2. Abſchnitt.

Stützen und Träger.

Man bezeichnet mit dem Namen Stützen ſolche Bauconſtructionen, bei denen die Längsaxe ganz oder nahezu mit der Richtung der Belaſtungen zuſammen fällt. Die Belaſtungen wirken in den meiſten Fällen vertical, in der Richtung der Schwere, und es ergiebt ſich daraus, daſs die Stützen meiſtens verticale oder nahezu verticale Längsaxen haben. Wir rechnen dahin die Pfeiler und die Säulen, die ſich wohl auch unter dem gemeinſchaftlichen Namen Freiſtützen zuſammenfaſſen laſſen.

Träger ſind Bauconſtructionen, bei denen die Belaſtungen ausſchlieſslich oder vorwiegend normal zur Richtung der Längsaxe wirken. Da die Belaſtungen meiſt vertical gerichtet ſind, haben die Träger meiſt horizontale oder nur wenig davon abweichende Längsaxen.

1. Kapitel.

Stützen.

Im vorliegenden Kapitel ſollen überhaupt Stäbe, welche auf Zerknicken in Anſpruch genommen werden, demnach nicht allein die Freiſtützen (Pfeiler und Säulen), ſondern auch ſonſtige auf Zerknicken beanſpruchte Conſtructionen, wie ſie bei Decken- und Dachſtuhlanlagen vorkommen, in Betracht gezogen werden.

Die Stützen haben meiſtens nur einen Stützpunkt und einen Laſtpunkt; der letztere wird oft durch die weitere Conſtruction feſtgelegt. Der Stützpunkt liegt gewöhnlich am unteren Ende, der Laſtpunkt am oberen Ende der Stütze.

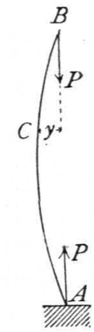
a) Theorie des Widerſtandes gegen Zerknicken.

332. Voraus-ſetzungen.

Wenn auf einen Stab mit gerader Axe zwei Zugkräfte P wirken, deren Richtungslinien genau mit der Stabaxe zuſammenfallen, ſo findet in den einzelnen Faſern des Stabes nur eine Zugbeanſpruchung ſtatt. Wirken auf einen eben ſolchen Stab zwei Druckkräfte P ebenfalls genau in der Richtung der Axe und einander entgegengeſetzt, ſo müſsten nach Früherem in den einzelnen Faſern gleichfalls nur Druckbeanſpruchungen ſtattfinden, welche bei conſtantem Stabquerſchnitt in allen Faſern pro Flächeneinheit gleich wären. In Wirklichkeit kann man darauf nicht immer rechnen. Wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu ſeiner Querſchnittsfläche groſs iſt, ſo wird unter dem Einfluſſe der drückenden Kräfte ein Ausbiegen ſtattfinden, und es wirkt alsdann auf jeden Querſchnitt C (Fig. 121) auſser der Axialkraft P noch ein Moment Py. In dieſem Falle findet Beanſpruchung des Stabes auf Zerknicken ſtatt, und es iſt derſelbe mit Rückſicht auf dieſe Beanſpruchungsweiſe zu berechnen.

Es kann auffallen, daſs hier ſcheinbar ein Widerſpruch zwiſchen der Theorie und Praxis obwaltet; in Wirklichkeit iſt derſelbe aber nicht vorhanden. So lange die Druckkräfte ganz genau in der Richtung der Stabaxe wirken, iſt ein Ausbiegen nicht möglich; die kleinſte zufällige Abweichung der Kraftrichtung von der Stabaxe erzeugt aber für jeden Punkt des Stabes ein Moment, hat alfo bei geringer Querfchnittsfläche des Stabes ein Ausbiegen zur Folge. Man kann daher in diefem Falle von einem labilen Gleichgewichtszuftand fprechen.

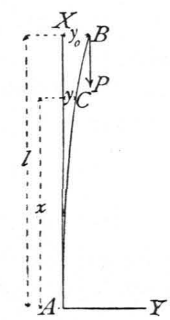
Fig. 121.



Ein Ausbiegen der Stabaxe kann nicht nur in der in Fig. 121 gezeichneten Richtung ftattfinden, fondern ift nach allen möglichen Richtungen denkbar; es ift demnach zu unterfuchen, nach welcher Richtung ein folches Ausbiegen am leichteften ftattfindet und der Querfchnitt des Stabes danach zu disponiren. Für die folgenden Unterfuchungen foll angenommen werden, dafs: 1) als äufsere Kräfte nur die Axialkräfte P wirken, 2) die Axialkräfte in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen und 3) der Stab einen conftanten Querfchnitt habe.

Wir legen durch den Schwerpunkt des einen Endquerfchnittes des Stabes (Fig. 122) drei Coordinatenaxen: die X-Axe falle mit der urfprünglichen Lage der Stabaxe, die Y-Axe mit der einen Hauptaxe des Querfchnittes zufammen; die Z-Axe ftehe normal zu den beiden genannten, fie projicirt fich demnach in der YX-Ebene, d. i. der Bildebene als Punkt. Zunächft nehmen wir an, dafs das Ausbiegen des Stabes in der YX-Ebene erfolge und dafs der Punkt B nach der Deformation des Stabes die Ordinate y_0 habe. Für irgend einen Punkt C mit der Abfciffe x fei die Ordinate y; das Moment für diefen Punkt ift $M = P\,(y_0 - y)$ und die elaftifche Linie demnach aus der Gleichung 86. zu ermitteln. Danach wird 333. Elaftifche Linie.

Fig. 122.



$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P\,(y_0 - y)}{E\,\mathfrak{J}} \qquad \ldots\ldots \quad 88.$$

Darin ift $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment des Querfchnittes bei C, bezogen auf diejenige Schwerpunktsaxe deffelben, welche normal zur Kraftebene, alfo zur XY-Ebene fteht. Der Querfchnitt ift nach obiger Vorausfetzung als conftant angenommen, alfo auch $\mathfrak{J}$ für die Integration conftant; da P und E gleichfalls conftant find, fo ift bei der Integration $\frac{P}{E\,\mathfrak{J}}$ als ein conftanter Factor einzuführen. Abkürzungsweife fetzen wir

$$a^2 = \frac{P}{E\,\mathfrak{J}}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 89.$$

fo dafs die Differentialgleichung der elaftifchen Linie lautet:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2\,(y_0 - y) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 90.$$

Die zweimalige Integration ergiebt als Gleichung der elaftifchen Linie:

$$y = y_0 + A \sin a\,x + B \cos a\,x \qquad \ldots\ldots\ldots \quad 91.$$

Die beiden Conftanten A und B find für die verfchiedenen Arten der Stabunterftützung verfchieden.

Bekanntlich ift

$\sin \alpha = \sin (2\,\pi + \alpha) = \sin (2\,n\,\pi + \alpha)$ und $\cos \alpha = \cos (2\,\pi + \alpha) = \cos (2\,n\,\pi + \alpha)$, worin n eine beliebige ganze Zahl oder Null bedeutet, alfo gleich 0, 1, 2, 3 ... gefetzt werden kann. Es ift alfo auch

$$\sin a\,x = \sin (a\,x + 2\,\pi) = \sin \left[a \left(x + \frac{2\,\pi}{a} \right) \right] \text{ und}$$

$$\cos a x = \cos (a x + 2\pi) = \cos\left[a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)\right].$$

Die Gleichung 91. kann alſo auch geſchrieben werden:

$$y = y_0 + A \sin a\left[\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)\right] + B \cos\left[a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)\right] \quad . \quad . \quad 92.$$

Die Ordinaten y zweier Punkte, deren Abſciſſen um $\frac{2\pi}{a}$ von einander verſchieden ſind, haben daher die gleichen Werthe. Die elaſtiſche Linie iſt demnach eine Wellenlinie; die Wellenlänge iſt

$$\lambda = \frac{2\pi}{a}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 93.$$

und da nach Gleichung 89. $a = \sqrt{\frac{P}{E\mathfrak{J}}}$ iſt,

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{E\mathfrak{J}}{P}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 94.$$

Aus dieſer Gleichung kann man, falls E, $\mathfrak{J}$ und P gegeben iſt, die Wellenlänge berechnen. Iſt dagegen λ gegeben, ſo kann man aus Gleichung 94. diejenige Kraft P berechnen, welche die Durchbiegungen y erzeugen kann. Es folgt aus Gleichung 94.

$$P = \frac{4\pi^2 E\mathfrak{J}}{\lambda^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 95.$$

Es ſoll hier noch auf eine wichtige Eigenthümlichkeit der allgemeinen Gleichung 90. hingewieſen werden. Dieſelbe bleibt giltig, wenn man beiderſeits mit der Zahl m multiplicirt; ſie heiſst alsdann:

$$m\frac{d^2 y}{d x^2} = m a^2 (y_0 - y) = a^2 (m y_0 - m y).$$

Es ſei $m y_0 = \eta_0$ und $m y = \eta$; alsdann iſt auch $m\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 \eta}{d x^2}$, alſo

$$\frac{d^2 \eta}{d x^2} = a^2 (\eta_0 - \eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 96.$$

Die Gleichung 90. gilt alſo für beliebig groſse Werthe von y. Ergeben ſich demnach unter Einwirkung einer Kraft P die Durchbiegungen y als möglich, ſo können dieſelben auch m-mal ſo groſs, d. h. beliebig groſs werden, alſo auch ſo groſs, daſs der Stab zerknickt wird.

Der Werth von P in Gleichung 95., welcher die Durchbiegungen y erzeugen kann, kann alſo auch den Stab zerknicken. P iſt ſonach der Grenzwerth der Tragkraft.

Bei der vorſtehenden Ableitung iſt angenommen worden, daſs die Ausbiegung in der XY-Ebene erfolge; dieſelbe kann aber auch in der XZ-Ebene ſtattfinden. Die Entwickelung für dieſen Fall bleibt genau dieſelbe, wie die obige, und man erhält für P denſelben Ausdruck, wie dort; nur iſt alsdann unter $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment des Querſchnittes bezogen auf die zur XZ-Ebene normale Schwerpunktsaxe zu verſtehen, welche Axe parallel zur Y-Axe iſt. Nennen wir daſſelbe $\mathfrak{J}_1$, die entſprechenden Werthe von P und λ aber P_1 und λ_1, ſo iſt:

$$P_1 = \frac{4\pi^2 E\mathfrak{J}_1}{\lambda_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 97.$$

Ein Ausbiegen des Stabes kann nun fowohl in der XY-Ebene, wie in der XZ-Ebene ftattfinden; die wirkliche dem Stabe zuzumuthende Belaftung darf den Grenzwerth nicht erreichen. Die Gleichungen 95. und 97. geben zwei Grenzwerthe, und es ift naturgemäfs der kleinere von beiden als mafsgebend einzuführen. Nimmt man in beiden Richtungen gleiche λ an, fo unterfcheiden fich beide Grenzwerthe nur durch die Werthe der Trägheitsmomente. Es ift demnach in den Ausdruck für P von den beiden Hauptträgheitsmomenten das kleinere einzufetzen.

Wenn die Ausbiegung nach allen Richtungen möglich ift, fo kann man mit hinreichender Genauigkeit annehmen, dafs diefelbe normal zu derjenigen Hauptaxe erfolgt, welcher das kleinere Hauptträgheitsmoment entfpricht; denn diefes ift nach Art. 314, S. 270 das kleinfte der für alle Schweraxen möglichen Trägheitsmomente. Von einer genauen Unterfuchung, nach welcher Richtung die Ausbiegung erfolgen wird, kann hier füglich abgefehen werden.

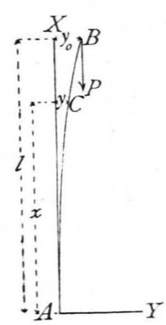
Für die weiteren Betrachtungen find die verfchiedenen möglichen Fälle ins Auge zu faffen.

1) Einfeitig eingefpannter, an dem einen Ende axial belafteter Stab (Fig. 123). Aus der allgemeinen Gleichung 91. für die elaftifche Linie folgt 334. Einfeitig eingefpannter Stab.

$$\frac{dy}{dx} = A\,a \cos a\,x - B\,a \sin a\,x \quad \ldots\ldots\ldots \quad 98.$$

Wir beftimmen die Conftanten A und B aus den befonderen Bedingungen für diefen Fall.

Fig. 123.



Für $x = 0$ ift $\frac{dy}{dx} = 0$, demnach in Gleichung 98. $0 = A\,a$ oder, da a nicht gleich Null ift, $A = 0$. Eben fo ift für $x = 0$ auch $y = 0$, daher in Gleichung 91. $0 = y_0 + B$ oder $B = -y_0$. Sonach lautet die Gleichung der elaftifchen Linie für diefen Fall

$$y = y_0 - y_0 \cos a\,x = y_0\,(1 - \cos a\,x) \quad \ldots \quad 99.$$

Für $x = l$ wird $y = y_0$, demnach $y_0 = y_0\,(1 - \cos a\,l)$ oder

$$\cos a\,l = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 100.$$

Damit letztere Gleichung erfüllt werde, mufs

$$a\,l = (2\,n + 1)\,\frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 101.$$

fein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3 ... annehmen kann.

Aus Gleichung 93. folgt nun für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\,\pi\,l\,.\,2}{(2\,n + 1)\,\pi} = \frac{4\,l}{2\,n + 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 102.$$

Damit ift nun auch die Gröfse des Grenzwerthes der Belaftung für diefen Fall gefunden; man braucht nur in die Gleichung 95. für λ den foeben ermittelten Werth einzuführen. Alsdann wird

$$P = \frac{4\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{16\,l^2}\,(2\,n + 1)^2 = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{4\,l^2}\,(2\,n + 1)^2 \quad \ldots\ldots \quad 103.$$

Für die verfchiedenen Werthe von n ergeben fich auch verfchiedene Werthe für P und λ.

Für $n = 0$ ift $\lambda = 4\,l$, alfo die ganze Wellenlänge 4-mal fo grofs, als die freie Stablänge; diefer Fall ift in Fig. 124 dargeftellt. Alsdann ift

$$P = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{4\,l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 104.$$

Fig. 124.

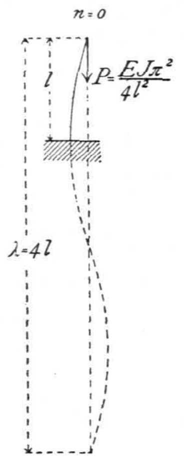


Fig. 125.

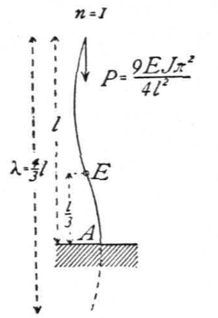
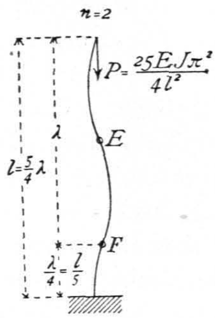


Fig. 126.



Für $n = 1$ wird $\lambda = \frac{4}{3}\, l$, alfo die freie Länge l gleich $\frac{3}{4}$ einer Wellenlänge. Diefer Fall ift in Fig. 125 dargeftellt, und es ift

$$P = \frac{9\, E\, \mathfrak{J}\, \pi^2}{4\, l^2} \quad . \quad 105.$$

Diefer Fall tritt ein, wenn der Punkt E in dem Abftande $\frac{l}{3}$ von A fixirt ift.

Für $n = 2$ ift $\lambda = \frac{4}{5}\, l$, alfo $l = \frac{5}{4}\, \lambda$ und

$$P = \frac{25\, E\, \mathfrak{J}\, \pi^2}{4\, l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 106.$$

Die Punkte E und F (Fig. 126) in den Abftänden $\frac{1}{5}\, l$ und $\frac{3}{5}\, l$ find fixirt.

Man fieht, wie wefentlich der Grenzwerth P durch rationelle Conftruction erhöht werden kann.

335.
Stab
mit freien
Enden.

2) Stab mit beiderfeits frei drehbaren Enden (Fig. 127). Die fymmetrifche Belaftung des Stabes wird zur Folge haben, dafs beide Stabhälften, oberhalb und unterhalb der Stabmitte, fich genau gleich verhalten; man kann demnach diefen Fall auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, dafs man den Anfangspunkt des Coordinatenfyftems in die Stabmitte legt. Jede Hälfte verhält fich dann genau eben fo, wie der Stab im vorigen Artikel; die zerknickende Kraft P, d. h. der Grenzwerth von P ift demnach aus der Gleichung 103. zu entnehmen, jedoch mit der Modification, dafs ftatt des dortigen l hier $\frac{l}{2}$ einzufetzen ift, weil die dort mit l bezeichnete Länge hier nur $\frac{l}{2}$ beträgt.

Fig. 127.

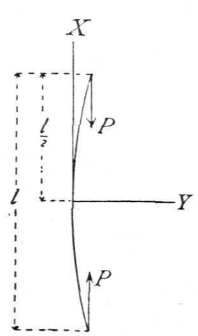
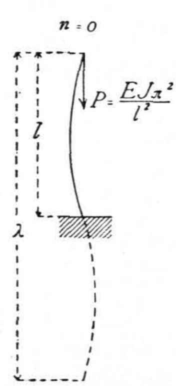


Fig. 128.



Für den vorliegenden Fall ift alfo

$$P = \frac{E\, \mathfrak{J}\, \pi^2\, (2\, n + 1)^2}{4 \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{E\, \mathfrak{J}\, \pi^2}{l^2}\, (2\, n + 1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 107.$$

und

$$\lambda = \frac{4\, \frac{l}{2}}{2\, n + 1} = \frac{2\, l}{2\, n + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 108.$$

Für $n = 0$ (Fig. 128) ift $\lambda = 2\,l$ und $P = \dfrac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2}$ . . . . 109.

Für $n = 1$ (Fig. 129) ift $\lambda = \dfrac{2}{3}\,l$, $l = \dfrac{3}{2}\,\lambda$ und $P = \dfrac{9\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2}$ . . 110.

Die beiden Punkte E und F find in diefem durch Fig. 129 dargeftellten Falle fixirt.

Ift ein Punkt E in der Mitte der Stablänge fixirt (Fig. 130), fo ift der Fall auf denjenigen des vorigen Artikels zurückzuführen, in dem man ftatt des dortigen l hier $\dfrac{l}{4}$ einführt.

Alsdann ift nach Gleichung 104.

$$P = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{4\left(\frac{l}{4}\right)^2} = \frac{4\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2} \quad . \quad 111.$$

Fig. 129.

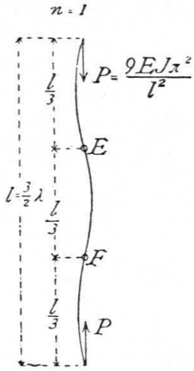
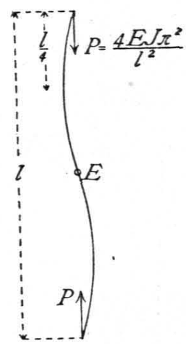
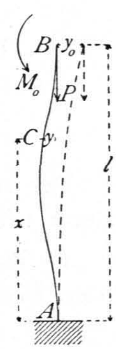


Fig. 130.



3) Stab mit eingefpannten Enden (Fig. 131). Der Endpunkt B verbleibt in Folge der Einfpannung in der Verticalen der Axe XX; die Tangente an die Axe in diefem Punkte bleibt vertical. Wäre der Punkt B frei, fo würde er nach der Deformation die Ordinate $-y_0$ haben; das Moment der äufseren Kräfte in Bezug auf den Punkt A würde $= -Py_0$ fein; da aber in Folge der Einfpannung der Punkt B in der Verticalen bleibt, fo ift das Moment der äufseren Kräfte für den Punkt A gleich Null. Die Einfpannung des Stabes bei B hat demnach genau diefelbe Wirkung, wie ein Moment M_0, deffen Gröfse $= Py_0$, deffen Drehrichtung derjenigen von P entgegen gefetzt ift. Es ift alfo $M_0 = Py_0$. 336. Stab mit eingefpannten Enden.

Fig. 131.



Für einen beliebigen Punkt C mit der Abfciffe x ift das Biegungsmoment

$$M = M_0 - Py = Py_0 - Py = P\,(y_0 - y).$$

Demnach lautet die Differentialgleichung der elaftifchen Linie auch hier wiederum (vergl. die Gleichungen 88. und 90.)

$$E\,\mathfrak{J}\,\frac{d^2 y}{d\,x^2} = P\,(y_0 - y) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{d\,x^2} = a^2\,(y_0 - y).$$

y_0 ift hier die negative Ordinate, welche der Punkt B haben würde, wenn er frei wäre. Als Gleichung der elaftifchen Linie ergiebt fich (eben fo wie in Art. 333, S. 295)

$$y = y_0 + A \sin a\,x + B \cos a\,x,$$

und wenn der Werth $y_0 = \dfrac{M_0}{P}$ eingefetzt wird,

$$y = \frac{M_0}{P} + A \sin a\,x + B \cos a\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 112.$$

ferner

$$\frac{d\,y}{d\,x} = A\,a \cos a\,x - B\,a \sin a\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 113.$$

Die Conftanten A und B ergeben fich in folgender Weife. Für $x = 0$ ift $y = 0$, demnach in Gleichung 112. $0 = \dfrac{M_0}{P} + B$ und $B = -\dfrac{M_0}{P}$. Für $x = 0$ wird

$\frac{dy}{dx} = 0$, folglich in Gleichung 113. $0 = A\,a$ und, da a nicht gleich Null ift, $A = 0$. Die Gleichung der elaftifchen Linie lautet fonach im vorliegenden Falle:

$$y = \frac{M_0}{P} - \frac{M_0}{P} \cos a\,x = \frac{M_0}{P}\,(1 - \cos a\,x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 114.$$

Für $x = l$ ift $y = 0$, demnach $0 = \frac{M_0}{P}\,(1 - \cos a\,l)$ oder

$$\cos a\,l = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 115.$$

Fig. 132.

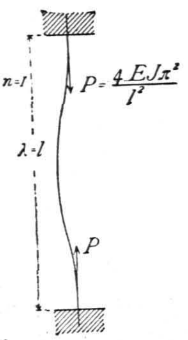
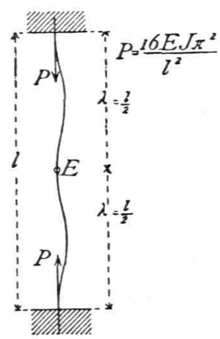


Fig. 133.



Damit diefe Gleichung erfüllt werde, mufs

$$a\,l = 2\,n\,\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 116.$$

fein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3 ... haben kann.

Aus Gleichung 93. folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\,\pi\,l}{2\,n\,\pi} = \frac{l}{n} \text{ oder } \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{n} \quad . \quad . \quad 117.$$

Ferner wird nach Gleichung 89.

$$a^2 = \frac{P}{E\mathfrak{J}} = \frac{4\,\pi^2}{\lambda^2} \text{ und } P = \frac{4\,E\mathfrak{J}\,\pi^2}{\lambda^2} \quad 118.$$

Die beiden Gleichungen 117. und 118. geben über die Gröfse von P Auffchlufs. Es ift

für $n = 1$:

$$\frac{\lambda}{l} = 1 \text{ oder } \lambda = l;$$

$$P = \frac{4\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad 119.$$

für $n = 2$:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{l}{2};$$

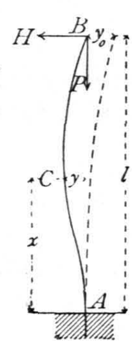
$$P = \frac{16\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2} \quad . \quad . \quad 120.$$

Der erftere Fall ift durch Fig. 132, der zweite durch Fig. 133 dargeftellt; letzterer tritt ein, wenn der Punkt E in der Stabmitte fixirt ift.

337.
Stab mit einem eingefpannten und einem geführten Ende.

4) **Stab mit einem eingefpannten und einem in der Verticalen geführten Ende** (Fig. 134). Die Führung des Punktes B in der Verticalen $A\,X$ wird durch eine auf diefen Punkt wirkende Horizontalkraft H erreicht. Für irgend einen Punkt C des gebogenen Stabes ift alsdann das Moment $M = H\,(l - x) - P\,y$.

Fig. 134.



Wenn H nicht wirkte, würde der Punkt B die Ordinate $-y_0$ haben, wie punktirt; alsdann würde das Moment der Kraft P für den Punkt A betragen: $M_0 = -P\,y_0$. Im vorliegenden Falle ift das Moment der Kraft P für den Punkt A gleich Null; der Einflufs der Kraft H zeigt fich alfo in dem Aufheben des Momentes M_0 der Kraft P. Das Moment der Kraft H in Bezug auf den Punkt A mufs alfo dem Momente $P\,y_0$ der Gröfse nach gleich, der Drehrichtung nach entgegen gefetzt fein, d. h. es mufs $H\,l = P\,y_0$ fein.

Es ift defshalb

$$M = H\,(l - x) - P\,y = H\,l - H\,x - P\,y = P\,(y_0 - y) - H\,x$$

und die Differentialgleichung der elaftifchen Linie (fiehe Gleichung 88.)

$$E\,\mathfrak{J}\,\frac{d^2 y}{d\,x^2} = P\,(y_0 - y) - \frac{P\,y_0}{l}\,x \text{ oder } \frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{P}{E\,\mathfrak{J}}\left(y_0 - y - \frac{x\,y_0}{l}\right) \quad 121.$$

Die Differentialgleichung wird aufgelöst, indem man $\frac{d^2 y}{d x^2} = z$ fetzt. Es fei wiederum abkürzungsweife $\frac{P}{E \mathfrak{J}} = a^2$; alsdann ift

$$z = a^2 \left(y_0 - y - y_0 \frac{x}{l} \right) \quad \text{und} \quad \frac{d z}{d x} = a^2 \left(- \frac{d y}{d x} - \frac{y_0}{l} \right);$$

ferner

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = - a^2 \frac{d^2 y}{d x^2} = - a^2 z.$$

Die Auflöfung diefer Differentialgleichung ergiebt wiederum genau wie in Art. 333, S. 295:

$$z = A \sin a x + B \cos a x, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 122.$$

und wenn für z der Werth eingeführt wird,

$$a^2 \left(y_0 - y - \frac{y_0 x}{l} \right) = A \sin a x + B \cos a x \quad \ldots \ldots \quad 123.$$

Die Differentiation nach x ergiebt:

$$- a^2 \left(\frac{d y}{d x} + \frac{y_0}{l} \right) = A a \cos a x - B a \sin a x \quad \ldots \ldots \quad 124.$$

Die beiden Gleichungen 123. und 124. ergeben die Werthe für die Conftanten A und B, wie folgt.

Für $x = 0$ ift $y = 0$, alfo nach Gleichung 123. $a^2 y_0 = B$; für $x = 0$ ift $\frac{d y}{d x} = 0$, alfo nach Gleichung 124. $- \frac{a^2 y_0}{l} = A a$ und $A = - \frac{a y_0}{l}$. Für $x = l$ ift $y = 0$, alfo nach Gleichung 123. $a^2 (y_0 - y_0) = 0 = A \sin a l + B \cos a l$, woraus

$$\operatorname{tg} (a l) = - \frac{B}{A} = \frac{a^2 y_0 l}{a y_0} = a l \quad \ldots \ldots \ldots \quad 125.$$

Diefe Relation findet ftatt für $a l = 0$, aufserdem aber auch für den Winkel $257^0 \, 27' \, 12''$; für diefen Winkel ift $\operatorname{tg} a l = a l = 4{,}4934$, alfo

$$P = \frac{E \mathfrak{J} (4{,}4934)^2}{l^2} = 20{,}19 \frac{E \mathfrak{J}}{l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 126.$$

Dies ift der Werth von P, für welchen Gleichung 125. erfüllt ift und einen Sinn hat; der Werth $a l = 0$ ift nicht zu verwerthen.

In Art. 334 bis 337 find diejenigen Werthe der zerknickenden Kraft entwickelt worden, welche für die Praxis hauptfächlich von Bedeutung find. 338. Zufammenftellung.

Nachftehend find diefelben in den Fig. 135 bis 138 überfichtlich zufammen geftellt, wobei überall der Stab auf feine ganze Länge frei angenommen ift; der vierte Fall ift zum Zwecke des bequemen Vergleiches ebenfalls auf den Ausdruck $\frac{C E \mathfrak{J} \pi^2}{l^2}$ gebracht. Die Tragfähigkeit der Stäbe verhält fich demnach

in den Fällen	1		2		4		3
wie	$\frac{1}{4}$	:	1	:	2,048	:	4.

Fig. 135.

Fall 1.

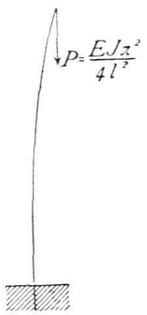


Fig. 136.

Fall 2.

Fig. 137.

Fall 3.

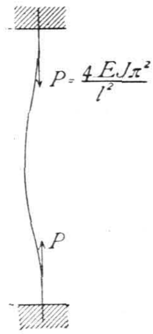
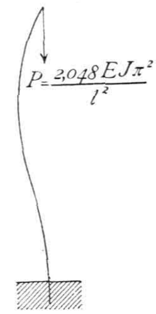


Fig. 138.

Fall 4.



Durch entſprechende Endanordnung würde man alſo die Tragfähigkeit des Stabes verſechzehnfachen können. Die angegebenen Kräfte ſind thatſächlich im Stande, den Stab zu zerknicken, und es ſind deſshalb Sicherheits-Coefficienten einzuführen.

b) Querſchnittsermittelung für gedrückte Stäbe mit Rückſicht auf den Widerſtand gegen Zerknicken.

339. Zuläſſige Beanſpruchung.

Die unter a. für die Tragkraft der Stäbe entwickelten Formeln ſind nicht ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar. Wenn die Stablänge ſehr klein, alſo auch das im Nenner der Werthe für P, welche in den Fig. 135 bis 138 eingeſchrieben ſind, vorkommende l^2 ſehr klein wird, ſo ergeben ſich für P ſehr groſse Werthe, gröſsere Werthe, als die Druckfeſtigkeit des Stabes geſtattet. Soll der Stab nicht durch einfachen Druck zerſtört werden, ſo darf die Kraft P nicht ſo groſs werden, daſs die Druckbeanſpruchung pro Flächeneinheit des Querſchnittes die Druckfeſtigkeit erreicht. Führt man Sicherheits-Coefficienten ein und bezeichnet die zuläſſige Beanſpruchung auf einfachen Druck pro Flächeneinheit der Querſchnittsfläche F mit K, ſo darf höchſtens ſtattfinden:

$$P = F K \qquad \text{127.}$$

Mit Rückſicht auf Widerſtand gegen Zerknicken darf höchſtens ſtattfinden, wenn s der Sicherheits-Coefficient und C ein Coefficient iſt, der von der Endbefeſtigung abhängt,

$$P = \frac{C E \mathfrak{J}}{s\, l^2} \qquad \text{128.}$$

Gröſser als der Werth in Gleichung 127. iſt, darf P mit Rückſicht auf die zuläſſige Druckbeanſpruchung nicht werden; gröſser, als der Werth in Gleichung 128. iſt, darf P des Zerknickens wegen nicht werden; es iſt alſo ſtets der kleinere dieſer beiden Werthe für diejenige Belaſtungsgröſse maſsgebend, welche dem Stabe zugemuthet werden darf. Bei groſser Stablänge l ergiebt die Gleichung 128., bei geringer Stablänge l die Gleichung 127. kleinere Werthe für P. Der Grenzwerth von l, etwa l_1, wird derjenige ſein, für welchen aus beiden Gleichungen derſelbe Werth von P folgt. Dieſer Grenzwerth ergiebt ſich durch Gleichſetzung der beiden Werthe von P in den Relationen 127. und 128. zu

$$l_1 = \sqrt{C}\,\sqrt{\frac{E}{K s}}\,\sqrt{\frac{\mathfrak{J}}{F}} \qquad \text{129.}$$

Falls die Stablänge kleiner iſt, als l_1, ſo iſt Gleichung 127., falls ſie gröſser iſt, als l_1, ſo iſt Gleichung 128. anzuwenden.

340. Querſchnitts-ermittelung.

Wenn zur Berechnung der Querſchnittsfläche F die Gleichung 127. benutzt werden kann, ſo findet im ganzen Querſchnitt eine gleichmäſsige Beanſpruchung K ſtatt; es wird alſo eine volle Ausnutzung des Materials erreicht; muſs dagegen die Gleichung 128. der Berechnung zu Grunde gelegt werden, ſo iſt dies nicht der Fall, weil alsdann eine weſentlich geringere Beanſpruchung pro Flächeneinheit des Querſchnittes ſtattfindet.

Man wird demnach rationeller Weiſe den Querſchnitt ſtets ſo zu disponiren ſtreben, daſs die Gleichung 127. angewendet werden kann, alſo die Querſchnittsform und -Gröſse nach der Gleichung 129. beſtimmen. Wenn dieſe Gleichung erfüllt iſt, ſo gilt auch die einfache Druckgleichung, und man kann alsdann den Querſchnitt ohne Rückſicht auf Zerknicken berechnen. Die Coefficienten E, K und s, welche unter dem zweiten Wurzelzeichen der Gleichung 129. vereinigt ſind, haben für alle Stäbe aus demſelben Material gleiche Werthe; dabei ſoll von einer Verwerthung der *Wöhler*'ſchen Verſuchsreſultate (vergl. Art. 283, S. 248) und demgemäſs von einer Annahme variabeler Werthe für K abgeſehen werden. Wird als Flächeneinheit das Quadratcentimeter, als Krafteinheit das Kilogramm angenommen, und werden für K und E die Werthe aus der Tabelle auf S. 247 eingeführt, ſo iſt

	für Schmiedeeiſen:	für Guſseiſen:	für Holz:
$E =$	200 000	1 000 000	120 000 kg pro 1 qcm
$K =$	700	500	65 » »
$s =$	5	8	10
$\sqrt{\frac{E}{K s}} =$	23,9	15,8	13,6

Der Coefficient C unter dem erſten Wurzelzeichen der Gleichung 129. iſt von der Form, Länge und dem Material des Stabes ganz unabhängig; derſelbe hängt nach Obigem nur von der Art der Endbefeſtigung ab. Für die in den Fig. 135 bis 138 dargeſtellten Fälle hat C folgende Werthe:

	Fall 1:	Fall 2:	Fall 3:	Fall 4:
$C =$	$\frac{\pi^2}{4}$	$= \pi^2$	$= 4\,\pi^2$	$= 2\,\pi^2$ (genügend genau)
$\sqrt{C} =$	1,57	= 3,14	= 6,28	= 4,44.

Die beiden Gröſsen $\mathcal{J}$ und F endlich, welche ſich unter dem dritten Wurzelzeichen der Gleichung 129. befinden, ſind von der Form und Gröſse der Querſchnittsfläche abhängig. Die einfache Druckgleichung wird demnach anwendbar ſein, wenn $\mathcal{J}$ und F in ſolchem Verhältniſs zur Stablänge conſtruirt werden, daſs die Gleichung 127. erfüllt iſt.

Wir wollen eine, in der Regel die kleinſte Querſchnittsdimenſion des Stabes mit h, einen von der Querſchnittsform abhängigen Coefficienten mit c bezeichnen und ſetzen

$$\mathcal{J} = c\,F\,h^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 130.$$

Alsdann iſt $\sqrt{\frac{\mathcal{J}}{F}} = \sqrt{\frac{c\,F\,h^2}{F}} = h\sqrt{c}$, und Gleichung 129. übergeht in

$$\frac{l_1}{h} = \sqrt{C}\,\sqrt{\frac{E}{K s}}\,\sqrt{c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 131.$$

In dieſer Gleichung iſt, wenn die Querſchnittsform beſtimmt iſt, Alles gegeben bis auf h. Es iſt deſshalb für dieſe Dimenſion meiſtens derjenige Minimalwerth leicht zu ermitteln, bei welchem Gleichung 131. erfüllt iſt, für welchen alſo die Querſchnittsberechnung nach der einfachen Druckgleichung vorgenommen werden kann.

Die Werthe von $\frac{l_1}{h}$, welche ſich nach Obigem für die verſchiedenen Materialien und verſchiedenen Befeſtigungsweiſen ergeben, ſind in der nachfolgenden Tabelle zuſammengeſtellt:

Conſtructions-material.	Allgemeine Formel.	Fall 1: Ein Ende eingeſpannt, das andere frei drehbar.	Fall 2: Beide Enden frei drehbar.	Fall 3: Beide Enden eingeſpannt.	Fall 4: Ein Ende eingeſpannt, das andere in der Verticalen geführt.
Schmiedeeiſen .	$\frac{l_1}{h} = 23{,}9\sqrt{C}\sqrt{c}$	$= 37{,}52\sqrt{c}$	$= 75{,}04\sqrt{c}$	$= 150{,}1\sqrt{c}$	$= 106\sqrt{c}$
Guſseiſen . . .	$\frac{l_1}{h} = 15{,}8\sqrt{C}\sqrt{c}$	$= 24{,}8\sqrt{c}$	$= 49{,}6\sqrt{c}$	$= 95{,}2\sqrt{c}$	$= 70{,}15\sqrt{c}$
Holz	$\frac{l_1}{h} = 13{,}6\sqrt{C}\sqrt{c}$	$= 21{,}35\sqrt{c}$	$= 42{,}7\sqrt{c}$	$= 85{,}4\sqrt{c}$	$= 60{,}38\sqrt{c}$

Mittels dieſer Tabelle ſind für die verſchiedenen Querſchnitte der Praxis die Grenzwerthe l_1, bezw. h meiſtens ohne Schwierigkeit zu ermitteln, und es ſoll das einzuſchlagende Verfahren weiter unten für eine Reihe von Querſchnitten gezeigt werden.

341. Querſchnitts-ermittelung für lange Stäbe.

Bei ſehr groſsen Stablängen ergeben ſich häufig für h aus der Gleichung 131. Werthe, welche praktiſch nicht wohl ausführbar ſind; in dieſem Falle kann man die Bedingung einer vollſtändigen Querſchnittsausnutzung nicht mehr aufrecht erhalten, und man muſs den Querſchnitt des Stabes nach der Zerknickungsformel, Gleichung 128., berechnen.

Mit einigen Modificationen kann aber auch hier der im vorhergehenden Artikel gezeigte Rechnungsgang beibehalten werden. Wir bezeichnen zu dem Zwecke mit k diejenige Spannung, welche pro Flächeneinheit in dem mit Rückſicht auf Widerſtand gegen Zerknicken berechneten Querſchnitt entſteht; alsdann iſt, wenn die Querſchnittsfläche wieder $= F$ iſt,

$$k = \frac{P}{F} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 132.$$

Nun iſt aber nach Gleichung 128. die zuläſſige Tragkraft

$$P = \frac{C\,E\,\mathfrak{J}}{s\,l^2},$$

alſo die zuläſſige Beanſpruchung pro Flächeneinheit der Querſchnittsfläche

$$k = \frac{C\,E\,\mathfrak{J}}{s\,F\,l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 133.$$

und, wenn wiederum $\mathfrak{J} = c\,F\,h^2$ eingeſetzt wird,

$$k = \frac{C\,E\,c}{s}\left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 134.$$

Berechnet man nach dieſer Formel die zuläſſige Beanſpruchung für gegebene

Verhältniffe von $\frac{h}{l}$ und fetzt man den gefundenen Werth in Gleichung 132. ein, fo ergiebt fich die nöthige Querfchnittsfläche aus derfelben zu

$$F = \frac{P}{k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 135.$$

Selbftverftändlich darf k nie gröfser werden als K. Es wird aber k zu K, wenn l zu l_1 wird. Denn durch Einfetzung des Werthes l_1 in Gleichung 134. für l wird diefelbe identifch mit Gleichung 131. Es gelten alfo nur diejenigen Werthe für k, welche kleiner als K find.

Nach der Formel 134. laffen fich Tabellen für die verfchiedenen Querfchnittsformen berechnen, aus denen fodann für die möglichen Werthe von $\frac{h}{l}$ die Werthe von k leicht entnommen werden können.

Für die Haupt-Conftructionsmaterialien und die Hauptfälle der Praxis find die aus Gleichung 134. fich ergebenden Ausdrücke in der nachfolgenden Tabelle zufammengeftellt.

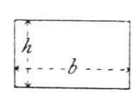
Conftructions-material	Allgemeine Formel	Fall 1: Ein Ende eingefpannt, das andere frei drehbar	Fall 2: Beide Enden frei drehbar	Fall 3: Beide Enden eingefpannt	Fall 4: Ein Ende eingefpannt, das andere vertical geführt
Schmiedeeifen	$k = 400\,000\, c\, C \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 986\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 3\,944\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 15\,776\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 7\,888\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$
Gufseifen . .	$k = 125\,000\, c\, C \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 307\,500\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 1\,230\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 4\,920\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 2\,460\,000\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$
Holz	$k = 12\,000\, c\, C \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 29\,520\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 118\,080\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 472\,320\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 236\,160\, c \left(\frac{h}{l}\right)^2$

Es wird fich nunmehr darum handeln, für die wichtigeren, in der Praxis vorkommenden Querfchnittsformen von auf Druck, bezw. Zerknickung beanfpruchten Stäben die Werthe von l_1 und k zu ermitteln. Bei diefen Unterfuchungen und Berechnungen werden wir den Fall 2, bei welchem beide Enden frei drehbar find, zu Grunde legen, da derfelbe der häufigfte ift und die anderen Fälle durch Multiplication mit bezw. $\frac{1}{4}$, 4 und 2 leicht auf denfelben zurückgeführt werden können. 342. Ermittelung von l_1 und k für:

1) Rechteckiger Querfchnitt (Fig. 139). Die beiden Dimenfionen deffelben feien h und b, wobei $h < b$; alsdann ift 343. rechteckige Querfchnitte.

$$c = \frac{\mathfrak{J}}{F\,h^2} = \frac{b\,h^3}{12\,b\,h^3} = \frac{1}{12} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0{,}289.$$

Fig. 139.



Nach Gleichung 131. wird für den zweiten Zerknickungsfall

für Schmiedeeifen: Gufseifen: Holz:

$$\frac{l_1}{h} = 21{,}68 \qquad = 14{,}33 \qquad = 12{,}34 \quad . \; . \; . \; . \quad 136$$

Soll alfo die einfache Druckgleichung anwendbar fein, fo darf die Stablänge nicht mehr als rot. das 21-fache, bezw. das 14- und 12-fache der kleineren Querfchnittsdimenfion betragen.

Da $h < b$ angenommen wurde, wird h bei gleicher Gröfse der Querfchnittsfläche am gröfsten, wenn $h = b$, d. i. wenn das Rechteck zum Quadrat wird. Der günftigfte Rechteckquerfchnitt für gedrückte Stäbe ift alfo der quadratifche.

In den meiften Fällen ergiebt die Ermittelung von h aus der Gleichung 136. fo grofse Werthe, dafs die Gleichung $F = \frac{P}{K}$ nicht mehr zutrifft; alsdann ift k nach Gleichung 134. zu beftimmen. Man erhält wiederum für den Fall 2 abgerundet

$$\underset{\text{für Schmiedeeisen:}}{k = 329\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2} \qquad \underset{\text{Gufseisen:}}{= 102\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2} \qquad \underset{\text{Holz:}}{= 9800 \left(\frac{h}{l}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; 137.$$

Für eine Anzahl häufig vorkommender Werthe von $\frac{h}{l}$ find die zuläffigen Beanfpruchungen k berechnet und in der Tabelle auf S. 308 zufammengeftellt.

344. kreisförmige Querfchnitte. 2) Kreisförmiger Querfchnitt. Ift der Durchmeffer d, fo wird

$$F = \frac{d^2 \pi}{4}, \quad \mathfrak{J} = \frac{d^4 \pi}{64}, \quad h = d,$$

$$c = \frac{\mathfrak{J}}{F h^2} = \frac{4 d^4 \pi}{64 d^2 \pi d^2} = \frac{1}{16} \text{ und } \sqrt{c} = 0{,}25.$$

Wiederum für den Fall 2 wird aus Gleichung 131.

$$\underset{\text{für Schmiedeeisen:}}{\frac{l_1}{h} = 18{,}76} \qquad \underset{\text{Gufseisen:}}{= 12{,}4} \qquad \underset{\text{Holz:}}{(= 10{,}7)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 138.$$

Der Werth für Holz ift eingeklammert, weil diefe Querfchnittsform beim Holz nur ausnahmsweife vorkommt.

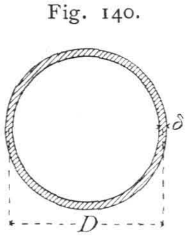
Aus Gleichung 134. ergiebt fich für den Fall 2 und

$$\underset{\text{für Schmiedeeisen:}}{k = 246\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2} \qquad \underset{\text{Gufseisen:}}{= 76\,900 \left(\frac{h}{l}\right)^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 139$$

woraus man die in der Tabelle auf S. 308 angegebenen Werthe von k erhält.

345. kreisringförmige Querfchnitte. 3) Kreisringförmiger Querfchnitt (Fig. 140). Ift die als gering angenommene Wandftärke gleich δ, der mittlere Durchmeffer D, fo ift annähernd

Fig. 140.



$$F = D \pi \delta, \quad \mathfrak{J} = \frac{D^3 \pi \delta}{8}, \quad h = D,$$

$$c = \frac{\mathfrak{J}}{F h^2} = \frac{D^3 \pi \delta}{8 D \pi \delta D^2} = \frac{1}{8} \text{ und } \sqrt{c} = 0{,}353.$$

Nach Gleichung 131. wird für Fall 2 und

$$\underset{\text{für Schmiedeeisen:}}{\frac{l_1}{h} = 26{,}49} \qquad \underset{\text{Gufseisen:}}{= 17{,}5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 140.$$

Die Conftruction der Enden ift bei den gufseifernen Säulen meiftens eine derartige, dafs man den Fall 4 der Rechnung zu Grunde legen, alfo annehmen kann, das untere Ende fei eingefpannt, das obere vertical geführt. Alsdann ift (fiehe die Tabelle auf S. 304)

$$\frac{l_1}{h} = 70{,}15 \cdot 0{,}353 = 24{,}76 = \frac{l_1}{D}, \quad D = 0{,}04\, l,$$

$$\delta^{\text{cm}} = \frac{P}{D \pi K} = \frac{25 P}{l \pi K} = 0{,}00016 \frac{P^{\text{kg}}}{l^{\text{m}}}.$$

Nach Gleichung 134. ergiebt fich

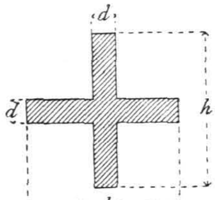
$$\text{für Fall 2:} \quad \underset{\text{für Schmiedeeisen:}}{k = 490\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2} \qquad \underset{\text{Gufseisen:}}{= 153\,750 \left(\frac{h}{l}\right)^2},$$

$$\text{für Fall 4:} \quad k = 980\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \qquad = 307\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2.$$

346. kreuzförmige Querfchnitte. 4) Kreuzförmiger Querfchnitt.

α) Gufseifen. Wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich ift, fo wird man den Querfchnitt am beften fo disponiren, dafs die Trägheitsmomente für alle Schwerpunktsaxen gleich find, d. h. dafs die beiden Hauptträgheitsmomente gleich find. Diefe Gleichheit findet ftatt, wenn die beiden Kreuzarme gleiche Länge und gleiche Dicke haben (Fig. 141). Alsdann ift

Fig. 141.



$$\mathfrak{J} = \frac{1}{12} \left[d h^3 + h d^3 - d^4 \right] = \frac{d h^3}{12} \left[1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2 - \left(\frac{d}{h}\right)^3 \right].$$

In den meiften Fällen ift $\frac{d}{h}$ ein kleiner Bruch, fo dafs ohne merklichen Fehler $\left(\frac{d}{h}\right)^2$ und $\left(\frac{d}{h}\right)^3$ vernachläffigt werden können, jedenfalls dann, wenn der vorläufigen Querfchnittsbeftimmung eine nachträgliche genauere Berechnung folgt. Man erhält alsdann

$$\mathcal{J} = \frac{d\,h^3}{12}, \quad F = 2\,h\,d - d^2 = 2\,h\,d\left(1 - \frac{d}{2\,h}\right) \text{ oder angenähert } F = 2\,h\,d;$$

$$c = \frac{\mathcal{J}}{F h^2} = \frac{d\,h^3}{12\,.\,2\,h^3\,d} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0{,}204.$$

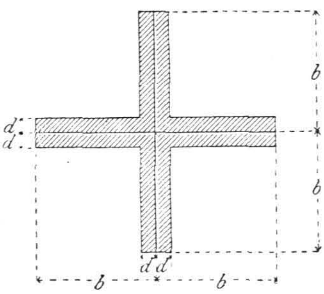
Auf Grundlage der Gleichungen 131. und 134. wird für den Fall 2:

$$\frac{l_1}{h} = 10{,}12 \quad \text{und} \quad k = 51\,250\left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 141.$$

Hiernach find die betreffenden Werthe in der Tabelle auf S. 308 berechnet.

β) Schmiedeeifen. Bei diefem Material fei nur der aus 4 gleichfchenkeligen Winkeleifen nach Fig. 142 zufammengefetzte Querfchnitt betrachtet. Es ift

Fig. 142.



$$F = 4\,(2\,b\,.\,d - d^2) = 8\,b\,d - 4\,d^2 \text{ oder angenähert } F = 8\,b\,d;$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12}\left[2\,d\,.\,(2\,b)^3 + 2\,b\,.\,(2\,d)^3 - 2\,d\,(2\,d)^3\right],$$

$$\mathcal{J} = \frac{16}{12}\,b^3\,d\left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3\right] \text{ oder angenähert } \mathcal{J} = \frac{16}{12}\,b^3\,d;$$

$$h = 2\,b, \quad c = \frac{16\,b^3\,d}{12\,.\,8\,b\,d\,.\,4\,b^2} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0{,}204.$$

Demnach ift

$$\frac{l_1}{h} = \frac{l_1}{2\,b} = 15{,}31 \quad \text{und} \quad k = 164\,000\left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad . \quad 142.$$

5) Das einfache gleichfchenkelige Winkeleifen (Fig. 143). Das Trägheitsmoment unten ftehenden Kreuzquerfchnittes ift bei geringer Schenkelftärke für alle Schweraxen (fiehe Art. 346) — 347. L-förmige Querfchnitte.

$$\mathcal{J} = \frac{d\,h^3}{12}, \text{ und da } h = 2\,b, \text{ auch } \mathcal{J} = \frac{2\,d\,b^3}{3}.$$

Zu diefem Trägheitsmomente trägt der Theil an der einen Seite der Axe VV genau eben fo viel bei, wie der Theil an der anderen Seite. Wir können alfo auch angenähert annehmen, dafs für jede beliebige durch A gelegte Axe das Trägheitsmoment des Winkeleifens halb fo grofs ift, als der obige Ausdruck, d. h. dafs für jede durch A gelegte Axe, alfo auch für die Symmetrieaxe VV (Fig. 144) ftattfindet:

Fig. 143.

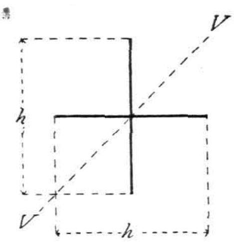
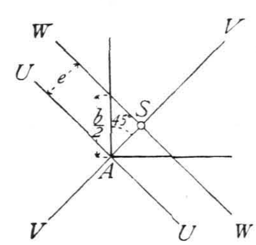


Fig. 144.



$$i_V = i_U = \frac{d\,b^3}{3}.$$

Wir fuchen das Trägheitsmoment für diejenige Schwerpunktsaxe, in Bezug auf welche es ein Minimum wird; ein Minimum wird das Trägheitsmoment für die zur Symmetrieaxe VV im Schwerpunkt normale Hauptaxe WW. Demnach ift i_W zu ermitteln. Es ift nach Gleichung 42.

$$i_U = i_W + F\,e^2 \quad \text{und} \quad i_W = i_U - F\,e^2 = \frac{d\,b^3}{3} - 2\,b\,d\,e^2.$$

Der Schwerpunkt S ift aber der Schnittpunkt der Symmetrieaxe VV mit der Verbindungslinie der beiden Schenkelfchwerpunkte (wenigftens für den vorliegenden Zweck genau genug) alfo:

$$\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{e}{\frac{b}{2}} = \frac{2\,e}{b} \quad \text{und} \quad e^2 = \frac{b^2}{4\,.\,2} = \frac{b^2}{8},$$

mithin

$$i_W = \frac{d\,b^3}{3} - \frac{2\,b^3\,d}{8} = \frac{d\,b^3}{12}, \quad c = \frac{i_W}{F\,h^2} = \frac{d\,b^3}{12\,.\,2\,b\,d\,b^2} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0{,}204.$$

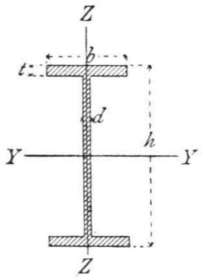
Man erhält nunmehr

$$\frac{l_1}{b} = \frac{l_1}{h} = 15{,}31 \quad \text{und} \quad k = 164\,000\left(\frac{b}{l}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 143.$$

348.
I-förmige Querschnitte.

6) Der **I**-förmige Walzbalken-Querschnitt (Fig. 145, Deutsche Normalprofile, Art. 188, S. 198). $\mathcal{J}_{min}$ findet in Bezug auf die Z-Axe statt. Es ist

Fig. 145.



$$\mathcal{J}_Z = \mathcal{J} = \frac{1}{12}\left[2\,t\,b^3 + d^3\,(h - 2\,t)\right] = \frac{t\,b^3}{12}\left[2 + \left(\frac{d}{b}\right)^3\left(\frac{h}{t} - 2\right)\right].$$

Unbedenklich kann man angenähert schreiben:

$$F = 2\,b\,t + d\,h \quad \text{und} \quad \mathcal{J} = \frac{t\,b^3}{6}.$$

Die früher im Ausdrucke für c mit h bezeichnete Gröfse ist hier gleich b, sonach

$$c = \frac{t\,b^3}{6\,(2\,b\,t + d\,h)\,b^2} = \frac{1}{6\left(2 + \frac{d\,h}{b\,t}\right)} \quad \ldots\ldots \quad 144.$$

Für die Normalprofile Nr. 8 bis 24, welche hier vorzugsweise in Betracht kommen, liegt c zwischen den Grenzen $0{,}0511$ und $0{,}0476$, und es ist im Mittel

$$c = 0{,}049 \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0{,}22.$$

Man erhält aus diesen Mittelwerthen für den Fall 2:

$$\frac{l_1}{h} = 16{,}51 \quad \text{und} \quad k = 19\,300\left(\frac{l}{b}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 145.$$

Aus den im Vorstehenden gefundenen Resultaten sind für eine Reihe von Werthen des $\frac{h}{l}$ und für eine Anzahl häufig vorkommender Querschnittsformen die zulässigen Beanspruchungen ausgerechnet und in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle

der zulässigen Beanspruchungen k (in Kilogramm pro 1 qcm Querschnittsfläche) für lange gedrückte Stäbe.
Fall 2 [162]): Drehbare Enden (Fig. 136 auf S. 302).

$\frac{l}{h}$	Rechteckquerschnitt			Kreisquerschnitt		Kreisring-querschnitt		Kreuz-quer-schnitt	Winkel-eisen	**I**-Quer-schnitt
	Schmiede-eisen	Gufseisen	Holz	Schmiede-eisen	Gufseisen	Schmiede-eisen	Gufseisen	Gufseisen	Schmiede eisen	Schmiede-eisen
11	—	—	—	—	—	—	—	423	—	—
12	—	—	—	—	—	—	—	356	—	—
13	—	—	58	—	473	—	—	303	—	—
14	—	—	50	—	392	—	—	261	—	—
15	—	455	43,5	—	340	—	—	228	—	—
16	—	400	38	—	300	—	—	200	—	—
17	—	355	34	—	266	—	—	177	623	667
18	—	313	30	—	237	—	474	158	555	596
19	—	284	27	683	213	—	426	142	498	535
20	—	256	24,5	616	192	—	384	128	450	482
22	680	212	20	509	159	—	317	106	372	400
24	571	178	17	428	133	—	267	89	312	335
25	526	164	15,7	394	123	—	246	82	288	308
26	487	151	14	364	113	—	227	—	266	285
27	451	140	13	338	105	672	210	—	247	265
28	420	131	12,5	314	98	625	196	—	229	246
29	391	122	11,6	293	91,4	582	183	—	214	229
30	365	114	11,0	274	85	544	171	—	200	214
32	321	100	9,5	240	75	478	150	—	176	188
35	268	83	8	201	63	400	125	—	140	166
40	205	64	6	154	48	306	96	—	112	120

162) Für den Fall 1 (ein Ende eingespannt, das andere frei drehbar, Fig. 135 auf S. 302), für den Fall 3 (beide Enden eingespannt, Fig. 137 auf S. 302) und für den Fall 4 (ein Ende eingespannt, das andere vertical geführt, Fig. 138 auf S. 302) sind die in dieser Tabelle angegebenen Werthe von k mit bezw. $\frac{1}{4}$, 4 und 2 zu multipliciren. Die erhaltenen Werthe sind selbstredend nur zu gebrauchen, wenn sie kleiner als K sind; anderen Falls ist K der Berechnung zu Grunde zu legen.

Der Gebrauch der in den Art. 339 bis 342 (S. 302 bis 305) vorgeführten allgemeinen Regeln, ſo wie der für verſchiedene Querschnittsformen entwickelten Ableitungen in den Art. 343 bis 348 (S. 305 bis 308) mag an einigen Beiſpielen erläutert werden. 349. Beiſpiele.

1) In einem aus Guſseiſen mit kreisförmigem Querſchnitte herzuſtellenden Stabe herrſche ein Maximaldruck $P = 3300$ kg. Die Länge l des Stabes betrage 100 cm; der Kreisdurchmeſſer d ſoll beſtimmt werden unter Zugrundelegung des Falles 2.

Soll man nach der einfachen Druckgleichung rechnen dürfen, ſo muſs nach Relation 138. $\frac{l_1}{d} = 12{,}4$ ſein. Es würde $f = \frac{3300}{500} = 6{,}6$ qcm und $d = \sqrt{\frac{4f}{\pi}} = 2{,}9$ cm, woraus ſich $\frac{l}{d} = \frac{100}{2{,}9} = 34{,}4$ ergiebt. Bei dieſem Verhältniſs iſt die einfache Druckgleichung alſo nicht mehr anwendbar. Wählt man den Durchmeſſer vorläufig etwas ſtärker als $2{,}9$, etwa $d = 5$ cm, ſo wird $\frac{l}{d} = 20$ und nach der Tabelle auf S. 308 $k = 192$.

Alsdann iſt $f = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{3300}{192} = 17$ qcm und $d = 4{,}7$ cm. Der zu 5 cm angenommene Durchmeſſer würde alſo als angemeſſen zu bezeichnen ſein.

2) Für denſelben Stab ſoll der Querſchnitt als Kreuzquerſchnitt beſtimmt werden. Wenn die einfache Druckgleichung angewendet wird, ergiebt ſich $f = \frac{3300}{500} = 6{,}6$ qcm. Wählt man etwa vorläufig $d = 1$ cm und $h = 6$ cm, demnach die Querſchnittsfläche $= 6 + 5 = 11$ qcm, ſo ergiebt ſich $\frac{l}{h} = \frac{100}{6} = 16{,}67$ und nach der Tabelle auf S. 308 (durch Interpolation) $k = 184$ kg. Mithin beträgt die erforderliche Querſchnittsfläche $f = \frac{3300}{184} = 18$ qcm, und es iſt deſshalb noch eine Vergröſserung des Querſchnittes vorzunehmen.

Wird $h = 7$ cm gewählt, ſo iſt $\frac{l}{h} = \frac{100}{7} = 14$ und nach der Tabelle auf S. 308 $k = 261$ kg. Sonach wird nunmehr $f = \frac{3300}{261} = 12{,}6$ qcm, während der gewählte Querſchnitt 13 qcm miſſt, alſo faſt genau übereinſtimmt.

3) In einem aus Schmiedeeiſen zu conſtruirenden Stabe herrſche der Maximaldruck $P = 3300$ kg. Es ſei $l = 100$ cm; der Stab werde aus einem einfachen Winkeleiſen conſtruirt, deſſen Dimenſionen zu beſtimmen ſind. Es iſt der Zerknickungsfall 4 zu Grunde zu legen.

Bei allen Querſchnittsbeſtimmungen für ſchmiedeeiſerne Stäbe ſoll, ſobald Zerknicken in Frage kommt, im Folgenden von der Verſchwächung durch Nietlöcher abgeſehen werden, weil auf dieſelbe auch in der Herleitung der Formeln für k und l_1 keine Rückſicht genommen iſt. Es ſteht übrigens nichts im Wege, eine nachträgliche Correctur in dieſer Hinſicht vorzunehmen. Wenn dagegen die volle Beanſpruchung K als zuläſſig ſich ergiebt, ſo iſt die Verſchwächung durch Niete zu berückſichtigen.

Würde man für einfachen Druck conſtruiren, ſo würde ſich der Querſchnitt $f = \frac{3300}{700} = 4{,}7$ qcm ergeben.

Es möge ein Winkeleiſen mit den Dimenſionen $5{,}5 \times 5{,}5 \times 0{,}8$ gewählt werden; alsdann iſt $\frac{l}{h} = \frac{100}{5{,}5} = 18$; für den Fall 2 iſt nach der Tabelle auf S. 308 $k = 555$ kg, für den Fall 4 alſo gröſser, als 700 kg. Es braucht daher hier auf Zerknicken keine Rückſicht genommen zu werden. Der Brutto-Querſchnitt des erwähnten Winkeleiſens beträgt $8{,}16$ qcm (ſiehe die Deutſchen Normalprofile für gleichſchenkelige Winkeleiſen auf S. 194 und 195), der Netto-Querſchnitt nach Abzug eines Nietloches von $1{,}6$ cm Durchmeſſer $8{,}16 - 1{,}28 = 6{,}88$ qcm. Es könnte alſo eventuell noch ein kleineres Winkeleiſen-Caliber gewählt werden.

4) Es ſei $P = 9500$ kg und $l = 300$ cm; der Stab ſei aus Eichenholz mit quadratiſchem Querſchnitt herzuſtellen, und es ſoll der Fall 4 zu Grunde gelegt werden.

Für einfachen Druck wäre $f = \frac{9500}{65} = 146$ qcm. Wählt man die Seite des Quadrats 14 cm, ſo wird $\frac{l}{h} = \frac{300}{14} = \backsim 22$ und nach der Tabelle auf S. 308 $k = 2 \cdot 20 = 40$ kg. Mithin muſs

$f = \frac{9500}{40} = 237^{\text{qcm}}$ ſein. Bei den gewählten Dimenſionen iſt $f = 14^2 = 196^{\text{qcm}}$, alſo zu klein.

Wählt man die Seite des Quadrates gleich $14{,}5^{\text{cm}}$, ſo wird $\frac{l}{h} = \frac{300}{14{,}5} = 20{,}7$ und nach Gleichung 137.

$$k = \frac{2 \cdot 9800}{(20{,}7)^2} = \infty\; 46^{\text{kg}}.$$

Hieraus findet man

$$f = \frac{9500}{46} = 213^{\text{qcm}}.$$

Der gewählte Querſchnitt hat eine Fläche von $14{,}5 \cdot 14{,}5 = 210{,}25^{\text{qcm}}$, iſt alſo als genügend zu betrachten.

Weitere Beiſpiele für complicirtere Querſchnitte folgen im nächſten Artikel.

350. Querſchnitts-ermittelung bei complicirten Querſchnitten.

Wenn die Form des Querſchnittes einigermaſsen complicirt iſt, ſo ſtöſst die Aufſtellung einfacher und genauer Formeln für c und k auf Schwierigkeiten. Alsdann empfiehlt es ſich, aus der Gleichung 128. diejenige Gröſse des Trägheitsmomentes zu berechnen, welche der Querſchnitt bei gegebener Länge des Stabes und gegebenem Werthe von P zum Mindeſten haben muſs. Es ergiebt ſich aus Gleichung 128. für das Trägheitsmoment der Werth

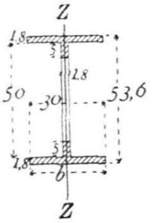
$$\mathcal{J} = \frac{P\, s\, l^2}{C\, E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 146.$$

Der Querſchnitt iſt nun ſo zu entwerfen, daſs deſſen kleinſtes Trägheitsmoment wenigſtens ſo groſs iſt, wie der aus Gleichung 146. für $\mathcal{J}$ ermittelte Werth; gleichzeitig muſs aber die Querſchnittsfläche F mindeſtens ſo groſs ſein, um der Gleichung 127. zu genügen.

Je mehr ſich der Flächeninhalt des Querſchnittes, welcher dem nothwendigen Trägheitsmomente entſpricht, dem Quotienten $\frac{P}{K}$ nähert, deſto zweckmäſsiger iſt nach Früherem die Conſtruction. Man nimmt gewöhnlich zunächſt einen Querſchnitt an, für welchen $F = \frac{P}{K}$ ſtattfindet und ermittelt das Trägheitsmoment desſelben. Genügt daſſelbe nicht, ſo iſt die Querſchnittsfläche entſprechend zu vergröſsern, bis das verlangte $\mathcal{J}$ vorhanden iſt. Dieſes Verfahren ſoll an einigen Beiſpielen gezeigt werden.

Beiſpiele. 1) In einer guſseiſernen Stütze ſei der Maximaldruck $P = 50\,000^{\text{kg}}$; die Länge der Stütze ſei $l = 450^{\text{cm}}$; die Enden ſollen als bewegliche vorausgeſetzt werden; die Querſchnittsform ſei die neben ſtehende (Fig. 146); die Querſchnittsdimenſionen ſind zu ermitteln.

Fig. 146.



Für einfachen Druck muſs $F = \frac{50\,000}{500} = 100^{\text{qcm}}$ und nach Gleichung 146.

$$\mathcal{J} = \frac{50\,000 \cdot 8 \cdot 450 \cdot 450}{10 \cdot 1\,000\,000} = 8100 \text{ ſein.}$$

Die Höhe des Querſchnittes ſei durch conſtructive Rückſichten zu $53{,}6^{\text{cm}}$ vorgeſchrieben, die Stärke des Steges und der Gurte ſei $1{,}8^{\text{cm}}$; alsdann findet, wenigſtens bei nicht auſsergewöhnlich groſser Breite der Gurtungen, das Minimal-Trägheitsmoment für die Axe ZZ ſtatt, und es iſt

$$\mathcal{J} = \frac{2 \cdot 1{,}8 \cdot b^3}{12} + \frac{50 \cdot 1{,}8^3}{12} = 0{,}3\, b^3 + 24{,}3 = 8100,$$

woraus ſich für $b = \infty\; 30^{\text{cm}}$ ergiebt.

Die Querſchnittsfläche wird $F = 2 \cdot 1{,}8 \cdot 30 + 50 \cdot 1{,}8 = 198^{\text{qcm}}$, während nur 100^{qcm} Querſchnittsfläche nöthig ſind. Daraus folgt, daſs unbedenklich ein Theil des Stegs auf einzelne Theile der Höhe fortfallen kann; alsdann bleibt als Querſchnittsfläche der ſchraffirte Theil übrig, und zwar in dieſem Falle $F = 2 \cdot 30 \cdot 1{,}8 + 2 \cdot 5 \cdot 1{,}8 = 126^{\text{qcm}}$, und es genügt dieſe Querſchnittsgröſse. Auch das Trägheitsmoment wird durch Fortfall des Steges nur unweſentlich alterirt.

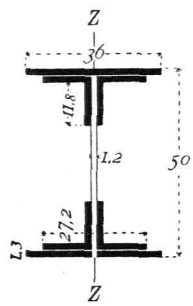
2) In einem fchmiedeeifernen Stabe herrfcht ein Druck $P = 130\,000$ kg; die Stablänge betrage 600 cm, der Stab fei beiderfeits eingefpannt.

Nach Gleichung 146. wird

$$\mathcal{J} = \frac{130\,000 \,.\, 5 \,.\, 600 \,.\, 600}{4 \,.\, 10 \,.\, 2\,000\,000} = 2925\,;$$

ferner mufs $F = \frac{130\,000}{700} = 186$ qcm fein.

Fig. 147.



Der Querfchnitt (Fig. 147) wurde vorläufig, wie folgt, zufammengefetzt:

4 Winkeleifen zu $13 \times 13 \times 1{,}2$ cm $= 29{,}8$ qcm	. . . .	$= 119{,}2$ qcm
1 obere Deckplatte $36 \times 1{,}3$ cm	. . . .	$= 46{,}8$ »
1 untere Deckplatte $34{,}8 \times 1{,}3$ cm	. . . .	$= 45{,}2$ »
	Summe des Brutto-Querfchnittes	$211{,}2$ qcm
Ab für 4 Nietlöcher $4 \times 2{,}5 \times 2{,}3$ cm	. . . .	$= 23{,}0$ »
	bleibt Netto-Querfchnitt	$188{,}2$ qcm.

Für diefen Querfchnitt findet $\mathcal{J}_{min}$ für die ZZ-Axe ftatt und es ift

$$\mathcal{J}z = \frac{1}{12}\left[2 \,.\, 1{,}3 \,.\, 36^3 + 2 \,.\, 1{,}2 \,.\, 27{,}2^3 + 2 \,.\, 11{,}8 \,.\, 3{,}6^3 - (2 \,.\, 13 + 1{,}3)\, 1{,}2^3\right] - 4 \,.\, 2{,}5 \,.\, 2{,}3 \,.\, 7^2 = 13\,094.$$

Das Trägheitsmoment ift alfo wefentlich gröfser, als es zu fein braucht, der Querfchnitt fonach genügend.

Sehr einfach geftaltet fich die Rechnung, wenn man den Querfchnitt aus folchen Normal-Profileifen bildet, für welche die Minimal-Trägheitsmomente in den Tabellen auf S. 194 bis 198 angegeben find. Man berechnet das nothwendige Trägheitsmoment und die nöthige Querfchnittsfläche aus den beiden Gleichungen 146., bezw. 127. und fucht aus den Tabellen ein Profileifen, bezw. einen aus Profileifen zufammengefetzten Querfchnitt, deffen Minimal-Trägheitsmoment und Querfchnittsfläche den verlangten zum Mindeften gleich find.

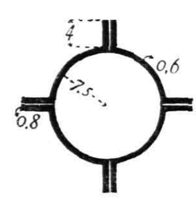
Beifpiel 3. In einem fchmiedeeifernen Stabe herrfche ein Druck $P = 18\,000$ kg; die Stablänge fei $l = 500$ cm; die Stabenden feien drehbar, mithin Fall 2 zu Grunde zu legen.

Es mufs nach Gleichung 146. $\mathcal{J} = \frac{18\,000 \,.\, 5 \,.\, 500 \,.\, 500}{10 \,.\, 2\,000\,000} = 1125$ und nach Gleichung 127. $F = \frac{18\,000}{700} = 26$ qcm fein.

Soll der Stab aus einem **I**-förmigen Walzbalken gebildet werden, fo ift das Caliber Nr. 38 (fiehe die Tabelle in Art. 183, S. 198) zu wählen; bei demfelben ift $\mathcal{J}_{min} = 1138$, F (nach Abzug für Niete) $= 107{,}5 - 4 \,.\, 2 \,.\, 2{,}05 = 91{,}1$ qcm und das Gewicht pro 1 m $83{,}9$ kg.

Wollte man ftatt deffen einen aus 4 kreuzförmig geftellten Winkeleifen gebildeten Querfchnitt verwenden, fo könnte man 4 Winkeleifen Nr. 9 (fiehe die Tabelle in Art. 182, S. 195) à $9 \times 9 \times 1{,}3$ cm verwenden, deren $\mathcal{J} = 1284$ ift, alfo genügt; dabei ift der Netto-Querfchnitt $F = 4 \,.\, 21{,}7 - 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 1{,}3$ (für Niete) $= 76{,}4$ qcm und das Gewicht $4 \,.\, 16{,}9$ kg $= 67{,}6$ kg. Rationeller ift die Verwendung von 4 Winkeleifen Nr. 10 à $10 \times 10 \times 1$ cm mit $\mathcal{J} = 1346$, $F = 4 \,.\, 19 - 4 \,.\, 2 \,.\, 1 = 68$ qcm und einem Gewicht pro 1 m von $4 \,.\, 14{,}8$ kg $= 59{,}2$ kg.

Fig. 148.



Würde endlich der Querfchnitt aus 4 Quadranteifen (nach Fig. 148) conftruirt, fo wird bei neben ftehendem Querfchnitt (nach der Tabelle in Art. 187, S. 197) $\mathcal{J} = 2046$, $F = 54{,}9 - 4 \,.\, 2 \,.\, 0{,}8$ (für Niete) $= 48{,}59$ qcm, und das Gewicht beträgt $42{,}9$ kg.

Am ungünftigften ift demnach im vorliegenden Falle das **I**-Profil mit $83{,}9$ kg Gewicht; alsdann folgt das kreuzförmige Profil mit $59{,}2$ kg, und am günftigften ift das aus Quadranteifen zufammengefetzte röhrenförmige Profil mit $42{,}9$ kg Gewicht.

c) Empirifche Formeln.

351. Allgemeine Formel.

Der Umftand, dafs man je nach der gröfseren oder geringeren Länge des Stabes mit verfchiedenen Formeln rechnen mufs, ift ein Uebelftand, dem man durch Einführung empirifcher Formeln abzuhelfen geftrebt hat. Eine folche empirifche Formel mufs für P bei kleinen Werthen von l nahezu oder genau die für einfachen Druck entwickelte Gleichung 127., dagegen bei grofsen Werthen von l die mit Rückficht auf Zerknicken gefundene Gleichung 128. ergeben. Diefen Anforderungen entfpricht folgende Formel [163]):

$$P = \frac{K F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \frac{K s F l^2}{C E}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 147.$$

in welcher alle Buchftaben die früheren Bedeutungen haben.

Für $l = 0$ wird entfprechend der für kurze Stäbe aufgeftellten Gleichung 127. auch hier $P = K F$; für den Werth $l = \infty$ mag obiger Formel die Geftalt

$$P = \frac{K F}{1 + \frac{K s F l^2}{C \mathcal{J} E}}$$

gegeben werden. Ift l fehr grofs, bezw. $= \infty$, fo ift das erfte Glied im Nenner verfchwindend klein gegen das zweite; die Formel lautet alsdann

$$P = \frac{K F}{\frac{K s F l^2}{C E \mathcal{J}}} = \frac{C \mathcal{J} E}{s l^2},$$

demnach übereinftimmend mit der Formel 128. für lange Stäbe. Die Formel 147. kann alfo als empirifche Formel angewendet werden und giebt auch ziemlich gut mit den Verfuchen übereinftimmende Werthe. Aus derfelben folgt

$$\frac{P}{K} = \frac{F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \frac{K s}{C E} F l^2},$$

und wenn der nur vom Material des Stabes und der Endbefeftigung abhängige Factor $\frac{K s}{C E} = \alpha$ gefetzt wird,

$$\frac{P}{K} = \frac{F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha F l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 148.$$

$\frac{P}{K}$ ift diejenige Querfchnittsfläche, welche der Stab haben müffte, wenn er einfachen Druck zu erleiden hätte. Wir bezeichnen diefelbe mit f, alsdann ift

$$f = \frac{F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha F l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 149.$$

Die Gleichung 149. kann benutzt werden, um die wirklich nöthige Querfchnittsfläche zu berechnen. Denn es ift aus Gleichung 149.

$$F = \frac{f \mathcal{J}}{(\mathcal{J} - \alpha f l^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 150.$$

[163]) Schäffer. Beftimmung der zuläffigen Spannung und der Querfchnitte für Eifenconftructionen. Deutfche Bauz. 1877, S. 498.

Das zur Ermittelung der nothwendigen Querſchnittsform und -Gröſse einzuſchlagende Verfahren iſt nun folgendes. Der Maximaldruck P, welcher auf den Stab wirken kann, iſt bekannt, durch Rechnung oder Conſtruction gefunden; alsdann iſt $f = \frac{P}{K}$ ebenfalls leicht zu ermitteln. Man conſtruire nun einen dieſer Querſchnittsfläche entſprechenden Querſchnitt und ermittele das kleinſte Trägheitsmoment deſſelben für eine Schweraxe, alſo $\mathfrak{J}$. Bekannt ſind jetzt die Gröſsen f, $\mathfrak{J}$, α und l, und die Gleichung 150. ergiebt nun die dem Querſchnitt wirklich zu gebende Flächengröſse F. Fällt dieſelbe gröſser aus, als die angenommene Querſchnittsfläche, ſo iſt letztere entſprechend zu vergröſsern, das neue Trägheitsmoment einzuſetzen, F aus Gleichung 150. aufs Neue zu berechnen und dieſes Verfahren ſo lange zu wiederholen, bis eine genügende Uebereinſtimmung der wirklichen Querſchnittsfläche mit der nöthigen ſtattfindet. Dabei hat man ſich jedoch vor dem Fehler zu hüten, bei den ſpäteren Berechnungen den neuen Werth der Querſchnittsfläche für f einzuführen, da ja f nicht die wirkliche Querſchnittsfläche, ſondern den für einen beſtimmten Stab ganz conſtanten Werth $\frac{P}{K}$ angiebt. Bei einiger Uebung iſt es leicht, bereits bei der zweiten Rechnung eine entſprechende Querſchnittsfläche zu finden.

Die mehrmalige Berechnung des Trägheitsmomentes iſt unbequem und kann auf die nachſtehend angegebene Weiſe vermieden werden. 352. Vereinfachung.

Nach Gleichung 130. iſt $\mathfrak{J} = c\,F\,h^2$, worin c ein von der ſpeciellen Querſchnittsform abhängiger Coefficient, h eine Dimenſion des Querſchnittes iſt. Wird dieſer Werth in Gleichung 150. eingeführt, ſo wird:

$$F = \frac{f\,c\,F\,h^2}{c\,F\,h^2 - \alpha\,f\,l^2} \quad \text{oder} \quad F\,c\,h^2 = f\,(c\,h^2 + \alpha\,l^2),$$

$$\frac{F}{f} = 1 + \frac{\alpha}{c}\left(\frac{l}{h}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 151.$$

Für eine Reihe nicht zu complicirter Querſchnittsformen: Quadrat, Kreis, Kreuz-, Winkel-, I-Eiſen etc. iſt, wie in den Art. 343 bis 348 (S. 305 bis 308) gezeigt wurde, c ohne beſondere Schwierigkeiten zu beſtimmen; für α giebt die nachſtehende Tabelle die betreffenden Werthe an. Sonach iſt mittels Gleichung 151. F leicht zu ermitteln.

Tabelle für die Werthe von $\alpha = \frac{K\,s}{C\,E}$.

Conſtructions-material	Allgemeine Formel	Fall 1: Ein Ende eingeſpannt, das andere frei drehbar	Fall 2: Beide Enden frei drehbar	Fall 3: Beide Enden eingeſpannt	Fall 4: Ein Ende eingeſpannt, das andere vertical geführt
Schmiedeeiſen	$\frac{0{,}00175}{C}$	0,00072	0,00018	0,000045	0,00009
Guſseiſen	$\frac{0{,}004}{C}$	0,0016	0,0004	0,0001	0,0002
Holz	$\frac{0{,}0054}{C}$	0,0022	0,00054	0,00013	0,00026

353. Anwendung auf verfchiedene Querfchnitte. Die Gleichung 151. ergiebt für die verfchiedenen, in den Art. 343 bis 348 (S. 305 bis 308) behandelten Querfchnittsformen, wenn die dort ermittelten Werthe für c zu Grunde gelegt werden, folgende fpecielle Gleichungen:

1) Rechteck und Quadrat: $\frac{F}{f} = 1 + 12\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2.$

2) Kreis: $\frac{F}{f} = 1 + 16\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2.$

3) Kreisring: $\frac{F}{f} = 1 + 8\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2.$

4) Kreuzquerfchnitt: $\frac{F}{f} = 1 + 24\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2.$

5) Einfaches gleichfchenkeliges Winkeleifen: $\frac{F}{f} = 1 + 24\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2.$

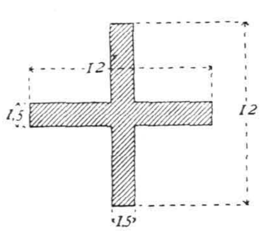
6) I-förmiger Walzbalken-Querfchnitt: $\frac{F}{f} = 1 + 20{,}4\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2.$

Diefe aus der empirifchen Formel 147. abgeleiteten, eben angegebenen Formeln ergeben naturgemäfs Refultate, welche mit den auf frühere Weife gefundenen nicht genau übereinftimmen; denn die Formel 147. ift, wie oben gezeigt, nur für die Grenzwerthe von l, d. h. für $l = 0$ und $l = \infty$, richtig, ftimmt aber für die Mittelwerthe nicht genau. Es dürfte fich defshalb empfehlen, die hier angegebenen Formeln nur für eine vorläufige Querfchnittsbeftimmung zu benutzen und nachher auf Grund der genaueren Formeln eine Rectification vorzunehmen.

354. Beifpiele. Die Anwendung obiger Formeln foll an einigen Beifpielen gezeigt werden.

1) Es fei für einen gufseifernen Stab mit beweglichen Enden und kreuzförmigem Querfchnitt (Fig. 149) $P = 4800$ kg, $l = 200$ cm. Alsdann ift $f = \frac{4800}{500} = 9{,}6$ qcm und bei vorläufig, wie in Fig. 149, angenommenem Querfchnitt $\frac{l}{h} = \frac{200}{12} = 16{,}7$. Hiernach wird $\frac{F}{f} = 1 + 24 \cdot 0{,}0004 \cdot 16{,}7^2 = 3{,}68$ und $F = 9{,}6 \cdot 3{,}68 = 35{,}33$ qcm. Der gewählte Querfchnitt hat $1{,}5 \cdot 2 \cdot 12 - 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 33{,}75$ qcm, womit man fich wohl begnügen kann.

Fig. 149.



2) Es fei $P = 3300$ kg, $l = 100$ cm; der Stab werde durch ein einfaches gleichfchenkeliges Winkeleifen gebildet; der Fall 4 kann angenommen werden. Zunächft ift $f = \frac{3300}{700} = \backsim 4{,}7$ qcm. Gewählt werde ein Winkeleifen von $5{,}5 \times 5{,}5 \times 0{,}8$ cm; alsdann ift $\frac{l}{h} = \frac{100}{5{,}5} = 18$, ferner

$$\frac{F}{f} = 1 + 24 \cdot 0{,}00009 \cdot 18^2 = 1{,}7 \quad \text{und} \quad F = 1{,}7 \cdot 4{,}7 = 7{,}99 \text{ qcm}.$$

Das gewählte Winkeleifen hat eine Querfchnittsfläche von $8{,}16$ qcm, ift alfo genügend.

3) In einem Holzftabe mit quadratifchem Querfchnitt und nicht beweglichen Enden, bei welchem Fall 4 vorausgefetzt werden kann, herrfcht ein Druck $P = 9500$ kg; wenn ferner $l = 300$ cm angenommen wird, ift $f = \frac{9500}{65} = 146$ qcm. Wird vorläufig die Querfchnittsfeite mit 18 cm gewählt, fo ift $\frac{l}{h} = \frac{300}{18} = 16{,}7$; es wird ferner $\frac{F}{f} = 1 + 12\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2 = 1 + 12 \cdot 0{,}00026 \cdot 279 = 1{,}87$ und $F = 1{,}87 \cdot 146 = 273$ qcm. Der angenommene Querfchnitt mifft $18 \cdot 18 = 326$ qcm, ift alfo zu grofs.

Wird $h = 17$ cm gewählt, fo wird $\frac{l}{h} = \frac{300}{17} = 18$, weiters $\frac{F}{f} = 1 + 12 \cdot 0{,}00026 \cdot 324 = 2{,}01$ und $F = 2{,}01 \cdot 146 = 293$ qcm. Der nunmehr gewählte Querfchnitt hat eine Fläche von $17 \cdot 17 = 289$ cm, ftimmt alfo gut überein.

Nach der genaueren Berechnung auf S. 309 (unter 4) ergab fich ein quadratifcher Querfchnitt von nur $14{,}5$ qcm Seitenlänge fchon als genügend.

2. Kapitel.

Träger.

Wie bereits im Eingange zum vorliegenden Abſchnitte geſagt wurde, verſteht man unter Trägern ſolche Bauconſtructionen, bei denen die Belaſtungen ausſchlieſslich oder vorwiegend normal zur Richtung der Längsaxe wirken. Die Längsaxe kann ſowohl eine gerade, wie eine gebrochene Linie, bezw. eine Curve ſein. Demnach rechnen wir zu den Trägern im weiteren Sinne auch die Dachſtühle, die Sprengwerke u. A., bei denen allerdings die Längsaxe nicht ſo deutlich vor die Augen tritt, wie etwa bei den gewöhnlichen Balken, ferner auch die Gewölbe, bei denen die Längsaxe eine Curve iſt. 355. Allgemeines.

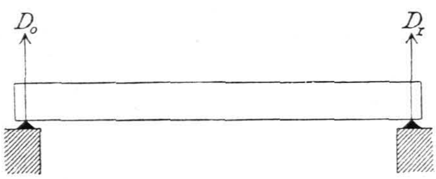
Um die obige Definition der Träger auch für dieſe Conſtructionen unbedingt richtig zu ſtellen, könnte man ſtatt der Längsaxe die Verbindungslinie der Auflagerpunkte einführen und demnach die Träger folgender Maſsen erklären: Träger ſind Bauconſtructionen, bei denen die Belaſtungen ausſchlieſslich oder vorwiegend normal zur Verbindungslinie der Auflager, d. h. der feſten Stützpunkte der Conſtruction, wirken. Im vorliegenden Kapitel ſollen jedoch nur die Träger im engeren Sinne, welche man gewöhnlich als Balken bezeichnet, behandelt werden, während die Dachſtühle und die Gewölbe in den beiden nächſten Abſchnitten beſprochen werden. Von den Sprengwerken werden wir bei den Dachſtühlen eine Specialform kennen lernen.

Die auf die Bauconſtructionen wirkenden äuſseren Kräfte ſind nach Art. 252, S. 231: 1) die Belaſtungen, d. h. die Eigengewichte und die Nutzlaſten, und 2) die Reactionen der Auflager, d. h. diejenigen Kräfte, welche in den Auflagerpunkten auf die Conſtructionen übertragen werden. 356. Aeuſsere Kräfte.

Die Träger haben ſtets zwei oder mehrere Stützpunkte, die ſog. Auflagerpunkte; ſelbſt bei den Trägern, welche ſcheinbar nur einen Stützpunkt haben, bei den ſog. Conſole-Trägern, iſt Gleichgewicht ohne einen zweiten Stützpunkt nicht möglich, und es exiſtirt in der That noch ein ſolcher.

Die Träger werden nach verſchiedenen Geſichtspunkten eingetheilt. Nach der Art der Unterſtützung unterſcheidet man: 357. Claſſification.

Fig. 150.



1) Balkenträger, d. h. Träger, auf welche bei verticalen Belaſtungen nur verticale Auflager-Reactionen wirken. Fig. 150 zeigt einen Balkenträger; D_0 und D_1 ſind die Auflager-Reactionen.

2) Sprengwerks- und Hängewerksträger, d. h. Träger, welche bei verticalen Belaſtungen ſchiefe Auflager-Reactionen erleiden; dieſe ſchiefen Reactionen ſetzen ſich aus einer horizontalen und einer verticalen Componente zuſammen.

Wirkt die horizontale Componente auf den Träger als Druck, ſo hat man den Sprengwerksträger (Fig. 151); falls die Trägeraxe eine Curve iſt, den Bogenträger. Wirkt die horizontale Componente auf den Träger als Zug, ſo hat man den Hängewerksträger (Fig. 152).

Fig. 151.

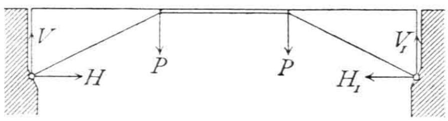
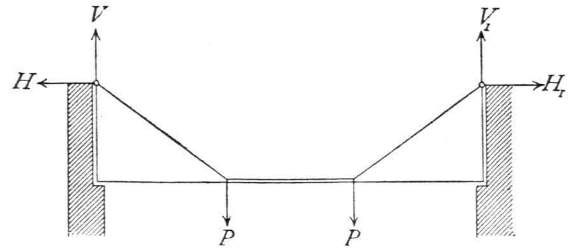


Fig. 152.



Für den Hochbau ſind die Balkenträger weitaus die wichtigſten; die Sprengwerks- und Hängewerksträger werden im Hochbau nicht gern angewendet, weil die Mauern, welche die Stützpunkte der Träger bilden, bei dieſen Trägerarten Horizontalkräfte zu erleiden haben, wodurch eine groſse Mauerſtärke bedingt wird.

Bei den Balkenträgern iſt die Längsaxe meiſtens eine Gerade oder weicht von der Geraden nicht ſehr ab; man nennt deſshalb die Balkenträger auch wohl gerade Träger.

Man unterſcheidet ferner ſtatiſch beſtimmte Träger und ſtatiſch unbeſtimmte Träger.

Unter ſtatiſch beſtimmten Trägern verſtehen wir ſolche, bei denen zur Ermittelung der Auflager-Reactionen die Geſetze der Statik feſter Körper hinreichen; bei den ſtatiſch unbeſtimmten Trägern genügen zur Ermittelung der Auflager-Reactionen dieſe Geſetze nicht.

Zur Ermittelung der Auflager-Reactionen bietet die Statik feſter Körper, wenn alle Kräfte in einer Ebene wirkend angenommen werden können, drei Gleichungen (vergl. Art. 253, S. 232); falls alſo in den Reactionen nur drei Unbekannte enthalten ſind, ſo genügen dieſe drei Gleichungen zur Ermittelung der Unbekannten, d. h. der Fall iſt ſtatiſch beſtimmt. Enthalten dagegen die Auflager-Reactionen mehr als drei Unbekannte, ſo genügen die drei Gleichungen zu deren Ermittelung nicht mehr; der Fall iſt alsdann ſtatiſch unbeſtimmt. Die fehlenden Gleichungen liefert die Elaſticitätslehre.

Hierbei können zwei Hauptfälle vorkommen:

1) Alle drei Gleichgewichtsbedingungen ſind anwendbar, d. h. die Auflager-Reactionen enthalten ſowohl horizontale, wie verticale Seitenkräfte. Dieſer Fall tritt bei den Sprengwerksträgern, Bogenträgern etc. ein.

2) Nur zwei Gleichgewichtsbedingungen ſind anwendbar. Dieſer Fall tritt ein, wenn die äuſseren Kräfte gar keine horizontalen Componenten haben, alſo z. B. wenn bei einem horizontalen Balken nur verticale Belaſtungen und verticale Auflager-Reactionen wirken. Alsdann bleiben von den in Art. 256, S. 234 angegebenen Gleichgewichtsbedingungen nur die folgenden:

1) die algebraiſche Summe der Verticalkräfte muſs gleich Null ſein;

2) die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente aller äuſseren Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene als Drehpunkt, muſs gleich Null ſein.

Der einfachſte Fall iſt hier der des Balkens auf zwei Stützen. Wir haben bei dieſem zwei Gleichungen und zwei Unbekannte (D_0 und D_1 in Fig. 150); der

Fall ift alfo ftatifch beftimmt. Sind dagegen drei Stützpunkte vorhanden, fo haben wir drei Unbekannte (D_0, D_1 und D_2), aber nur zwei Gleichungen, alfo einen ftatifch unbeftimmten Fall.

Man nennt die Träger, welche mehr als zwei Stützpunkte haben, continuirliche Träger. Diefelben find demnach ftatifch unbeftimmte Träger.

Man hat von den ftatifch beftimmten, bezw. ftatifch unbeftimmten Trägern wohl zu unterfcheiden die ftatifch beftimmten, bezw. unbeftimmten Syfteme. Während es fich bei den erfteren um die Ermittelung der äufseren Kräfte handelt, ift bei den ftatifch beftimmten, bezw. unbeftimmten Syftemen die Frage, ob zur Ermittelung der inneren Kräfte die Gefetze der Statik fefter Körper ausreichen oder nicht.

a) Aeufsere Kräfte der Balkenträger.

358. Momente und Transverfalkräfte.

Die Querfchnitte der Balken find fo zu beftimmen, dafs die zuläffigen Beanfpruchungen auch unter ungünftigften Bedingungen in keinem Theile der Querfchnittsflächen je überfchritten werden. Wie im vorhergehenden Abfchnitt gezeigt wurde, find aber für die in den einzelnen Fafern entftehenden Beanfpruchungen oder Spannungen die äufseren Kräfte mafsgebend, insbefondere zwei von den äufseren Kräften abhängige Gröfsen: die Biegungsmomente, auch kurz Momente genannt, und die Transverfalkräfte, bei nur verticalen Kräften wohl auch Verticalkräfte genannt (vergl. Art. 295, S. 257). Für jeden Querfchnitt ergiebt fich bei einer gegebenen Belaftung ein ganz beftimmtes Moment und eine ganz beftimmte Transverfalkraft. Wir haben bei den vertical belafteten Balkenträgern nur mit verticalen Kräften zu thun und werden demnach zunächft und, falls das Gegentheil nicht befonders bemerkt wird, ftets folche vorausfetzen.

Ferner werden wir die Transverfalkräfte als pofitiv einführen, wenn fie auf den Trägertheil links von dem betrachteten Querfchnitt nach oben, bezw. auf den Trägertheil rechts von dem betrachteten Querfchnitt nach unten wirken; als negativ, wenn fie auf den Theil links nach unten, bezw. auf den Theil rechts nach oben wirken. Die Momente nennen wir pofitiv, wenn fie auf den Theil links vom Querfchnitt nach rechts drehend, alfo in der Richtung des Uhrzeigers, bezw. auf den Theil rechts vom Querfchnitt nach links drehend wirken, d. h. den Balken fo zu drehen ftreben, dafs er feine convexe Seite nach unten kehrt. Die entgegengefetzte Drehrichtung werden wir als negativ einführen, d. h. diejenige Drehrichtung, welche den Balken in eine nach oben convexe Lage dreht.

359. Belaftungen.

Die Belaftungen find entweder nach einem beftimmten Gefetze continuirlich über den Träger vertheilt — im Hochbau meiftens gleichmäfsig über die Horizontalprojection der Trägeraxe, oder fie greifen in einzelnen Punkten als concentrirte Laften an. Zu den gleichmäfsig über die Horizontalprojection vertheilten Belaftungen rechnen wir die Eigengewichte der Träger, welche Annahme genügend genau ift, auch wenn die Trägerquerfchnitte nicht conftant find.

Für die gewöhnlichen Decken-Conftructionen können die in nachfolgenden Tabellen angegebenen Eigengewichte angenommen werden[164]). Die Eigengewichte und mobilen Belaftungen der Dächer folgen im nächften Kapitel.

---

164) Nach: Heinzerling, F. Die angreifenden und widerftehenden Kräfte der Brücken- und Hochbau-Conftructionen. 2. Aufl. Berlin 1876. S. 58 u. ff.
Deutfcher Baukalender 1882.

Tabelle I. Eigengewichte von Decken-Conſtructionen (Zwiſchendecken).

Bezeichnung der Conſtruction	Entfernung der Balken von Mitte zu Mitte 0,90 m — Balkenſtärke in Centim. 20 × 25	0,90 m 25 × 30	1,20 m 20 × 25	1,20 m 25 × 30
Balken mit Fussbodendielen	61	81	56	66
Einfache Caſſetten-Decke ohne Stuck	122	142	112	132
Einfache Caſſetten-Decke mit halbem Windelboden und Stuck	279	330	305	376
Geſtreckter Windelboden mit Lehm	203	228	198	213
Halber Windelboden	254	305	279	345
Ganzer Windelboden	355	406	380	447
	Kilogr. pro 1 qm Deckenfläche.			

Tabelle II. Mobile Belaſtungen von Decken-Conſtructionen (Zwiſchendecken).

Belaſtung	
in Wohnräumen	152
» Tanzſälen	253
» Heuböden	406
» Fruchtböden	457
» Waarenſpeichern	760
durch Menſchengedränge:	
genügende Annahme	400
gröſste Annahme	560
	Kilogr. pro 1 qm Deckenfläche.

Das Gewicht der Windelböden erhöht ſich für eine Zunahme der Balkenhöhe von je 2,5 cm um ca. 25 kg pro 1 qm Deckenfläche.

Tabelle III.
Gewichte der Decken-Conſtructionen einſchl. der mobilen Belaſtung.

Art der Decke	Gewicht	Art der Decke	Gewicht
Balkenlage mit einfacher Dielung ohne Stakung	280	Gewölbte Decken zwiſchen eiſernen Trägern, $^1/_2$ Stein ſtark, mit Hintermauerung, Fuſsbodenlage und Dielung	750
desgl. geſtakter Windelboden mit Lehm-Eſtrich	430	Dieſelbe Decke ohne Fuſsboden	700
desgl. ausgeſtakt und verſchalt in Wohnhäuſern	500	dieſelbe, $^1/_4$ Stein ſtark, mit Fuſsboden	525
		dieſelbe, ohne Fuſsboden	485
desgl. bei Tanzſälen	710	Decke in Salzſpeichern, wenn 3 Tonnenreihen über einander liegen	800
desgl. in Werkſtätten	760	Balkenlage in Kornſpeichern	850
desgl. mit ganzem Windelboden	580	Balkenlage in Wollſpeichern	750
Dachbalkenlage in Wohngebäuden	735		
	Kilogr. pro 1 qm Deckenfläche.		Kilogr. pro 1 qm Deckenfläche.

In den folgenden Artikeln ſoll für die wichtigſten Balkenträger und für verſchiedene Belaſtungsarten die Ermittelung der Auflager-Reactionen, der Transverſalkräfte und Momente auf dem Wege der Rechnung und eventuell auch auf dem der Conſtruction gezeigt werden.

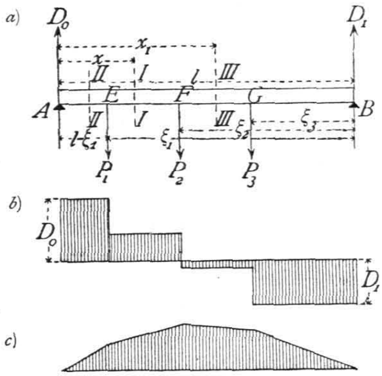
1) Balkenträger auf zwei Stützen.

Bei den Balkenträgern auf zwei Stützen können für die im Hochbauweſen vorkommenden Belaſtungsarten hauptſächlich die nachſtehenden vier Fälle unterſchieden werden.

Erfter Fall: Der Träger wird durch beliebige Einzellaften belaftet. 360. Belaftung durch Einzellaften.

Die Stützweite des Balkenträgers (Fig. 153 *a*) fei (von Auflagermitte zu Auflagermitte gerechnet) l; der Träger werde durch die neben ftehend näher bezeichneten Einzellaften P_1, P_2, P_3 belaftet. Es find die Transverfalkräfte und Momente für fämmtliche Querfchnitte des Balkens zu ermitteln.

Fig. 153.



α) Berechnung. Zunächft find die nicht gegebenen äufseren Kräfte, die Auflager-Reactionen D_0 und D_1 zu beftimmen. Da Gleichgewicht ftattfindet, fo ift die algebraifche Summe der ftatifchen Momente aller Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null. Um D_0 zu ermitteln, wählt man zweckmäfsig einen Punkt auf der Richtungslinie von D_1 als Drehpunkt, damit die zweite Unbekannte D_1 das ftatifche Moment Null habe, alfo nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkomme. Alsdann ift, wenn B als Drehpunkt für die Gleichung der ftatifchen Momente gewählt wird:

$$O = D_0 \, l - P_1 \, \xi_1 - P_2 \, \xi_2 - P_3 \, \xi_3,$$

$$D_0 = \frac{P_1 \, \xi_1}{l} + \frac{P_2 \, \xi_2}{l} + \frac{P_3 \, \xi_3}{l} = \sum_0^l \left(\frac{P \, \xi}{l} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 152.$$

Wählt man in gleicher Weife ein zweites Mal A als Drehpunkt, fo ergiebt fich

$$D_1 = \frac{P_1 \, (l - \xi_1)}{l} + \frac{P_2 \, (l - \xi_2)}{l} + \frac{P_3 \, (l - \xi_3)}{l} = \sum_0^l \left[\frac{P \, (l - \xi)}{l} \right] \quad . \quad . \quad 153.$$

Der Beitrag, welchen jede Einzellaft zur Gefammt-Auflager-Reaction leiftet, ift, wie man aus den Gleichungen 152. und 153. erfieht, ganz unabhängig von der Gröfse und Art der übrigen Belaftungen; die Auflager-Reactionen find die bezw. Summen der durch die einzelnen Laften erzeugten Partial-Auflager-Reactionen.

Nunmehr laffen fich die Transverfalkräfte ermitteln.

Für einen beliebigen Querfchnitt II, im Abftande x vom linken Auflager A, ift die Transverfalkraft, als Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden äufseren Kräfte,

$$Q_x = D_0 - P_1 = \sum_0^l \left(\frac{P \, \xi}{l} \right) - P_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 154.$$

In diefem Ausdrucke kommt die Abfciffe x des Querfchnittes gar nicht vor; die Transverfalkraft ift alfo, fo lange der angegebene Ausdruck überhaupt gilt, ganz unabhängig von x, d. h. conftant. Der Ausdruck gilt aber nur für die Querfchnitte zwifchen E und F; denn für einen Querfchnitt links von E, etwa für $II\,II$, ift

$$Q_{II} = D_0 = \sum_0^l \left(\frac{P \, \xi}{l} \right);$$

für einen folchen rechts von F, etwa für $III\,III$, ift

$$Q_{III} = D_0 - P_1 - P_2 = \sum_0^l \left(\frac{P \, \xi}{l} \right) - (P_1 + P_2) = \sum_0^l \left(\frac{P \, \xi}{l} \right) - \sum_0^{x_1} (P).$$

Es folgt daraus: Falls eine Belaftung nur durch Einzellaften ftattfindet, ift die Transverfalkraft für alle Querfchnitte zwifchen je zwei Laftpunkten, fo wie zwifchen einem Auflagerpunkt und einem Laftpunkt conftant; eine Aenderung der Transverfalkraft findet nur in den Laftpunkten ftatt.

Die Transverfalkraft hat denfelben Werth, wenn der Trägertheil rechts von dem betreffenden Querfchnitt betrachtet wird. Für den Querfchnitt II ergiebt fie fich für diefen Fall zu

$$Q_x^1 = - D_1 + P_2 + P_3 = - \frac{P_1 (l - \xi_1)}{l} - \frac{P_2 (l - \xi_2)}{l} - \frac{P_3 (l - \xi_3)}{l} + P_2 + P_3,$$

$$Q_x^1 = \frac{P_1 \xi_1}{l} + \frac{P_2 \xi_2}{l} + \frac{P_3 \xi_3}{l} - P_1 = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l}\right) - P_1,$$

d. h. genau wie in Gleichung 154.

Diefes Refultat ift felbftverftändlich, weil die auf beide Trägertheile wirkenden Refultanten einander genau gleich fein müffen, damit Gleichgewicht ftattfinde; der entgegengefetzte Sinn beider Transverfalkräfte ift durch das Vorzeichen berückfichtigt, indem die nach oben auf den Theil rechts wirkenden Kräfte negativ eingeführt find.

Das Gefetz der Aenderung der Transverfalkräfte wird fehr anfchaulich, wenn man in jedem Querfchnitte die dafelbft ftattfindende Transverfalkraft als Ordinate nach beliebigem, aber für alle Querfchnitte gleichem Mafsftabe aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Es ergiebt fich die in Fig. 153 *b* gezeichnete Linie, in welcher die pofitiven Werthe von der Abfciffe nach oben, die negativen Werthe nach unten getragen find.

Schliefslich erübrigt noch die Beftimmung der Momente.

Für den Querfchnitt II ift:

$$M_I = D_0 x - P_1 (x - l + \xi_1) = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l}\right) x - P_1 (x - l + \xi_1) \quad . \quad . \quad 155.$$

Für den Querfchnitt $III\,III$ ift

$$M_{III} = D_0 x_1 - P_1 (x_1 - l + \xi_1) - P_2 (x_1 - l + \xi_2) = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l}\right) x_1 - \sum_0^{x_1} P (x_1 - l + \xi) \quad 156.$$

Innerhalb je zweier Laftpunkte, fo wie zwifchen einem Auflagerpunkt und einem Laftpunkt ändert fich demnach das Moment nach dem Gefetze einer geraden Linie; denn für verfchiedene Werthe von x_1, bezw. x bleiben alle in den Gleichungen 155. und 156. vorkommenden Ausdrücke mit Ausnahme von x_1 und x conftant; diefe einzigen Variabelen kommen aber nur in der erften Potenz vor. Trägt man alfo auch hier in den verfchiedenen Querfchnitten die Werthe von M als Ordinaten auf, fo erhält man als Verbindungslinien der Endpunkte gerade Linien; in jedem Laftpunkt ändert fich der Ausdruck für M, alfo auch die Gerade. In Fig. 153 *c* ift die Aenderung der Momente graphifch dargeftellt.

Da eine Gerade ihre gröfste Ordinate nur am Anfangspunkte oder Endpunkte haben kann, letztere aber mit den Laftpunkten zufammenfallen, fo folgt, dafs die gröfsten Momentenwerthe an den Laftpunkten ftattfinden.

Beifpiel. Ein fchmiedeeiferner Unterzug (Fig. 154) von 8 m Stützweite trägt 7 Balken, deren Abftand von Mitte zu Mitte je 1 m betrage. Jeder Balken belafte den Unterzug mit einem Gewicht gleich 3000 kg. Es find die Auflager-Reactionen, Transverfalkräfte und Momente zu ermitteln. Nach Gleichung 152. ift

$$D_0 = \sum_0^l \left(\frac{3000 \,.\, \xi}{8}\right) = \frac{3000}{8} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 10\,500 \text{ kg},$$

eben fo nach Gleichung 153.

$$D_1 = \frac{3000}{8} \, 28 = 10\,500 \text{ kg}.$$

In Fällen, wie der vorliegende, wo die Belaftungen fymmetrifch zur Mitte des Balkens liegen und die Abftände derfelben gleich find, fafft man bequemer alle Laften zu einer Refultirenden, hier ihrer

Summe zuſammen, die in der Balkenmitte angreift. Es iſt alsdann $R = 7 \,.\, 3000 = 21\,000^{\mathrm{kg}}$ und

$$D_0 = \frac{21\,000}{l} \cdot \frac{l}{2} = 10\,500^{\mathrm{kg}} = D_1.$$

Die Transverſalkräfte ſind für die verſchiedenen Querſchnitte

zwiſchen A und $I = 10\,500^{\mathrm{kg}}$,
» I » $II = 10\,500 - 3000 = 7500^{\mathrm{kg}}$,
» II » $III = 10\,500 - 3000 - 3000 = 4500^{\mathrm{kg}}$,
» III » $IV = 10\,500 - 3 \,.\, 3000 = 1500^{\mathrm{kg}}$,
» IV » $V = 10\,500 - 4 \,.\, 3000 = -\ 1500^{\mathrm{kg}}$,
» V » $VI = 10\,500 - 5 \,.\, 3000 = -\ 4500^{\mathrm{kg}}$,
» VI » $VII = 10\,500 - 6 \,.\, 3000 = -\ 7500^{\mathrm{kg}}$,
» VII » $B = 10\,500 - 7 \,.\, 3000 = -\ 10\,500^{\mathrm{kg}}$.

Im Laſtpunkte IV (in der Trägermitte) geht die Transverſalkraft von den poſitiven zu den negativen Werthen über.

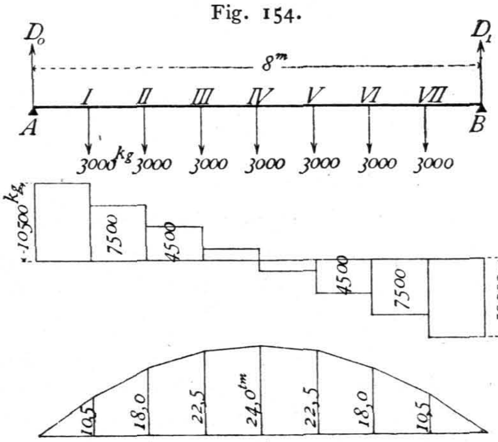
Die Momente in den Laſtpunkten ſind:

$$M_I = 10\,500 \,.\, 1 = 10\,500^{\mathrm{kgm}} = 1\,050\,000^{\mathrm{kgcm}},$$
$$M_{II} = 10\,500 \,.\, 2 - 3000 \,.\, 1 = 18\,000^{\mathrm{kgm}} = 1\,800\,000^{\mathrm{kgcm}},$$
$$M_{III} = 10\,500 \,.\, 3 - 3000 \,.\, 1 - 3000 \,.\, 2 = 22\,500^{\mathrm{kgm}} = 2\,250\,000^{\mathrm{kgcm}},$$
$$M_{IV} = 10\,500 \,.\, 4 - 3000\,(1 + 2 + 3) = 24\,000^{\mathrm{kgm}} = 2\,400\,000^{\mathrm{kgcm}},$$
$$M_V = 10\,500 \,.\, 5 - 3000\,(1 + 2 + 3 + 4) = 22\,500^{\mathrm{kgm}} = 2\,250\,000^{\mathrm{kgcm}} = M_{III},$$
$$M_{VI} = M_{II}, \quad M_{VII} = M_I, \quad M_A = M_B = 0.$$

Hiernach ſind die Momente und Transverſalkräfte in Fig. 154 *c* und 154 *b* aufgetragen.

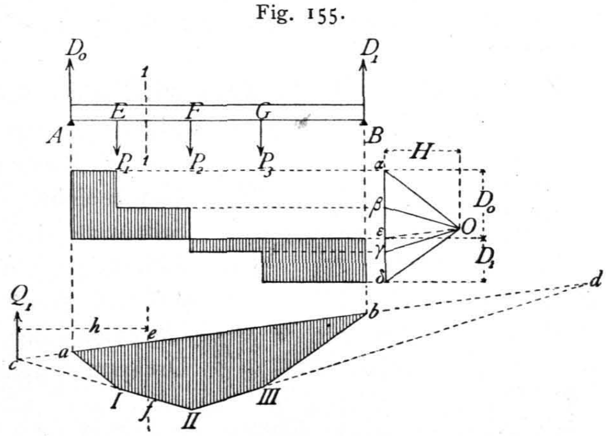
β) Graphiſche Ermittelung. Um die Auflager-Reactionen zu ermitteln, conſtruire man für die gegebenen Kräfte das Kraft- und Seilpolygon.

Fig. 154.



Das Kraftpolygon wird hier, da alle Kräfte gleiche Richtung haben, eine Gerade ſein. Es ſei (Fig. 155) $P_1 = \alpha\beta$, $P_2 = \beta\gamma$, $P_3 = \gamma\delta$; alsdann wird D_1 an δ zu tragen ſein. Die Gröſse von D_0 und D_1 iſt vorläufig unbekannt; jedoch wiſſen wir, daſs das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte ſich ſchlieſst; der Endpunkt von D_0 fällt alſo mit α zuſammen, und es iſt $\delta\alpha = D_0 + D_1$. Wo der Endpunkt von D_1, welcher Punkt auch der Anfangspunkt von D_0 iſt, auf der Linie $\delta\alpha$ liegt, iſt noch nicht bekannt; die Ermittelung dieſes Punktes geſchieht mit Hilfe des Seilpolygons. Letzteres muſs ſich gleichfalls ſchlieſsen, weil die Kräfte im Gleichgewicht ſind. Man conſtruire alſo für einen beliebigen Pol O das Seilpolygon $a\,I\,II\,III\,b$; die letzte Seite des Seilpolygons iſt demnach die Verbindungslinie der beiden Punkte a und b, d. h. desjenigen Punktes, in dem ſich die der erſten Laſt vorhergehende Seilpolygonſeite mit der linken Auflager-Verticalen ſchneidet, und desjenigen Punktes, in welchem ſich die auf die letzte Laſt folgende Seilpolygonſeite mit der rechten Auflager-Verticalen trifft. Man nennt dieſe Linie die Schluſslinie des Seilpolygons. Im Punkte a halten ſich nun folgende Kräfte im Gleichgewicht: die Auflager-Reaction D_0, die Spannung in der Seilpolygonſeite $a\,I$

Fig. 155.



und diejenige in der Seilpolygonſeite oder Schluſslinie $a\,b$. Von allen drei Kräften ſind die Richtungen gegeben, von einer — der Seilſpannung in $a\,I$ — auch die Gröſse; dieſelbe iſt gleich $O\,\alpha$. Man kann alſo für dieſe drei Kräfte das Kraftpolygon, hier das Kraftdreieck, conſtruiren, indem man durch den einen Endpunkt der bekannten Kraft $O\,\alpha$, durch α eine Parallele zur Richtung von D_0, durch den anderen Endpunkt, durch O eine Parallele zur Schluſslinie $a\,b$ zieht. Der Schnittpunkt ε beider Linien ergiebt in $\varepsilon\,\alpha$ die Gröſse von D_0, woraus folgt, daſs $\delta\,\varepsilon = D_1$ iſt. Es ergiebt ſich hieraus die Regel:

Die Auflager-Reactionen werden erhalten, indem man für einen beliebigen Pol das Seilpolygon conſtruirt, die Schluſslinie und parallel zu dieſer eine Linie durch den Pol zieht. Letztere theilt die Kraftlinie in zwei Theile, welche nach Gröſse und Richtung die Auflager-Reactionen darſtellen.

Die Transverſalkräfte laſſen ſich auf graphiſchem Wege in folgender Weiſe ermitteln.

Für alle Querſchnitte von A bis E iſt die Transverſalkraft gleich D_0, d. h. gleich $\varepsilon\,\alpha$ (Fig. 155). Zieht man alſo durch ε und α je eine Horizontale, ſo giebt deren Abſtand die Gröſse der Transverſalkraft zwiſchen A und E an. Zwiſchen E und F iſt die Transverſalkraft gleich $D_0 - P_1 = \varepsilon\,\alpha - \alpha\,\beta = \varepsilon\,\beta$; man ziehe alſo durch β eine horizontale Linie; alsdann giebt deren Abſtand von der durch ε gezogenen Geraden an jeder Stelle zwiſchen E und F die Gröſse der Transverſalkraft. Eben ſo iſt zwiſchen F und G die Strecke $\varepsilon\,\gamma$, zwiſchen G und B die Strecke $\varepsilon\,\delta$ die Transverſalkraft.

Die Transverſalkraft als Mittelkraft aller an der einen Seite des Querſchnittes wirkenden Kräfte geht nach Art. 267, S. 239 durch den Schnittpunkt derjenigen Seilpolygonſeiten, welche die beiden äuſserſten Kräfte begrenzen. Für einen Querſchnitt zwiſchen E und F ſind die beiden bezw. Seilpolygonſeiten die Linien $I\,II$ und $a\,b$; die Transverſalkraft geht alſo durch c. Für jeden Querſchnitt zwiſchen II und III geht die Transverſalkraft durch d etc.

Die graphiſche Beſtimmung der Momente geſchieht in nachſtehender Weiſe.

Für einen beliebigen Querſchnitt $I\,I$ (Fig. 155) iſt das Moment gleich dem Moment der Mittelkraft, d. h. hier der Transverſalkraft. Es iſt demnach $M_1 = Q_1\,h$. Nun iſt $\Delta\,c\,e\,f \backsim \Delta\,O\,\varepsilon\,\beta$, mithin

$\frac{\overline{ef}}{h} = \frac{\overline{\varepsilon\beta}}{H}$, und, da $\overline{\varepsilon\beta} = Q_1$ iſt, $\overline{ef} = \frac{Q_1\,h}{H} = \frac{M_1}{H}$, alſo $M_1 = H\,.\,\overline{ef}$.

In vorſtehendem Ausdruck für M iſt H, der horizontale Abſtand des Poles von der Kraftlinie oder die Poldiſtanz, für alle Querſchnitte conſtant; die Gröſse des Momentes iſt alſo mit $\overline{ef}$, d. h. der verticalen Höhe des Seilpolygons variabel. Daraus folgt:

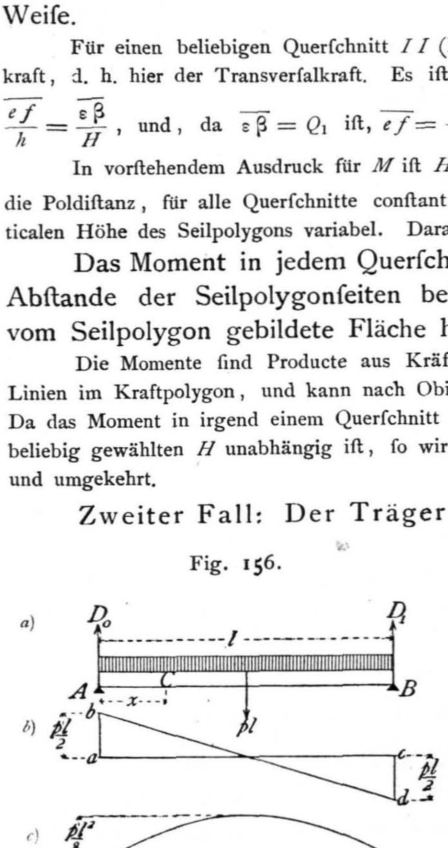
Das Moment in jedem Querſchnitte iſt gleich dem Producte aus dem verticalen Abſtande der Seilpolygonſeiten bei dieſem Querſchnitte in die Poldiſtanz. Die vom Seilpolygon gebildete Fläche heiſst die Momentenfläche.

Die Momente ſind Producte aus Kräften und Längen; H iſt eine Kraft, wie alle Strahlen und Linien im Kraftpolygon, und kann nach Obigem beliebig angenommen werden, etwa mit 10^t, 20^t etc. Da das Moment in irgend einem Querſchnitt einen ganz beſtimmten Werth hat, der natürlich von einem beliebig gewählten H unabhängig iſt, ſo wird die Höhe des Seilpolygons deſto gröſser, je kleiner H iſt und umgekehrt.

361.
Gleichförmig vertheilte Belaſtung.

Zweiter Fall: Der Träger wird über ſeine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laſt belaſtet.

Fig. 156.



α) Berechnung. Die Belaſtung pro Längeneinheit des Trägers (Fig. 156) ſei p, die Stützweite deſſelben ſei l; alsdann iſt die Reſultirende gleich der Geſammtlaſt, alſo gleich $p\,l$ und greift in der Trägermitte an. Die Gleichung der ſtatiſchen Momente für B als Drehpunkt heiſst demnach

$$D_0\,l - p\,l\,\frac{l}{2} = 0,$$

und es wird

$$D_0 = \frac{p\,l}{2}; \text{ eben fo } D_1 = \frac{p\,l}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 157.$$

Die Transverfalkraft beträgt für einen beliebigen Querfchnitt C im Abftande x von A

$$Q_x = D_0 - p\,x = \frac{p\,l}{2} - p\,x = \frac{p}{2}(l - 2\,x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 158.$$

Die graphifche Darftellung der Veränderung der Transverfalkraft ergiebt die Linie der Gleichung 158., d. h. eine Gerade. Für $x = 0$ ift $Q_0 = \frac{p\,l}{2}$; für $x = l$ ift $Q_l = -\frac{p\,l}{2}$. Q_x wird Null für $l - 2\,x = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$. Die Ordinaten der Linie $b\,d$ (Fig. 156 b) ergeben die Transverfalkräfte.

Das Moment für den Punkt C ift

$$M_x = D_0\,x - p\,x\,\frac{x}{2} = \frac{p\,l}{2}\,x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{p}{2}(l\,x - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad 159.$$

Die graphifche Darftellung der Momente für die verfchiedenen Querfchnitte ergiebt die Curve der Gleichung 159., d. h. eine Parabel. Für $x = 0$ ift $M_0 = 0$; für $x = l$ ift $M_l = 0$. M_x wird ein Maximum für $\frac{d\,M_x}{d\,x} = \frac{p}{2}(l - 2\,x) = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$; demnach

$$M_{max} = \frac{p}{2}\left[l\,\frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = \frac{p\,l^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 159_a.$$

Hiernach kann die Parabel leicht conftruirt werden (Fig. 156 c).

Beifpiele. 1) Ein Corridor von 4 m Lichtweite ift mit einer Decke aus Kappengewölben zwifchen eifernen I-Trägern zu überdecken; die Spannweite der Kappen fei 2,2 m; die Träger follen berechnet werden.

Die Stützweite der Träger, d. h. die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte, kann zu 4,3 m, d. i. zu 430 cm angenommen werden; alsdann ift $l = 430$ cm. Auf das laufende Meter des Trägers kommt eine zu tragende Grundfläche von 2,2 m Breite und 1 m Länge; mithin ift die Laft pro laufendes Meter Träger, bei einer Maximalbelaftung von 750 kg pro 1 qm Grundfläche, gleich $2{,}2 \cdot 750 = 1650$ kg und pro laufendes Centimeter Träger $p = 16{,}5$ kg. Die Auflager-Reactionen find alfo nach Gleichung 157.

$$D_0 = D_1 = \frac{16{,}5 \cdot 430}{2} = 3547 \text{ kg}$$

und das Moment nach Gleichung 159_a.

$$M_{max} = M_{mitte} = \frac{16{,}5 \cdot 430^2}{8} = 381\,356 \text{ kgcm}.$$

Nun ift der Querfchnitt nach Art. 301, S. 263 fo zu beftimmen, dafs $\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{381\,356}{700} = 544{,}8$ ift. Falls ein I-Querfchnitt gewählt wird, ift Nr. 28 der »Deutfchen Normalprofile« (vergl. die Tabelle auf S. 198) zu wählen, da bei demfelben $\frac{\mathfrak{J}}{a} = 547$ ift [165]).

165) Man mufs beim Einfetzen der Zahlenwerthe für p und l vorfichtig fein. Es ift eigentlich felbftverftändlich, dafs, wenn man l in Metern einführt, p die Belaftung für das laufende Meter Träger bedeutet, und wenn l in Centimetern eingeführt wird, p die Belaftung für das laufende Centimeter Träger bedeutet. Giebt man ferner K, die zuläffige Banfpruchung in Kilogramm pro 1 qcm und das Moment M in Kilogramm-Centimetern an, fo find in Gleichung 36.: $\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M}{K}$ die Werthe für $\mathfrak{J}$ und a auf Centimeter bezogen einzufetzen. Dennoch dürfte es nicht überflüffig fein, hier befonders darauf aufmerkfam zu machen, da von Anfängern und Ungeübten oft in diefer Hinficht Fehler gemacht werden. Es empfiehlt fich, ftets alles auf Centimeter und Kilogramm bezogen einzuführen.

2) Es follen die Dimenfionen beftimmt werden, welche einem Deckenbalken aus Kiefernholz bei einer Lichtweite von 6^m zu geben find, wenn die Balkenentfernung von Mitte zu Mitte $0{,}9^m$ und die Gefammtbelaftung der betreffenden Decke (Eigengewicht und mobile Laft) 500^{kg} pro 1^{qm} beträgt.

Das laufende Meter Balken hat eine Grundfläche von $0{,}9^m$ Breite zu tragen, d. h. eine Laft von $0{,}9 \cdot 500 = 450^{kg}$; mithin beträgt die Belaftung pro laufendes Centimeter des Balkens $p = 4{,}5^{kg}$. Die von Auflagermitte zu Auflagermitte zu rechnende Stützweite l nehmen wir zu $6{,}3^m = 630^{cm}$ an. Das gröfste Moment, welches hier, da der Balkenquerfchnitt conftant ift, der Berechnung des ganzen Balkens zu Grunde gelegt werden mufs, findet in der Balkenmitte ftatt, und es ift nach Gleichung 159a.

$$M_{max} = \frac{4{,}5 \cdot 630^2}{8} = 223\,256^{kgcm};$$

mithin nach Art. 303, S. 264

$$\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{223\,256}{60} = 3721.$$

Da nun nach Gleichung 43. $\mathfrak{J} = \frac{b\,h^3}{12}$, ferner $a = \frac{h}{2}$ ift, wird $\frac{b\,h^2}{6} = 3721$, und wenn $b = 25^{cm}$ angenommen wird,

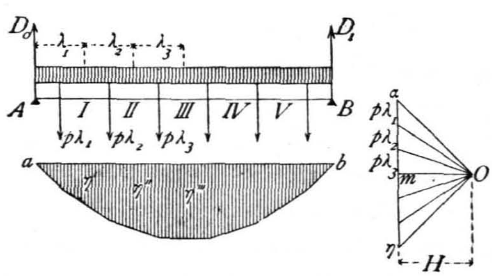
$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 3721}{25}} = 29{,}9^{cm} = \infty\, 30^{cm}.$$

Es genügt fonach ein Querfchnitt von 25×30^{cm}.

β) Graphifche Ermittelung. Im vorliegenden Falle werden die Auflager-Reactionen, Momente und Transverfalkräfte eben fo ermittelt, wie oben für Einzellaften gezeigt worden ift.

Man zerlegt die ganze Belaftung in einzelne Theile $p\lambda_1$, $p\lambda_2$, $p\lambda_3$ . . . (Fig. 157) von den Längen λ_1, λ_2, λ_3 . . . Diefe Einzellaften wirken in den Mitten der Abtheilungen λ. Für diefe Einzellaften wird nun Kraft- und Seilpolygon conftruirt und die Schlufslinie $a\,b$ gezogen; alsdann giebt die durch O zu $a\,b$ gezogene Parallele $O\,m$ die Auflager-Reactionen $D_1 = \eta\,m$ und $D_0 = m\,a$.

Fig. 157.



Das Seilpolygon ift eine gebrochene Linie, welche fich einer Curve defto mehr nähert, je kleiner die einzelnen Abtheilungen gewählt werden. In Wirklichkeit entfpricht der ftetigen Belaftung eine ftetig gekrümmte Linie, eine Curve als Seilpolygon. Die gezeigte Conftruction ergiebt eine Reihe von Punkten diefer Curve. In denjenigen Querfchnitten nämlich, welche einer Abtheilungsgrenze entfprechen, in *I, II, III* . . ., ift das durch die concentrirten Laften erzeugte Moment genau eben fo grofs, wie dasjenige durch die ftetige Belaftung bis zu diefem Querfchnitte, und zwar ift nach Früherem $M_I = H\eta'$, $M_{II} = H\eta''$, $M_{III} = H\eta'''$ . . . Diefe Ordinaten η', η'', η''' . . ., kurz alle Ordinaten, welche den Abtheilungsgrenzen entfprechen, find alfo genau richtig, fo dafs die genaue Curve leicht conftruirt werden kann.

362. Partielle gleichförmig vertheilte Belaftung.

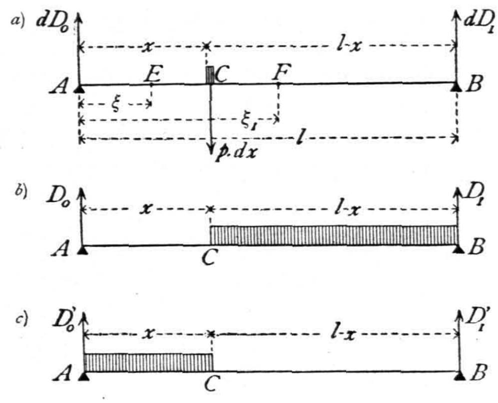
Dritter Fall: Der Träger wird auf einen Theil feiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laft belaftet.

Eine Belaftung $p\,d\,x$ im Abftande x (Fig. 158) vom linken Auflager A erzeugt die Auflager-Reactionen

$$d\,D_0 = p\,d\,x\,\frac{l-x}{l} \quad \text{und} \quad d\,D_1 = p\,d\,x\,\frac{x}{l}.$$

Die Transverfalkraft ift für jeden Querfchnitt E links vom Laftpunkte C $Q = d\,D_0 = p\,d\,x\,\frac{l-x}{l}$, d. h. pofitiv, für jeden Querfchnitt F rechts vom Laftpunkte $Q_1 = d\,D_0 - p\,d\,x = -\frac{p\,x\,d\,x}{l}$, d. h. negativ. Daraus folgt das Geſetz: Jede Belaſtung rechts von einem Querſchnitte erzeugt in demſelben eine poſitive, jede Belaſtung links von einem Querſchnitte erzeugt in demſelben eine negative Transverſalkraft. In irgend einem Querſchnitt, etwa C, wird demnach Q_{max} ſtattfinden, wenn die ganze Abtheilung rechts von C belaſtet, der übrige Trägertheil unbelaſtet iſt (Fig. 158 *b*). Q_{min} wird ſtattfinden, wenn die Abtheilung $A\,C$ links von C belaſtet, die Abtheilung $C\,B$ unbelaſtet iſt (Fig. 158 *c*).

Fig. 158.



Man erhält für die erſtere Belaſtungsart

$$D_0 = Q_{max} = \int_x^l p\, d\, x \left(\frac{l-x}{l}\right) = \frac{p}{2\,l}\,(l-x)^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 160.$$

für die zweite Belaſtungsart

$$Q_{min} = \int_0^x - \frac{p\,x\,d\,x}{l} = -\,\frac{p}{2\,l}\,x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 161.$$

Das Moment für irgend einen Querſchnitt E (Fig. 158) links vom Laſtpunkt C iſt

$$d\,M = \xi\,d\,D_0 = p\,\frac{l-x}{l}\,\xi\,d\,x\,,$$

d. h. poſitiv; für einen Querſchnitt F rechts vom Laſtpunkt C iſt

$$d\,M_1 = \xi_1\,d\,D_0 - p\,d\,x\,(\xi_1 - x) = p\,x\,d\,x\,\frac{l-\xi_1}{l}\,,$$

d. h. ebenfalls poſitiv. Hieraus folgt: Jede Belaſtung erzeugt in allen Querſchnitten poſitive Momente. In jedem Querſchnitt findet demnach das gröſste Moment bei totaler Belaſtung des Trägers mit der gleichförmigen Belaſtung p pro Längeneinheit ſtatt. Bei dieſer Belaſtung iſt nach Gleichung 159. für einen Querſchnitt mit der Abſciſſe x

$$M_x = \frac{p}{2}\,(l\,x - x^2),$$

und es iſt dies das gröſste Moment im betreffenden Querſchnitt.

363. Gleichförmig vertheilte Laſt u. Einzellaſten.

Vierter Fall: Der Träger wird durch eine über ſeine ganze Länge gleichförmig vertheilte Belaſtung und durch Einzellaſten belaſtet.

In Art. 360 iſt nachgewieſen, daſs jede Laſt eine von den anderen ſonſt noch auf dem Balken befindlichen Laſten unabhängige Auflager-Reaction erzeugt, und daſs die Geſammt-Auflager-Reaction gleich der algebraiſchen Summe der Partial-Reactionen iſt. Daraus folgt, daſs auch die Transverſalkräfte und Momente für alle Querſchnitte gleich den algebraiſchen Summen der bezw. Partial-Transverſalkräfte und -Momente ſind.

Wir brauchen alſo im vorliegenden Falle nur die Reactionen, Transverſalkräfte und Momente, welche bei den einzelnen bereits betrachteten Belaſtungen, derjenigen durch Einzellaſten und derjenigen durch gleichförmig vertheilte Laſt, ſich ergeben haben, algebraiſch zu addiren.

Hiernach betragen die Auflager-Reactionen (Fig. 159)

$$D_0 = \frac{p\,l}{2} + \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{p\,l}{2} + \sum_0^l \left[\frac{P\,(l-\xi)}{l}\right] \quad . \quad . \quad . \quad 162.$$

Die Transverfalkraft für einen Punkt G mit der Abfciffe x_1 ift

$$Q_{x_1} = D_0 - P_1 - p\,x_1 = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) - \sum_0^{x_1}(P) + \frac{p}{2}\,(l - 2\,x_1) \quad . \quad . \quad . \quad 163.$$

und für den Punkt L mit der Abfciffe x_2

$$Q_{x_2} = D_0 - P_1 - P_2 - p\,x_2 = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) - \sum_0^{x_2}(P) + \frac{p}{2}\,(l - 2\,x_2).$$

Das Moment für den Punkt G ift

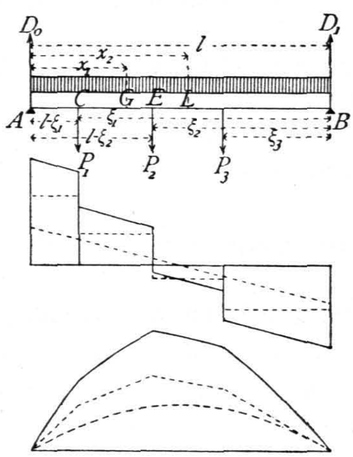
$$M_{x_1} = D_0\,x_1 - P_1(x_1 - l + \xi_1) - \frac{p\,x_1^2}{2} = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) x_1 - \sum_0^{x_1}\left[P(x_1 - l + \xi)\right] + \frac{p}{2}\,(l\,x_1 - x_1^2) \quad 164.$$

und für den Punkt L

$$M_{x_2} = D_0\,x_2 - P_1\,(x_2 - l + \xi_1) - P_2\,(x_2 - l + \xi_2) - \frac{p\,x_2^2}{2},$$

$$M_{x_2} = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) x_2 - \sum_0^{x_2}\left[P\,(x_2 - l + \xi)\right] + \frac{p}{2}\,(l\,x_2 - x_2^2) \quad . \quad . \quad . \quad 165.$$

Fig. 159.



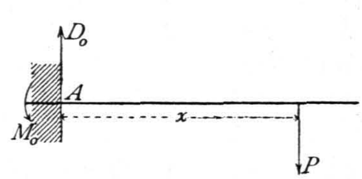
Die graphifche Darftellung der in den verfchiedenen Querfchnitten ftattfindenden Transverfalkräfte und Momente wird gleichfalls erhalten, indem man die bei den einzelnen Belaftungsarten fich ergebenden Ordinaten der bezüglichen Darftellungen algebraifch addirt. Es ergeben fich die in Fig. 159 gezeichneten Linienzüge, in denen die pofitiven Werthe nach oben, die negativen nach unten abgetragen find. Die punktirten Linien geben die Werthe von Q und M für Belaftung nur durch Einzellaften, bezw. für gleichförmig vertheilte Laft; die voll gezogenen Linien geben die Summen.

Die Ermittelung der Momente etc. auf graphifchem Wege ergiebt fich aus dem auf S. 321 Gefagten fo einfach, dafs darauf nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

2) Confole-Träger.

364. Princip. Confole-Träger find am einen Ende unterftützte, am anderen Ende frei fchwebende Träger. Als äufsere Kräfte wirken auf diefelben die Belaftungen und die Reactionen der Unterftützungsftelle. Letztere laffen fich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Damit der Träger im Gleichgewicht fei, mufs zunächft die algebraifche Summe der Verticalkräfte gleich Null fein, d. h., wenn die verticale Componente der Reaction bei A (Fig. 160) gleich D_0 ift, wird $0 = D_0 - P$ oder

Fig. 160.



$$D_0 = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 166.$$

Eine äufsere horizontale Belaftung fei nicht vorhanden; es wird alfo die Reaction keine horizontale Componente haben. Es mufs aber auch die algebraifche

Summe der ſtatiſchen Momente für einen beliebigen Punkt der Ebene, alſo etwa für A, gleich Null ſein; mithin muſs, da das Moment der gegebenen Kräfte für A nicht gleich Null iſt, D_0 aber für den Drehpunkt A kein ſtatiſches Moment hat, an der Unterſtützungsſtelle noch eine Anzahl von Kräften wirken, deren reſultirendes Moment mit demjenigen der Belaſtungen zuſammen die Summe Null ergiebt. Bei A wirkt alſo ein Moment M_0, deſſen Gröſse ſich ergiebt zu

$$M_0 = -Px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 167.$$

Dieſes Moment, deſſen Drehrichtung, wie das Vorzeichen angiebt, derjenigen von P entgegengeſetzt iſt, kann auf verſchiedene Weiſe erzeugt werden, am einfachſten durch Einmauerung, bezw. Einſpannung des Balkens.

Soll für jede Belaſtungsart Gleichgewicht vorhanden ſein, ſo muſs der Balken derart eingemauert werden, daſs das von der Mauer geleiſtete Moment auch die gröſsten Werthe des Momentes der Belaſtungen aufheben kann. Das Moment der Mauer wird durch das über dem eingemauerten Balkentheil liegende Mauergewicht geleiſtet, wonach dieſes eventuell zu beſtimmen iſt.

Auch in anderer Weiſe kann ein Moment in A erzeugt werden, z. B. dadurch, daſs der Balken über den Punkt A hinaus, bis zu einer zweiten Stütze B verlängert wird, in welchem Falle die Belaſtung des Balkentheiles AB das Moment M_0 leiſtet.

Die Conſole-Träger ſind ſtatiſch beſtimmt, da die beiden Unbekannten: die Auflager-Reaction D_0 und das Moment M_0, nach den Geſetzen der Statik ermittelt werden können. Wir ſuchen im Folgenden die Auflager-Reaction, die Transverſalkräfte und die Momente, wie beim Balkenträger auf zwei Stützen, und unterſcheiden betreff der Belaſtungsart drei Fälle.

Erſter Fall: Der Conſole-Träger wird durch beliebige Einzellaſten belaſtet. 365. Belaſtung durch Einzellaſten.

α) Berechnung. Die freie Balkenlänge AB (Fig. 161) ſei $= l$; alsdann iſt die Auflager-Reaction

$$D_0 = P_1 + P_2 + P_3 = \sum_0^l (P) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 168.$$

und das Moment

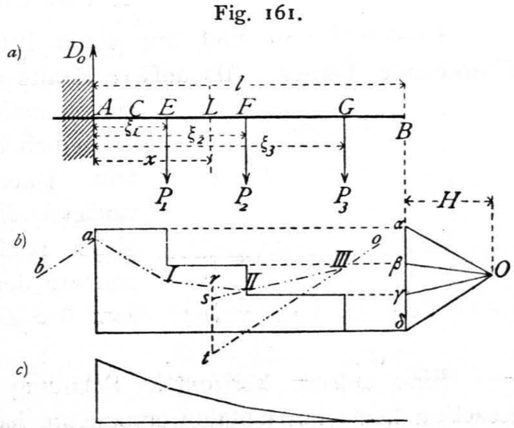
$$M_0 = -(P_1\,\xi_1 + P_2\,\xi_2 + P_3\,\xi_3) = -\sum_0^l (P\,\xi) \quad \ldots\ldots \quad 169.$$

Für einen beliebigen Querſchnitt C zwiſchen A und E iſt die Transverſalkraft $Q = D_0 = \Sigma\,(P)$; dieſen Werth hat Q für alle Punkte zwiſchen A und E. Für irgend einen Querſchnitt L zwiſchen E und F iſt $Q_1 = D_0 - P_1$; ſonach wird allgemein

$$Q = \sum_0^l (P) - \sum_0^x (P) = \sum_x^l (P) \,. \quad 170.$$

Die Transverſalkraft in jedem Querſchnitte iſt alſo gleich der Summe der zwiſchen dieſem Querſchnitte und dem freien Ende befindlichen Laſten.

Fig. 161.



Es folgt dies schon aus der Definition der Transversalkraft. Als graphische Darstellung der Veränderung der Transversalkräfte ergiebt sich die umstehende Construction (Fig. 161 *b*).

Für einen beliebigen Punkt L mit der Abscisse x wird das Moment $M = -\left[P_3(\xi_3 - x) + P_2(\xi_2 - x)\right]$; allgemein wird sonach

$$M = -\sum_x^l \left[P(\xi - x)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 171.$$

Die graphische Darstellung der Momente zwischen zwei Lastpunkten ist also eine Gerade, wie in Fig. 161 *c* gezeichnet.

β) Graphische Ermittelung. Man construire das Kraftpolygon $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\alpha$ und das Seilpolygon $a\,I\,II\,III\,0$, letzteres für eine beliebige Poldistanz H. Da $D = \delta\,\alpha$ ist, so ergeben sich die verschiedenen Werthe von Q leicht, wie in Fig. 161 angegeben.

Für den Punkt L ist

$$M = -\left[P_3(\xi_3 - x) + P_2(\xi_2 - x)\right].$$

Nun ist $\Delta\, s\,t\,III \backsim \Delta\,\gamma\,\delta\,O$, d. h. $\frac{\overline{s\,t}}{\xi_3 - x} = \frac{\gamma\,\delta}{H} = \frac{P_3}{H}$ und $H.\,\overline{s\,t} = P_3(\xi_3 - x)$; weiters ist $\Delta\,r\,s\,II \backsim \Delta\,\beta\,\gamma\,O$, d. h. $\frac{\overline{r\,s}}{\xi_2 - x} = \frac{\beta\,\gamma}{H} = \frac{P_2}{H}$ und $H\,.\,\overline{r\,s} = P_2(\xi_2 - x)$. Hiernach wird absolut genommen

$$M = P_3(\xi_3 - x) + P_2(\xi_2 - x) = H(\overline{s\,t} + \overline{r\,s}) = H.\,\overline{r\,t}\,.$$

Das Moment ist gleich dem Product aus der Poldistanz in die verticale Höhe des Seilpolygons an der betreffenden Stelle, falls diese von der verlängerten Seilpolygonseite aus gerechnet wird, welche auf die dem Balkenende zunächst liegende Kraft folgt.

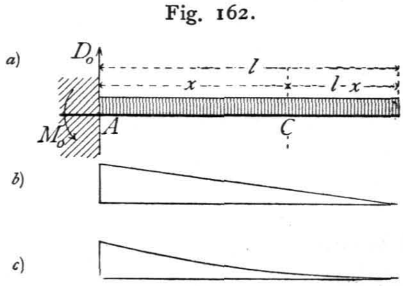
Das hier gefundene Resultat stimmt mit demjenigen des Art. 360, S. 322 überein; auch hier schliefst das Seilpolygon; denn ein Kräftepaar, wie es hier bei A wirkt, ist eine unendlich kleine, unendlich ferne Kraft. Aufser den Lasten P und der Auflager-Reaction D wirkt also noch eine unendlich ferne Kraft, deren Schnittpunkt mit der Seilpolygonseite $a\,b$ aufzusuchen und mit III zu verbinden ist, um die Schlufslinie zu erhalten. Man sieht, die durch III parallel zu $a\,b$ gezogene Seilpolygonseite ist die Schlufslinie.

366. Gleichförmig vertheilte Belastung.

Zweiter Fall: Der Console-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Für den Auflagerpunkt A (Fig. 162) ergiebt sich die Auflager-Reaction und das Moment mit

Fig. 162.



$$D_0 = p\,l \quad \text{und} \quad M_0 = -\frac{p\,l^2}{2}; \quad . \quad 172.$$

für einen Punkt C mit der Abscisse x beträgt die Transversalkraft und das Moment

$$Q_x = p\,(l - x) \quad \text{und} \quad M_x = -\frac{p\,(l-x)^2}{2} \quad . \quad 173.$$

Die graphische Darstellung der Werthe von Q ist eine Gerade; für $x = 0$ ist $Q_0 = p\,l$, für $x = l$ ist $Q_l = 0$. Diejenige der Werthe von M ist eine Parabel; für $x = 0$ ist $M_0 = -\frac{p\,l^2}{2}$; für $x = l$ ist $M_l = 0$. Da ferner für $x = l$ auch $\frac{d\,M_x}{d\,x} = +\,p\,(l - x)$ Null wird, so ist die Abscissenaxe im Punkte $x = l$ eine Tangente an die Parabel. Die Momente und Transversalkräfte sind in Fig. 162 *c* und 162 *b* graphifch dargeftellt. Der gröfste Werth des Momentes und der Transverfalkraft findet an derfelben Stelle, an der Einfpannungsftelle ftatt.

Die graphifche Ermittelung von D_0, Q und M bietet hier keine Vortheile, ift auch leicht nach den für Einzellaften gegebenen Regeln vorzunehmen.

Dritter Fall: Der Confole-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Belaftung und durch Einzellaften belaftet. 367. Gleichförmig vertheilte Laft u. Einzellaften.

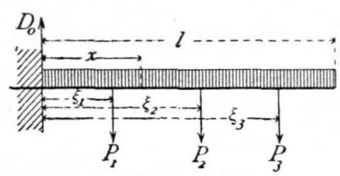
Die Auflager-Reactionen, Transverfalkräfte und Momente ergeben fich als die Summe der bei den partiellen Belaftungen ftattfindenden Reactionen, Transverfalkräfte und Momente. Es wird defshalb genügen, hier die Werthe anzugeben (Fig. 163):

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= P_1 + P_2 + P_3 + p\,l = \sum_0^l P + p\,l; \\ Q_x &= \sum_x^l P + p\,(l - x); \\ M_x &= -\sum_x^l \left[P\,(\xi - x)\right] - \frac{p\,(l-x)^2}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 174.$$

Eben fo wird die Veränderlichkeit der Q und M graphifch dargeftellt durch graphifche Addition der für die Partialbelaftungen fich ergebenden Werthe von Q und M.

Beifpiel. Ein fchmiedeeiferner Balkonträger von 2 m freier Länge hat als Eigengewicht eine gleichmäfsig vertheilte Belaftung von 500 kg pro lauf. Meter und eine Nutzlaft von 800 kg pro lauf. Meter zu tragen, aufserdem noch das Gewicht der Brüftung mit 800 kg in 1,8 m Abftand von der Wand. Es ift demnach, wenn Alles auf Centimeter reducirt wird, $g = 5$ kg, $p = 8$ kg, $P = 800$ kg, $\xi = 180$ cm und $l = 200$ cm.

Fig. 163.



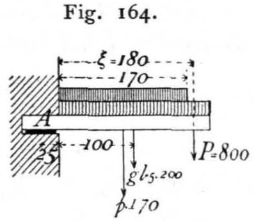
Die Nutzlaft habe nur eine Länge von 170 cm.

Als Berechnungsweite darf man in den meiften Fällen nicht die freie Länge bis zur Wand einführen, fondern mufs diejenige bis zur Auflagermitte nehmen, welche hier etwa 25 cm hinter der Mauerkante liegen möge. Alsdann ift für den Punkt A (Fig. 164), wenn M_g das Maximalmoment für permanente, M_p dasjenige für mobile Laft bezeichnet, abfolut genommen:

$$M_g = P\,(\xi + 25) + g\,l\left(\frac{l}{2} + 25\right) = 800 \,.\, 205 + 1000 \,.\, 125 = 289\,000 \text{ kgcm},$$

$$M_p = p \,.\, 170\left(\frac{170}{2} + 25\right) = 8 \,.\, 170 \,.\, 110 = 149\,600 \text{ kgcm}.$$

Fig. 164.



Der Querfchnitt an der Stelle A ift fo zu beftimmen, dafs nach Gleichung 39. und 41. ftattfindet

$$\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M_g}{K_1} + \frac{M_p}{(1 - \alpha_1)\,K_1} = \frac{289\,000}{1200} + \frac{149\,600}{720} = 448{,}6.$$

Nr. 26 der »Deutfchen Normalprofile für I-Eifen« (fiehe Seite 198) hat ein Widerftandsmoment $\frac{\mathcal{J}}{a} = 446$ und dürfte für vorliegenden Fall ausreichend fein.

3) Continuirliche Gelenkträger.

Die Querfchnittsgröfse der Träger und damit die zu denfelben gebrauchte Materialmenge ift wefentlich von der Gröfse der in den einzelnen Querfchnitten ftattfindenden Maximalmomente abhängig. Eine Verminderung der Momente hat auch eine Querfchnittsverringerung zur Folge. Eine folche Verringerung der Momente wird den gewöhnlichen Trägern auf zwei Stützen gegenüber durch die fog. continuirlichen Gelenkträger erreicht, bei denen die Stützpunkte eines Theiles 368. Princip.

der Träger durch Conſolen der Nachbarträger gebildet werden. Man erhält dadurch für die verſchiedenen Oeffnungen verſchiedene Trägerarten, und zwar wechſelt immer ein Träger mit einer, bezw. zwei Conſolen an den Enden und ein ſolcher ohne Conſolen ab.

Für drei neben einander liegende Oeffnungen *I, II, III* ſind die hauptſächlich vorkommenden Combinationen in Fig 165 u. 166 dargeſtellt. Entweder hat, wie in Fig. 165 gezeichnet, jeder Seitenträger *I* und *III* eine über das Auflager *B*, bezw. *E* vorragende Conſole *B C*, bezw. *D E*, auf deren Enden der Mittelträger *C D* frei aufruht, oder der Mittelträger *C D* hat, wie in Fig. 166, jederſeits eine Conſole *B C*, bezw. *D E*, und die Seitenträger *A B* und *E F* ruhen auſser auf den Endſtützpunkten *A*, bezw. *F* auf den Enden *B* und *E* der erwähnten Conſolen. Durch dieſe Conſtructionsart werden einmal die Momente in den Trägern, an deren Enden die Conſolen ſind, in Folge der Conſole-Belaſtungen weſentlich vermindert, auſserdem aber auch die Längen der frei aufliegenden Träger — in Fig. 165 des Trägers über Oeffnung *II*, in Fig. 166 der Träger über Oeffnung *I* und *III* — verkürzt, wodurch wiederum die Momente ſich verringern.

Fig. 165.

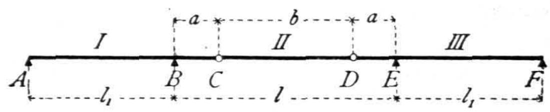
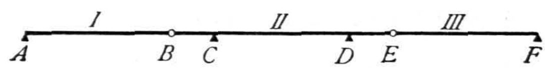


Fig. 166.



Im Folgenden ſoll nur der für den Hochbau vorwiegend wichtige Belaſtungsfall einer gleichmäſsig vertheilten totalen Belaſtung ins Auge gefaſst werden, und zwar für die beiden angegebenen Combinationen.

369. Erſte Combination. Erſte Combination: Die Conſolen befinden ſich an den Seitenträgern (Fig. 165).

α) Seitenträger mit einſeitiger Conſole. Es ſei $AB = l_1$, $BE = l$, $BC = DE = a$ und $CD = b$, alſo $l = 2a + b$; es ſei ferner die Belaſtung pro Längeneinheit des Trägers p. Alsdann wirkt auſser dieſer Belaſtung auf den Seitenträger in C eine Kraft nach unten, welche der in dem Punkte C auf den Balken CD nach oben wirkenden Auflager-Reaction (nach dem Geſetze der Wechſelwirkung, vergl. Art. 259, S. 234) genau gleich iſt, d. h. eine Kraft $\frac{pb}{2}$. Die Reaction im Auflagerpunkte A (Fig. 167 *a*) ergiebt ſich durch Aufſtellung der Gleichung der ſtatiſchen Momente für Punkt B zu

$$D_0 = \frac{p\,l_1}{2} - \frac{p}{2}\,\frac{a\,b + a^2}{l_1}.$$

Setzen wir die Conſtante $\frac{a\,b + a^2}{l_1} = c_1$, ſo iſt

$$D_0 = \frac{p}{2}\,(l_1 - c_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 175.$$

Weiters iſt die Reaction im Auflagerpunkte B

$$D_1 = \frac{p\,l_1}{2} + \frac{p\,b}{2} \cdot \frac{l_1 + a}{l_1} + p\,a\,\frac{l_1 + \frac{a}{2}}{l_1} = \frac{p}{2}\,(l_1 + c_1 + 2\,a + b) \quad . \quad 176.$$

In der Strecke AB beträgt die Transverſalkraft für einen Punkt L mit der Abſciſſe x, von A aus gerechnet,

$$Q_x = D_0 - p\,x = \frac{p}{2}\,(l_1 - c_1 - 2\,x), \quad \ldots\ldots \quad 177.$$

d. h. die graphifche Darftellung ift eine Gerade. Für $x = 0$ ift $Q_0 = \frac{p}{2}\,(l_1 - c_1)$; für $x = l_1$ ift $Q_{l_1} = -\frac{p}{2}\,(l_1 + c_1)$; die Transverfalkraft wird Null für $x_0 = \frac{l_1 - c_1}{2}$.

In der Strecke $B\,C$ ift die Transverfalkraft für einen Punkt L_1 mit der Abfciffe x_1, von C aus gerechnet,

$$Q_{x_1} = \frac{p}{2}\,(b + 2\,x_1), \quad \ldots\ldots \quad 178.$$

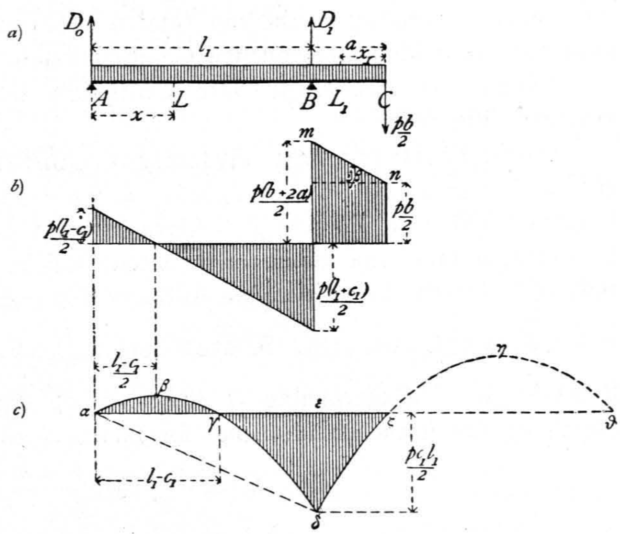
d. h. die graphifche Darftellung derfelben ift eine Gerade. Für $x_1 = 0$ ift $Q_0 = \frac{p\,b}{2}$; für $x_1 = a$ ift $Q_a = \frac{p}{2}\,(b + 2\,a)$. Die Transverfalkräfte find in Fig. 167 b graphifch dargeftellt.

In der Strecke $A\,B$ ift das Moment für den Punkt L

$$M_x = D_0\,x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{p}{2}\,(l_1 - c_1)\,x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{p}{2}\,(l_1\,x - x^2) - \frac{p\,c_1\,x}{2} \quad \ldots \quad 179.$$

Der erfte Theil diefes Ausdruckes ift das Moment, welches in einem frei aufliegenden Balken $A\,B$ von der Länge l_1 entftehen würde; in Folge der Confole und ihrer Belaftung erhalten wir demnach hier an jeder Stelle ein um $\frac{p\,c_1\,x}{2}$ kleineres Moment. Die graphifche Darftellung giebt eine Parabel $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 167 c); die Linie $\alpha\,\delta$ ift die Linie der Gleichung $y = -\frac{p\,c_1\,x}{2}$. Trägt man alfo von diefer aus die Ordinaten $z = \frac{p}{2}\,(l_1\,x - x^2)$ auf, fo ergeben die von $\alpha\,\varepsilon$ aus gemeffenen Ordinaten die Momente an den einzelnen Stellen. Für $x = 0$ ift $M_x = 0$;

Fig. 167.



für $x = l_1$ ift $M_{l_1} = -\frac{p\,c_1\,l_1}{2} = \varepsilon\,\delta$. M_x wird Null für jenen Werth von x, für welchen ftattfindet: $0 = \frac{p}{2}\,(l_1 - x) - \frac{p\,c_1}{2}$, d. h. für $x_0 = l_1 - c_1$; $\alpha\,\gamma$ ift alfo gleich $l_1 - c_1$. M_x hat fein Maximum für $\frac{d\,M_x}{d\,x} = 0$, d. h. für $x_{max} = \frac{l_1 - c_1}{2}$, und es ift

$$M_{max} = \frac{p}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} \cdot \frac{l_1 + c_1}{2} - \frac{p\,c_1}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} = \frac{p\,(l_1 - c_1)^2}{8}.$$

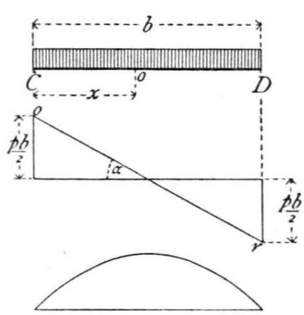
In der Strecke BC ist das Moment für den Punkt L_1

$$M_{x_1} = -\frac{pb}{2}x_1 - \frac{p x_1^2}{2} = -\frac{p}{2}(b x_1 + x_1^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 180.$$

d. h. die graphische Darstellung liefert eine Parabel. M_{x_1} wird Null für $x_1 = 0$ und für $b x_1 + x_1^2 = 0$, d. h. für $x_1 = -b$, also für Punkt C, und wenn die Curve über den Nullpunkt C nach rechts auf die negative Seite der Abscissenaxe fortgesetzt wird, für den Punkt D (Fig. 165). Ferner wird M_{x_1} ein Maximum für $0 = b + 2x_1$, d. h. es wird $x_{1\,max} = -\frac{b}{2}$. Für $x_1 = a$, d. h. für den Auflagerpunkt B wird $M_{x_1} = -\frac{p}{2}(ab + a^2) = -\frac{p}{2} c_1 l_1$ wie bereits oben gefunden. Hiernach ist die Parabel $\delta\zeta\eta\vartheta$ in Fig. 167 c construirt.

β) Balkenträger auf den beiden Consolen. Für diesen Träger CD (Fig. 168) gilt das unter 1. für den Träger auf zwei Stützen Gefundene. Es ist also für einen Punkt o mit der Abscisse x

Fig. 168.

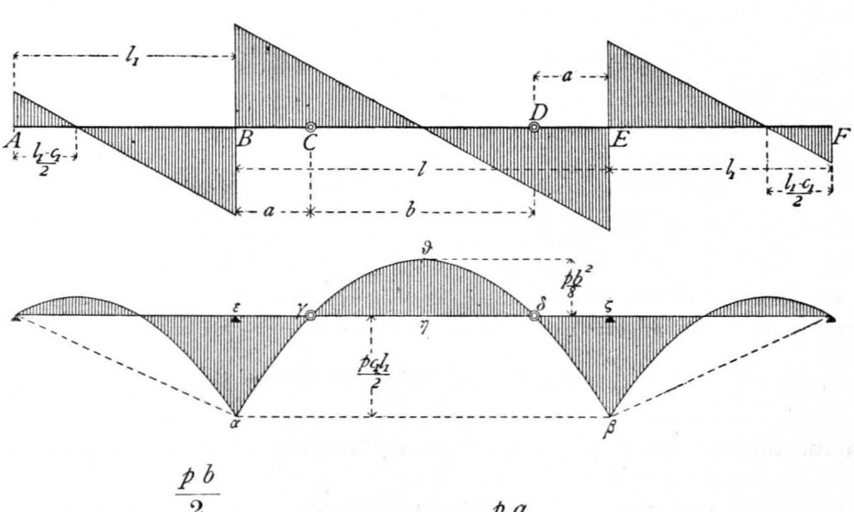


$$Q_x = \frac{p}{2}(b - 2x) \text{ und } M_x = \frac{p}{2}(bx - x^2) \text{ . } 181.$$

Die graphischen Darstellungen der Transversalkräfte und Momente giebt die Fig. 168.

γ) Ganzer Träger. Betrachtet man nun den ganzen Träger (Fig. 169), so sieht man zunächst, dass die Transversalkräfte und Momente in C gleiche Grösse haben, ob man vom Träger ABC oder vom Träger CD ausgeht. Auch die Neigung der Linie or, welche die Transversalkraft auf CD darstellt (Fig. 168), ist mit derjenigen von mn (Fig. 167 b), welche die Transversalkraft der Strecke BC darstellt, identisch; denn es ist

Fig. 169.



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{pb}{2}}{\frac{b}{2}} = p \text{ und } \text{tg}\,\beta = \frac{pa}{a} = p, \text{ d. h. } \beta = \alpha;$$

demnach bilden die beiden Linien or und mn eine einzige Linie. Auch die

Momentencurven beider Theile ſind identiſch; denn für die Abtheilung BC iſt nach Gleichung 180. $M_{x_1} = -\frac{p}{2}(b x_1 + x_1^2)$ und für negative x_1, d. h. für Punkte, welche rechts von C liegen, iſt $M_{x_1} = -\frac{p}{2}(-b x_1 + x_1^2) = +\frac{p}{2}(b x_1 - x_1^2)$. Dies iſt aber nach Gleichung 181. der Werth, welcher ſich für das Moment auf der Strecke CD ergiebt. Die in Fig. 167 c punktirte Curve $\zeta \eta \vartheta$ iſt alſo die richtige Momentencurve.

In Fig. 169 ſind die Momente und Transverſalkräfte für den ganzen Träger angegeben.

δ) Vergleich mit dem Träger auf zwei Stützen. Für den mittleren Träger $BCDE$ (Fig. 169) ſind die Transverſalkräfte genau, wie bei einem frei aufliegenden Träger von der Spannweite $l = 2a + b$; für die Seitenträger ſind die Transverſalkräfte an jeder Stelle um $\frac{p c_1}{2}$ kleiner, als beim einfachen, auf den Stützen A und B aufruhenden Balkenträger. Die abſoluten Werthe der Transverſalkräfte ſind alſo auf der poſitiven Seite um $\frac{p c_1}{2}$ kleiner, auf der negativen Seite um $\frac{p c_1}{2}$ gröſser, als dort.

Was die Momente anbelangt, ſo iſt für die Seitenträger oben bereits nachgewieſen, daſs das Moment an jeder Stelle um $\frac{p c_1 x}{2}$ kleiner iſt, als beim frei aufliegenden Balkenträger von der Spannweite l_1. Falls der Mittelträger in B und E frei aufläge, würde an einer beliebigen Stelle mit der Abſciſſe ξ von B aus gemeſſen das Moment $M_\xi = \frac{p}{2}(l\xi - \xi^2) = \frac{p}{2}\left[(b + 2a)\,\xi - \xi^2\right] = p a \xi + \frac{p}{2} b \xi - \frac{p \xi^2}{2}$ ſein, oder, wenn man des bequemeren Vergleiches halber die Abſciſſen vom Punkt C aus rechnet und mit x bezeichnet (nach rechts poſitiv), ſo wird $\xi = a \pm x$ und nach einigen Umformungen $M_x = \frac{p}{2}(b x - x^2) + \frac{p}{2} c_1 l_1$. Für den Mittelträger $BCDE$ mit den Gelenken in C und D iſt nach Gleichung 181. das Moment $M_x = \frac{p}{2}(b x - x^2)$, alſo um $\frac{p}{2} c_1 l_1$ kleiner, als wenn die Auflagerung in gewöhnlicher Weiſe in B und E erfolgte. Nun iſt aber dieſe Differenz $\frac{p}{2} c_1 l_1$ gerade das negative Moment an den Stützen B und E; die von der Horizontalen $\alpha\beta$ in Fig. 169 aus gemeſſenen Ordinaten ergeben daher die Momente des in B und E frei aufliegenden Trägers. Conſtruirt man demnach die Parabel der Gleichung $\frac{p}{2}(l\xi - \xi^2)$ in gewöhnlicher Weiſe und zieht durch die Punkte γ und δ, in welchen die Verticalen der Conſolenenden die Curve ſchneiden, eine Horizontale $\varepsilon\zeta$, ſo ſind die von dieſer Horizontalen aus gemeſſenen Ordinaten die Momente.

Es empfiehlt ſich oft, die Conſolenlänge ſo zu beſtimmen, daſs das negative Moment über den Stützen genau ſo groſs iſt (abſolut genommen), wie das poſitive Moment in der Mitte. Man theile dann einfach die Pfeilhöhe der Parabel $\alpha\vartheta\beta$ in zwei gleiche Theile und ziehe durch den Theilpunkt eine Horizontale; alsdann geben die Längen $\varepsilon\gamma$, bezw. $\delta\zeta$ die Längen der Conſolen.

Schlieſslich iſt der Vergleich noch in Betreff der Materialmenge anzuſtellen. Die Querſchnittsfläche iſt nach Früherem hauptſächlich von der Gröſse des Maximalmomentes in den verſchiedenen Querſchnitten abhängig. Iſt aber die Querſchnittsfläche der Gröſse von M proportional, ſo iſt die Materialmenge auf die Länge dx dem Werthe $M\,dx$, auf die Geſammtlänge dem Werthe $\int M\,dx$ proportional. $\int M\,dx$ iſt aber die Fläche, welche zwiſchen der Momentencurve und derjenigen Horizontalen liegt, von welcher aus die Ordinaten abgetragen werden, alſo für den Fall des Trägers BE auf den Stützen B und E die Fläche $\alpha\gamma\vartheta\delta\beta\alpha$, für den hier vorliegenden Fall des Trägers CD und der Conſolen BC und DE (Fig. 169) die Fläche $\alpha\varepsilon\gamma + \gamma\eta\delta\vartheta + \delta\zeta\beta$, wobei ſelbſtverſtändlich alle Flächen poſitiv gerechnet werden, da es für die Querſchnittsgröſse gleichgiltig iſt, ob das Moment poſitiv oder negativ iſt. Wie man durch einen Blick auf die neben ſtehende Figur ſieht, iſt die Momentenfläche, mithin auch der Materialverbrauch, im zweiten Falle weſentlich kleiner, als im erſten.

Bei gegebener Weite l wird der Materialverbrauch für die Mittelöffnung BE ein Minimum ſein, wenn der Flächeninhalt der Momentenfläche ein Minimum wird. Als Momentenfläche ergiebt ſich leicht

$$\gamma\eta\delta\vartheta + \alpha\varepsilon\gamma + \delta\zeta\beta = \frac{p}{12}\,(2\,b^3 + 6\,c_1\,l_1\,l - l^3);$$

wenn $c_1 = \dfrac{a^2 + a\,b}{l_1}$ und $a = \dfrac{l - b}{2}$ eingeſetzt wird, erhält man nach einfachen Umformungen

$$f = \frac{p}{12}\left(2\,b^3 + \frac{l^3}{2} - \frac{3}{2}\,l\,b^2\right).$$

Das Minimum des Flächeninhaltes findet ſtatt für $\dfrac{d\,f}{d\,b} = 0$, d. h. für $6\,b^2 - 3\,l\,b = 0$ oder $b = \dfrac{l}{2}$. Wird für b dieſer Werth in obige Gleichung für f eingeführt, ſo wird $f_{min} = \dfrac{p\,l^3}{32}$.

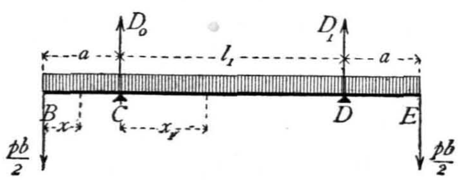
Für einen Balken auf zwei Stützen mit der Stützweite l iſt die Momentenfläche $f_1 = \dfrac{2}{3}\,l\,\dfrac{p\,l^2}{8} = \dfrac{p\,l^3}{12}$. Die Erſparniſs bei der günſtigſten Anordnung, bei welcher $BC = DE = \dfrac{l}{4}$ iſt, iſt alſo proportional dem Werthe $f_1 - f_{min}$.

370. Zweite Combination.

Zweite Combination: Die Conſolen befinden ſich am Mittelträger.

α) Mittelträger mit beiderſeitigen Conſolen. Die Länge des Mittelfeldes (Fig. 170) ſei l_1, diejenige der Conſole ſei a und die Länge jedes Seitenträgers b; alsdann iſt bei totaler Belaſtung die Auflager-Reaction

Fig. 170.



$$D_0 = \frac{p}{2}\,(l_1 + 2\,a + b) = D_1 \quad . \quad 182.$$

In der Strecke $B\,C$ iſt die Transverſalkraft

$$Q_x = -\,\frac{p\,b}{2} - p\,x \quad . \quad . \quad . \quad 183.$$

Für $x = 0$ iſt $Q_0 = -\,\dfrac{p\,b}{2}$; für $x = a$ iſt $Q_a = -\,\dfrac{p\,b}{2} - p\,a = -\,\dfrac{p}{2}\,(b + 2\,a)$.

In der Strecke $C\,D$ iſt die Transverſalkraft

$$Q_{x_1} = D_0 - \frac{p\,b}{2} - p\,a - p\,x_1 = \frac{p}{2}\,(l_1 - 2\,x_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 184.$$

d. h. genau ſo groſs, wie ohne Conſole. Für $x_1 = 0$ iſt $Q_0 = \dfrac{p\,l_1}{2}$; für $x_1 = l_1$ iſt $Q_{l_1} = -\,\dfrac{p\,l_1}{2}$.

In der Strecke $D\,E$ iſt die Transverſalkraft eben ſo groſs wie in $B\,C$; nur iſt hier poſitiv, was dort negativ iſt. Die graphiſche Darſtellung der Transverſalkräfte giebt Fig. 171 *a*.

In den Strecken $B\,C$ und $D\,E$ haben die Momente die gleichen Werthe, wie bei den in Art. 369, S. 332 behandelten Conſolen. Es iſt demnach, vom Punkte B aus gerechnet,

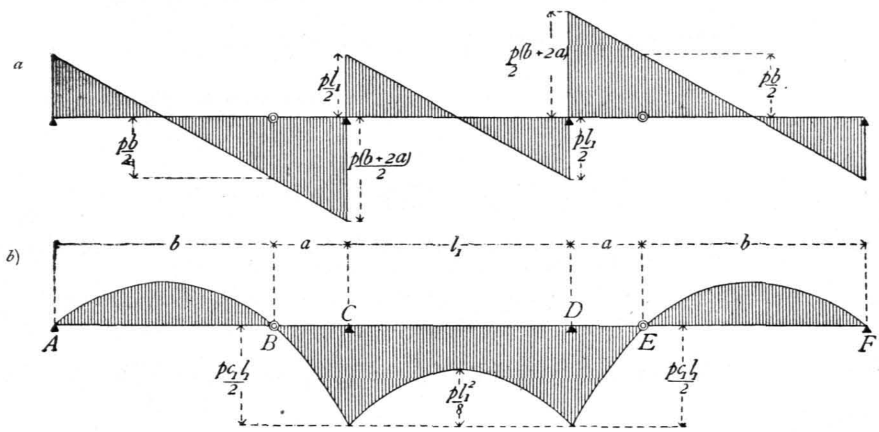
$$M_x = -\,\frac{p\,b}{2}\,x - \frac{p\,x^2}{2} = -\,\frac{p}{2}\,(b\,x + x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 185.$$

Für $x = 0$ iſt $M_0 = 0$; für $x = a$ iſt $M_a = -\,\dfrac{p}{2}\,(a\,b + a^2) = -\,\dfrac{p}{2}\,c_1\,l_1$.

In der Strecke $C\,D$ iſt das Moment

$$M_{x_1} = D_0\,x_1 - \frac{p\,x_1^2}{2} - p\,a\left(\frac{a}{2} + x_1\right) - \frac{p\,b}{2}\,(a + x_1) = \frac{p}{2}\,(l_1\,x_1 - x_1^2) - \frac{p}{2}\,c_1\,l_1 \quad 186.$$

Fig. 171.



Der erste Theil des Momentes ist das Moment für einen frei aufliegenden Balken von der Stützweite l_1; der zweite Theil ist das Moment über der Stütze C, bezw. D.

Also auch hier gilt dasselbe, was im vorhergehenden Artikel über den dortigen Mittelträger gesagt wurde. Die graphische Darstellung der Momente ist in Fig. 171 *b* gegeben.

β) Seitenträger. Die Seitenträger sind frei auf zwei Stützpunkten gelagerte Träger, für welche Alles gilt, was in Art. 361, S. 323 entwickelt wurde. Demnach ist, wenn der linke Auflagerpunkt hier als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt wird,

$$Q_x = \frac{p}{2}\,(b - 2\,x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2}\,(b\,x - x^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 186_a.$$

und es ergiebt sich leicht, wie in Art. 369, dass die Curven für die Momente und die Transversalkräfte identisch sind mit denjenigen, welche für die Console $B\,C$ gefunden worden sind.

Die Momente und Transversalkräfte für die verschiedenen Querschnitte sind in Fig. 171 graphisch aufgetragen.

Zum Schlusse erübrigt noch eine Untersuchung über das günstigste Verhältniss der Grössen a und b, d. h. über jenes Verhältniss, welches den geringsten Materialaufwand bedingt. 371. Günstiges Verhältniss von a und b.

Im Hochbau wird man meistens Träger mit constantem oder nahezu constantem Querschnitt verwenden; derselbe muss alsdann so gross sein, wie das grösste überhaupt im Träger vorkommende Moment es verlangt. Die Anordnung wird demnach praktisch so getroffen, dass die in den verschiedenen Stellen stattfindenden Maximalmomente einander (absolut genommen) gleich sind.

Beim Träger mit beiderseitigen Consolen (Art. 370, S. 334; Fig. 166) finden die grössten Momente über den Stützen C, bezw. D und in der Mitte der Oeffnung statt. Die Bedingung, dass dieselben einander (absolut genommen) gleich sein sollen, giebt eine Gleichung für die günstigste Länge von a. Es ist

$$M_c = \frac{p}{2}\,c_1\,l_1 \quad \text{und} \quad M_{mitte} = \frac{p\,l_1^2}{8} - \frac{p}{2}\,c_1\,l_1.$$

Es mufs demnach $\frac{p}{2} c_1 l_1 = \frac{p l_1^2}{8} - \frac{p}{2} c_1 l_1$ fein, woraus $\frac{l_1}{8} = c_1$. Da nun $c_1 = \frac{a^2 + a b}{l_1}$ ift, wird $a^2 + a b = \frac{l_1^2}{8}$; da ferner $b = l - a$, wird

$$a^2 + a l - a^2 = \frac{l_1^2}{8} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{l} = \frac{1}{8} \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 187.$$

Für $l_1 = l$ würde $a = \frac{l}{8}$; für $l_1 = \frac{4}{3} l$ würde $a = \frac{2}{9} l$ etc.

Beim Träger mit einfeitiger Confole (Art. 369, S. 330; Fig. 165) würde fich diefes Verhältnifs in folgender Weife ergeben. Das Moment über dem Auflager ift $\frac{p}{2} c_1 l_1$; das Maximalmoment in der Oeffnung ift $M_{max} = \frac{p}{8} (l_1 - c_1)^2$; mithin ift die Bedingungsgleichung

$$\frac{p}{8} (l_1 - c_1)^2 = \frac{p}{2} c_1 l_1.$$

Die Auflöfung diefer Gleichung ergiebt $c_1 = l_1 (3 - \sqrt{8}) = 0{,}172\, l_1$ und, da $c_1 = \frac{a^2 + a b}{l_1}$, ferner $b = l - 2a$, fo wird nach einfachen Umformungen

$$\frac{a}{l} = \frac{1 - \sqrt{1 - 0{,}688 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 188.$$

Für die verfchiedenen Werthe von $\frac{l_1}{l}$ ergeben fich aus den Gleichungen 187. und 188. die nachfolgenden Werthe für $\frac{a}{l}$:

	$\frac{l_1}{l} =$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$\frac{a}{l}$	Träger mit beiderfeitiger Confole	0,06	0,08	0,11	0,125	0,15	0,18	0,21
$\frac{a}{l}$	Träger mit einfeitiger Confole	0,093	0,125	0,168	0,22	0,30	—	—

Von einer genauen Unterfuchung darüber, bei welchem Verhältnifs der Spannweiten l und l_1 und der Confolelängen a die Momentenfläche und damit der Materialverbrauch ein Minimum würde, kann hier abgefehen werden, da man im Hochbau nur ganz ausnahmsweife fo grofse derartige Träger anordnet, dafs man fich der theoretifchen Materialmenge einigermafsen nähert.

4) Continuirliche Träger.

372. Auflager-Reactionen u. Momente.

Die continuirlichen Träger oder die Träger auf mehr als zwei Stützpunkten find nach Art. 357, S. 317 ftatifch unbeftimmt. Die Auflager-Reactionen werden mit Hilfe der Elafticitätslehre ermittelt, indem die Deformationen des Balkens beftimmt werden. Diefe Operationen find in vielen Fällen ziemlich umftändlich, und es erfcheint bei der verhältnifsmäfsig geringen Verwendung diefer Träger und um den hier disponibeln Raum nicht zu überfchreiten, als genügend, für eine Reihe von gewöhnlichen Belaftungsfällen die Gröfse der Auflager-Reactionen und der wichtigften Momente anzugeben[166]).

Im Folgenden bezeichnen: D_0, D_1, D_2 ... die Auflager-Reactionen in den verfchiedenen Stützpunkten *0, 1, 2* ...; M_0, M_1, M_2 ... die Momente an diefen Stützpunkten; $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ ... die Maximalmomente in den Oeffnungen *1, 2, 3* ...; l die Stützweite jeder Oeffnung, falls alle Stützweiten gleich grofs find; l_1, l_2, l_3 ... die Stützweiten der Oeffnungen *1, 2, 3* ..., falls nicht alle Stützweiten gleich grofs find; p_1, p_2, p_3 ... die gleichförmig vertheilten Belaftungen pro Längeneinheit in den Oeffnungen *1, 2, 3* ... des Trägers.

α) Sämmtliche Oeffnungen haben die gleiche Stützweite l und die gleiche totale Belaftung p pro Längeneinheit zu tragen. Die mafsgebenden Werthe von M, D und $\mathfrak{M}$ find in folgender Tabelle zufammengeftellt.

Anzahl der Oeffnungen.

	2	3	4			2	3	4			2	3	4	
$M_0 =$	0	0	0		$D_0 =$	0,375	0,400	0,3929		$\mathfrak{M}_1 =$	0,07031	0,08	0,0771	
$M_1 =$	0,125	0,10	0,10714		$D_1 =$	1,250	1,100	1,1428		$\mathfrak{M}_2 =$	0,07031	0,025	0,0363	
$M_2 =$	0	0,10	0,0714	$p\,l^2$	$D_2 =$	0,375	1,100	0,9186	$p\,l$	$\mathfrak{M}_3 =$	—	0,08	0,0363	$p\,l^2$
$M_3 =$	—	0	0,10714		$D_3 =$	—	0,400	1,1428		$\mathfrak{M}_4 =$	—	—	0,0771	
$M_4 =$	—	—	0		$D_4 =$	—	—	0,3929						

β) Die Oeffnungen find ungleich weit und haben die totalen Belaftungen p_1, p_2, p_3 ... pro Längeneinheit zu tragen.

Nehmen wir zunächft zwei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1 und l_2 an, fo ift

$$M_0 = M_2 = 0, \quad M_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8\,(l_1 + l_2)}, \quad \ldots \ldots \quad 189.$$

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8\,l_1\,(l_1 + l_2)}, \quad D_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8\,l_1\,l_2} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}, \\ D_2 &= \frac{p_2 l_2}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8\,l_2\,(l_1 + l_2)} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad 190.$$

166) Für das Studium der »Theorie der continuirlichen Träger« feien folgende Schriften empfohlen:

Clapeyron. *Calcul d'une poutre élaftique repofant librement fur des appuis inégalement espacés. Comptes rendus, tome 45ème*, S. 1076.

Mohr. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eifen-Conftructionen. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1860, S. 323; 1868, S. 19.

Culmann, K. Die graphifche Statik. Zürich 1866. S. 273.

Winkler, E. Die Lehre von der Elafticität und Feftigkeit etc. I. Theil. Prag 1867. S. 112.

Ritter, W. Die elaftifche Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken. Zürich 1871.

Lippich, F. Theorie des continuirlichen Trägers conftanten Querfchnittes. Allg. Bauz. 1871, S. 104 u. 175. (Auch als Separatabdruck erfchienen: Wien 1871.)

Weyrauch, J. J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.

Winkler, E. Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken. I. Heft. Aeufsere Kräfte gerader Träger. 2. Aufl. Wien 1875. S. 53.

Laifsle, F. u. A. Schübler. Der Bau der Brückenträger mit befonderer Rückficht auf Eifen-Conftructionen. I. Theil. 4. Aufl. Stuttgart 1876. S. 161.

Schäffer. Belaftungsgefetze für den continuirlichen geraden ftabförmigen Körper von conftantem Querfchnitt. Zeitfchr. f. Bauw. 1876, S. 239.

Grashof, F. Theorie der Elafticität und Feftigkeit etc. 2. Aufl. Berlin 1878. S. 100.

Landsberg. Beitrag zur graphifchen Berechnung continuirlicher Träger. Centralbl. d. Bauverw. 1881, S. 164 u. 174.

Canovetti. *Théorie des poutres continues* etc. Paris 1882.

Bei drei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1, l_2 und l_1 ergeben ſich folgende Reſultate:

$$M_0 = M_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4(3 l_2 + 2 l_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 191.$$

$$D_0 = D_3 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4 l_1 (3 l_2 + 2 l_1)}, \quad D_1 = D_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4 l_1 (3 l_2 + 2 l_1)} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2} \quad 192.$$

b) Innere Kräfte der Gitterträger.

373. Allgemeines.

Die Balkenträger ſind entweder vollwandige Träger oder gegliederte Träger, letztere gewöhnlich Gitterträger genannt. Bei den erſteren bildet der ganze Querſchnitt eine zuſammenhängende Fläche; bei den letzteren beſteht derſelbe aus zwei getrennten Theilen, den ſog. Gurtungsquerſchnitten; beide Gurtungen ſind durch ein Syſtem von Stäben mit einander verbunden.

Die Ermittelung der Spannungen, welche in den vollwandigen Trägern, wozu die hölzernen und guſseiſernen Balken, die Walzbalken und Blechträger gehören, durch die äuſseren Kräfte erzeugt werden, iſt bereits im 4. Kapitel des 1. Abſchnittes vorgeführt worden; daſelbſt iſt auch die Querſchnittsbeſtimmung für dieſe Balken gezeigt. Im vorliegenden Kapitel ſollen deſshalb nur die in den Gitterträgern entſtehenden inneren Kräfte entwickelt werden.

Gitterträger ſind aus einzelnen Stäben combinirte Träger. Die Kreuzungspunkte der einzelnen Stäbe heiſsen Knotenpunkte. Jeder Gitterträger hat eine obere Gurtung und eine untere Gurtung. Zur Verbindung beider dient das zwischen ihnen angeordnete Gitterwerk.

374. Claſſification der Gitterträger.

Nach der Form der Gurtung unterſcheidet man:

1) Parallelträger, d. h. Träger, deren beide Gurtungen parallel (gewöhnlich auch horizontal) ſind.

2) Träger mit einer krummen und einer geraden Gurtung oder mit zwei krummen Gurtungen. Die erſteren nennt man, wenn die Endhöhe des Trägers gleich Null iſt und die obere Gurtung krumm, die untere Gurtung gerade iſt, Bogenſehnenträger; wenn die untere Gurtung gekrümmt, die obere Gurtung gerade iſt, Fiſchbauchträger. Je nach der Curve der Krümmung unterſcheidet man Parabelträger, Hyperbel- (Schwedler-) Träger, Ellipſenträger etc.

3) Dreieck- und Trapezträger, d. h. Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bezw. ein Paralleltrapez bilden.

Nach der Anordnung des Gitterwerkes werden unterſchieden:

1) Träger mit einfachem Gitterwerk oder Träger, bei denen nur zwei Lagen von Gitterſtäben vorhanden ſind;

2) Träger mit combinirtem Gitterwerk, falls drei Lagen von Gitterſtäben vorhanden ſind.

Wir werden uns mit den letzteren nur in ſo fern beſchäftigen, als man die Träger mit Gegendiagonalen zu denſelben rechnen kann.

Eintheiliges Gitterwerk iſt ſolches, bei welchem ſich jeder Gitterſtab nur in den Gurtungen mit den anderen Gitterſtäben kreuzt; mehrtheiliges Gitterwerk iſt ſolches, bei welchem jeder Gitterſtab ſich auſser in den Gurtungen noch ein oder mehrere Male mit anderen Gitterſtäben kreuzt.

Für die Zwecke des Hochbaues iſt wohl immer das eintheilige Gitterwerk welches eine exacte Berechnung zuläfft, ausreichend, fo dafs wir hier nur Träger mit eintheiligem Gitterwerk befprechen werden.

Die Gitterftäbe find entweder geneigt oder vertical; fie werden in der Folge als Diagonalen und Verticalen bezeichnet werden.

Gitterwerk mit zwei Lagen Diagonalen nennen wir Netzwerk, Gitterwerk mit einer Lage Diagonalen und einer Lage Verticalen Fachwerk.

Die Dachbinder find in den allermeiften Fällen Gitterträger, fo dafs die hier zunächft zu entwickelnden allgemeinen Regeln und Gefetze auch für die im nächften Kapitel zu behandelnden Dachbinder giltig find.

Bei den nachftehenden Unterfuchungen werden folgende Annahmen gemacht: 375. Voraus-fetzungen.

1) die Belaftungen finden nur in den Knotenpunkten ftatt, und

2) die Stäbe find in den Knotenpunkten fo mit einander verbunden, dafs fie fich um diefelben frei drehen können.

1) Methoden für die Beftimmung der Stabfpannungen.

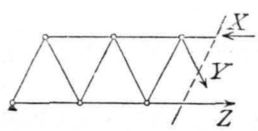
Die Ermittelung der inneren Kräfte oder Spannungen erfolgt nach dem allgemeinen Verfahren, welches in Art. 254, S. 232 angegeben worden ift. Der Körper wird an derjenigen Stelle durchfchnitten gedacht, an welcher man die inneren Kräfte, hier die Stabfpannungen, kennen lernen will; an den Schnittftellen werden die inneren Kräfte angebracht und auf das Fragment die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet. Da hier die Stäbe, wie angenommen wurde, um die Knotenpunkte frei drehbar find, fo mufs jede Stabfpannung mit der Richtung des betreffenden Stabes zufammenfallen. Es ergiebt fich fonach folgende Regel: 376. Verfahren im Allgemeinen.

Man denke den Träger fo durchfchnitten, dafs die Stäbe, deren Spannung man fucht, durch den Schnitt getroffen werden, bringe die mit den Stabrichtungen zufammenfallenden Stabfpannungen als vorläufig unbekannte Kräfte an (Fig. 172) und ftelle für das Fragment die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

Es ergiebt fich leicht, dafs die Aufgabe auf dem angegebenen Wege nur dann lösbar ift, wenn ftets nur drei Unbekannte vorhanden find, d. h., wenn für jeden Stab ein Schnitt möglich ift, bei welchem aufser demfelben nur noch zwei andere Stäbe gefchnitten werden; anderenfalls erhält man ein ftatifch unbeftimmtes Syftem.

Die Stäbe werden gezogen oder gedrückt; im erften Falle wirkt die Spannung vom Knotenpunkte ab (Y und Z in Fig. 172); im zweiten Falle wirkt fie nach dem Knotenpunkt hin (X in Fig. 172). Da man beim Beginne der Berechnung vielfach noch nicht den Sinn der Beanfpruchung kennt, fo werden wir zunächft ftets alle Spannungen als Zugfpannungen, d. h. vom Knotenpunkte ab gerichtet, einführen; die Rechnung ergiebt entweder einen pofitiven oder negativen Werth. Das erftere Refultat bedeutet, dafs die angenommene Pfeilrichtung die richtige war, d. h. dafs im Stabe Zug herrfcht. Das zweite Refultat bedeutet, dafs die wirkliche Spannung der angenommenen gerade entgegengefetzt (mit cos 180° zu multipliciren) ift, d. h. im Stabe Druck herrfcht.

Fig. 172.



α) Analytifche Beftimmung der Stabfpannungen. Diefelbe kann in zweifacher Weife gefchehen, entweder durch Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen oder nach der fog. Momentenmethode. 377. Analytifches Verfahren.

378. Gleichgewichts-bedingungen.

α) Die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für das Fragment (Fig. 173), welches, wie im vorigen Artikel angegeben, behandelt ist, ergiebt drei Gleichungen, welche nach Art. 256, S. 233 lauten:

$$\left.\begin{array}{l} X \cos \sigma + Y \sin \tau + Z = 0; \quad D_0 - P_1 - P_2 + X \sin \sigma - Y \cos \tau = 0 \\ D_0 \,.\, 2\,a - P_1\,a - Zz = 0 \end{array}\right\} \quad . \; 193.$$

Als Drehpunkt für die dritte Gleichung ist der Punkt C gewählt; alsdann haben X, Y und P_2 kein statisches Moment, weil sie für diesen Drehpunkt keinen Hebelsarm haben.

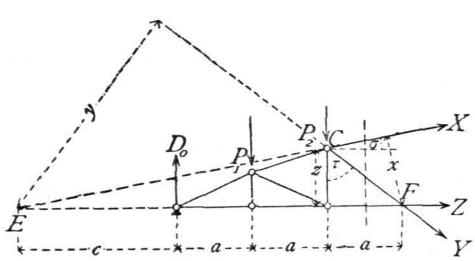
Die angegebene Methode führt stets, wenn nur 3 Unbekannte, also 3 geschnittene Stäbe vorhanden sind, zum Ziele; sie hat den Nachtheil, dass meistens 3 Gleichungen gelöst werden müssen, selbst wenn man nur eine Spannung kennen lernen will.

379. *Ritter*'sche Methode.

b) Das Charakteristische der von *Ritter* angegebenen Momenten-Methode ist, dass man für jede Spannung nur eine Gleichung erhält; das Mittel dazu bietet die dritte Gleichgewichtsbedingung des vorhergehenden Artikels. Wird der Momentenpunkt so gewählt, dass zwei von den drei Unbekannten das Moment Null haben, so bleibt in der Gleichung nur eine Unbekannte. Das statische Moment jeder der beiden Kräfte ist aber gleich Null für den Schnittpunkt beider Kraftrichtungen, weil für diesen Punkt jede der beiden Kräfte den Hebelsarm Null hat. Die Methode ist demnach folgende:

Man lege durch den Träger einen Schnitt, so dass nur 3 Stäbe mit unbekannten Spannungen geschnitten werden, bringe diese Spannungen und alle am Fragment wirkenden äusseren Kräfte an, setze die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte gleich Null und wähle dabei als Momentenpunkt für die Ermittelung der Spannung eines Stabes stets den Schnittpunkt der beiden mit durchschnittenen Stäbe.

Fig. 173.



Um in Fig. 173 die Spannung X zu finden, wählt man F als Momentenpunkt; die Gleichung der statischen Momente heisst dann

$$X x + D_0 \,.\, 3\,a - P_1 \,.\, 2\,a - P_2\,a = 0,$$

woraus sich die einzige Unbekannte X leicht finden lässt. Für C als Momentenpunkt ergiebt sich

$$D_0 \,.\, 2\,a - P_1\,a - Zz = 0,$$

woraus Z zu berechnen ist, und für E als Momentenpunkt

$$Yy - D_0\,c + P_1\,(c + a) + P_2\,(c + 2\,a) = 0,$$

woraus Y zu ermitteln ist.

Die Länge der Hebelsarme ergiebt sich meistens genügend genau aus der Zeichnung, kann aber auch leicht rechnerisch ermittelt werden.

Wir werden den für einen Stab nach dieser Methode sich ergebenden Momentenpunkt den diesem Stabe conjugirten Punkt nennen.

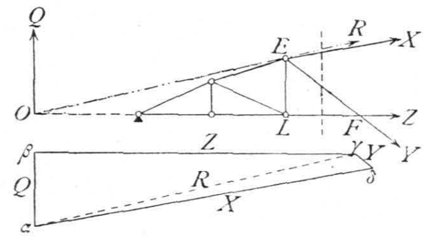
380. Graphisches Verfahren.

β) Graphische Bestimmung der Stabspannungen. Auch das graphische Verfahren kann nach zwei verschiedenen Methoden durchgeführt werden, entweder nach der Schnittmethode oder nach der Polygonalmethode.

𝔞) Die Schnittmethode wurde von *Culmann* angegeben. 381. *Culmann*'fche Methode.

Werden die fämmtlichen am Fragment wirkenden äufseren Kräfte zu einer Refultirenden Q (Fig. 174) zufammengefafft, fo wirken auf daffelbe 4 Kräfte, nämlich Q und die 3 unbekannten Spannungen. Für diefe 4 Kräfte ergiebt fich ein gefchloffenes Kraftpolygon. Von einer diefer Kräfte, nämlich von Q, ift Gröfse, Richtung und Lage bekannt; von den drei anderen wohl Richtung und Lage, nicht aber die Gröfse. Erfetzt man 2 der unbekannten Kräfte, etwa X und Y, durch ihre Mittelkraft R, fo bleiben nur noch die 3 Kräfte Q, Z und R, welche fich nach Art. 258, S. 234 in einem Punkte fchneiden müffen. R mufs alfo durch den Schnittpunkt O von Q und Z gehen. Da R aufserdem durch den Schnittpunkt E von X und Y geht, fo find 2 Punkte der Richtungslinie von R, es ift alfo auch diefe Richtung felbft bekannt. R hat die Richtung OE. Im Punkte O halten fich demnach 3 Kräfte Q, R und Z im Gleichgewichte; das für diefelben conftruirte Kraftpolygon ift eine gefchloffene Figur, hier ein Dreieck. Ift $Q = \alpha\beta$, fo ziehe man durch β eine Parallele zur Richtung von Z, durch α eine folche zur Richtung von R; der Schnittpunkt γ beider Linien ergiebt die beiden Kräfte $R = \gamma\alpha$ und $Z = \beta\gamma$.

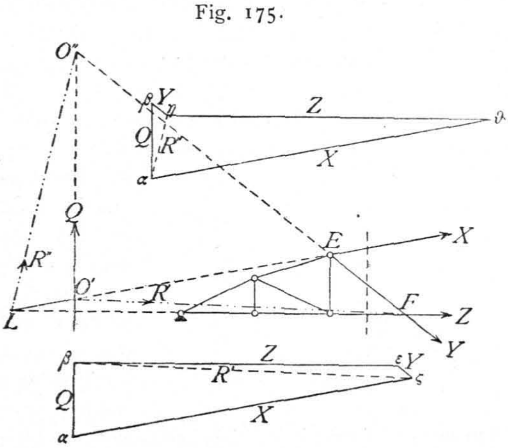
Fig. 174.



In derfelben Weife kann nun R in feine beiden Seitenkräfte X und Y zerlegt werden, indem man durch die beiden Endpunkte von R Parallelen zu den Richtungen von bezw. X und Y zieht. Es ergiebt fich $\gamma\delta = Y$ und $\delta\alpha = X$.

Es ift für das Endrefultat gleichgiltig, welche zwei von den unbekannten Spannungen man zu einer Mittelkraft vereinigt. Man kann auch Y und Z (Fig. 175) durch ihre Mittelkraft R' erfetzen, welche dann durch F und den Schnittpunkt O' der Kraft X mit Q geht. Als Kraftpolygon erhält man $\alpha\beta\varepsilon\zeta$. Eben fo kann man auch X und Z zu einer Refultirenden vereinen, und erhält die ebenfalls in Fig. 175 gezeichnete Conftruction.

Fig. 175.



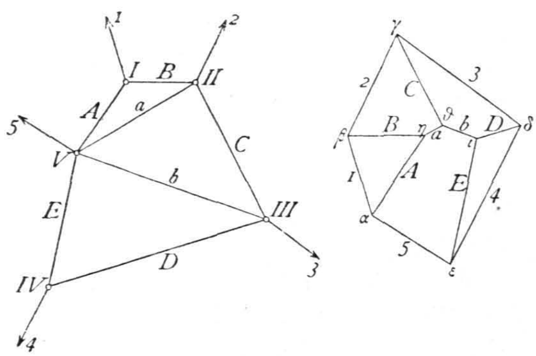
Die angegebene Conftruction giebt zugleich Auffchlufs darüber, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt werden. Da die am Fragment wirkenden Kräfte im Gleichgewicht find, fo haben fie nach Art. 264, S. 237 denfelben Umfahrungsfinn, und es ift demnach der Sinn aller im Kraftpolygon vorkommenden Kräfte bekannt, wenn der Sinn einer derfelben bekannt ift. Hier ift ftets der Sinn von Q bekannt; denn diefes ift die Transverfalkraft für den bezüglichen Querfchnitt. Q hat den Sinn von α nach β; alfo ift in Fig. 174 Z von β nach γ, d. h. vom Knotenpunkt L ab gerichtet, Y von γ nach δ, und X von δ nach α gerichtet. X wirkt alfo nach dem Knotenpunkt E hin, ift demnach Druck, während Z und Y Zug bedeuten. Richtung, Gröfse und Lage der Transverfalkraft Q für eine gegebene Belaftung find mit Hilfe des Kraft- und Seilpolygons leicht beftimmbar. (Siehe Art. 360, S. 322.)

𝔟) Die Polygonalmethode ift von *Cremona* angegeben worden. 382. *Cremona*'fche Methode.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Randftäbe feien Stäbe, welche zwei auf einander folgende äufsere Knotenpunkte mit einander verbinden, alfo $I\,II$, $II\,III$ .... in Fig. 176; Zwifchenftäbe feien Stäbe, welche zwei nicht auf einander folgende äuſsere Knotenpunkte verbinden, alſo *II V*, *III V* .... in Fig. 176.

Da alle auf das Syſtem wirkenden äuſseren Kräfte im Gleichgewichte ſind, ſo iſt für dieſelben ein geſchloſſenes Kraftpolygon möglich, welches, wenn alle äuſseren Kräfte nach Gröſse und Richtung gegeben ſind, leicht conſtruirt werden kann. Auſserdem ſind an jedem Knotenpunkte die an demſelben wirkenden Kräfte für ſich im Gleichgewicht; es iſt alſo für jeden dieſer Knotenpunkte ein kleines ſecundäres, ſich ſchlieſsendes Kraftpolygon möglich. An jedem Knotenpunkte wirken: eine äuſsere Kraft, die im ſpeciellen Falle Null ſein kann, und die Spannungen der Stäbe, welche ſich in ihm ſchneiden, alſo im Knotenpunkte *II* die Kräfte *2*, *B*, *C*, *a*.

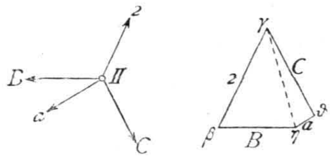
Fig. 176.



In den meiſten der kleinen Kraftpolygone kommt nun je eine äuſsere Kraft vor, welche bereits im groſsen Hauptpolygon der äuſseren Kräfte enthalten iſt; es wird alſo offenbar möglich ſein, jedes kleine Kraftpolygon ſo an das groſse zu legen, daſs die beiden gemeinſame äuſsere Kraft durch dieſelbe Gerade dargeſtellt wird. Da ferner jeder Stab zu zwei Knotenpunkten gehört, ſo kommt jede Stabſpannung in zwei ſecundären Kraftpolygonen vor. Es wird nun durch rationelle Anordnung möglich, die kleinen Kraftpolygone ſo in das groſse einzuſchachteln, daſs nicht nur jede äuſsere Kraft, ſondern auch jede Stabſpannung nur einmal im Kräftezuge vorkommt, d. h. auch die kleinen Kraftpolygone hängen dann ſo zuſammen, daſs die zweien gemeinſame Stabſpannung durch dieſelbe Gerade dargeſtellt wird.

Für die Conſtruction der kleinen Kraftpolygone iſt nun Folgendes zu beachten. Wenn, wie hier, die Richtung ſämmtlicher Kräfte bekannt iſt und das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte ſich ſchlieſst, ſo iſt die Conſtruction deſſelben ſtets möglich, wenn am Knotenpunkte nur 2 unbekannte Kräfte vorhanden ſind. Denn ſeien etwa in Fig. 177 *B* und *2* bekannt, *a* und *C* unbekannt, ſo erfordert das Gleichgewicht, daſs die Reſultirende von *a* und *C* der bekannten Reſultirenden von *2* und *B* der Gröſse nach genau gleich iſt. Die bekannte Reſultirende von *2* und *B* iſt aber die Verbindungslinie $\eta\,\gamma$ im Kraftpolygon, und es iſt dieſelbe im entgegengeſetzten Sinne genommen ohne Schwierigkeit in die beiden Seitenkräfte *C* und *a* zu zerlegen, indem durch den einen Endpunkt, etwa γ, eine Parallele zu *C*, durch den anderen Endpunkt, etwa η, eine Parallele zu *a* gezogen wird. Der Schnittpunkt ϑ ergiebt $\gamma\,\vartheta = C$ und $\vartheta\,\eta = a$. Alsdann iſt $\beta\,\gamma\,\vartheta\,\eta$ das kleine Kraftpolygon für Punkt *II*.

Fig. 177.



Man muſs es demnach bei der Conſtruction der kleinen Kraftpolygone ſo einrichten, daſs ſtets nur 2 Unbekannte da ſind. Zu dem Zwecke beginnt man mit demjenigen Knotenpunkte, in welchem ſich nur 2 Stäbe ſchneiden, hier alſo etwa mit *I* (Fig. 176). Die äuſsere Kraft iſt bekannt; unbekannt ſind demnach nur *A* und *B* und nach Obigem leicht zu ermitteln. Man geht nun zu einem Knotenpunkt über, von welchem man wiederum alle Kräfte mit Ausnahme von zweien kennt, hier zu *II*. Bekannt ſind hier *2* und *B*, unbekannt *C* und *a*, demnach leicht ermittelt. So ſchreitet man weiter. Ein Knotenpunkt, in welchem ſich nur 2 Stäbe ſchneiden, iſt bei den Gitterträgern ſtets vorhanden.

Damit nun jede äuſsere Kraft und jede Stabſpannung nur einmal in dem entſtehenden Kraftzuge — dem Kräfteplan — vorkomme, iſt folgende Regel zu befolgen. Man vereine ſämmtliche äuſseren Kräfte zu einem geſchloſſenen Kraftpolygon, indem man ſie in der Folge der Knotenpunkte oder, wie man ſagt, in cyclifcher Reihenfolge an einander legt, und ziehe nun durch die Eckpunkte diefes Kraftpolygons Parallelen zu den Randftäben derart, dafs die Parallele zu einem Randftabe, etwa zu A, durch denjenigen Eckpunkt des grofsen Kraftpolygons geht, welcher zwifchen den beiden äufseren Kräften liegt, zwifchen denen der betreffende Randftab im Syftem fich befindet. Der Randftab A liegt im Syftem zwifchen den äufseren Kräften 1 und 5; die Parallele zu A wird alfo durch den Punkt α zwifchen 1 und 5 gezogen; eben fo die Parallele zum Randftab B durch β zwifchen 1 und 2 etc. Unter Benutzung der hier gezogenen Parallelen conftruire man nun, wie oben angegeben, die kleinen Kraftpolygone, fo erhält man einen Linienzug zwifchen den Randftäben, in welchem jede einzelne Linie eine Zwifchenftabfpannung darftellt und in welchem jede Zwifchenftabfpannung nur einmal vorkommt. Die auf den Parallelen zu den Randftäben abgefchnittenen Längen geben die Spannungen der Randftäbe an.

Der Sinn der Stabfpannungen wird hier genau in derfelben Weife aus dem Kraftpolygon für einen Knotenpunkt ermittelt, wie im vorhergehenden Artikel angegeben ift.

2) Parallelträger mit Netzwerk.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Um diefe Spannungen für eine beliebige Belaftung zu ermitteln, nennen wir die Mittelkraft aller auf das Fragment links vom Schnitte II (Fig. 178) wirkenden Kräfte Q; da nun für irgend einen Stab CE der oberen Gurtung F der Momenten- oder conjugirte Punkt ift, fo ift das Moment der äufseren Kräfte in Bezug auf diefen Punkt $M = Q\eta$. Daraus folgt als Bedingungsgleichung: 383. Berechnung der Gurtungsfpannungen.

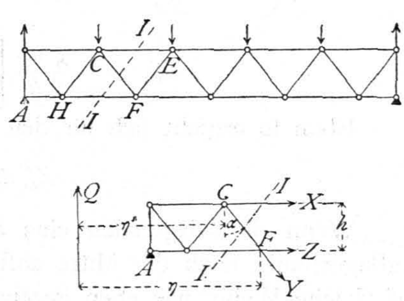
$$0 = M + Xh, \quad \text{woraus} \quad X = -\frac{M}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 194.$$

In gleicher Weife ergiebt fich für C als Momentenpunkt, wenn M_1 das Moment von Q in Bezug auf C ift,

$$0 = M_1 - Zh, \quad \text{woraus} \quad Z = \frac{M_1}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 195.$$

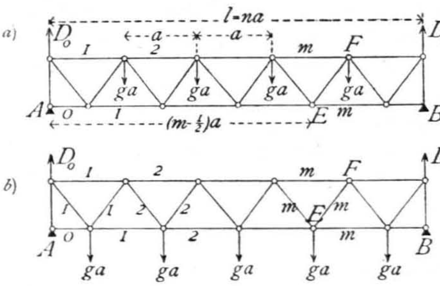
Da bei einem Träger auf zwei Stützen M ftets die angegebene Drehrichtung hat (ftets pofitiv ift, vergl. Art. 358, S. 317), fo folgt aus den Gleichungen 194. und 195: Bei Trägern auf zwei Stützen werden die oberen Gurtungsftäbe ftets gedrückt, die unteren Gurtungsftäbe ftets gezogen. Ferner: X_{max} und Z_{max} wird bei derfelben Belaftung wie M_{max} ftattfinden, d. h. in jedem Gurtungsftabe findet Maximalbeanfpruchung bei derjenigen Belaftung ftatt, bei welcher das Moment für den dem Stabe conjugirten Punkt fein Maximum erreicht. Wird gleichmäfsig vertheilte Belaftung zu Grunde gelegt, fo findet für jeden Querfchnitt das Maximalmoment bei voller Belaftung ftatt; fämmtliche Gurtungsftäbe werden demnach bei totaler Belaftung am meiften beanfprucht.

Fig. 178.



a)' Das Eigengewicht der Conftruction kann als eine gleichmäfsig über die Länge des Trägers vertheilte Belaftung angefehen werden. Wir bezeichnen es mit g pro Längeneinheit und machen die vereinfachende Annahme, dafs alle Belaftungen durch Eigengewicht nur in der einen Gurtung angreifen, welche Annahme für die Hochbau-Praxis ftets ausreichen wird. Die Entfernung der Knotenpunkte fei a (Fig. 179), die Felderzahl des Trägers n, mithin $l = na$. Jeder Mittenknotenpunkt

Fig. 179.



iſt mit $g a$ belaſtet; die Belaſtungen der Knotenpunkte über den Auflagern berückſichtigen wir nicht, weil dieſe direct vom Auflager aufgenommen werden.

Greifen die Laſten an der oberen Gurtung an (Fig. 179 *a*), ſo iſt bei der angenommenen Diagonalenanordnung die Auflager-Reaction $D_0 = D_1 = (n-1)\,\frac{g a}{2}$. Für den m-ten Stab der oberen Gurtung iſt E der conjugirte Punkt, und

$$M = D_0 \left(m - \frac{1}{2}\right) a - (m-1)\, g\, a \left(\frac{m-2}{2}\, a + \frac{a}{2}\right),$$

$$M = \frac{g\, a^2}{2} \left[(n+1)\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2\right];$$

$$X_m^g = -\,\frac{g\, a^2}{2\,h} \left[(n+1)\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 196.$$

Für den m-ten Stab der unteren Gurtung iſt F der conjugirte Punkt, und

$$M_1 = D_0\, m\, a - (m-1)\, g\, a\, \frac{m\, a}{2} = \frac{g\, a^2}{2}\, m\,(n-m);$$

$$Z_m^g = \frac{g\, a^2}{2\,h}\, m\,(n-m) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 197.$$

Greifen die Laſten an der unteren Gurtung an, ſo iſt bei der in Fig. 179 *b* gezeichneten Diagonalenanordnung die Auflager-Reaction $D_0 = D_1 = \frac{n\, g\, a}{2}$. Für den m-ten Stab der oberen Gurtung iſt wiederum E der conjugirte Punkt, und

$$M = D_0 \left(m - \frac{1}{2}\right) a - (m-1)\, g\, a\, \frac{m\, a}{2} = \frac{g\, a^2}{2} \left[m\,(n - m + 1) - \frac{n}{2}\right];$$

$$X_m^g = -\,\frac{g\, a^2}{2\,h} \left[m\,(n - m + 1) - \frac{n}{2}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 198.$$

Eben ſo ergiebt ſich für den m-ten Stab der unteren Gurtung

$$Z_m^g = \frac{g\, a^2}{2\,h}\, m\,(n-m) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 199.$$

Wenn die Diagonalen eine andere Richtung haben, ſo daſs die erſte vom Auflagerpunkt nach der Mitte anſteigt, ſo ergeben ſich etwas andere Formeln, die auf gleiche Weiſe, wie eben gezeigt, zu ermitteln ſind.

b) Die gröſsten Gurtungsſpannungen in Folge **mobiler gleichmäſsig vertheilter Belaſtung** finden ſtatt, wenn der ganze Träger belaſtet iſt. Nennen wir die gleichmäſsig vertheilte mobile Belaſtung pro Längeneinheit p, ſo ergeben ſich offenbar für dieſe Belaſtung, die pro Knotenpunkt gleich $p\, a$ iſt, genau dieſelben Formeln, wie für das Eigengewicht, wobei nur g durch p zu erſetzen iſt. Wir erhalten alſo für an der oberen Gurtung angreifende Laſten (Fig. 179 *a*)

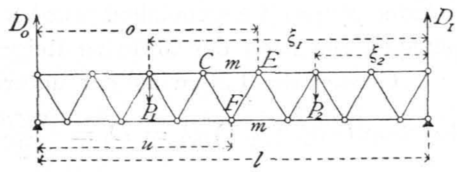
$$X_m^p = -\,\frac{p\, a^2}{2\,h} \left[(n+1)\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2\right] \text{ und } Z_m^p = \frac{p\, a^2}{2\,h}\, m\,(n-m), \; . \quad 200.$$

für an der unteren Gurtung angreifende Laſten (Fig. 179 *b*)

$$X_m^p = -\frac{p\,a^2}{2\,h}\left[m\,(n-m+1)-\frac{n}{2}\right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p\,a^2}{2\,h}\;m\,(n-m) \quad . \quad . \quad 201.$$

c) Findet eine Belaftung des Trägers durch Einzellaften P_1, P_2, P_3, (Fig. 180) ftatt, fo ift die Auflager-Reaction $D_0 = \frac{P_1\,\xi_1}{l} + \frac{P_2\,\xi_2}{l} = \Sigma\left(\frac{P\,\xi}{l}\right)$. Für den m-ten Stab der oberen, bezw. der unteren Gurtung betragen die Spannungen

Fig. 180.

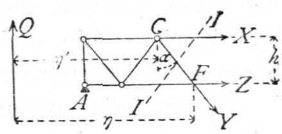


$$X_m = -\frac{D_0\,u - P_1\,\frac{3}{2}\,a}{h} \quad \text{und} \quad Z_m = \frac{D_0\,o - P_1\,.\,2\,a}{h} \quad . \quad . \quad 202.$$

384. Berechnung d. Gitterftabs-fpannungen.

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterftäben. Es fei für eine beliebige Belaftung die Mittelkraft aller auf das Fragment links vom Schnitt II (Fig. 181) wirkenden Kräfte Q; alsdann ift für eine nach rechts fallende Diagonale

Fig. 181.



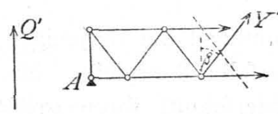
$$0 = Q - Y\cos\alpha, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos\alpha} \quad . \quad 203.$$

und für eine nach rechts fteigende Diagonale (Fig. 182)

$$0 = Q' + Y'\cos\beta, \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{Q'}{\cos\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 204.$$

α) Das Eigengewicht erzeugt, wenn die Laften an der oberen Gurtung angreifen, die Auflager-Reaction (Fig. 179 a) $D_0 = D_1 = (n-1)\,\frac{g\,a}{2}$. Für den m-ten nach rechts fallenden Stab ift

Fig. 182.



$$Q_m = (n-1)\,\frac{g\,a}{2} - (m-1)\,g\,a = \frac{g\,a}{2}\,(n-2\,m+1),$$

fonach

$$Y_m^g = \frac{g\,a}{2\cos\alpha}\,(n-2\,m+1); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 205$$

für den m-ten nach rechts fteigenden Stab ift

$$Q_m' = \frac{g\,a}{2}\,(n-2\,m+1), \quad \text{daher} \quad Y_m'^{\,g} = -\frac{g\,a}{2\cos\beta}\,(n-2\,m+1)\;. \quad 206.$$

Y_m^g ift pofitiv, wenn der Klammerfactor $n - 2\,m + 1 > 0$ ift, d. h. wenn $m < \frac{n+1}{2}$; negativ, wenn $m > \frac{n+1}{2}$ ift. Bei geradem n ift für alle Felder links von der Mitte $m < \frac{n+1}{2}$, für alle Felder rechts von der Mitte $m > \frac{n+1}{2}$. Mithin werden alle nach rechts fallenden Diagonalen links von der Mitte gezogen, rechts von der Mitte gedrückt. $Y_m'^{\,g}$ ift negativ, d. h. die m-te rechts fteigende Diagonale wird gedrückt, wenn der Klammerfactor pofitiv ift; $Y_m'^{\,g}$ ift pofitiv, d. h. die m-te rechts fteigende Diagonale wird gezogen, wenn der Klammerfactor negativ ift. Mithin werden die nach rechts fteigenden Diagonalen links von der Mitte gedrückt, rechts von der Mitte gezogen.

Bei ungerader Felderzahl ift für alle Felder links vom Mittelfelde $m < \frac{n+1}{2}$, d. h. Y^g Zug und $Y'^{\,g}$ Druck. Für alle Felder rechts vom Mittelfelde ift $m > \frac{n+1}{2}$, mithin Y^g Druck und $Y'^{\,g}$

Zug. Für das Mittelfeld ist $m = \frac{n+1}{2}$, d. h. der Klammerfactor gleich Null; demnach ist in den zum Mittelfelde gehörigen Diagonalen die durch das Eigengewicht erzeugte Spannung gleich Null.

Allgemein ergiebt sich: Bei gleichmäfsig über den Träger vertheilter Belastung g (oder p) pro Längeneinheit werden die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt.

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an, so ergiebt sich die Auflager-Reaction (Fig. 179 *b*) $D_0 = D_1 = \frac{n g a}{2}$, und für die m-te rechts fallende Diagonale

$$Y = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 2), \quad \ldots \ldots \quad 207.$$

für die m-te rechts steigende Diagonale

$$Y' = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2m) \quad \ldots \ldots \quad 208.$$

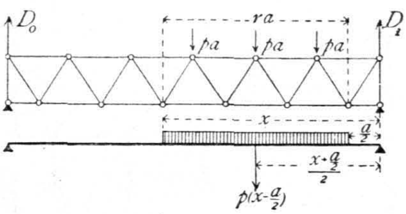
Das Gesetz, dafs bei dieser Belastungsart die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt werden, ist auch hier giltig und ergiebt sich in derselben Weise, wie soeben für an der oberen Gurtung angreifende Lasten gezeigt wurde.

b) Um die ungünstigsten Gitterstabspannungen, welche in Folge mobiler Belastung entstehen, zu ermitteln, erwäge man, dafs bei beliebiger Belastung für rechts fallende Diagonalen nach Gleichung 203. $Y = \frac{Q}{\cos \alpha}$ und für rechts steigende Diagonalen nach Gleichung 204. $Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta}$ ist. Das Maximum von Y findet demnach bei derjenigen Belastung statt, bei welcher sich das Maximum der Transversalkraft ergiebt. Nach Art. 362, S. 325 hat aber die Transversalkraft für einen Querschnitt ihren gröfsten positiven Werth, wenn der Trägertheil rechts von dem betrachteten Querschnitte belastet, der Trägertheil links davon unbelastet ist, ihren gröfsten negativen Werth bei der umgekehrten Belastung. Daraus folgt: Jede nach rechts fallende Diagonale erleidet den gröfsten Zug durch mobile Belastung, wenn die rechts vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belastet, die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte unbelastet sind; dagegen den gröfsten Druck, wenn die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belastet, die übrigen unbelastet sind. Da $Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta}$, so findet in den nach rechts steigenden Diagonalen der gröfste Druck statt, wenn nur die Knotenpunkte rechts vom Schnitte, der gröfste Zug, wenn nur die Knotenpunkte links vom Schnitte belastet sind.

Allgemeiner kann die Regel wie folgt ausgesprochen werden: Jede Diagonale erleidet den gröfsten Zug, wenn nur die Knotenpunkte zwischen ihrem Fufspunkte und demjenigen Auflager, nach welchem dieser Fufspunkt zeigt, belastet sind; jede Diagonale erleidet den gröfsten Druck, wenn nur die Knotenpunkte zwischen ihrem Kopfpunkte und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem dieser Kopfpunkt hinweist. Dieser Satz gilt allgemein, ob die Lastpunkte an der oberen oder unteren Gurtung liegen.

Die positiven, bezw. negativen Maximalwerthe für Y und Y' ergeben sich nun in folgender Weise. Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 183), so ist Q genau eben so grofs, als wenn bei dem homogen angenommenen Träger die Einzellaften pa je auf die Längen a gleichmäfsig vertheilt wären, d. h. als wenn die Laft p pro Längeneinheit von der Mitte des äufserften Feldes am rechten, bezw. linken Auflager bis zur Mitte desjenigen Feldes der oberen Gurtung vorgerückt ift, dem die Diagonale angehört. Denn im erften Falle ift, wenn r belaftete Knotenpunkte vorhanden find,

Fig. 183.



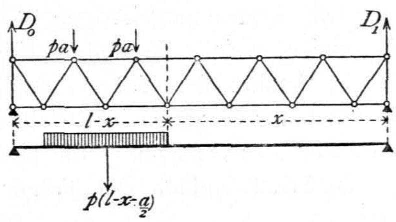
$$D_0 = \frac{rap}{l}\left(\frac{ra}{2}+\frac{a}{2}\right) = \frac{rpa^2}{2l}(r+1),$$

und da $x = ra + \frac{a}{2} = a\left(r+\frac{1}{2}\right)$, alfo $x + \frac{a}{2} = a(r+1)$ ift, fo wird

$$D_0 = \left(x+\frac{a}{2}\right)\frac{rpa}{2l} = \frac{p}{2l}\left(x+\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2l}\left[x^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right].$$

Derfelbe Werth ergiebt fich für den homogenen Träger in Fig. 183, nämlich $D_0 = \frac{p}{2l}\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x+\frac{a}{2}\right)$. Es gilt dies allgemein, falls die den Auflagern zunächft liegenden Knotenpunkte der mobil belafteten Gurtung um eine ganze Feldweite von den Auflagern abliegen.

Fig. 184.



Nun ift für diejenigen Diagonalen, für welche die gezeichnete Belaftung Maximalzug bezw. Maximaldruck erzeugt, $Q_{max} = D_0$, daher

$$Y_{max} = \frac{p}{2l\cos\alpha}\left[x^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]. \quad 209.$$

In gleicher Weife ergiebt fich nach Fig. 184

$$D_0 = \frac{p\left(l-x-\frac{a}{2}\right)}{l}\left(x+\frac{l-x-\frac{a}{2}}{2}\right) = \frac{p}{2l}\left[\left(l-\frac{a}{2}\right)^2-x^2\right];$$

$$Q_{x\,min} = \frac{p}{2l}\left[\left(l-\frac{a}{2}\right)^2-x^2\right]-p\left(l-\frac{a}{2}-x\right) = -\frac{p}{2l}\left[(l-x)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right],$$

$$\text{und}\quad Y_{min} = -\frac{p}{2l\cos\alpha}\left[(l-x)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 210.$$

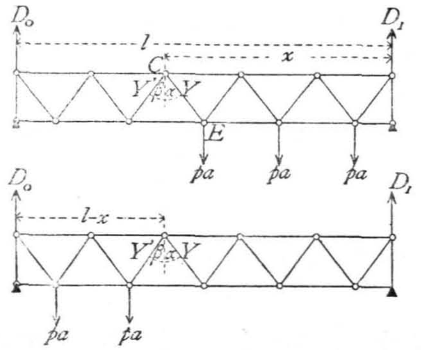
Dem entfprechend wird

$$Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos\beta} = -\frac{p}{2l\cos\beta}\left[x^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \; . \quad 211.$$

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos\beta} = \frac{p}{2l\cos\beta}\left[(l-x)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \; . \quad 212.$$

Greifen die Laften an der unteren Gurtung an (Fig. 185), fo ift (wenn mit ganz geringem Fehler die Belaftung der beiden den Auflagern zunächft liegenden Knotenpunkte gleichfalls mit pa eingeführt wird) Q_{max}, bezw. Q_{min} eben fo grofs, wie bei einem homogenen Träger, bei welchem die Laft p pro Längeneinheit vom rechten, bezw. linken Auflager aus bis zur Mitte desjenigen Feldes der unteren

Fig. 185.



Gurtung vorgerückt iſt, welchem die Diagonale angehört. Der Beweis iſt in gleicher Weiſe, wie oben, zu führen und gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächſt liegenden Knotenpunkte der mobil belaſteten Gurtung um eine halbe Feldweite von den Auflagern entfernt ſind. Demnach iſt

$$Q_{max} = \frac{p\, x^2}{2\, l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = - \frac{p\, (l - x)^2}{2\, l}.$$

x bedeutet in dieſen Gleichungen den Abſtand der Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vom rechten Auflager, zu welchem die Diagonale gehört.

Es ergiebt ſich nun

$$Y_{max} = \frac{p\, x^2}{2\, l \cos \alpha} \quad \text{und} \quad Y_{min} = - \frac{p\, (l - x)^2}{2\, l \cos \alpha}, \quad \ldots \quad 213.$$

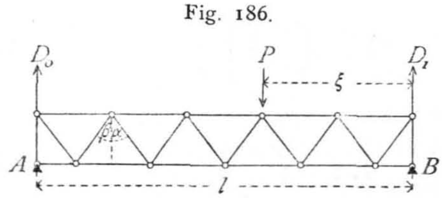
$$Y'_{min} = - \frac{p\, x^2}{2\, l \cos \beta} \quad \text{und} \quad Y'_{max} = \frac{p\, (l - x)^2}{2\, l \cos \beta} \quad \ldots \quad 214.$$

Die zuſammengehörigen Werthe von Y und Y' beziehen ſich auf zwei Diagonalen, welche demſelben Felde der unteren Gurtung angehören.

c) Erfährt der Träger eine totale Belaſtung p pro Längeneinheit, ſo ſind die sub a für Eigengewichtbelaſtung gefundenen Werthe auch für dieſen Fall giltig, wenn ſtatt des dortigen g die Gröſse p eingeführt wird.

d) Wird endlich der Träger durch Einzellaſten beanſprucht (Fig. 186), ſo erzeugt die Laſt P im Abſtande ξ von B die Reaction $D_0 = \frac{P \xi}{l}$. In ſämmtlichen rechts fallenden Diagonalen links vom Laſtpunkt wird dann $Y = \frac{D_0}{\cos \alpha} = \frac{P \xi}{l \cos \alpha}$; in ſämmtlichen rechts ſteigenden Diagonalen links vom Laſtpunkte iſt $Y' = - \frac{P \xi}{l \cos \beta}$. Eben ſo iſt für alle Querſchnitte rechts vom Laſtpunkte $Q = D_0 - P = - \frac{P (l - \xi)}{l}$,

Fig. 186.

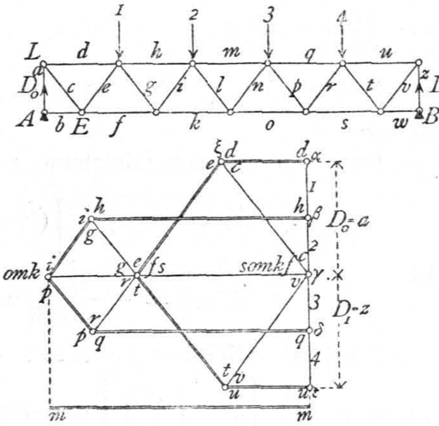


mithin für die nach rechts fallenden Diagonalen dieſer Strecke $Y_1 = - \frac{P (l - \xi)}{l \cos \alpha}$, für die nach rechts ſteigenden Diagonalen dieſer $Y_1' = \frac{P (l - \xi)}{l \cos \beta}$. Daraus folgt die Regel: Die nach dem Laſtpunkte zu fallenden Diagonalen werden gezogen, die nach demſelben ſteigenden Diagonalen werden gedrückt.

385. Graphiſche Ermittelung der Spannungen.

β) Graphiſche Ermittelung der Spannungen. Setzen wir zunächſt eine gleichmäſsig vertheilte Belaſtung (Eigengewicht, bezw. totale mobile Belaſtung) voraus, ſo macht es für die Conſtruction keinen weſentlichen Unterſchied, ob die Laſten an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen. Wenn in jedem Knotenpunkte, z. B. der oberen Gurtung (Fig. 187) die Belaſtung $g\, a$, bezw. $p\, a$ wirkt, ſo empfiehlt fich für die Ermittelung der Spannungen die Polygonalmethode, weil diefelbe fämmtliche Stabfpannungen in einem Linienzuge giebt.

Fig. 187.



Nachdem D_0 und D_1 auf bekannte Art gefunden find, trägt man fämmtliche äufseren Kräfte *1, 2, 3, 4,* D_1 und D_0 in cyclifcher Reihenfolge an einander. Es fei $\alpha\beta = 1$, $\beta\gamma = 2$ etc.; nun trägt man an ε (den Endpunkt von *4*) $D_1 = \varepsilon\gamma$ und $D_0 = \gamma\alpha$. Damit fchliefst fich das Kraftpolygon der äufseren Kräfte. Wir gehen nun von demjenigen Knotenpunkte, in welchem fich nur 2 Stäbe fchneiden, d. h von A aus. In A wirken D_0, a und b; die Zerlegung von D_0 in die beiden Componenten a und b ergiebt $a = D_0$ und $b = 0$. Im Knotenpunkte L wirken jetzt a, c und d. Bei der Zerlegung von a $(= \gamma\alpha)$ ift zu beachten, dafs die Parallele zum Randftabe d durch den Punkt im Kraftpolygon gehen mufs, der zwifchen D_0 und *1* liegt, d. h. durch α. Man erhält $\alpha\xi = d$ und $\xi\gamma = c$. (Nach Art. 381, S. 341 ift d Druck und c Zug.) Geht man nun zum Knotenpunkte E über, fo wirken dafelbft $(b = o)$ c, e und f; bekannt ift $c = \gamma\xi$. Demnach find e und f durch Zerlegung zu ermitteln, wobei die Parallelle zum Randftabe f durch den Punkt γ im Kraftpolygon gehen mufs, welcher zwifchen D_1 und D_0 liegt, da der Randftab f im Syftem fich zwifchen den Kräften D_0 und D_1 befindet. Man erhält leicht e und f. (Da c, wie oben gefunden, Zug ift, erhält e Druck, f Zug.) Geht man fo weiter, fo ergiebt fich der in Fig. 187 gezeichnete Kräfteplan. In demfelben find die Druckfpannungen durch doppelte, die Zugfpannungen durch einfache Linien bezeichnet; m ift Druck, fällt aber mit einer Anzahl von Zugfpannungen zufammen und ift desfhalb befonders herausgezeichnet. Die Endpunkte der Stabfpannungen find ftets durch diefelben Buchftaben bezeichnet, welche die bezüglichen Stäbe im Syftem führen. Die Spannungen b, l, n, w werden gleich Null.

Uebergehen wir nunmehr dazu, die Maximalfpannungen in den Gitterftäben, welche durch mobile Belaftung hervorgebracht werden, zu beftimmen, fo war, wenn die Laften an der oberen Gurtung angreifen, oder allgemein, wenn die an der mobil belafteten Gurtung gelegenen Knotenpunkte zunächft den Auflagern von diefen um eine ganze Feldweite a entfernt find, nach Art. 384, S. 347 für die nach rechts fallenden Diagonalen

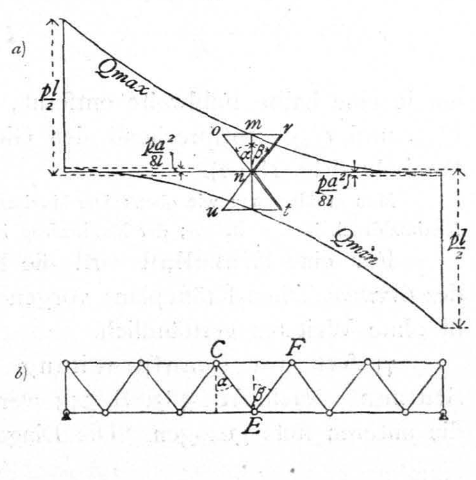
$$Y_{max} = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{Q_{max}}{\cos\alpha}.$$

Die graphifche Darftellung von

$$Q_{max} = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

ergiebt eine Parabel.

Fig. 188.



Für $x = 0$ wird $Q_{max} = -\frac{p\,a^2}{8\,l}$; für $x = l$ wird $Q_{max} = \frac{p}{2\,l}\left[l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{p\,l}{2} - \frac{p\,a^2}{8\,l}$. Q_{max} wird Null für $x = \frac{a}{2}$; die Curve hat ein Minimum für $0 = 2x$, d. h. für $x = 0$. Danach ift die Curve in Fig. 188 *a* conftruirt.

Hier find diejenigen Ordinaten der Curve als Werthe von Q_{max} einzuführen, welche den Fufspunkten der betreffenden Diagonalen entfprechen. Für die Diagonale CE ergiebt fich mn als Werth von Q_{max}. Die durch n parallel zur Diagonale CE gezogene Linie no giebt den Werth von $Y = \frac{Q_{max}}{\cos\alpha}$; denn es iſt $\overline{no} = \frac{mn}{\cos\alpha} = \frac{Q_{max}}{\cos\alpha}$.

Nach Gleichung 211. iſt $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos\beta}$, alſo nr der gröſste Druck in der rechts ſteigenden Diagonale EF.

Es iſt ferner nach Gleichung 210. und 212.

$$Y_{min} = -\frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{Q_{min}}{\cos\alpha}$$

und

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos\beta} = \frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\cos\beta}.$$

Wird die Differenz $l - x = \xi$ geſetzt, ſo ergiebt ſich, daſs die Curve für $Q_{min} = -\frac{p}{2l}\left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$ derjenigen für Q_{max} congruent iſt.

Für $\xi = 0$ iſt $Q_{min} = +\frac{pa^2}{8l}$; für $\xi = l$ iſt $Q_{min} = -\frac{p}{2l}\left[l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = -\frac{pl}{2} + \frac{pa^2}{8l}$.

Man erhält die in Fig. 188 *a* gezeichnete Curve, in welcher für die rechts fallende Diagonale CE das Minimum nt, für die rechts ſteigende Diagonale das Maximum nu eingezeichnet iſt.

Greifen die Laſten an der unteren Gurtung an oder allgemein, ſind die an der mobil belaſteten Gurtung gelegenen Knotenpunkte zunächſt den Auflagern von dieſen

Fig. 189.

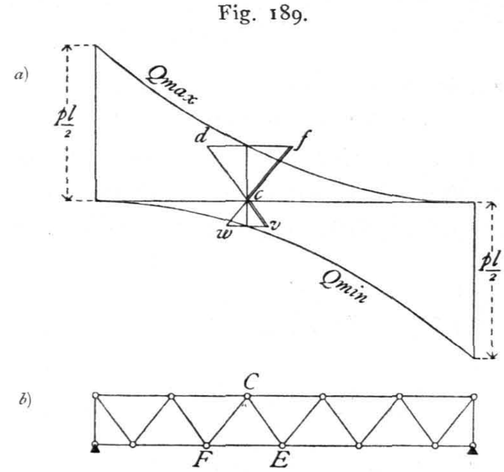
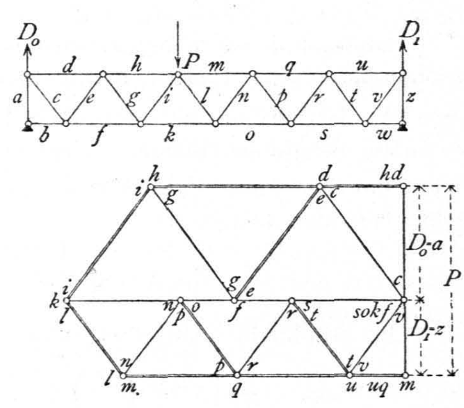


Fig. 190.



um je eine halbe Feldweite entfernt, ſo ergiebt die Verzeichnung der Curven für Q_{max} und Q_{min} entſprechend den Gleichungen in Art. 384, S. 348 oben ſtehende Parabeln (Fig. 189 *a*).

Man erhält genau wie oben: Der Maximalzug in CE iſt cd; der Maximaldruck in CF iſt cf; der Maximaldruck in CE iſt cv; der Maximalzug in CF iſt cw.

Für eine Einzellaſt wird die Ermittelung der Spannungen bequem mittels des *Cremona*'ſchen Kräfteplans vorgenommen, wie in Fig. 190 geſchehen iſt; dieſelbe iſt ohne Weiteres verſtändlich.

γ) Art der Beanſpruchung der Stäbe bei einem Träger auf zwei Stützen. Nach Art. 383, S. 343 werden die oberen Gurtungsſtäbe ſtets gedrückt, die unteren ſtets gezogen. Die Diagonalen erhalten verſchiedene Beanſpruchungen.

Durch das Eigengewicht erhalten die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Zug, die nach der Mitte zu fteigenden Diagonalen Druck; durch die ungünftigfte mobile Belaftung erhalten im Allgemeinen alle Diagonalen fowohl Zug, wie Druck. Wenn der gröfste Druck, der in einer Diagonalen durch mobile Belaftung entfteht, kleiner ift, als der Zug durch das Eigengewicht, fo erleidet die Diagonale nur Zug, umgekehrt nur Druck. Für die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen nahe dem Auflager ift der Zug in Folge des Eigengewichtes meiftens viel gröfser, als der gröfste Druck durch mobile Belaftung, und es werden daher diefe Diagonalen meiftens nur gezogen. Eben fo ergiebt fich, dafs die nahe dem Auflager befindlichen, nach der Mitte zu anfteigenden Diagonalen nur Druck erhalten. Die Diagonalen in dem mittleren Theile des Trägers werden dagegen fowohl gezogen, wie gedrückt.

3) Parallelträger mit Fachwerk.

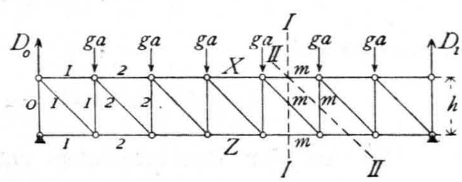
α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Für eine beliebige Belaftung wird im vorliegenden Falle genau fo, wie in Art. 383, S. 343, wenn M das Biegungsmoment für den einem oberen Gurtungsftabe conjugirten Punkt, M' das Biegungsmoment für den einem unteren Gurtungsftabe conjugirten Punkt bezeichnet, 386. Berechnung d. Gurtungsfpannungen.

$$X = -\frac{M}{h} \quad \text{und} \quad Z = \frac{M'}{h} \qquad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 215.$$

Auch hier findet das Maximum der Beanfpruchung der Gurtungsftäbe bei totaler Belaftung des Trägers ftatt.

Für die Belaftung durch Eigengewicht, bezw. totale gleichmäfsig vertheilte mobile Belaftung (Fig. 191) ift die Spannung in den Gurtungsftäben davon unabhängig, ob die Laften an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen. Es ift die Auflager-Reaction

Fig. 191.



$$D_0 = D_1 = (n-1)\,\frac{g\,a}{2}.$$

Für den m-ten Stab der oberen, bezw. der unteren Gurtung erhält man die durch das Eigengewicht g pro Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_g = -\frac{g\,a^2\,m\,(n-m)}{2\,h} \quad \text{und} \quad Z_g = \frac{g\,a^2}{2\,h}\,(m-1)\,(n-m+1) \quad . \ 216.$$

und die durch totale mobile Belaftung p pro Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_p = -\frac{p\,a^2\,m\,(n-m)}{2\,h} \quad \text{und} \quad Z_p = \frac{p\,a^2}{2\,h}\,(m-1)\,(n-m+1) \quad . \ 217.$$

X_p und Z_p find zugleich die Maximalfpannungen, die durch mobile Belaftung hervorgebracht werden.

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterftäben. Für das Fragment in Fig. 192 fei bei beliebiger Belaftung die Transverfalkraft Q; alsdann ift für die Spannung in der Diagonalen 387. Berechnung d. Gitterftabsfpannungen.

$$Y\cos\alpha = Q, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos\alpha} \qquad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 218.$$

Ift in Fig. 193 die Transverfalkraft für das Fragment Q', fo ift die Spannung in der Verticalen

$$V = - Q' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 219.$$

Fig. 192.

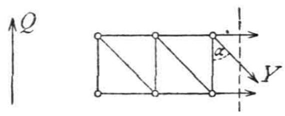
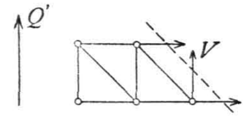


Fig. 193.



Für die Diagonalen iſt es, da der Schnitt vertical gelegt werden kann, gleichgiltig, ob die Laſt in der oberen oder unteren Gurtung liegt; für die Verticalen dagegen ergiebt ſich, da der Schnitt bei dieſen ſchräg gelegt wird, ein weſentlich anderes Q', wenn die Laſt oben, als wenn ſie unten liegt.

α) Das Eigengewicht erzeugt (Fig. 191) die Auflager-Reaction $D_0 = (n-1)\,\frac{g\,a}{2}$. Um die Spannung in den Diagonalen zu finden, führen wir den Schnitt II durch die m-te Diagonale; alsdann iſt die Transverſalkraft $Q_m = D_0 - (m-1)\,g\,a = \frac{g\,a}{2}\,(n - 2\,m + 1)$ und

$$Y_g = \frac{Q_m}{\cos\alpha} = \frac{g\,a}{2\cos\alpha}\,(n - 2\,m + 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 220.$$

Denſelben Ausdruck fanden wir in Art. 384, S. 345, Gleichung 205. für die beim Netzwerk rechts fallenden Diagonalen. Die in Bezug auf Zug und Druck dort gefundenen Reſultate gelten demnach auch hier. Die nach der Mitte fallenden Diagonalen erhalten durch das Eigengewicht Zug; die nach der Mitte ſteigenden Diagonalen erhalten Druck.

Für die Ermittelung der Spannungen in den Verticalen iſt zu unterſcheiden, ob die Laſtpunkte oben oder unten ſich befinden. Im erſteren Falle (Fig. 191) iſt

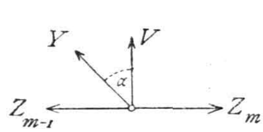
$$V_m = - Q_m = - \frac{g\,a}{2}\,(n - 2\,m + 1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 221.$$

im zweiten Falle

$$V'_m = - Q'_m = - \frac{g\,a}{2}\,(n - 1 - 2\,m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 222.$$

Die Art der Beanſpruchung ergiebt ſich entweder, wie oben in Art. 384, S. 345 gezeigt wurde, oder durch Betrachtung eines beliebigen nicht belaſteten Knotenpunktes (Fig. 194). An einem Knotenpunkte der unteren Gurtung wirken, wenn etwa die Laſten an der oberen Gurtung angenommen werden, nur die Spannungen der Stäbe, welche ſich an ihm kreuzen. Die algebraiſche Summe aller Verticalcomponenten muſs Null ſein, d. h. es muſs $0 = Y\cos\alpha + V$ und $V = - Y\cos\alpha$ ſein. Hieraus folgt der Satz: Die beiden Gitterſtabsſpannungen am Knotenpunkte der nicht belaſteten Gurtung haben entgegengeſetzte Beanſpruchung; die Belaſtung, welche in einer Diagonalen Zug erzeugt, erzeugt in derjenigen Verticalen, welche mit ihr an einem Knotenpunkte der nicht belaſteten Gurtung zuſammentrifft, Druck und umgekehrt.

Fig. 194.



β) Für die ungünſtigſte Beanſpruchung der Gitterſtäbe, welche durch mobile Belaſtung hervorgebracht wird, ergiebt ſich betreff der Diagonalen durch dieſelbe Beweisführung, wie in Art. 384, S. 346, die gleiche Regel wie dort. Für die Verticalen ergiebt ſich zugleich aus dem Schluſsſatze unter α: Jede Verticale erhält ihren gröſsten Druck (bezw. Zug) bei derjenigen Belaſtung, bei welcher die mit ihr an einem unbelafteten Knotenpunkte zufammentreffende Diagonale ihren gröfsten Zug (bezw. Druck) erhält.

Fig. 195.

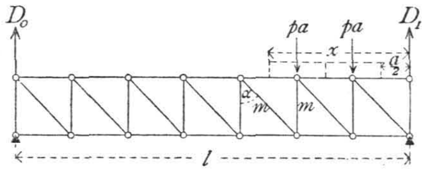
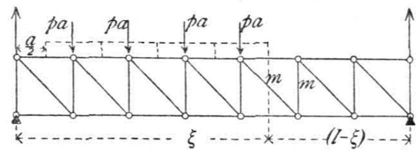


Fig. 196.



Wirken die Laften an der oberen Gurtung, fo ergeben fich die Werthe für die Spannungen, wenn wir wiederum zur Ermittelung von Q die Knotenpunktsbelaftungen durch gleichförmig vertheilte Laften erfetzt denken, wie folgt. Für das Maximum von Y_m und das Minimum von V_m ergiebt fich nach Fig. 195 die Auflager-Reaction

$$D_0 = \frac{p\left(x - \frac{a}{2}\right)}{2l}\left(x + \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = Q_m.$$

Sonach

$$Y_{m \atop max} = \frac{p}{2l \cos \alpha}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad \text{und} \quad V_{m \atop min} = -\frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad 223.$$

Für Y_{min} und V_{max} findet man nach Fig. 196

$$D_0 = \frac{p\left(\xi - \frac{a}{2}\right)\left[\frac{\xi - \frac{a}{2}}{2} + l - \xi\right]}{l} = p\left(\xi - \frac{a}{2}\right) - \frac{p}{2l}\left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right];$$

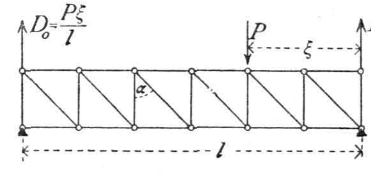
$$Q = -\frac{p}{2l}\left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right];$$

$$Y_{m \atop min} = -\frac{p}{2l \cos \alpha}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad \text{und} \quad V_{m \atop max} = -\frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \; 224.$$

x bedeutet den Abftand der Mitte desjenigen Feldes, zu dem die Diagonale gehört, vom rechten Auflager; bei den Verticalen die Mitte des Feldes, zu welchem diejenige Diagonale gehört, die mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der nicht belafteten Gurtung zufammentrifft (hier alfo der unteren Gurtung).

Greifen die Laften an der unteren Gurtung an, fo ftimmen die Formeln für die Diagonalen genau mit den eben entwickelten; auch diejenigen für die Verticalen, wenn man beachtet, dafs x den foeben erwähnten Werth hat, dafs fich alfo x hier auf die Mitte des Feldes bezieht, zu dem die Diagonale gehört, welche mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der oberen Gurtung fich fchneidet.

Fig. 197.



c) Wenn der Träger durch eine Einzellaft belaftet wird (Fig. 197), fo erhält jede Diagonale zwifchen dem Laftpunkt und dem linken Auflager, nach welchem hier die Diagonalen fteigen, einen Zug

$$Y = \frac{P\xi}{l \cos \alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 225.$$

jede Verticale auf diefer Seite der Laft einen Druck

$$V = -\frac{P\,\xi}{l}. \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad 226.$$

Jede Diagonale zwifchen dem Laftpunkt und dem rechten Auflager, nach dem die Diagonalen hier fallen, erhält einen Druck

$$Y = -\frac{P\,(l-\xi)}{l \cos \alpha}, \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad 227.$$

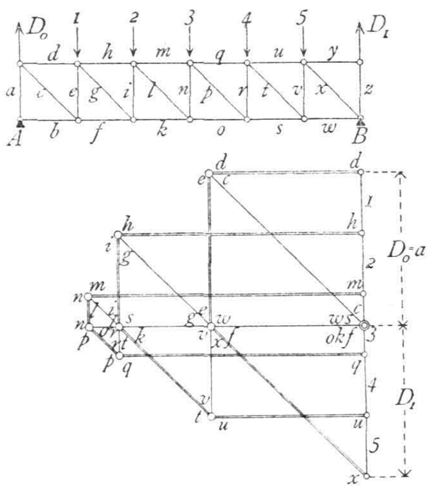
jede Verticale auf diefer Seite einen Zug

$$V = \frac{P\,(l-\xi)}{l}. \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad 228.$$

388. Graphifche Ermittelung der Spannungen.

γ) Graphifche Ermittelung der Spannungen. Der Träger fei durch eine gleichmäfsig vertheilte Laft (Eigengewicht, bezw. totale mobile Belaftung) belaftet; in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung wirke die Laft $g\,a$, bezw. $p\,a$. Hiernach ift in Fig. 198 der Kräfteplan nach der *Cremona*'fchen Methode conftruirt, worüber weitere Bemerkungen unnöthig find.

Fig. 198.



Wenn die Zeichnung für eine Belaftung g pro Längeneinheit conftruirt ift, fo geben die Längen der einzelnen Linien auch zugleich die Beanfpruchungen für die Belaftung p pro Längeneinheit, falls diefelben nur auf einem Mafsftabe abgegriffen werden, auf welchem diejenige Länge $p\,a$ bedeutet, welche vorher $g\,a$ bedeutet hatte.

Sind die Maximalfpannungen in den Gitterftäben, welche durch mobile Belaftung erzeugt werden, zu beftimmen, fo ergiebt die Vergleichung der in Art. 387, S. 353 für $Y_{\substack{max\\min}}$ und $V_{\substack{max\\min}}$ gefundenen Werthe mit den in Art. 384, S. 347 für den Parallelträger mit Netzwerk gefundenen Werthen für Y und Q die genaue Uebereinftimmung beider, falls x den in Art. 387, S. 353 angegebenen Werth hat.

Die unten ftehende Curve (Fig. 199) ergiebt demnach die Werthe für Q_{max},

Fig. 199.

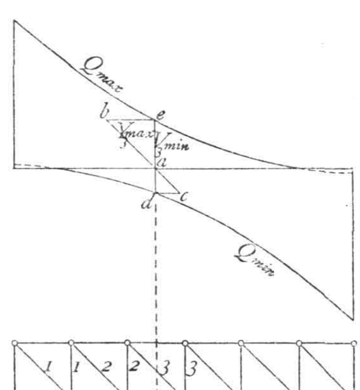
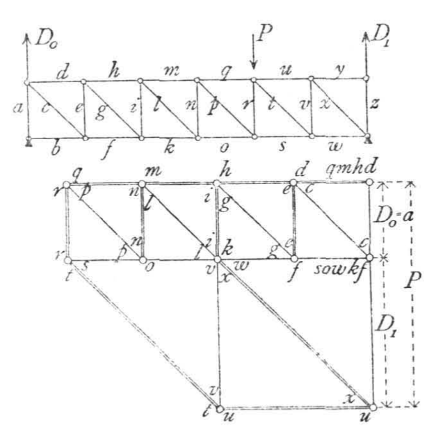


Fig 200.



fo wie Q_{min} und damit, wie gezeichnet, leicht die Werthe für V und V. Der für $V_{3\,min}$ angegebene Werth entfpricht einer Belaftung der oberen Gurtung.

Auch die *Culmann*'fche Methode giebt rafch die gefuchten Refultate.

Die Ermittelung fämmtlicher Spannungen, welche eine Einzellaft hervorbringt, ergiebt fich leicht mittels des *Cremona*'fchen Kräfteplans, wie neben ftehend (Fig. 200) gezeichnet ift.

4) Parallelträger mit nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Diagonalen.

Im vorhergehenden Kapitel ift gezeigt worden, dafs die gedrückten Stäbe mit Rückficht auf Widerftand gegen Zerknicken wefentlich ftärker conftruirt werden müffen, als die einfache Druckbeanfpruchung erfordert. Bei der Beftimmung der Querfchnittsgröfse find Zufchläge zu machen, welche bei den gezogenen Stäben nicht nöthig find. Man wird defshalb bei gewiffen Materialien, befonders bei Schmiede-eifen, die Verwendung gedrückter Stäbe möglichft befchränken, und ftatt deren, wenn möglich, gezogene anordnen. Wo aber gedrückte Stäbe nicht entbehrt werden können, empfiehlt es fich, die kürzeren Stäbe als gedrückte, die längeren als gezogene anzuordnen. Bei manchen Materialien hingegen, insbefondere beim Holz, macht die Anordnung der Verbindungen eine möglichft geringe Verwendung von Zug-ftäben und eine möglichft ausgedehnte Verwendung von Druckftäben wünfchenswerth. 389. Princip.

Bei den Trägern mit Fachwerk ift die Anordnung von nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Diagonalen möglich.

Wir betrachten zunächft die Träger mit nur gezogenen Diagonalen. 390. Träger mit nur gezogenen Diagonalen.

Wie in Art. 387, S. 352 nachgewiefen ift, erzeugt das Eigengewicht, fo wie auch eine totale gleichmäfsige Belaftung aller Knotenpunkte in den nach der Mitte fallenden Diagonalen Zug, in den nach der Mitte fteigenden Diagonalen Druck. Soll alfo durch die angegebene Belaftung, welche für den Hochbau weitaus die wichtigfte ift, in den Diagonalen nur Zug entftehen, fo ordnet man nur nach der Mitte fallende Diagonalen an, conftruirt alfo den Träger genau fymmetrifch zur Mitte (Fig. 201). Ift die Felderzahl ungerade, fo erhalten die Diagonalen in dem Mittel-felde bei diefer Belaftung den Zug und Druck Null (Fig. 202). Bei diefer Trägerform erhalten je zwei fymmetrifch zur Mitte liegende Stäbe gleiche Spannungen; diefelben wurden früher für die eine Hälfte gefunden und find demnach leicht zu übertragen.

Fig. 201.

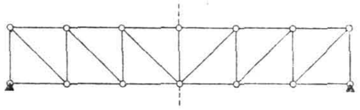
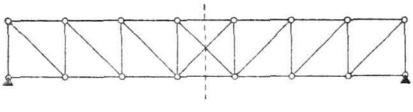


Fig. 202.



Die in Fig. 201 und 202 gezeichneten Diagonalen erhalten aber durch mobile, nicht über den ganzen Träger ausgedehnte Belaftung eventuell Druckbeanfpruchungen, und zwar findet, wie oben ermittelt, in einer Diagonalen der gröfste Druck ftatt, wenn die Knotenpunkte vom Kopfpunkte der Diagonalen bis zu demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist, belaftet, die übrigen Knotenpunkte aber unbelaftet find. Durch das ftets noch vorhandene Eigengewicht findet andererfeits in den Diagonalen eine beftändige Zugfpannung ftatt, welche die erwähnte Druckbeanfpruchung vermindert. Diejenigen Diagonalen nun, bei denen (beides abſolut genommen) die Zugſpannung durch das Eigengewicht gröſser iſt, als die gröſste Druckſpannung in Folge mobiler Laſt, werden ſtets gezogen, nie gedrückt. Bei denjenigen Diagonalen dagegen, welche durch das Eigengewicht einen geringeren Zug erhalten, als ungünſtigſten Falles der Druck durch mobile Belaſtung beträgt (wiederum beides abſolut genommen), wird eine Druckbeanſpruchung eintreten, die zu vermeiden iſt. Man bringt deſshalb in dem betreffenden Felde eine zweite Diagonale mit einer ſolchen Richtung an, daſs die mobile Belaſtung, welche in der bereits im Felde vorhandenen Diagonalen Druck erzeugt, in der zweiten Diagonalen Zug hervorruft. Die Diagonale muſs demnach ſo gerichtet ſein, daſs die erwähnte mobile Belaſtung die Knotenpunkte vom Fuſspunkte der Diagonalen an bis zu demjenigen Auflager belaſtet, nach welchem dieſer Fuſspunkt hinweiſt; mit anderen Worten, man bringt eine Diagonale an, welche die bereits vorhandene Diagonale kreuzt, eine ſog. Gegendiagonale (in Fig. 203 die punktirte Diagonale $E' F'$).

Damit dieſelbe aber auch wirkſam ſei, erhält die Hauptdiagonale EF einen derartigen Querſchnitt, daſs ſie bei Druckſpannungen ausbiegt, daſs ſie alſo in dieſem Falle als nicht vorhanden angeſehen werden kann. Solche Gegendiagonalen ſind in denjenigen Feldern anzuordnen, in welchen die Hauptdiagonalen eventuell Druckſpannungen erhalten. In den Feldern nahe an dem Auflager iſt die Zugſpannung durch das Eigengewicht meiſtens groſs, die Druckſpannung durch mobile Laſt meiſtens klein, ſo daſs in dieſen Feldern keine Gegendiagonalen nöthig ſind; in den mittleren dagegen ſind ſie anzuordnen. Die Spannungen in den Gegendiagonalen ſind dann genau ſo zu ermitteln, als wären die Hauptdiagonalen nicht vorhanden; jede Gegendiagonale, z. B. etwa $E' F'$, befindet ſich genau in derſelben Lage, wie die ſymmetriſch zur Trägermitte liegende Hauptdiagonale in dem Träger mit nur nach einer Seite fallenden Diagonalen, alſo hier wie RS (Fig. 203). Die oben gefundenen Spannungen ſind daher hier ſofort zu verwerthen. Der Träger würde demnach die Form der Fig. 204 erhalten, in welcher je zwei Stäbe mit gleichen Bezeichnungen gleiche Spannungen erleiden.

Fig. 203.

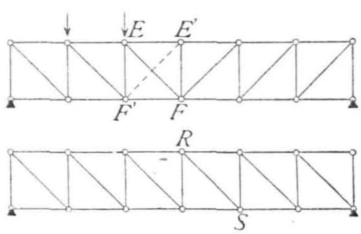
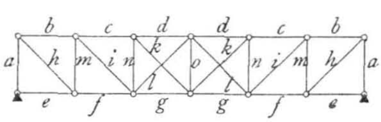


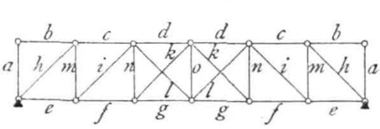
Fig. 204.



391. Träger mit nur gedrückten Diagonalen.

Bei der Conſtruction eines Trägers mit nur gedrückten Diagonalen iſt nach gleichen Principien zu verfahren. Zunächſt ſind beiderſeits nur nach der Mitte anſteigende Diagonalen zu verwenden, damit man für Belaſtung durch Eigengewicht, bezw. Totallaſt nur Druck erhalte. In denjenigen Feldern alsdann, in welchen die Diagonalen eventuell Zugſpannung erhalten würden, ſind wie oben Gegendiagonalen anzuordnen (Fig. 205). Die Verbindung in den Knotenpunkten iſt ſo anzuordnen, daſs die Hauptdiagonalen keinen Zug übertragen können.

Fig. 205.



Die Beanſpruchung der Verticalen ergiebt ſich nach Art. 387, S. 352 ſtets der Beanſpruchung derjenigen Diagonalen entgegengeſetzt, welche an einem unbelaſteten Knotenpunkte mit der Verticalen zusammentrifft. Werden demnach alle Diagonalen nur gezogen, so werden alle Verticalen nur gedrückt (Fig. 204); werden alle Diagonalen nur gedrückt, so werden alle Verticalen nur gezogen (Fig. 205). Im zweiten Falle werden dieselben meistens aus Schmiedeeisen hergestellt, während die Diagonalen aus Holz bestehen.

Beispiel. Eine als Parallelträger mit Fachwerk (nach Art der Fig. 201) construirte Dachpfette hat folgende Dimensionen und Belastungen: Stützweite $l = 15$ m; Höhe zwischen den Gurtungs-Schwerpunkten $h = 0{,}6$ m; Anzahl der Felder $n = 20$; Feldweite $a = 0{,}75$ m; die Diagonalen fallen jederseits nach der Trägermitte zu; Gegendiagonalen sind nicht vorhanden. Die Belastung durch das Eigengewicht pro lauf. Meter ist $g = 66$ kg, also pro Knotenpunkt $g\,a = 66 \cdot 0{,}75 = 49{,}5$ kg oder rot. 50 kg. Die verticale Belastung durch Schnee- und Winddruck pro lauf. Meter ist $p = 235$ kg, also pro Knotenpunkt $p\,a = 235 \cdot 0{,}75 = \infty\, 175$ kg. Es sind die durch diese Belastungen entstehenden Spannungen zu berechnen. 392. Beispiel.

1) Spannungen in den Gurtungen. Nach Gleichung 216. und 217. sind für den m-ten Stab der oberen Gurtung

$$X_g = -\frac{50 \cdot 0{,}75 \cdot m\,(20 - m)}{1{,}2} = -31{,}25\, m\,(20 - m);$$

$$X_p = -\frac{175 \cdot 0{,}75 \cdot m\,(20 - m)}{1{,}2} = -109{,}37\, m\,(20 - m).$$

Für den m-ten Stab der unteren Gurtung sind nach Gleichung 216. und 217.

$$Z_g = \frac{50 \cdot 0{,}75}{1{,}2}\,(m-1)(21-m) = +31{,}25\,(m-1)(21-m) \text{ und } Z_p = 109{,}37\,(m-1)(21-m).$$

Man erhält aus vorstehenden Ausdrücken, indem man der Reihe nach für m die Werthe 1, 2, 3, ... 9, 10 einführt, die Gurtungsspannungen der Stäbe links der Mitte. Die Spannungen in den symmetrisch zur Mitte liegenden Stäben sind den gefundenen genau gleich. Die Addition der Werthe X_g und X_p ergiebt die Maximalspannungen in der oberen, die Addition der Werthe Z_g und Z_p die Maximalspannungen in der unteren Gurtung. Die Resultate sind in umstehender Tabelle 1 angegeben.

2) Spannungen in den Diagonalen. α) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 220. ist für die m-te Diagonale die Spannung durch das Eigengewicht, da hier $\cos\alpha = \frac{0{,}6}{\sqrt{0{,}6^2 + 0{,}75^2}} = 0{,}625$,

$$Y_g = \frac{50}{1{,}25}\,(21 - 2m) = 40\,(21 - 2m).$$

Durch Einsetzung der Zahlenwerthe 1, 2, 3, ... 9, 10 für m erhält man die Spannungen der umstehenden Tabelle 2.

β) Durch die mobile Belastung. Im vorliegenden Fall ist die mobile Belastung in zwei Theile zu trennen. Der Winddruck kann nur gleichzeitig den ganzen Träger belasten; die durch diesen erzeugten Spannungen berechnen sich also nach der obigen Formel der Gleichung 220., wenn in dieselbe statt g die Verticalcomponente der Windbelastung pro lauf. Meter eingeführt wird. Dieselbe beträgt im vorliegenden Falle 88 kg; mithin ist

$$Y_w = \frac{88 \cdot 0{,}75}{1{,}25}\,(21 - 2m) = 53\,(21 - 2m).$$

Die Schneebelastung pro lauf. Meter des Trägers ist $p_1 = 147$ kg. Die Maximal-Zug-, bezw. -Druckspannungen, welche durch diese Belastung in den Diagonalen hervorgerufen werden, sind nach Gleichung 223. u. 224.

$$Y_{p\,max} = \frac{147}{2 \cdot 15 \cdot 0{,}625}\,(x^2 - 0{,}375^2) = 7{,}84\,(x^2 - 0{,}141);$$

$$Y_{p\,min} = -\frac{147}{2 \cdot 15 \cdot 0{,}625}\left[(l - x)^2 - 0{,}375^2\right] = -7{,}84\left[(15 - x)^2 - 0{,}141\right].$$

Für x sind der Reihe nach die Werthe einzusetzen: $15 - \frac{a}{2} = 14{,}625$, $15 - \frac{3a}{2} = 13{,}875$, $15 - \frac{5a}{2} = 13{,}125$, $15 - \frac{7a}{2} = 12{,}375$, $11{,}625$, $10{,}875$, $10{,}125$, $9{,}375$, $8{,}625$, $7{,}875$. Die symmetrisch zur Mitte liegenden Diagonalen erhalten gleich grosse Spannungen.

Man erhält die in der umstehenden Tabelle 2 angegebenen Werthe.

3) Spannungen in den Verticalen. α) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 221. ist, da die Lastpunkte oben liegen,

Tabelle 1: Spannungen in den Gurtungen (in Kilogr.).

	Für m = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Obere Gurtung.	X_g = − 594	− 1125	− 1594	− 2000	− 2344	− 2625	− 2844	− 3000	− 3094	− 3125	− 3125	− 3094	− 3000	− 2844	− 2625	− 2344	− 2000	− 1594	− 1125	− 594
	X_p = − 2078	− 3937	− 5579	− 7000	− 8204	− 9187	− 9954	− 10500	− 10829	− 10937	− 10937	− 10829	− 10500	− 9954	− 9187	− 8204	− 7000	− 5579	− 3937	− 2078
	X_{g+p} = − 2672	− 4062	− 7173	− 9000	− 10548	− 11812	− 12798	− 13500	− 13923	− 14062	− 14062	− 13923	− 13500	− 12798	− 11812	− 10548	− 9000	− 7173	− 4062	− 2672
Untere Gurtung.	Z_g = 0	594	1125	1594	2000	2344	2625	2844	3000	3094	3094	3000	2844	2625	2344	2000	1594	1125	594	0
	Z_p = 0	2078	3937	5579	7000	8204	9187	9954	10500	10829	10829	10500	9954	9187	8204	7000	5579	3937	2078	0
	Z_{g+p} = 0	2672	4062	7173	9000	10548	11812	12798	13500	13923	13923	13500	12798	11812	10548	9000	7173	4062	2672	0

Tabelle 2: Spannungen in den Diagonalen (in Kilogr.).

Für m = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y_g = 760	680	600	520	440	360	280	200	120	40	40	120	200	280	360	440	520	600	680	760
Y_w = 1007	901	795	689	583	477	371	265	159	53	53	159	265	371	477	583	689	795	901	1007
x = $\simeq$ 14,6	13,9	13,1	12,4	11,6	10,9	10,1	9,4	8,6	7,9	7,9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$Y_{p\,max}$ = + 1666	1513	1344	1204	1054	930	799	692	579	488	488	579	692	799	930	1054	1204	1344	1513	1666
$Y_{p\,min}$ = 0	− 8	− 27	− 52	− 90	− 131	− 187	− 245	− 320	− 394	− 394	− 320	− 245	− 187	− 131	− 90	− 52	− 27	− 8	0

Tabelle 3: Spannungen in den Verticalen (in Kilogr.).

Für m = 0*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10**)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20*)
V_g = − 500	− 475	− 425	− 375	− 325	− 275	− 225	− 175	− 125	− 75	− 50	− 75	− 125	− 175	− 225	− 275	− 325	− 375	− 425	− 475	− 500
V_w = − 660	− 627	− 561	− 495	− 429	− 363	− 297	− 231	− 165	− 99	− 66	− 99	− 165	− 231	− 297	− 363	− 429	− 495	− 561	− 627	− 660
x =	14,6	13,9	13,1	12,4	11,6	10,9	10,1	9,4	8,6	7,9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$V_{p\,min}$ = − 1103	− 1044	− 946	− 840	− 753	− 659	− 581	− 499	− 433	− 362	− 110*)	− 362	− 433	− 499	− 581	− 659	− 753	− 840	− 946	− 1044	− 1103
$V_{p\,max}$ = 0	0	+ 5	+ 17	+ 33	+ 56	+ 82	+ 117	+ 153	+ 200	0	+ 200	+ 153	+ 117	+ 82	+ 56	+ 33	+ 17	+ 5	0	0

*) In der Endverticalen ift der Druck ftets gleich der Auflager-Reaction, d. h., da die Belaftung des Endknotenpunkts $\frac{g\,a}{2}$ hinzukommt, für Eigengewicht $= -\frac{g\,a}{2}(n-1) - \frac{g\,a}{2} = -\frac{g\,a}{2}\,n = -25 \,.\, 20 = -500$ kg; für Winddruck $= -\frac{88 \,.\, 0{,}75}{2}\,n = -660$ kg. Die gröfste Beanfpruchung durch Schneelaft findet in derfelben bei totaler Belaftung durch Schnee ftatt, weil bei diefer die Auflager-Reaction am gröfsten ift. Demnach ift $V_{p\,min} = -\frac{p\,a}{2}\,n = -\frac{147 \,.\, 0{,}75}{2}\,20 = -1103$ kg. Zug kann in diefer Verticalen nicht entftehen.

**) Auf die Mittelverticale (Nr. 10) find die obigen Gleichungen nicht anwendbar, weil an ihrem unteren Endpunkte fich die zwei Diagonalen der anftofsenden Felder treffen, alfo der fchräge Schnitt andere Stäbe trifft, als bei der Entwickelung der Formeln vorgefehen war. Da am oberen Endpunkt der Verticalen keine Diagonale anfetzt, fo kann diefelbe nur folche Verticalkräfte aufnehmen, welche im oberen Knotenpunkte direct angreifen. Wir erhalten alfo die Spannungen in derfelben genau fo grofs, wie die Knotenpunktsbelaftungen. Diefe Werthe find in die oben ftehende Tabelle eingefetzt worden.

$$V_g = -\frac{50}{2}(21 - 2m) = -25\,(21 - 2m).$$

β) Durch mobile Belaftung. Die Spannung in den Verticalen durch den Winddruck ift entfprechend dem sub 2. Angeführten

$$V_w = -\frac{88\,.\,0{,}75}{2}(n - 2m + 1) = -33\,(21 - 2m).$$

Die Maximal-Druck-, bezw. -Zugfpannungen durch Schneelaft endlich ergeben fich aus den Gleichungen 223. u. 224. zu

$$V_{p\,min} = -\frac{147}{2\,.\,15}(x^2 - 0{,}141) = -4{,}9\,(x^2 - 0{,}141) \quad \text{und} \quad V_{p\,max} = 4{,}9\left[(l - x^2) - 0{,}141\right].$$

Für x find diefelben Werthe, wie bei den Diagonalen einzuführen. Man erhält die Werthe der neben ftehenden Tabelle 3.

4) Zufammenftellung der Spannungen für die Querfchnittsbeftimmung. Sollen die Querfchnitte nach der neueren Methode beftimmt werden, fo ift für jeden Stab die Spannung durch die permanente Belaftung P_g, die Maximalfpannung durch mobile Belaftung P_1 und die Minimalfpannung durch diefelbe Belaftung P_2 zu ermitteln (fiehe Art. 284 bis 287, S. 250 bis 252). Ueberwiegt im Stabe der Zug, fo ift P_1 der Maximalzug, P_2 der Maximaldruck durch mobile Belaftung; überwiegt im Stabe der Druck, fo ift P_1 der Maximaldruck, P_2 der Maximalzug durch mobile Belaftung. Die Werthe für P_0, P_1 und P_2 ergeben fich leicht aus neben ftehenden Tabellen. Zunächft geben die X_g, Z_g, Y_g und V_g die Werthe der P_0, die X_p, Z_p, $Y_w + Y_{p\,max}$ und $V_w + V_{p\,min}$ die Werthe der P_1, endlich die $Y_{p\,min}$ und $V_{p\,max}$ die Werthe der P_2. Danach ift folgende Tabelle zufammengeftellt.

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen: Ueberwiegender Zug				Verticalen: Ueberwiegender Druck			
Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1 u. 20	− 594	− 2078	1 u. 20	0	0	1 u. 20	+ 760	+ 2673	0	0 u. 20	− 500	− 1763	0
2 u. 19	− 1125	− 3937	2 u. 19	+ 594	+ 2078	2 u. 19	+ 680	+ 2414	− 8	1 u. 19	− 475	− 1671	0
3 u. 18	− 1594	− 5579	3 u. 18	+ 1125	+ 3937	3 u. 18	+ 600	+ 2139	− 27	2 u. 18	− 425	− 1507	+ 5
4 u. 17	− 2000	− 7000	4 u. 17	+ 1594	+ 5579	4 u. 17	+ 520	+ 1893	− 52	3 u. 17	− 375	− 1335	+ 17
5 u. 16	− 2344	− 8204	5 u. 16	+ 2000	+ 7000	5 u. 16	+ 440	+ 1637	− 90	4 u. 16	− 325	− 1182	+ 33
6 u. 15	− 2625	− 9187	6 u. 15	+ 2344	+ 8204	6 u. 15	+ 360	+ 1407	− 131	5 u. 15	− 275	− 1022	+ 56
7 u. 14	− 2844	− 9954	7 u. 14	+ 2625	+ 9187	7 u. 14	+ 280	+ 1170	− 187	6 u. 14	− 225	− 878	+ 82
8 u. 13	− 3000	− 10500	8 u. 13	+ 2844	+ 9954	8 u. 13	+ 200	+ 957	− 245	7 u. 13	− 175	− 730	+ 117
9 u. 12	− 3094	− 10829	9 u. 12	+ 3000	+ 10500	9 u. 12	+ 120	+ 738	− 320	8 u. 12	− 125	− 598	+ 153
10 u. 11	− 3125	− 10937	10 u. 11	+ 3094	+ 10829	10 u. 11	+ 40	+ 541	− 394	9 u. 11	− 75	− 461	+ 200
										10	− 50	− 176	0
	Kilogr.			Kilogr.			Kilogramm.				Kilogramm.		

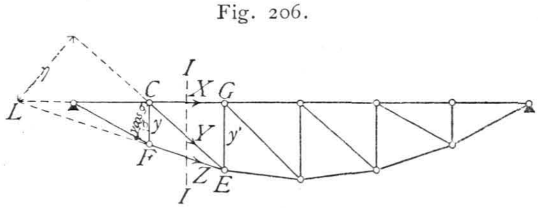
5) Parabelträger.

Wir wollen hier von den Trägern, bei denen nicht beide Gurtungen geradlinig find, nur die Parabelträger befprechen. Parabelträger find Träger mit einer oder zwei nach Parabeln gekrümmten Gurtungen. Es follen nur Träger mit einer geraden und einer gekrümmten Gurtung behandelt werden.

α) Berechnung der Spannungen in der gekrümmten Gurtung. Ift die obere Gurtung gerade (Fig. 206), fo ift für einen Stab FE der unteren Gurtung C der conjugirte Punkt; mithin wird, wenn M das Moment der an der einen Seite des Schnittes II wirkenden äufseren Kräfte bezogen auf C als Drehpunkt bezeichnet,

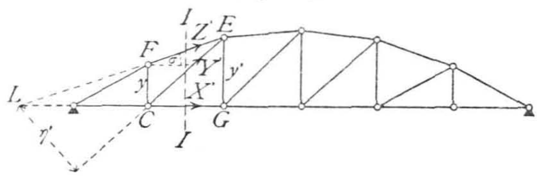
393. Berechnung d. Spannungen in d. gekrümmten Gurtung.

Fig. 206.



$$O = M - Zy\cos\sigma, \quad \text{woraus} \quad Z = \frac{M}{y\cos\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 229.$$

Fig. 207.

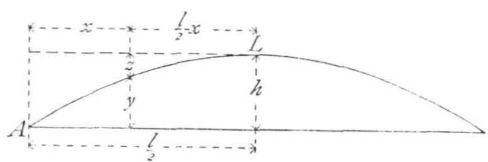


Wenn die obere Gurtung gekrümmt ift (Fig. 207), wird für den Stab FE, wenn alle Bezeichnungen die obige Bedeutung behalten,

$$Z' = -\frac{M}{y \cos \sigma} \quad . \quad . \quad 230.$$

Beide Ausdrücke find alfo numerifch gleich; nur das Vorzeichen ift verfchieden, weil Z das eine Mal die Spannung in der unteren, das andere Mal diejenige in der oberen Gurtung bedeutet.

Fig. 208.



y ift in Gleichung 229. und 230. nach der Parabelgleichung zu beftimmen. Der Anfangspunkt der Coordinaten fei A; alsdann ift (Fig. 208), wenn L der Scheitel der Parabel ift,

$$\frac{z}{h} = \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}, \quad \text{woraus} \quad z = h\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2$$

und

$$y = h - z = h\left(\frac{4x}{l} - \frac{4x^2}{l^2}\right) = \frac{4h}{l^2}(lx - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad 231.$$

Die Ordinaten y find nach unten, bezw. nach oben als pofitiv zu rechnen, je nachdem die untere oder die obere Gurtung gekrümmt ift.

Um die Werthe für die verfchiedenen Z zu erhalten, find der Reihe nach die den bezw. conjugirten Punkten entfprechenden zufammengehörigen Werthe für M und y einzuführen.

394. Berechnung d. Spannungen in d. geraden Gurtung.

β) Berechnung der Spannungen in der geraden Gurtung. Es fei die obere Gurtung gerade (Fig. 206); alsdann ift E der conjugirte Punkt für den Stab CG, und wenn das Moment der äufseren Kräfte für diefen Punkt mit M' bezeichnet wird, ift

$$0 = M' + Xy', \quad \text{woraus} \quad X = -\frac{M'}{y'}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 232.$$

Ift die obere Gurtung gekrümmt (Fig. 207), fo ergiebt fich für den Stab CG genau wie vorher, unter Beibehaltung derfelben Bezeichnungen,

$$0 = M' - X'y', \quad \text{woraus} \quad X' = +\frac{M'}{y'}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 233.$$

Auch hier ftimmen beide Ausdrücke numerifch überein; auch hier ift nur das Vorzeichen verfchieden.

395. Berechnung d. Spannungen in den Gitterftäben.

γ) Berechnung der Spannungen in den Gitterftäben. Für die Diagonalen CE (Fig. 206 und 207) ift, fowohl bei gerader, wie bei gekrümmter oberen Gurtung L der conjugirte Punkt, η, bezw. η' der Hebelsarm von Y, bezw. Y' und wenn wiederum mit M_1 und M_1' die Momente der äufseren Kräfte am Fragment links vom Schnitt II, bezogen auf L als Drehpunkt, bezeichnet werden, ift

$$\left.\begin{array}{ll} 0 = Y\eta - M_1, & \text{woraus} \quad Y = +\dfrac{M_1}{\eta} \\ \text{bezw.} \quad 0 = -Y'\eta' - M_1', & \text{woraus} \quad Y' = -\dfrac{M_1'}{\eta'} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 234.$$

Liegt die Diagonale rechts der Mitte, ſo fällt der conjugirte Punkt rechts vom rechten Auflager. Die Aufſtellung der Momentengleichung für dieſen Punkt ergiebt genau wie in Gleichung 234. die Diagonalſpannung als Quotienten aus dem Moment der am Fragment wirkenden äuſseren Kräfte, dividirt durch den Hebelsarm der Diagonalſpannung.

Fig. 209.

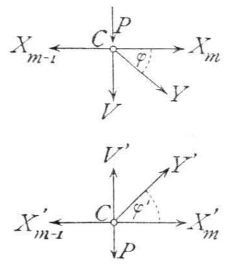
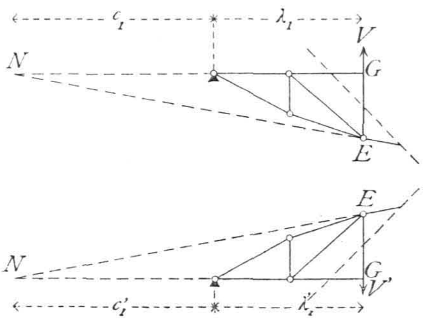


Fig. 210.



Häufig iſt ein anderer Ausdruck der Diagonalſpannung bequemer, als Gleichung 234. Die am Knotenpunkt C der geraden Gurtung (Fig. 209) angreifenden Kräfte ſind im Gleichgewicht; die algebraiſche Summe aller Horizontal-Componenten iſt demnach gleich Null; mithin

$$\left.\begin{aligned} 0 &= Y\cos\varphi + X_m - X_{m-1}, \quad \text{woraus} \quad Y = -\frac{X_m - X_{m-1}}{\cos\varphi} \\ \text{bezw. } 0 &= Y'\cos\varphi' + X'_m - X'_{m-1}, \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{X'_m - X'_{m-1}}{\cos\varphi'} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 235.$$

Für die Beſtimmung der Spannungen in den Verticalen iſt der Schnitt ſchief zu legen (Fig. 210). Der conjugirte Punkt für die Verticale EG iſt N. Bezeichnet M_2, bezw. M_2' das Moment der am Fragment wirkenden äuſseren Kräfte für N als Drehpunkt, ſo wird

$$0 = V(\lambda_1 + c_1) + M_2, \quad \text{woraus} \quad V = -\frac{M_2}{\lambda_1 + c_1}, \quad . \quad . \quad . \quad 236.$$

$$\text{bezw. } 0 = V'(\lambda_1' + c_1') - M_2', \quad \text{woraus} \quad V' = \frac{M_2'}{\lambda_1' + c_1'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 237.$$

Falls der conjugirte Punkt nach rechts vom rechten Auflager fällt, ergiebt ſich eine geringe Modification der Gleichungen 236. und 237.

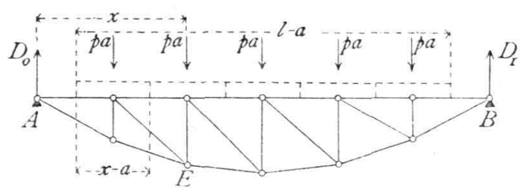
Ein für manche Fälle bequemerer Ausdruck wird wiederum durch Betrachtung des Knotenpunktes an der geraden Gurtung erhalten. Es ergiebt ſich, da die Kräfte an demſelben im Gleichgewicht ſind,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= Y\sin\varphi + V + P, \quad \text{woraus} \quad V = -(Y\sin\varphi + P), \\ \text{bezw. } 0 &= Y'\sin\varphi' + V' - P, \quad \text{woraus} \quad V' = -(Y'\sin\varphi' - P) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 238.$$

δ) Totale Belaſtung durch mobile Laſt p (bezw. Eigengewicht g) pro Längeneinheit. Nehmen wir wiederum an, daſs die Laſten nur in den Knotenpunkten angreifen, ſo kommt auf jeden Knotenpunkt bei der Feldweite a eine Laſt gleich pa. Die Auflager-Reactionen D_0 und D_1 ſind bei dieſer Belaſtung genau eben ſo groſs, als wenn bei dem homogen angenommenen Träger die Einzellaſten pa ſich je auf die Länge a gleichmäſsig vertheilten; denn im zweiten Falle iſt $D_0 = \frac{p(l-a)}{2}$, während im erſten Falle $D_0 = \frac{pa(n-1)}{2}$ iſt. Da nun $(n-1)a = l - a$ iſt, ſo iſt im erſten Falle gleichfalls $D_0 = \frac{p(l-a)}{2}$.

396.
Gleichförmig vertheilte Belaſtung.

Fig. 211.



Für irgend einen Knotenpunkt E (Fig. 211) ist auch das Moment in beiden Fällen gleich, wenn nur die Belastung von der Mitte des dem Auflager zunächst liegenden Feldes bis zur Mitte desjenigen Feldes gerechnet wird, welches E vorhergeht.

Dann ist für den Punkt E

$$M_x = \frac{p\,(l-a)}{2}\,x - p\,(x-a)\left(\frac{x-a}{2}+\frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2}\,(l\,x - x^2).$$

Dies ist aber nach Gleichung 159. der Ausdruck für das Moment im Punkte E bei einem homogenen, gleichmäfsig total mit p pro Längeneinheit belasteten Träger.

Für die gekrümmte Gurtung ist nach Gleichung 229.

$$Z\cos\sigma = \frac{M}{y}.$$

Wird für M der eben gefundene Werth, für y der Werth aus Gleichung 231. eingeführt, so wird

$$\left.\begin{aligned} Z\cos\sigma &= \frac{\frac{p}{2}\,(l\,x-x^2)}{\frac{4\,h}{l^2}\,(l\,x-x^2)} = \frac{p\,l^2}{8\,h} \\ \text{eben so}\qquad Z'\cos\sigma &= -\frac{p\,l^2}{8\,h} \end{aligned}\right\} \qquad 239.$$

$Z\cos\sigma$ ist die Horizontalcomponente H der Spannung in der gekrümmten Gurtung; die rechte Seite der Gleichung enthält nur constante Gröfsen, so dafs sich hieraus ergiebt: Beim Parabelträger ist für gleichmäfsige Belastung des ganzen Trägers die Horizontalcomponente der Spannung in der gekrümmten Gurtung constant.

Da $\cos\sigma = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+(y'-y)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y'-y}{a}\right)^2}}$ ist, erhält man aus Gleichung 239.

$$Z = \frac{p\,l^2}{8\,h}\sqrt{1+\left(\frac{y'-y}{a}\right)^2} \qquad 240.$$

Für die gerade Gurtung ist nach Gleichung 232. und 233.

$$X = -\frac{M'}{y'} \quad \text{und} \quad X' = +\frac{M'}{y'}.$$

Nun ist für die in Rede stehende Belastung $\dfrac{M}{y}$ constant, und zwar gleich $Z\cos\sigma = H$, also auch

$$X = -H = -\frac{p\,l^2}{8\,h} \quad \text{und} \quad X' = H = \frac{p\,l^2}{8\,h} \qquad 241.$$

Beim Parabelträger ist sonach für eine gleichmäfsig über den ganzen Träger vertheilte Belastung die Spannung in der geraden Gurtung constant.

Für die Spannung in den Diagonalen wurde die Gleichung 235. aufgestellt. Da nun $X_m = X_{m-1} = -H$ ist, folgt aus dieser Gleichung

$$Y = 0;\ \text{eben so}\ Y' = 0.$$

Beim Parabelträger iſt daher für die mehr erwähnte Belaſtungsart die Spannung in den Diagonalen gleich Null.

Die Spannung in den Verticalen ergiebt ſich aus Gleichung 238., da Y gleich Null, $P = p\,a$ iſt, zu

$$V = -p\,a, \text{ eben ſo } V' = p\,a.$$

Die Spannung in den Verticalen iſt ſonach beim Parabelträger und bei der angegebenen Belaſtung gleich der im Knotenpunkte der geraden Gurtung wirkenden Laſt, und zwar Zug, wenn die untere Gurtung gerade, und Druck, wenn die obere Gurtung gerade iſt. (Dabei iſt angenommen, daſs die Laſten an der geraden Gurtung wirken.)

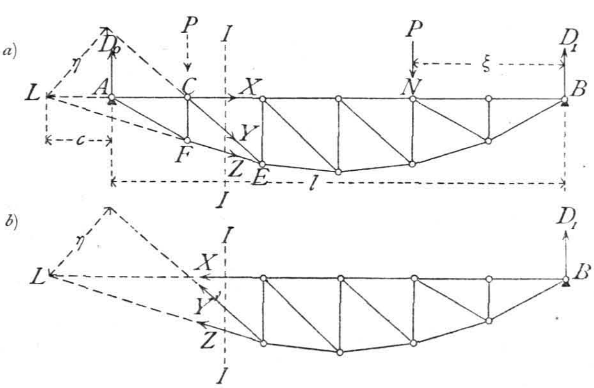
Die ſämmtlichen hier gefundenen Reſultate gelten auch für die Belaſtung durch das Eigengewicht; nur iſt überall ſtatt der Laſt p das Eigengewicht g einzuführen. Da ferner die Momente für die Knotenpunkte aufgeſtellt ſind, und dabei nur vorausgeſetzt iſt, daſs y eine Parabelordinate ſei, ſo gelten die vorhergehenden Entwickelungen auch, wenn nur die Knotenpunkte auf einer Parabel liegen, alſo die Curve durch ein der Parabel eingeſchriebenes Polygon erſetzt wird.

ε) Ungünſtigſte Belaſtungen und gröſste Stabſpannungen. Da es keinen principiellen Unterſchied macht, ob die obere oder die untere Gurtung gerade iſt, ſo ſoll im Folgenden nur der Fall der geraden oberen Gurtung behandelt werden. Die Modificationen für den Fall der geraden unteren Gurtung ergeben ſich leicht. 397. Ungünſtigſte Belaſtungen u. gröſste Spannungen.

Die Spannungen in den Gurtungen hängen nach den Gleichungen 229., 230., 232. und 233. nur von der Gröſse der Momente ab; dieſe aber ſind bei totaler Belaſtung des ganzen Trägers am gröſsten; mithin findet Maximalſpannung in den Gurtungen bei totaler mobiler Belaſtung ſtatt.

Die Gleichungen 240. und 241. geben für die obere, bezw. untere Gurtung die durch totale mobile Belaſtung p pro Längeneinheit erzeugten Spannungen.

Fig. 212.



Die ungünſtigſte Belaſtung für eine Diagonale CE (Fig. 212 a) ergiebt ſich, wie folgt. Eine Laſt P rechts von dem durch die Mitte der Diagonalen gelegten Verticalſchnitt erzeugt eine Auflager-Reaction $D_0 = \frac{P\,\xi}{l}$. Die Gleichung der ſtatiſchen Momente für den Punkt L als Momentenpunkt und das Fragment des Trägers links vom Schnitt II ergiebt

$$0 = Y\eta - D_0\,c, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{D_0\,c}{\eta} = \frac{P\,\xi\,c}{l\,\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 242.$$

So lange die Laſt ſich rechts vom Schnitt II befindet, gilt der hier für Y gefundene Ausdruck. Jede Laſt rechts vom Schnitt erzeugt alſo in CE einen Zug.

Befindet ſich die Laſt P links vom Schnitte II (Fig. 212 b), ſo betrachte man das Fragment an der rechten Seite des Schnittes; auf daſſelbe wirken die Auflager-

Reaction D_1 in B und die 3 Spannungen X, Y' und Z. Die Gleichung der ſtatiſchen Momente für L als Drehpunkt heiſst dann

$$0 = Y' \eta + D_1 (l + c), \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{D_1 (l + c)}{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad 243.$$

Die Laſt P links von II erzeugt alſo in den Diagonalen Druck und in gleicher Weiſe jede links vom Schnitt liegende Laſt.

Handelt es ſich um eine rechts der Mitte liegende Diagonale, bei welcher der conjugirte Punkt von B nach rechts fällt, ſo findet man dieſelben Reſultate für die ungünſtigſte Belaſtung.

Es ergiebt ſich hiernach leicht Folgendes: Wenn am Fragment des Trägers, auf welchem die Einzellaſt nicht liegt, die betrachtete Stabſpannung und die Auflager-Reaction in gleichem Sinne um den conjugirten Punkt drehen, ſo findet im Stabe Druck ſtatt; wenn die Stabſpannung und die Auflager-Reaction in entgegengeſetztem Sinne um den conjugirten Punkt drehen, ſo findet im Stabe Zug ſtatt. Die Anwendung dieſes Satzes ergiebt, daſs auch hier das für die Parallelträger (Art. 384, S. 346) gefundene Geſetz gilt: Jede Belaſtung zwiſchen dem durch die Diagonalenmitte gelegten Verticalſchnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Fuſspunkt der Diagonale hinweiſt, erzeugt in derſelben Zug; jede Belaſtung zwiſchen dem erwähnten Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonale hinweiſt, erzeugt in derſelben Druck.

Maximalzug durch mobile Belaſtung findet demnach in einer Diagonalen ſtatt, wenn die ganze Zugabtheilung und nur dieſe belaſtet iſt, d. h. wenn alle Knotenpunkte zwiſchen dem Schnitte und demjenigen Auflager belaſtet ſind, nach welchem der Fuſs der Diagonale hinweiſt; Maximaldruck durch mobile Belaſtung findet ſtatt, wenn die Knotenpunkte zwiſchen dem Schnitte und demjenigen Auflager belaſtet ſind, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweiſt.

Dieſes Geſetz gilt ſowohl, wenn die untere, als wenn die obere Gurtung gekrümmt iſt.

Fig. 213.

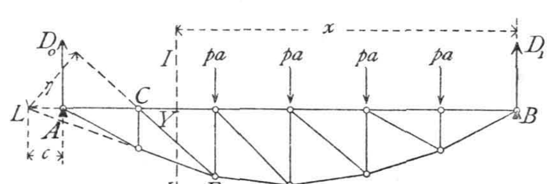
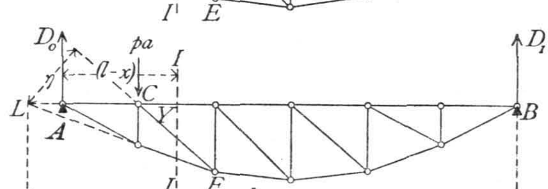


Fig. 214.



Die gröſste Zugbelaſtung in einer Diagonalen CE findet daher bei der in Fig. 213 gezeichneten Belaſtung ſtatt; ſie iſt nach Gleichung 242.

$$Y_{max} = \frac{D_0\, c}{\eta}.$$

Genau, wie in Art. 387, S. 353, erhält man für die Auflager-Reaction

$$D_0 = \frac{p}{2\,l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

alſo

$$Y_{max} = \frac{p\, c}{2\, l\, \eta} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 244.$$

Die gröſste Druckbeanſpruchung in einer Diagonalen CE findet bei der in Fig. 214 gezeichneten Belaſtung ſtatt und iſt (wenn der Trägertheil rechts vom Schnitte II betrachtet wird) nach Gleichung 243.

$$Y_{min} = - D_1 \left(\frac{l + c}{\eta}\right).$$

Nun ift die Auflager-Reaction $D_1 = \frac{p}{2\,l}\left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$, alfo

$$Y_{min} = - \frac{p}{2\,l}\left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c}{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 245.$$

Die Gleichungen 244. und 245. gelten, wenn die Diagonalen, wie hier, nach rechts fallen, nur für diejenigen links der Mitte; für die Diagonalen rechts der Mitte, bei denen der conjugirte Punkt von B nach rechts fällt, ergeben fich folgende Werthe, in denen η_1 den Hebelsarm von Y, c_2 den Abftand des conjugirten Punktes von B bedeutet:

$$Y_{max} = \frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c_2}{\eta_1} \text{ und } Y_{min} = - \frac{p}{2\,l}\left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{c_2}{\eta_1} \quad 246.$$

Bei der angenommenen Belaftungsart genügt es, Y_{max} oder Y_{min} auszurechnen; denn für die Belaftung aller Knotenpunkte mit je $p\,a$ ift die Diagonalfpannung nach Art. 395, S. 362 gleich Null. Sind nur die Knotenpunkte der Druckabtheilung belaftet, fo ift die Spannung in der Diagonalen gleich Y_{min}; find nur die Knotenpunkte der Zugabtheilung belaftet, fo ift die Spannung gleich Y_{max}. Bei totaler Belaftung ift die Spannung $Y_{summa} = Y_{max} + Y_{min}$ und zwar ift $Y_{summa} = 0$, d. h. $0 = Y_{max} + Y_{min}$ und $Y_{min} = - Y_{max}$.

Für die ungünftigfte Belaftung in einer Verticalen ergiebt fich in gleicher Weife, wie bei den Diagonalen gezeigt ift, folgendes Gefetz: Jede Laft zwifchen einem durch die Verticale gelegten fchrägen Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Fufspunkt der Diagonale hinweist, welche mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der nicht mobil belafteten Gurtung zufammentrifft, erzeugt Druck; jede Laft zwifchen dem Schnitte und dem Auflager, nach welchem der Kopf der erwähnten Diagonale weist, erzeugt in der Verticalen Zug. Auch hier findet demnach Maximaldruck, bezw. -Zug in einer Verticalen bei derfelben Belaftung ftatt, welche in derjenigen Diagonalen Maximalzug, bezw. -Druck erzeugt, die mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der nicht mobil belafteten Gurtung zufammentrifft.

Es wird alfo Maximaldruck in GE bei der in Fig. 215 gezeichneten Belaftung, Maximalzug bei der in Fig. 216 gezeichneten Belaftung ftattfinden.

Fig. 215.

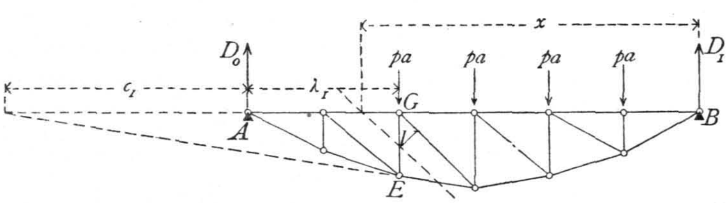
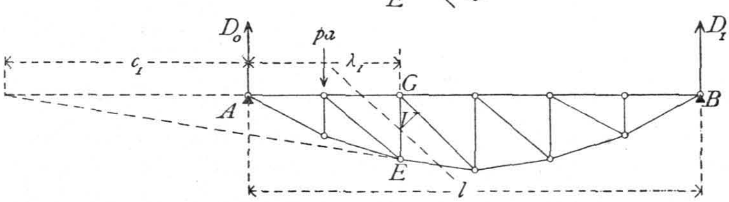


Fig. 216.



Die Maximalſpannungen in den Verticalen ergeben ſich mit

$$\left.\begin{aligned} V_{min} &= -\frac{D_0\, c_1}{\lambda_1 + c_1} = -\frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{c_1}{\lambda_1 + c_1} \\ V_{max} &= \frac{D_1\,(l + c_1)}{\lambda_1 + c_1} = \frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c_1}{\lambda_1 + c_1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; 247.$$

Falls der conjugirte Punkt um c'_1 nach rechts von B fällt, was hier bei allen Verticalen rechts der Mitte incl. der Mittelverticalen ſtattfindet, ſo ergeben ſich für V_{min} und V_{max} die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} V'_{min} &= -\frac{D_0\,(l + c_1')}{c_1' + l - \lambda_1} = -\frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \\ V'_{max} &= \frac{D_1\, c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} = \frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 247_a.$$

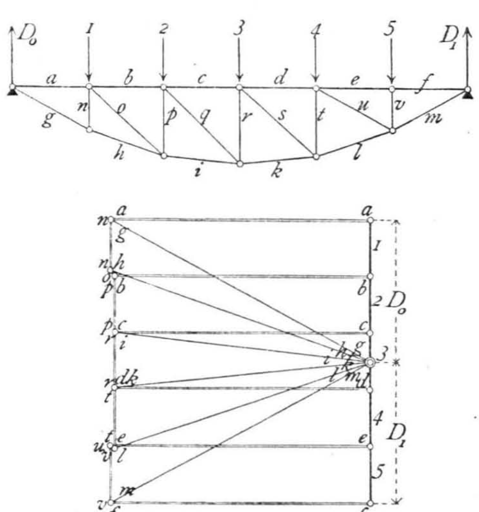
Die Modificationen für Berechnung der Stabſpannungen bei entgegengeſetzter Richtung der Diagonalen ergeben ſich aus Vorſtehendem ſo einfach, daſs darauf hier nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

Die bei einer Belaſtung durch eine oder mehrere Einzellaſten erzeugten Spannungen ergiebt die Momentenmethode ohne Mühe.

398. Graphiſche Ermittelung der Spannungen.

ζ) Graphiſche Ermittelung der Spannungen. Wird eine gleichmäſsig vertheilte Belaſtung (Eigengewicht, bezw. totale mobile Belaſtung) vorausgeſetzt, ſo ergiebt der in Fig. 217 gezeichnete *Cremona*'ſche Kräfteplan ſofort die Spannungen.

Fig. 217.



Was die durch mobile Belaſtung erzeugten Maximalſpannungen betrifft, ſo ergeben ſich die gröſsten Gurtungsſpannungen aus dem eben erwähnten Kräfteplan (Fig. 217), falls eine Belaſtung des ganzen Trägers mit der Laſt p pro Längeneinheit zu Grunde gelegt wird.

Zur Beſtimmung der gröſsten Diagonalſpannungen, welche bei den im Art. 397, S. 364 angegebenen Belaſtungen ſtattfinden, empfiehlt ſich die Schnittmethode.

Auf das Fragment links vom Schnitte II wirken bei der in Fig. 218 a gezeichneten Maximal-Zugbelaſtung für die Diagonale CE die Kräfte D_0, X, Y, Z. Die Werthe von D_0, welche für die verſchiedenen Diagonalen zu Grunde zu legen ſind, ergeben ſich aus der Gleichung $D_0 = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$; dieſelben ſind in der Curve (Fig. 218 b) aufgetragen. — Für die Diagonale CE z. B. iſt $D_0 = mn$; dieſe Kraft iſt nach den Richtungen AE und X zerlegt in no und om; no iſt alsdann noch nach den Richtungen Z und Y in np und po zerlegt; po iſt gleich Y_{max}.

Um die Y_{min} zu erhalten, kann man für $D_1 = \frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$ die Curve auftragen und für das Fragment rechts vom Schnitt nach der angegebenen Methode zerlegen. Da aber $Y_{min} = -Y_{max}$ iſt, ſo kann dieſe Conſtruction unterbleiben.

Die Maximalſpannungen in den Verticalen werden in gleicher Weiſe ermittelt.

Fig. 218.

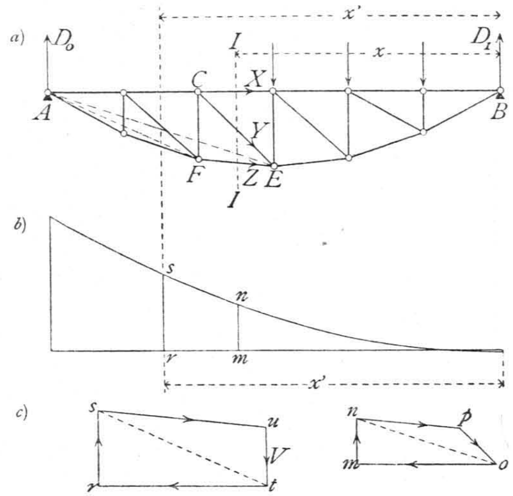


Fig. 219.

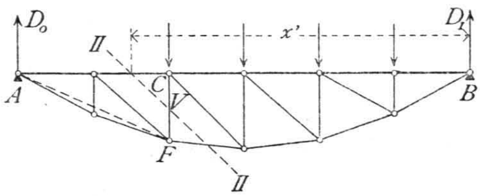
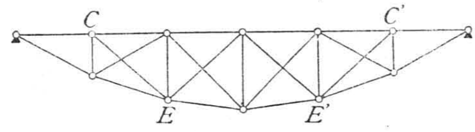


Fig. 220.



In der Verticalen CF findet Maximaldruck bei der in Fig. 219 gezeichneten Belaftung ftatt. D_0 ift hier gleich derjenigen Ordinate der Curve in Fig. 218, welche zu x' gehört, d. h. gleich rs. Nun wird genau wie oben zerlegt. Es wird $V_{min} = ut$. Eben fo ift der Maximalzug in CF zu ermitteln.

η) Träger mit Gegendiagonalen. Jede Diagonale erleidet durch die mobile Belaftung fowohl Zug, wie Druck; durch das Eigengewicht entfteht in den Diagonalen die Spannung Null; die refultirende Spannung ift alfo identifch mit derjenigen durch die mobile Belaftung. Sollen nur gezogene Diagonalen vorkommen, fo wird nach Art. 390, S. 356 in jedem Felde eine Gegendiagonale angeordnet werden müffen. Man erhält die in Fig. 220 gezeichnete Trägerform. Die Gegendiagonale $C'E'$ wird genau eben fo beanfprucht werden, wie die fymmetrifch zur Mitte liegende Hauptdiagonale CE des Trägers mit einfeitig fallenden Diagonalen. Daffelbe gilt von allen Gegendiagonalen; es wird alfo die Berechnung eines Trägers mit nach einer Richtung fallenden Diagonalen genügen. 399. Träger mit Gegendiagonalen.

Beifpiel. Ein als Unterzug dienender Parabelträger mit gerader oberer und gekrümmter unterer Gurtung hat die nachfolgenden Hauptabmeffungen und Belaftungen: Stützweite $l = 12{,}0$ m; Pfeilhöhe $h = 1{,}20$ m; Feldweite $a = 1{,}0$ m; Eigengewicht der Conftruction pro lauf. Meter des Trägers $g = 320$ kg, alfo pro Knotenpunkt $ga = 320$ kg; mobile Belaftung pro lauf. Meter des Trägers $p = 1280$ kg, alfo pro Knotenpunkt $pa = 1280$ kg. Der Träger hat ein aus Verticalen und Diagonalen beftehendes Gitterwerk; die Diagonalen fallen beiderfeits nach der Mitte zu; der Träger ift alfo zur Mitte fymmetrifch angeordnet. Es find die in den einzelnen Stäben entftehenden Spannungen zu ermitteln. Wegen der Symmetrie des Trägers brauchen wir nur die Spannungen in den Stäben links der Mitte zu beftimmen; die fymmetrifch zur Mitte liegenden Stäbe erhalten gleiche Beanfpruchungen. 400. Beifpiel.

1) Form der unteren Gurtung. Die Parabelordinaten ergeben fich nach Gleichung 231. aus der Relation $y = \frac{4 \cdot 1{,}2}{144} x (12 - x) = 0{,}033\, x (12 - x)$.

Man erhält für

$x = 1$ m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m	7 m	8 m	9 m	10 m	11 m
$y = 0{,}36$ m	0,66 m	0,89 m	1,06 m	1,16 m	1,2 m	1,16 m	1,06 m	0,89 m	0,66 m	0,36 m

2) Spannungen in der oberen Gurtung. Durch das Eigengewicht, bezw. totale mobile Belaftung entfteht in fämmtlichen Stäben der oberen Gurtung eine Spannung nach Gleichung 241.

$$H_g = -\frac{320 \cdot 12^2}{8 \cdot 1{,}2} = -4800 \text{ kg} \quad \text{und} \quad H_p = -\frac{1280 \cdot 12^2}{8 \cdot 1{,}2} = -19\,200 \text{ kg}.$$

H_p ift zugleich die gröfste durch mobile Belaftung entftehende Spannung.

3) Spannungen in der unteren Gurtung. Nach Gleichung 240. find die durch Eigengewicht, bezw. totale mobile Belaftung erzeugten Spannungen aus der Relation zu finden:

$$Z_g = 4800 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \quad \text{und} \quad Z_p = 19\,200 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - p}{a}\right)^2}.$$

Hiernach erhält man:

Stab Nr.	y'	y	$\frac{y'-y}{a}$	$\sqrt{1+\left(\frac{y'-y}{a}\right)^2}$	Z_g	Z_p
1	0,36	0,0	0,36	1,063	5102	20 410
2	0,66	0,36	0,30	1,044	5011	20 045
3	0,89	0,66	0,23	1,026	4925	19 699
4	1,06	0,89	0,17	1,014	4867	19 469
5	1,16	1,06	0,10	1,005	4824	19 296
6	1,20	1,16	0,04	1,008	4804	19 216
	Meter				Kilogr.	

Die Werthe Z_p find zugleich die gröfsten durch mobile Belaftung entftehenden Spannungen.

4) Spannungen in den Diagonalen. Die Spannungen durch das Eigengewicht find nach Art. 396, S. 362 gleich Null. Die durch mobile Belaftung erzeugten Maximal- und Minimalfpannungen find für die Diagonalen links der Mitte nach Gleichung 244. und 245.

$$Y_{max} = \frac{1280}{2 \cdot 12}(x^2 - 0{,}25)\frac{c}{\eta} = 53{,}33\,\frac{c}{\eta}(x^2 - 0{,}25) \text{ und } Y_{min} = -\,53{,}33\left[(l-x)^2 - 0{,}25\right]\frac{l+c}{\eta}.$$

Die Gröfsen c und η können berechnet oder conftruirt werden; die Werthe für c werden beffer berechnet, weil die Zeichnung wegen der fpitzen Schnittwinkel der Gurtungsftabrichtungen keine genauen Refultate ergiebt. Man erhält mit Hilfe ähnlicher Dreiecke leicht:

$$\frac{c_2 + a}{y_1} = \frac{a}{y_2 - y_1}; \quad \frac{c_3 + 2a}{y_2} = \frac{a}{y_3 - y_2}; \quad \frac{c_4 + 3a}{y_3} = \frac{a}{y_4 - y_3};$$

$$\frac{c_5 + 4a}{y_4} = \frac{a}{y_5 - y_4} \quad \text{und} \quad \frac{c_6 + 5a}{y_5} = \frac{a}{y_6 - y_5}.$$

Die Werthe für η können in ähnlicher Weife leicht berechnet werden; doch können, befonders wenn c berechnet und der Schnittpunkt entfprechend den Rechnungsrefultaten aufgetragen wird, die η mit hinreichender Genauigkeit conftruirt werden. Die Werthe für c, η, x, Y_{max} und Y_{min} find in nachftehender Tabelle zufammengeftellt.

Diagonale Feld-Nr.	c	η	x	Y_{max}	Y_{min}
2	0,2	0,66	10,5	+ 1777	− 1971
3	0,87	1,91	9,5	+ 2186	− 2156
4	2,23	3,8	8,5	+ 2304	− 2396
5	6,6	8,03	7,5	+ 2449	− 2460
6	24	22,3	6,5	+ 2410	− 2582
	Meter			Kilogr.	

Nach Art. 397, S. 365 müffen die abfoluten Werthe der Y_{max} und Y_{min} einander gleich fein; dies ift hier nicht der Fall, und es hat dies feinen Grund darin, dafs nicht die genauen Parabelordinaten der Berechnung zu Grunde gelegt find, fondern eine Abrundung auf zwei Decimalen ftattgefunden hat. Aus demfelben Grunde würden fich auch die durch das Eigengewicht erzeugten Spannungen nicht genau gleich Null ergeben, wenn man fie nach Gleichung 234. berechnete. Immerhin ergeben fich diefe Spannungen fo gering, dafs fie vernachläffigt werden können.

5) Spannungen in den Verticalen. Durch das Eigengewicht entfteht in jeder Verticalen nach Art. 396, S. 363 der Druck $V = -\,320$ kg. Die durch mobile Belaftungen in den Verticalen links der Mitte erzeugten Maximalfpannungen find nach Gleichung 247.

$$V_{min} = -\,53{,}33\,(x^2 - 0{,}25)\frac{c_1}{\lambda + c_1} \quad \text{und} \quad V_{max} = +\,53{,}33\left[(l-x)^2 - 0{,}25\right]\frac{12 + c_1}{\lambda_1 + c_1}.$$

Man erhält für die verfchiedenen Verticalen die in folgender Tabelle zufammengeftellten Werthe von c_1, λ_1, x, $(l - x)$, V_{min} und V_{max}. Die 6. (die Mittel-)Verticale, an deren Fufspunkt fich die zwei Diagonalen der anfchliefsenden Felder fchneiden, kann nicht nach den obigen Gleichungen berechnet werden, da die dort für den Schnitt gemachten Vorausfetzungen hier nicht zutreffen. Nachdem im oberen Knotenpunkte derfelben keine Diagonale anfetzt, fo kann diefelbe nur die Kräfte aufnehmen, welche direct in derfelben wirken, d. h. der gröfste Druck ift gleich der Knotenpunktsbelaftung dafelbft.

Verticale Nr.	c_1	λ_1	x	$l - x$	V_{min}	V_{max}
1	0,2	1,0	11,5	0,5	— 1173	0
2	0,87	2,0	10,5	1,5	— 1778	+ 478
3	2,23	3,0	9,5	2,5	— 2047	+ 870
4	6,60	4,0	8,5	3,5	— 2391	+ 1123
5	24	5,0	7,5	4,5	— 2469	+ 1324
6	—	—	—	—	— 1280	0
	Meter				Kilogr.	

6) Zur Beftimmung der Querfchnitte nach der neueren Methode (fiehe Art. 283 bis 287, S. 248 bis 252) ergeben fich dann für die einzelnen Stäbe die in der folgenden Tabelle angegebenen Werthe von P_0, P_1 und P_2:

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen.				Verticalen: Druck überwiegt			
Stab Nr.	P_0	P	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1	— 4800	— 19 200	1	5102	20 410					1	— 320	— 1173	0
2	— 4800	— 19 200	2	5011	20 045	2	0	+ 1777	— 1971	2	— 320	— 1778	+ 478
3	— 4800	— 19 200	3	4925	19 699	3	0	+ 2186	— 2156	3	— 320	— 2047	+ 870
4	— 4800	— 19 200	4	4867	19 469	4	0	+ 2304	— 2396	4	— 320	— 2391	+ 1123
5	— 4800	— 19 200	5	4824	19 296	5	0	+ 2449	— 2460	5	— 320	— 2469	+ 1324
6	— 4800	— 19 200	6	4804	19 216	6	0	+ 2410	— 2582	6	— 320	— 1280	0
7	— 4800	— 19 200	7	4804	19 216	7	0	+ 2410	— 2582	7	— 320	— 2469	+ 1324
8	— 4800	— 19 200	8	4824	19 296	8	0	+ 2449	— 2460	8	— 320	— 2391	+ 1123
9	— 4800	— 19 200	9	4867	19 469	9	0	+ 2304	— 2396	9	— 320	— 2047	+ 870
10	— 4800	— 19 200	10	4925	19 699	10	0	+ 2186	— 2156	10	— 320	— 1778	+ 478
11	— 4800	— 19 200	11	5011	20 045	11	0	+ 1777	— 1971	11	— 320	— 1173	0
12	+ 4800	— 19 200	12	5102	20 410								
	Kilogr.			Kilogr.			Kilogramm.				Kilogramm.		

In die Gleichungen 15., 18., 21. u. 24. find die abfoluten Zahlenwerthe für P_0, P_1, P_2 einzufetzen; es folgt dies aus der Entwickelung derfelben.

6) Dreieckträger.

Dreieck- und Trapezträger find, wie bereits in Art. 374, S. 338 gefagt wurde, Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bezw. ein Paralleltrapez bilden. Die eine

Fig. 221.

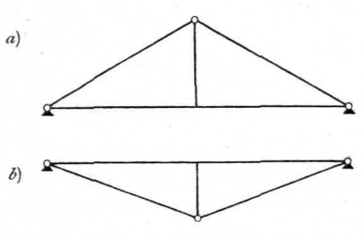
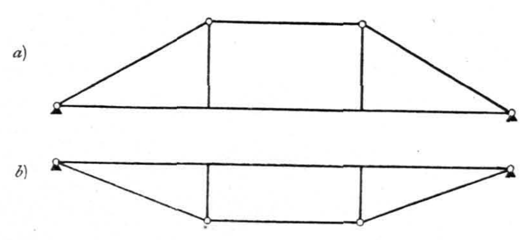


Fig. 222.

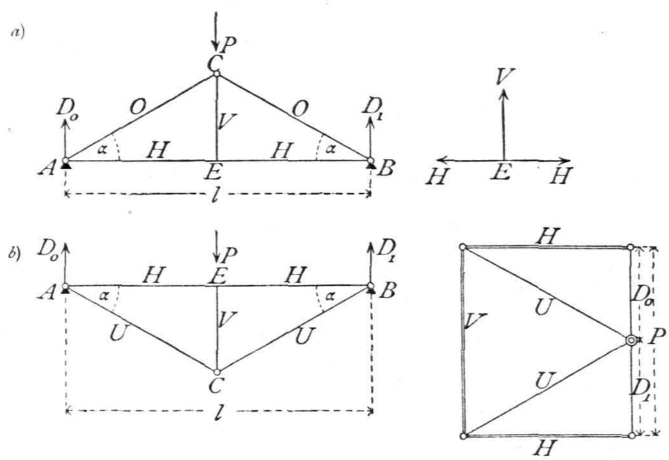


Gurtung zeigt eine gerade, die andere eine gebrochene Linie. Iſt die untere Gurtung gerade, ſo erhält man die unter dem Namen des einfachen, bezw. doppelten Hängebockes bekannte Trägerform (Fig. 221 *a*, bezw. 222 *a*) — nicht zu verwechſeln mit den Hängewerksträgern, welche nach Art. 357, S. 315 von der hier betrachteten weſentlich verſchieden ſind. Iſt die obere Gurtung gerade, ſo erhält man die unter dem Namen des armirten Balkens bekannte Trägeranordnung (Fig. 221 *b* u. 222 *b*).

401. Concentrirte Belaſtung.

α) Concentrirte Belaſtung (Fig. 223). Wenn im Mittelknotenpunkte C oder in dem Knotenpunkte E des Hängebockes (Fig. 223 *a*) die Laſt P wirkt, ſo wird die Auflager-Reaction $D_0 = D_1 = \frac{P}{2}$. Die im Punkte A wirkenden 3 Kräfte D_0, O und H halten einander im Gleichgewicht, und es ſind demnach die algebraiſchen Summen der in dieſem Knotenpunkte wirkenden Horizontalcomponenten, bezw. Verticalcomponenten je gleich Null, d. h. es iſt

Fig. 223.



$$0 = D_0 + O \sin \alpha, \quad \text{woraus} \quad O = -\frac{P}{2 \sin \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 248.$$

$$0 = O \cos \alpha + H, \quad \text{woraus} \quad H = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 249.$$

Die Spannungen der ſymmetriſch zur Mitte liegenden Stäbe ſind gleich.

Falls die Laſt P im Punkte C angreift, ſo ergiebt ſich als Gleichgewichtsbedingung für den Punkt E die Relation $0 = V$; falls P in E angreift, ſo heiſst die Gleichgewichtsbedingung $0 = V - P$, woraus

$$V = P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 250.$$

Eben ſo ergiebt ſich für den armirten Träger (Fig. 223 *b*):

$$U = \frac{P}{2 \sin \alpha} \; ; \; H = -\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad V = -P \quad . \; . \; . \; . \quad 251.$$

Die Conſtruction der Spannungen ergiebt den Kräfteplan der Fig. 223, welcher ohne weitere Erläuterung verſtändlich iſt.

402. Gleichförmig vertheilte Belaſtung.

β) Gleichförmig vertheilte, totale Belaſtung. Wird der Berechnung eine gleichförmig vertheilte Belaſtung zu Grunde gelegt, ſo iſt die totale Belaſtung auch die ungünſtigſte; denn jede Laſt, wo ſie auch liegen möge, erzeugt in A und B (Fig. 224) Auflager-Reactionen, alſo in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denen der unteren Gurtung Zug. Bei dieſer Belaſtung iſt AEB wie ein continuirlicher Balken auf 3 Stützen A, E und B aufzufaſſen; die Mittelſtütze wird durch die Hängeſäule CE gebildet. In derſelben entſteht demnach ein Zug, welcher nach dem Principe von Wirkung

Fig. 224.