querschnitt (Fig. 139). Die beiden Dimensionen desselben seien  $h$  und  $b$ , wobei  $h < b$ ; alsdann ist

$$c = \frac{F}{F h^2} = \frac{b h^3}{12 b h^3} = \frac{1}{12} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,289.$$

343. rechteckige Querschnitte.

Fig. 139.



Nach Gleichung 131. wird für den zweiten Zerknickungsfall

für Schmiedeeisen:  $\frac{l_1}{h} = 21,68$       Gufseisen:  $= 14,33$       Holz:  $= 12,34$  . . . . . 136

Soll also die einfache Druckgleichung anwendbar sein, so darf die Stablänge nicht mehr als rot. das 21-fache, bzw. das 14- und 12-fache der kleineren Querschnittsdimension betragen.

Da  $h < b$  angenommen wurde, wird  $h$  bei gleicher Gröfse der Querschnittsfläche am größten, wenn  $h = b$ , d. i. wenn das Rechteck zum Quadrat wird. Der günstigste Rechteckquerschnitt für gedrückte Stäbe ist also der quadratische.

In den meisten Fällen ergiebt die Ermittlung von  $h$  aus der Gleichung 136. so grofse Werthe, dafs die Gleichung  $F = \frac{P}{K}$  nicht mehr zutrifft; alsdann ist  $k$  nach Gleichung 134. zu bestimmen. Man erhält wiederum für den Fall 2 abgerundet

für Schmiedeeisen:	Gufseifen:	Holz:
$k = 329\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 102\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 9800 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 137.$

Für eine Anzahl häufig vorkommender Werthe von  $\frac{h}{l}$  sind die zulässigen Beanspruchungen  $k$  berechnet und in der Tabelle auf S. 308 zusammengestellt.

344.  
kreisförmige  
Querschnitte.

2) Kreisförmiger Querschnitt. Ist der Durchmesser  $d$ , so wird

$$F = \frac{d^2 \pi}{4}, \quad \mathcal{J} = \frac{d^4 \pi}{64}, \quad h = d,$$

$$c = \frac{\mathcal{J}}{F h^2} = \frac{4 d^4 \pi}{64 d^2 \pi d^2} = \frac{1}{16} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,25.$$

Wiederum für den Fall 2 wird aus Gleichung 131.

für Schmiedeeisen:	Gufseifen:	Holz:
$\frac{l_1}{h} = 18,76$	$= 12,4$	$(= 10,7) \dots \dots \dots 138.$

Der Werth für Holz ist eingeklammert, weil diese Querschnittsform beim Holz nur ausnahmsweise vorkommt.

Aus Gleichung 134. ergibt sich für den Fall 2 und

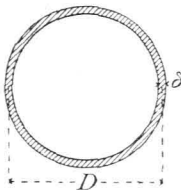
für Schmiedeeisen:	Gufseifen:
$k = 246\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 76\,900 \left(\frac{h}{l}\right)^2, \dots \dots \dots 139$

woraus man die in der Tabelle auf S. 308 angegebenen Werthe von  $k$  erhält.

345.  
kreisringförmige  
Querschnitte.

3) Kreisringförmiger Querschnitt (Fig. 140). Ist die als gering angenommene Wandstärke gleich  $\delta$ , der mittlere Durchmesser  $D$ , so ist annähernd

Fig. 140.



$$F = D \pi \delta, \quad \mathcal{J} = \frac{D^3 \pi \delta}{8}, \quad h = D,$$

$$c = \frac{\mathcal{J}}{F h^2} = \frac{D^3 \pi \delta}{8 D \pi \delta D^2} = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,353.$$

Nach Gleichung 131. wird für Fall 2 und

für Schmiedeeisen:	Gufseifen:
$\frac{l_1}{h} = 26,49$	$= 17,5 \dots \dots \dots 140.$

Die Construction der Enden ist bei den gufseisernen Säulen meistens eine derartige, das man den Fall 4 der Rechnung zu Grunde legen, also annehmen kann, das untere Ende sei eingespannt, das obere vertical geführt. Alsdann ist (siehe die Tabelle auf S. 304)

$$\frac{l_1}{h} = 70,15 \cdot 0,353 = 24,76 = \frac{l_1}{D}, \quad D = 0,04 l,$$

$$\delta_{cm} = \frac{P}{D \pi K} = \frac{25 P}{l \pi K} = 0,00016 \frac{P \text{ kg}}{l \text{ m}}.$$

Nach Gleichung 134. ergibt sich

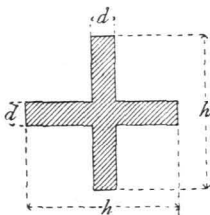
für Schmiedeeisen:	Gufseifen:
für Fall 2: $k = 490\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 153\,750 \left(\frac{h}{l}\right)^2,$
für Fall 4: $k = 980\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 307\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2.$

346.  
kreuzförmige  
Querschnitte.

4) Kreuzförmiger Querschnitt.

a) Gufseifen. Wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich ist, so wird man den Querschnitt am besten so disponiren, das die Trägheitsmomente für alle Schwerpunktsachsen gleich sind, d. h. das die beiden Hauptträgheitsmomente gleich sind. Diese Gleichheit findet statt, wenn die beiden Kreuzarme gleiche Länge und gleiche Dicke haben (Fig. 141). Alsdann ist

Fig. 141.



$$\mathcal{J} = \frac{1}{12} [d h^3 + h d^3 - d^4] = \frac{d h^3}{12} \left[ 1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2 - \left(\frac{d}{h}\right)^3 \right].$$

In den meisten Fällen ist  $\frac{d}{h}$  ein kleiner Bruch, so das ohne merklichen Fehler  $\left(\frac{d}{h}\right)^2$  und  $\left(\frac{d}{h}\right)^3$  vernachlässigt werden können, jedenfalls



dann, wenn der vorläufigen Querschnittsbefimmung eine nachträgliche genauere Berechnung folgt. Man erhält alsdann

$$\mathcal{F} = \frac{d h^3}{12}, \quad F = 2 h d - d^2 = 2 h d \left(1 - \frac{d}{2 h}\right) \text{ oder angenähert } F = 2 h d;$$

$$c = \frac{\mathcal{F}}{F h^2} = \frac{d h^3}{12 \cdot 2 h^3 d} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,204.$$

Auf Grundlage der Gleichungen 131. und 134. wird für den Fall 2:

$$\frac{l_1}{h} = 10,12 \quad \text{und} \quad k = 51\,250 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 141.$$

Hiernach sind die betreffenden Werthe in der Tabelle auf S. 308 berechnet.

β) Schmiedeeisen. Bei diesem Material sei nur der aus 4 gleichschenkeligen Winkelleifen nach Fig. 142 zusammengesetzte Querschnitt betrachtet. Es ist

Fig. 142.

$$F = 4 (2 b \cdot d - d^2) = 8 b d - 4 d^2 \text{ oder angenähert } F = 8 b d;$$

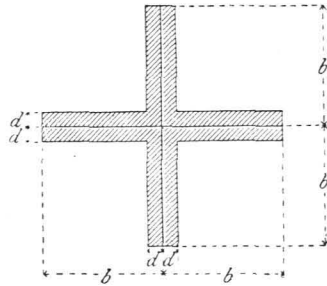
$$\mathcal{F} = \frac{1}{12} \left[ 2 d \cdot (2 b)^3 + 2 b \cdot (2 d)^3 - 2 d (2 d)^3 \right],$$

$$\mathcal{F} = \frac{16}{12} b^3 d \left[ 1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] \text{ oder angenähert } \mathcal{F} = \frac{16}{12} b^3 d;$$

$$h = 2 b, \quad c = \frac{16 b^3 d}{12 \cdot 8 b d \cdot 4 b^2} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,204.$$

Demnach ist

$$\frac{l_1}{h} = \frac{l_1}{2 b} = 15,31 \quad \text{und} \quad k = 164\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 142.$$



γ) Das einfache gleichschenkelige Winkelleifen (Fig. 143). Das Trägheitsmoment unten stehenden Kreuzquerschnittes ist bei geringer Schenkelstärke für alle Schweraxen (siehe Art. 346)

347.  
L-förmige Querschnitte.

$$\mathcal{F} = \frac{d h^3}{12}, \quad \text{und da } h = 2 b, \text{ auch } \mathcal{F} = \frac{2 d b^3}{3}.$$

Fig. 143.

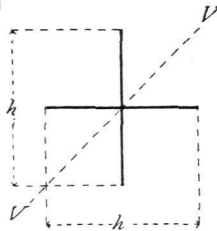
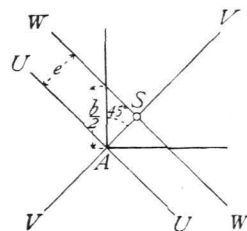


Fig. 144.



Zu diesem Trägheitsmomente trägt der Theil an der einen Seite der Axe *VV* genau eben so viel bei, wie der Theil an der anderen Seite. Wir können also auch angenähert annehmen, dafs für jede beliebige durch *A* gelegte Axe das Trägheitsmoment des Winkelleifens halb so groß ist, als der obige Ausdruck, d. h. dafs für jede durch *A* gelegte Axe, also auch für die Symmetrieaxe *VV* (Fig. 144) stattfindet:

$$i_V = i_U = \frac{d b^3}{3}.$$

Wir suchen das Trägheitsmoment für diejenige Schwerpunktsaxe, in Bezug auf welche es ein Minimum wird; ein Minimum wird das Trägheitsmoment für die zur Symmetrieaxe *VV* im Schwerpunkt normale Hauptaxe *WW*. Demnach ist *i<sub>W</sub>* zu ermitteln. Es ist nach Gleichung 42.

$$i_U = i_W + F e^2 \quad \text{und} \quad i_W = i_U - F e^2 = \frac{d b^3}{3} - 2 b d e^2.$$

Der Schwerpunkt *S* ist aber der Schnittpunkt der Symmetrieaxe *VV* mit der Verbindungslinie der beiden Schenkelchwerpunkte (wenigstens für den vorliegenden Zweck genau genug) also:

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{e}{b} = \frac{2 e}{b} \quad \text{und} \quad e^2 = \frac{b^2}{4 \cdot 2} = \frac{b^2}{8},$$

mithin

$$i_W = \frac{d b^3}{3} - \frac{2 b^3 d}{8} = \frac{d b^3}{12}, \quad c = \frac{i_W}{F h^2} = \frac{d b^3}{12 \cdot 2 b d b^2} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,204.$$

Man erhält nunmehr

$$\frac{l_1}{b} = \frac{l_1}{h} = 15,31 \quad \text{und} \quad k = 164\,000 \left(\frac{b}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 143.$$

348.  
I-förmige  
Querchnitte.

6) Der I-förmige Walzbalken-Querchnitt (Fig. 145, Deutsche Normalprofile, Art. 188, S. 198).  $\mathcal{F}_{min}$  findet in Bezug auf die Z-Axe statt. Es ist

Fig. 145. 
$$\mathcal{F}_Z = \mathcal{F} = \frac{1}{12} \left[ 2 t b^3 + d^3 (h - 2 t) \right] = \frac{t b^3}{12} \left[ 2 + \left( \frac{d}{b} \right)^3 \left( \frac{h}{t} - 2 \right) \right].$$

Unbedenklich kann man angenähert schreiben:

$$F = 2 b t + d h \quad \text{und} \quad \mathcal{F} = \frac{t b^3}{6}.$$

Die früher im Ausdrucke für  $c$  mit  $h$  bezeichnete Gröfse ist hier gleich  $b$ ,  
sonach

$$c = \frac{t b^3}{6 (2 b t + d h) b^2} = \frac{1}{6 \left( 2 + \frac{d h}{b t} \right)} \quad \dots \quad 144.$$

Für die Normalprofile Nr. 8 bis 24, welche hier vorzugsweise in Betracht kommen, liegt  $c$  zwischen den Grenzen 0,0511 und 0,0476, und es ist im Mittel

$$c = 0,049 \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,22.$$

Man erhält aus diesen Mittelwerthen für den Fall 2:

$$\frac{l_1}{h} = 16,51 \quad \text{und} \quad k = 19\,300 \left( \frac{l}{b} \right)^2 \quad \dots \quad 145.$$

Aus den im Vorstehenden gefundenen Resultaten sind für eine Reihe von Werthen des  $\frac{h}{l}$  und für eine Anzahl häufig vorkommender Querchnittsformen die zulässigen Beanspruchungen ausgerechnet und in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

### Tabelle

der zulässigen Beanspruchungen  $k$  (in Kilogramm pro 1<sup>cm</sup> Querchnittsfläche) für lange gedrückte Stäbe.  
Fall 2<sup>162)</sup>: Drehbare Enden (Fig. 136 auf S. 302).

$\frac{l}{h}$	Rechteckquerchnitt			Kreisquerchnitt		Kreisringquerchnitt		Kreuzquerchnitt Gusseisen	Winkel-eisen Schmiede-eisen	I-Querchnitt Schmiede-eisen
	Schmiede-eisen	Gusseisen	Holz	Schmiede-eisen	Gusseisen	Schmiede-eisen	Gusseisen			
11	—	—	—	—	—	—	—	423	—	—
12	—	—	—	—	—	—	—	356	—	—
13	—	—	58	—	473	—	—	303	—	—
14	—	—	50	—	392	—	—	261	—	—
15	—	455	43,5	—	340	—	—	228	—	—
16	—	400	38	—	300	—	—	200	—	—
17	—	355	34	—	266	—	—	177	623	667
18	—	313	30	—	237	—	474	158	555	596
19	—	284	27	683	213	—	426	142	498	535
20	—	256	24,5	616	192	—	384	128	450	482
22	680	212	20	509	159	—	317	106	372	400
24	571	178	17	428	133	—	267	89	312	335
25	526	164	15,7	394	123	—	246	82	288	308
26	487	151	14	364	113	—	227	—	266	285
27	451	140	13	338	105	672	210	—	247	265
28	420	131	12,5	314	98	625	196	—	229	246
29	391	122	11,6	293	91,4	582	183	—	214	229
30	365	114	11,0	274	85	544	171	—	200	214
32	321	100	9,5	240	75	478	150	—	176	188
35	268	83	8	201	63	400	125	—	140	166
40	205	64	6	154	48	306	96	—	112	120

<sup>162)</sup> Für den Fall 1 (ein Ende eingepannt, das andere frei drehbar, Fig. 135 auf S. 302), für den Fall 3 (beide Enden eingepannt, Fig. 137 auf S. 302) und für den Fall 4 (ein Ende eingepannt, das andere vertical geführt, Fig. 138 auf S. 302) sind die in dieser Tabelle angegebenen Werthe von  $k$  mit bezw. 1,4, 4 und 2 zu multipliciren. Die erhaltenen Werthe sind selbstredend nur zu gebrauchen, wenn sie kleiner als  $K$  sind; anderen Falls ist  $K$  der Berechnung zu Grunde zu legen.

Der Gebrauch der in den Art. 339 bis 342 (S. 302 bis 305) vorgeführten allgemeinen Regeln, so wie der für verschiedene Querschnittsformen entwickelten Ableitungen in den Art. 343 bis 348 (S. 305 bis 308) mag an einigen Beispielen erläutert werden.

1) In einem aus Gußeisen mit kreisförmigem Querschnitte herzustellenden Stabe herrsche ein Maximaldruck  $P = 3300$  kg. Die Länge  $l$  des Stabes betrage 100 cm; der Kreisdurchmesser  $d$  soll bestimmt werden unter Zugrundelegung des Falles 2.

Soll man nach der einfachen Druckgleichung rechnen dürfen, so muß nach Relation 138.  $\frac{l_1}{d} = 12,4$  fein. Es würde  $f = \frac{3300}{500} = 6,6$  qcm und  $d = \sqrt{\frac{4f}{\pi}} = 2,9$  cm, woraus sich  $\frac{l}{d} = \frac{100}{2,9} = 34,4$  ergibt. Bei diesem Verhältniß ist die einfache Druckgleichung also nicht mehr anwendbar. Wählt man den Durchmesser vorläufig etwas stärker als 2,9, etwa  $d = 5$  cm, so wird  $\frac{l}{d} = 20$  und nach der Tabelle auf S. 308  $k = 192$ .

Alsdann ist  $f = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{3300}{192} = 17$  qcm und  $d = 4,7$  cm. Der zu 5 cm angenommene Durchmesser würde also als angemessen zu bezeichnen sein.

2) Für denselben Stab soll der Querschnitt als Kreuzquerschnitt bestimmt werden. Wenn die einfache Druckgleichung angewendet wird, ergibt sich  $f = \frac{3300}{500} = 6,6$  qcm. Wählt man etwa vorläufig  $d = 1$  cm und  $h = 6$  cm, demnach die Querschnittsfläche  $= 6 + 5 = 11$  qcm, so ergibt sich  $\frac{l}{h} = \frac{100}{6} = 16,67$  und nach der Tabelle auf S. 308 (durch Interpolation)  $k = 184$  kg. Mithin beträgt die erforderliche Querschnittsfläche  $f = \frac{3300}{184} = 18$  qcm, und es ist deshalb noch eine Vergrößerung des Querschnittes vorzunehmen.

Wird  $h = 7$  cm gewählt, so ist  $\frac{l}{h} = \frac{100}{7} = 14$  und nach der Tabelle auf S. 308  $k = 261$  kg. Sonach wird nunmehr  $f = \frac{3300}{261} = 12,6$  qcm, während der gewählte Querschnitt 13 qcm mißt, also fast genau übereinstimmt.

3) In einem aus Schmiedeeisen zu konstruierenden Stabe herrsche der Maximaldruck  $P = 3300$  kg. Es sei  $l = 100$  cm; der Stab werde aus einem einfachen Winkeleisen konstruiert, dessen Dimensionen zu bestimmen sind. Es ist der Zerknickungsfall 4 zu Grunde zu legen.

Bei allen Querschnittsbestimmungen für schmiedeeiserne Stäbe soll, sobald Zerknicken in Frage kommt, im Folgenden von der Verschwächung durch Nietlöcher abgesehen werden, weil auf dieselbe auch in der Herleitung der Formeln für  $k$  und  $l_1$  keine Rücksicht genommen ist. Es steht übrigens nichts im Wege, eine nachträgliche Correctur in dieser Hinsicht vorzunehmen. Wenn dagegen die volle Beanspruchung  $K$  als zulässig sich ergibt, so ist die Verschwächung durch Niete zu berücksichtigen.

Würde man für einfachen Druck konstruieren, so würde sich der Querschnitt  $f = \frac{3300}{700} = 4,7$  qcm ergeben.

Es möge ein Winkeleisen mit den Dimensionen  $5,5 \times 5,5 \times 0,8$  gewählt werden; alsdann ist  $\frac{l}{h} = \frac{100}{5,5} = 18$ ; für den Fall 2 ist nach der Tabelle auf S. 308  $k = 555$  kg, für den Fall 4 also größer, als 700 kg. Es braucht daher hier auf Zerknicken keine Rücksicht genommen zu werden. Der Brutto-Querschnitt des erwähnten Winkeleisens beträgt 8,16 qcm (siehe die Deutschen Normalprofile für gleichschenkelige Winkeleisen auf S. 194 und 195), der Netto-Querschnitt nach Abzug eines Nietloches von 1,6 cm Durchmesser  $8,16 - 1,28 = 6,88$  qcm. Es könnte also eventuell noch ein kleineres Winkeleisen-Caliber gewählt werden.

4) Es sei  $P = 9500$  kg und  $l = 300$  cm; der Stab sei aus Eichenholz mit quadratischem Querschnitt herzustellen, und es soll der Fall 4 zu Grunde gelegt werden.

Für einfachen Druck wäre  $f = \frac{9500}{65} = 146$  qcm. Wählt man die Seite des Quadrats 14 cm, so wird  $\frac{l}{h} = \frac{300}{14} = \infty 22$  und nach der Tabelle auf S. 308  $k = 2 \cdot 20 = 40$  kg. Mithin muß

$f = \frac{9500}{40} = 237 \text{ qcm}$  fein. Bei den gewählten Dimensionen ist  $f = 14^2 = 196 \text{ qcm}$ , also zu klein.

Wählt man die Seite des Quadrates gleich  $14,5 \text{ cm}$ , so wird  $\frac{l}{h} = \frac{300}{14,5} = 20,7$  und nach Gleichung 137.

$$k = \frac{2 \cdot 9800}{(20,7)^2} = \approx 46 \text{ kg.}$$

Hieraus findet man

$$f = \frac{9500}{46} = 213 \text{ qcm.}$$

Der gewählte Querschnitt hat eine Fläche von  $14,5 \cdot 14,5 = 210,25 \text{ qcm}$ , ist also als genügend zu betrachten.

Weitere Beispiele für complicirtere Querschnitte folgen im nächsten Artikel.

Wenn die Form des Querschnittes einigermaßen complicirt ist, so stößt die Aufstellung einfacher und genauer Formeln für  $c$  und  $k$  auf Schwierigkeiten. Als dann empfiehlt es sich, aus der Gleichung 128. diejenige Größe des Trägheitsmomentes zu berechnen, welche der Querschnitt bei gegebener Länge des Stabes und gegebenem Werthe von  $P$  zum Mindesten haben muß. Es ergibt sich aus Gleichung 128. für das Trägheitsmoment der Werth

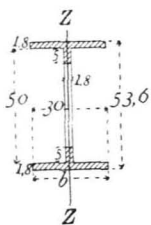
$$\mathcal{J} = \frac{P s l^2}{C E} \dots \dots \dots 146.$$

Der Querschnitt ist nun so zu entwerfen, daß dessen kleinstes Trägheitsmoment wenigstens so groß ist, wie der aus Gleichung 146. für  $\mathcal{J}$  ermittelte Werth; gleichzeitig muß aber die Querschnittsfläche  $F$  mindestens so groß sein, um der Gleichung 127. zu genügen.

Je mehr sich der Flächeninhalt des Querschnittes, welcher dem nothwendigen Trägheitsmomente entspricht, dem Quotienten  $\frac{P}{K}$  nähert, desto zweckmäßiger ist nach Früherem die Construction. Man nimmt gewöhnlich zunächst einen Querschnitt an, für welchen  $F = \frac{P}{K}$  stattfindet und ermittelt das Trägheitsmoment derselben. Genügt dasselbe nicht, so ist die Querschnittsfläche entsprechend zu vergrößern, bis das verlangte  $\mathcal{J}$  vorhanden ist. Dieses Verfahren soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

Beispiele. 1) In einer gußeisernen Stütze sei der Maximaldruck  $P = 50\,000 \text{ kg}$ ; die Länge der Stütze sei  $l = 450 \text{ cm}$ ; die Enden sollen als bewegliche vorausgesetzt werden; die Querschnittsform sei die neben stehende (Fig. 146); die Querschnittsdimensionen sind zu ermitteln.

Fig. 146.



Für einfachen Druck muß  $F = \frac{50\,000}{500} = 100 \text{ qcm}$  und nach Gleichung 146.

$$\mathcal{J} = \frac{50\,000 \cdot 8 \cdot 450 \cdot 450}{10 \cdot 1\,000\,000} = 8100 \text{ fein.}$$

Die Höhe des Querschnittes sei durch constructive Rücksichten zu  $53,6 \text{ cm}$  vorgeschrieben, die Stärke des Steges und der Gurte sei  $1,8 \text{ cm}$ ; alsdann findet, wenigstens bei nicht außergewöhnlich großer Breite der Gurtungen, das Minimal-Trägheitsmoment für die Axe  $ZZ$  statt, und es ist

$$\mathcal{J} = \frac{2 \cdot 1,8 \cdot b^3}{12} + \frac{50 \cdot 1,8^3}{12} = 0,3 b^3 + 24,3 = 8100,$$

woraus sich für  $b = \approx 30 \text{ cm}$  ergibt.

Die Querschnittsfläche wird  $F = 2 \cdot 1,8 \cdot 30 + 50 \cdot 1,8 = 198 \text{ qcm}$ , während nur  $100 \text{ qcm}$  Querschnittsfläche nöthig sind. Daraus folgt, daß unbedenklich ein Theil des Stegs auf einzelne Theile der Höhe fortfallen kann; alsdann bleibt als Querschnittsfläche der schraffierte Theil übrig, und zwar in diesem Falle  $F = 2 \cdot 30 \cdot 1,8 + 2 \cdot 5 \cdot 1,8 = 126 \text{ qcm}$ , und es genügt diese Querschnittsgröße. Auch das Trägheitsmoment wird durch Fortfall des Stegs nur unwesentlich alterirt.

350.  
Querschnitts-  
ermittlung  
bei complicirten  
Querschnitten.