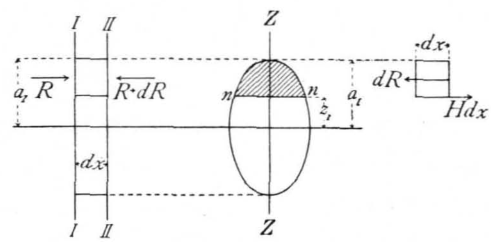
### d) Schubſpannungen; elaſtiſche Linie.

Auſser den oben ermittelten axialen Faſerſpannungen $N$ treten bei verſchiedenen Belaſtungszuſtänden der Balken auch noch Schubſpannungen auf, von denen hier zunächſt die horizontalen Schubſpannungen betrachtet werden mögen. 325. Horizontale Schubſpannungen.

Angenommen, die Axialkräfte $P$ ſeien gleich Null, und es ſollen die horizontalen Schubſpannungen ermittelt werden, welche in derjenigen Faſerſchicht zwiſchen den unendlich nahe an einander gelegenen Querſchnitten $I\,I$ und $II\,II$ (Fig. 112) wirken, die um $z_1$ über der Balkenaxe liegt. Dabei ſollen die vereinfachenden Annahmen gemacht werden, daſs die Querſchnitte $I\,I$ und $II\,II$ einander gleich ſeien, daſs die horizontale Schubſpannung pro Flächeneinheit in der ganzen Breite der Faſer $n\,n$ conſtant ſei und daſs die Kraftebene ſämmtliche Querſchnitte in Symmetrieaxen ſchneide.

Fig. 112.




Auf den Theil des Balkenſtückes zwiſchen $I\,I$ und $II\,II$, welcher oberhalb der Faſerſchicht $n\,n$ liegt, wirken zwei Kräfte, nämlich normal zur Ebene $I\,I$ die Summe $R$ der axialen Faſerſpannungen und normal zur Ebene $II\,II$ die Kraft $R + d\,R$. Nun iſt

$$R = \int_{z_1}^{a_1} N\,d\,f,$$

und da nach Gleichung 34. $N = \frac{M}{\mathfrak{J}}\,z$ iſt,

$$R = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M}{\mathfrak{J}}\,z\,d\,f \quad \text{und} \quad R + d\,R = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M + d\,M}{\mathfrak{J}}\,z\,d\,f.$$

Die Differenz der beiden Kräfte $R$ und $R + d\,R$ iſt gleich ihrer Reſultirenden; mithin iſt die auf das Balkenſtück wirkende axiale Faſerſpannung

$$R + d\,R - R = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M + d\,M}{\mathfrak{J}}\,z\,d\,f - \int_{z_1}^{a_1} \frac{M}{\mathfrak{J}}\,z\,d\,f.$$

Für die Integration zwiſchen $z_1$ und $a_1$ ſind $M$, $d\,M$ und $\mathfrak{J}$ conſtant; dieſe Werthe können alſo vor das Integralzeichen geſetzt werden, d. h. es iſt

$$d\,R = \frac{M + d\,M}{\mathfrak{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f - \frac{M}{\mathfrak{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f = \frac{d\,M}{\mathfrak{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f.$$

Damit das betrachtete Balkenſtück im Gleichgewicht ſei, muſs die algebraiſche Summe der auf daſſelbe wirkenden Horizontalkräfte gleich Null ſein; es muſs alſo noch eine Horizontalkraft auf das Balkenſtück wirken, welche der Gröſse nach genau gleich der obigen Kraft $d\,R$, der Richtung nach derſelben entgegengeſetzt iſt. Dieſe Kraft kann nur in der horizontalen Faſerſchicht wirken, mittels deren dieſes Stück mit dem anderen Balkentheil zuſammenhängt, d. h. in der um $z_1$

über der neutralen Axe liegenden Schicht. Längs dieſer Schicht entſteht demnach eine Schubſpannung. Wird die Gröſse derſelben pro Längeneinheit des Balkens mit $H$ bezeichnet, ſo beträgt ſie für $d\,x$ Längeneinheiten $H\,d\,x$, und es ergiebt ſich für die Ermittelung von $H$ die Bedingungsgleichung:

$$H\,d\,x = d\,R = \frac{d\,M}{\mathfrak{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f \quad \text{und} \quad H = \frac{d\,M}{d\,x}\,\frac{1}{\mathfrak{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f.$$

Nach Gleichung 28. (Art. 295, S. 258) iſt $\frac{d\,M}{d\,x} = Q$; demnach

$$H = \frac{Q}{\mathfrak{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 73.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen bedeutet: Es ſoll für jedes Flächentheilchen $d\,f$ zwiſchen den Ordinaten $z_1$ und $a_1$ das Product aus dieſem Flächentheilchen in ſeinen Abſtand von der Schwerpunktsaxe gebildet und die ſämmtlichen Producte ſollen addirt werden.

Man nennt bekanntlich dieſes Integral das ſtatiſche Moment der Fläche zwiſchen den Ordinaten $z_1$ und $a_1$ bezogen auf die Schweraxe. Setzen wir nun

$$S_{z_1}^{a_1} = \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f,$$

ſo wird

$$H = \frac{Q\,S_{z_1}^{a_1}}{\mathfrak{J}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 74.$$

Die horizontale Schubſpannung pro Längeneinheit für irgend eine Faſerſchicht wird demnach erhalten, indem man die Transverſalkraft für die betreffende Stelle mit dem auf die neutrale Axe bezogenen ſtatiſchen Moment des Querſchnittstheiles oberhalb der bezüglichen Faſerſchicht multiplicirt und dieſes Product durch das Trägheitsmoment des ganzen Querſchnittes für die neutrale Axe dividirt.

Aus Obigem folgt:

1) In demſelben Querſchnitt ſind $Q$ und $\mathfrak{J}$ für alle Faſern conſtant; mithin iſt die Gröſse der horizontalen Schubſpannung pro Längeneinheit des Balkens an den verſchiedenen Querſchnittsſtellen von der Gröſse des Ausdrucks für $S$ abhängig. $H$ wird für diejenigen Faſern am gröſsten, für welche $S$ ſeinen gröſsten Werth hat. Das ſtatiſche Moment des oberhalb befindlichen Flächentheils iſt am gröſsten für die horizontale Schweraxe; dort iſt es gleich $S_o^{a_1}$. Am kleinſten iſt $S$ für die äuſserſten Faſern; denn daſelbſt iſt es gleich $S_{a_1}^{a_1} = 0$.

Die horizontale Schubſpannung pro Längeneinheit des Balkens iſt demnach am gröſsten in der horizontalen Schweraxe; ſie iſt gleich Null in den am weiteſten von derſelben entfernten Faſerſchichten, d. h. in den geſpannteſten Faſern.

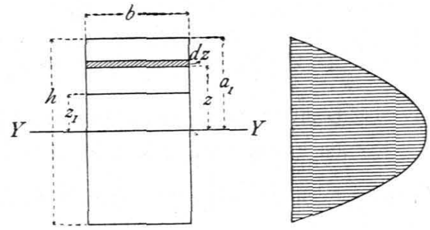
2) Der in Gleichung 74. gefundene Ausdruck giebt die Gröſse der Schubſpannung pro Längeneinheit an. Dieſe Schubſpannung vertheilt ſich über die ganze Breite der Faſerſchicht, wie man in den Fällen der Praxis meiſt annehmen kann, nahezu gleichmäſsig. Iſt demnach die Breite des Querſchnittes in der Höhe der betrachteten Faſerſchicht gleich $w$, ſo vertheilt ſich der gefundene Werth $H$

über $w \cdot 1$ Flächeneinheiten, und es ergiebt fich als Schubfpannung pro Flächeneinheit:

$$\mathfrak{H} = \frac{Q\, S_{z_1}^{a_1}}{w\, \mathcal{J}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 75.$$

Im Nachftehenden follen für einige, im Hochbauwefen häufiger vorkommende Querfchnittsformen die horizontalen Schubfpannungen beftimmt werden. 326. Rechteckige Querfchnitte.

Fig. 113.




1) Für den rechteckigen Querfchnitt (Fig. 113) liegt die horizontale Schwerpunktsaxe in halber Höhe. Die horizontale Schubfpannung in der Höhe $z_1$ über der neutralen Axe ift nach Gleichung 74. zu beftimmen.

Für den vorliegenden Querfchnitt ift

$$S_{z_1}^{a_1} = S_{z_1}^{\frac{h}{2}} = \int_{z_1}^{\frac{h_1}{2}} z\, df \text{ und, da } df = b\, dz,$$

$$S_{z_1}^{a_1} = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} b\, dz \,.\, z = \left[\frac{b\, z^2}{2}\right]_{z_1}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z_1^2\right).$$

Da ferner $\mathcal{J} = \frac{b\, h^3}{12}$, wird nach Gleichung 74.

$$H = \frac{Q\, \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z_1^2\right)}{\frac{b\, h^3}{12}} = \frac{6\, Q}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z_1^2\right) = \frac{6\, Q}{h}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z_1}{h}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad 76.$$

In diefem Ausdruck ift nur eine Variabele $z_1$; alle andern Factoren find für fämmtliche Fafern des Querfchnittes conftant. Trägt man demnach für jede Fafer die Gröfse der in ihr pro Längeneinheit ftattfindenden Horizontal-Schubfpannung als Ordinate graphifch auf und verbindet die Endpunkte derfelben, fo erhält man als Verbindungslinie eine Curve, die Curve der Gleichung 76. Die Form der Gleichung zeigt, dafs diefe Curve eine Parabel ift.

Für $z_1 = 0$ ift $H_o = H_{max} = \frac{6\, Q}{4\, h} = \frac{3\, Q}{2\, h}$, und für $z_1 = \frac{h}{2}$ ift $H_{\frac{h}{2}} = \frac{6\, Q}{h}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0.$

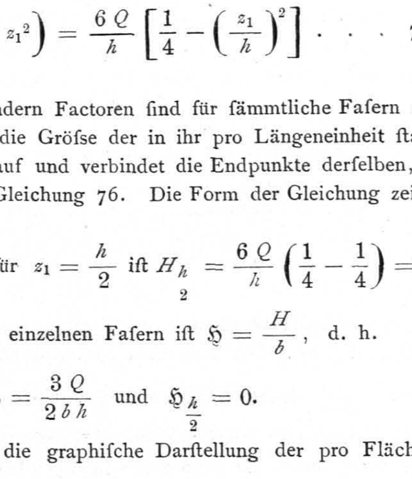
Die Horizontalfpannung pro Flächeneinheit längs der einzelnen Fafern ift $\mathfrak{H} = \frac{H}{b}$, d. h.

$$\mathfrak{H} = \frac{6\, Q}{b\, h}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z_1}{h}\right)^2\right], \text{ ferner } \mathfrak{H}_o = \frac{3\, Q}{2\, b\, h} \text{ und } \mathfrak{H}_{\frac{h}{2}} = 0.$$

Die in Fig. 113 gezeichnete Curve giebt alfo auch die graphifche Darftellung der pro Flächeneinheit ftattfindenden Horizontal-Schubfpannungen.

2) Für den fymmetrifchen **I**-förmigen Querfchnitt (Fig. 114) liegt die horizontale Schwerpunktsaxe gleichfalls in halber Höhe. Die Gröfsen $Q$ und $\mathcal{J}$ find für alle Fafern deffelben Querfchnittes conftant, mithin $H$ mit $S$ veränderlich. Für irgend eine Fafer des Steges in der Höhe $z_1$ über der neutralen Axe ift nach Gleichung 74. 327. I-förmige Querfchnitte.

Fig. 114.




$$H = \frac{Q}{\mathcal{J}}\left[\frac{b\, t(h-t)}{2} + \frac{\left(\frac{h}{2} - t - z_1\right) d\left(\frac{h}{2} - t + z_1\right)}{2}\right],$$

$$H = \frac{Q}{\mathcal{J}}\left[\frac{b\, t\,(h-t)}{2} + \frac{d}{2}\left(\left(\frac{h}{2} - t\right)^2 - z_1^2\right)\right] \quad 77.$$

Ein anfchauliches Bild der Veränderlichkeit der horizontalen Schubkräfte erhält man, indem man für jede Fafer die in ihr herrfchende Schubfpannung als Ordinate aufträgt. Da der Quotient $\frac{Q}{\mathcal{J}}$ conftant ift, fo kann derfelbe vorläufig bei Seite gelaffen werden, und man kann fich auf das Auftragen der Werthe für $S$ befchränken.

Wäre das Rechteck von der Breite $b$ und der Höhe $h$ vollftändig, fo würde man als graphifche Darftellung der Veränderlichkeit von $S$ eine Parabel erhalten (fiehe Art. 326, S. 287), deren Ordinate in der Höhe $z_1$ über der neutralen Axe wäre:

$$S = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} d f z = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z_1^2 \right).$$

Für $z_1 = 0$ ift die Ordinate $S_o = \frac{b h^2}{8}$, für $z_1 = \frac{h}{2}$ ift die Ordinate $S_{\frac{h}{2}} = 0$. Demnach ift die Parabel leicht zu conftruiren. Diefelbe ift in Fig. 114 in $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon$ gezeichnet.

Für die Fafern nun, welche der oberen und unteren Gurtung angehören, ift das ftatifche Moment $S_{z_1}^{\frac{h}{2}}$ *des über demfelben liegenden Querfchnittstheiles beim* **I**-*förmigen Querfchnitt genau eben fo grofs wie* beim vollen Rechteckquerfchnitt. Für diefe Fafern find alfo die Ordinaten der Parabel $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon$ die richtigen. Der Theil der Parabel $\alpha \beta$ und $\delta \varepsilon$ ift alfo auch für den **I**-förmigen Querfchnitt die graphifche Darftellung der $S$. Es erübrigt noch die Darftellung der Werthe von $S$ für die Fafern des Steges. Wäre nur das Rechteck von der Breite $d$ und der Höhe $h_1$ vorhanden, fo wäre nach Obigem die graphifche Darftellung von $S$ eine Parabel der Gleichung

$$s = \frac{d}{8} (h_1^2 - 4 z_1^2).$$

In Folge der Gurtungen kommt aber für jede Fafer noch das ftatifche Moment der Gurtung, d. h. der Rechtecksfläche $b t$ bezogen auf die neutrale Axe hinzu. Diefes ift aber foeben bereits in den Ordinaten $\varsigma \beta$ und $\eta \delta$ gefunden. Um diefen conftanten Summanden werden die Ordinaten $s$ zu vermehren fein, was am einfachften dadurch gefchieht, dafs man die Parabelordinaten der obigen Gleichung $s = \frac{d}{8} (h_1^2 - 4 z_1^2)$ von der Linie $\beta \delta$ aus abträgt.

In der neutralen Axe ift $z_1 = 0$, daher $s_o = \frac{d h_1^2}{8}$; für die Abfciffe $\pm \frac{h_1}{2}$ ift

$$s = \frac{d}{8} \left( h_1^2 - 4 \frac{h_1}{4} \right)^2 = 0.$$

Aus diefen Werthen ift die Parabel leicht in der bekannten Weife zu conftruiren. Es ergiebt fich die Parabel $\beta \vartheta \delta$. Die horizontale Schubfpannung pro Längeneinheit findet man daraus durch Multiplication der für $S$ gefundenen Werthe mit $\frac{Q}{\mathcal{J}}$. In den meiften Fällen ift $d$ fehr klein und eben fo $\frac{h - h_1}{2}$, d. i. die Flanfchenftärke $t$ verhältnifsmäfsig gering gegen $h$. Man kann fodann ohne merklichen Fehler die Curve für $S$ durch die gebrochene aus geraden Stücken zufammen gefetzte Linie $\alpha \beta \delta \varepsilon$ erfetzen. Es ift

$$\varsigma \beta = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) = \frac{b}{8} (h - h_1)(h + h_1) = \frac{b}{4} \left( \frac{h - h_1}{2} \right) (h + h_1) = \frac{b t}{4} (h + h_1).$$

Alsdann ift in der horizontalen Schwerpunktsaxe nahezu

$$H = \frac{Q b t (h + h_1)}{4 \mathcal{J}}.$$

Sei wieder der Abftand der Flanfchenfchwerpunkte $\mathfrak{h}$, der Flanfchenquerfchnitt $b t = f$, fo ift

$$\mathfrak{h} = \frac{h_1 + h}{2}, \quad \text{d. h.} \quad H = \frac{Q f \mathfrak{h}}{2 \mathcal{J}}.$$

Für $\mathcal{J}$ den Werth aus Gleichung 44. eingefetzt, giebt

$$H = \frac{Q f \mathfrak{h}}{\left( f + \frac{d \mathfrak{h}}{6} \right) \mathfrak{h}^2} = \frac{Q f}{\left( f + \frac{d \mathfrak{h}}{6} \right) \mathfrak{h}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 78.$$

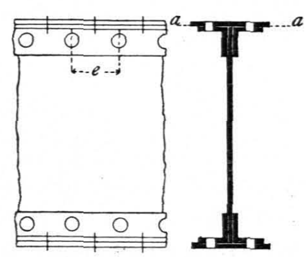
Ist $\frac{d \mathfrak{h}}{6}$ gegen $f$ klein, so ist nahezu

$$H = \frac{Q}{\mathfrak{h}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 78_a.$$

Die Ordinaten in Fig. 114 geben die horizontalen Schubspannungen pro Längeneinheit des Trägers an; die Schubspannung pro Flächeneinheit wird erhalten, indem man die pro Längeneinheit stattfindende durch die Anzahl der auf eine Längeneinheit kommenden Flächeneinheiten dividirt, d. h. durch die Breite des Querschnittes in der betreffenden Faser. Man erhält sodann die gleichfalls in Fig. 114 gezeichneten Ordinaten als horizontale Schubspannungen pro Flächeneinheit. In den Flanschen ist die Breite, also der Divisor grofs, mithin die Spannung klein; umgekehrt ist es im Stege.

3) Querschnitt der Blechträger. Bei den aus einem einzigen Stücke bestehenden Querschnitten werden die in den einzelnen Fasern wirkenden horizontalen Schubspannungen durch den Widerstand aufgehoben, den der Zusammenhang der Fasern dem Verschieben entgegen stellt; die Querschnittsdimensionen sind demnach so zu wählen, dafs die erlaubte Beanspruchung auf Schub nicht überschritten wird. Ist dagegen der Querschnitt aus mehreren Theilen zusammengesetzt, so müssen die in den Fugen zwischen den einzelnen Theilen entstehenden Schubspannungen durch künstliche Mittel aufgehoben werden. Bei den Blechträgern dient dazu der Abscherungswiderstand der Niete. Die Niete sind demnach so zu bestimmen, dafs ihr Schubwiderstand die auftretenden Schubspannungen aufhebt. Um defshalb den Abstand der Niete zu ermitteln, welche zur Verbindung der Lamellen mit den Winkeleisen dienen, suche man die pro Längeneinheit in der Fuge $a\,a$ (Fig. 115) stattfindende Schubspannung auf die oben gezeigte Weise, durch Rechnung oder graphisch. 328. Blechträger-Querschnitte.

Fig. 115.




Es ist wieder $H = \frac{Q\,S}{\mathfrak{J}}$, worin $S$ das statische Moment der Lamellenfläche bezogen auf die neutrale Axe bezeichnet. Nennt man den Abstand der Nietbolzen $e$, so ist die Gesammtschubspannung auf die Länge $e$ gleich

$$\int_x^{x+e} \frac{Q\,S}{\mathfrak{J}}\,d\,x = \frac{S}{\mathfrak{J}} \int_x^{x+e} Q\,d\,x.$$

Allerdings ändert sich $Q$ mit $x$; doch kann man $\int Q\,d\,x = Q_I\,e$ setzen, wenn $Q_I$ den Mittelwerth von $Q$ auf der betrachteten Strecke $e$ bedeutet. Mithin ist die gesammte Schubspannung auf dieser Strecke

$$D = \frac{S}{\mathfrak{J}}\,Q_I\,e.$$

Diese Schubspannung ist durch zwei einschnittige Niete aufzunehmen, deren Widerstand gegen Abscheren nach Art. 292, S. 254

$$W = 2\,\frac{d^2\,\pi\,T}{4}$$

ist, wenn $T$ die erlaubte Schubbeanspruchung pro Flächeneinheit der abzuscherenden Fläche ist. Durch Gleichsetzung beider Werthe erhält man eine Gleichung für $e$:

$$\frac{Q_I}{\mathfrak{J}}\,S\,e = \frac{2\,d^2\pi\,T}{4} \quad \text{und} \quad e = \frac{d^2\pi\,T\,\mathfrak{J}}{2\,Q_I\,S}.$$

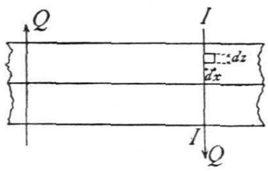
Je gröfser $Q_I$ ist, desto kleiner wird $e$, desto näher sind also die Niete zu setzen.

Die angegebene Berechnung ist nur für die horizontalen Fugen genau; sie kann aber mit hinreichender Genauigkeit auch für die verticalen Fugen, also zur Bestimmung der Niete dienen, welche die horizontale Schubkraft in den verticalen Fugen aufzunehmen bestimmt sind. Für diese Berechnung ist sodann unter $S$ das statische Moment desjenigen Theiles der Querschnittsfläche zu verstehen, welcher durch die Niete mit der Blechwand verbunden wird, also die Querschnittsfläche der Winkeleisen und der Lamellen.

Um für die verticalen Schubspannungen einen Ausdruck aufzustellen, sei ein horizontaler Balken (Fig. 116) vorausgesetzt, auf den nur verticale Belastungen wirken. Auf den Balkentheil links von einem beliebigen Querschnitt $II$ wirkt eine Anzahl äufserer Kräfte, die zu einer Resultirenden, der sog. Transversalkraft $Q$ vereinigt sein mögen. Damit dieses Balkenfragment im Gleichgewicht sei, mufs die algebraische Summe der auf dasselbe wirkenden Verticalkräfte gleich Null sein. Die 329. Verticale Schubspannungen.

Kraft $Q$ iſt allgemein nicht gleich Null; es muſs alſo am Fragment noch eine verticale Kraft wirken, welche der Kraft $Q$ entgegengeſetzt gerichtet, ihr an Gröſse aber genau gleich iſt, d. h. mit $Q$ zuſammen die Summe Null ergiebt. Eine ſolche Kraft kann aber nur längs des Querſchnittes $II$ wirken, da nur durch dieſe das Fragment mit den anderen Theilen des Balkens zuſammenhängt. Dieſe Kraft iſt der Widerſtand, welchen die Faſern dem Verſchieben des Balkentheiles längs des Querſchnittes $II$ entgegen ſetzen.

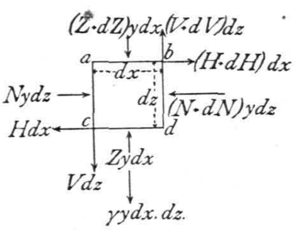
Fig. 116.




Es folgt hieraus: In jedem verticalen Querſchnitt wirken verticale Schubſpannungen, deren Summe genau gleich der Transverſalkraft iſt, welche ſich für dieſen Querſchnitt ergiebt.

Die Vertheilung dieſer Schubſpannungen über den Querſchnitt findet nach folgendem Geſetze ſtatt: Die an irgend einer Stelle pro Längeneinheit wirkende verticale Schubſpannung iſt gleich der an derſelben Stelle pro Längeneinheit wirkenden horizontalen Schubſpannung.

Fig. 117.

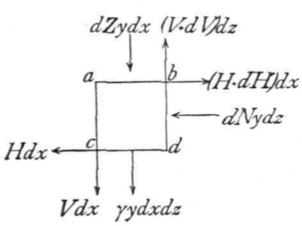



Um dieſes Geſetz nachzuweiſen, betrachten wir ein im Abſtande $z$ (Fig. 117) über der neutralen Axe liegendes Balkenſtück von der Länge $dx$ und der Höhe $dz$. Auf dieſes wirken im Allgemeinen folgende Kräfte:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| normal zur Fläche | $ac$ | wirkt | $Nydz$; | | längs der Fläche | $cd$ | wirkt | $Hdx$; |
| » » » | $bd$ | » | $(N+dN)ydz$; | | » » » | $ab$ | » | $(H+dH)dx$; |
| » » » | $cd$ | » | $Zydx$; | | » » » | $ac$ | » | $Vdz$; |
| » » » | $ab$ | » | $(Z+dZ)ydx$; | | » » » | $bd$ | » | $(V+dV)dz$. |

Hierin bedeutet $y$ die Dicke des Elementes $dz.dx$ normal zur Bildfläche gemeſſen, $Z$ und $Z+dZ$ die auf die horizontalen Flächen $ab$ und $cd$ wirkenden Normalſpannungen und $V$ die verticale Schubſpannung pro Längeneinheit. Endlich wirkt noch das Eigengewicht des Elementes $= \gamma\, y\, dx\, dz$.

Fig. 118.




Laſſen wir diejenigen Kräfte, welche einander gegenſeitig aufheben, fort, ſo bleiben die in Fig. 118 angegebenen übrig. Dieſelben halten das Balkenſtück im Gleichgewicht; es müſſen alſo die Summen der ſtatiſchen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Bildebene, gleich Null ſein.

Es ſei $b$ dieſer Drehpunkt; alsdann iſt

$$0 = V\,dz\,dx - H\,dx\,dz + \gamma\, y\,\frac{dx\,dz\,dx}{2} + dZ\,y\,dx\,\frac{dx}{2} - dN\,y\,dz\,\frac{dz}{2}.$$

Die unendlich kleinen Gröſsen dritter Ordnung fallen gegen die unendlich kleinen Gröſsen zweiter Ordnung fort; es bleibt alſo

$$0 = V\,dz\,dx - H\,dx\,dz,$$

woraus

$$V = H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 79.$$

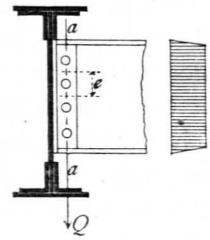
Dies gilt für jede Stelle des Balkens, womit der obige Satz bewieſen iſt. Es iſt mithin nach Gleichung 74.

$$V = \frac{Q\,S_{z_1}^{a_1}}{\mathcal{J}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 80.$$

Die in Art. 326 bis 328 für verſchiedene Querſchnittsformen ermittelten Werthe und graphiſchen Darſtellungen für $H$ gelten alſo auch für $V$.

Das Geſetz, nach welchem ſich die verticalen Schubſpannungen im Querſchnitt vertheilen, iſt von beſonderer Wichtigkeit, wenn es ſich darum handelt, die auf die einzelnen Niete in neben ſtehender Verbindung (Fig. 119) entfallenden Beanſpruchungen zu ermitteln. Der I-förmige Walzträger wird durch Winkeleiſen mit dem Blechträger vereinigt. Die im Querſchnitt $a\,a$ des I-Trägers entſtehende Transverſalkraft $Q$ iſt durch die Niete auf den Blechträger zu übertragen. Die einzelnen Niete ſind nun ſo zu vertheilen, daſs deren Entfernung der Gröſse der durch den betreffenden Niet zu übertragenden Schubſpannung entſpricht. Sei an einer Stelle die Entfernung der Nietmitten $e$, die verticale Schubſpannung pro Längeneinheit im Mittel in dieſer Höhe gleich $V$, ſo kommt auf einen Niet die Schubkraft $V e$.

Fig. 119.




Der Niet wird in zwei Querſchnitten abgeſchert; mithin iſt der Abſcherungswiderſtand des Nietes $\frac{2\,d^2\pi}{4}\,T$; es ergiebt ſich alſo für $e$ die Gleichung:

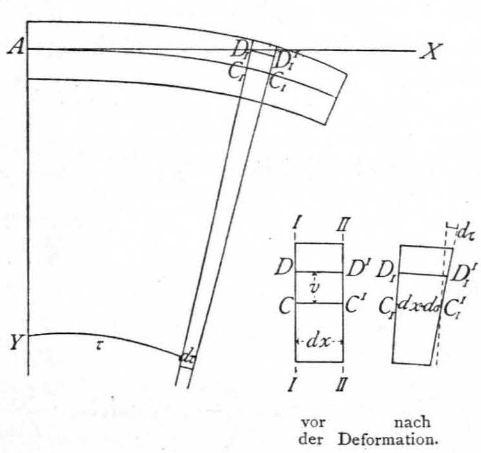
$$V e = \frac{2\,d^2\,\pi}{4}\,T, \quad \text{woraus} \quad e = \frac{\pi\,d^2\,T}{2\,V}.$$

Da $V$ von der neutralen Axe nach der oberen und unteren Gurtung zu abnimmt, ſo ſind die Niete in der Nähe der Neutralen näher zu ſetzen, als in der Nähe der Gurtung. Für die gewöhnlichen I-förmigen Walzbalken kann man die oben ſtehende Fig. 119 als graphiſche Darſtellung der Veränderlichkeit der verticalen Schubſpannung annehmen, d. h. mit genügender Annäherung $V$ als conſtant über die ganze Trägerſteghöhe annehmen, worin nach Gleichung $78_a$. $V = \frac{Q}{\mathfrak{h}}$.

In den bisherigen Betrachtungen ſind nur die Normalſpannungen, welche in den verticalen Balkenquerſchnitten, und die Schubſpannungen, welche in den horizontalen und verticalen Balkenquerſchnitten entſtehen, ermittelt worden. Um die Frage der im Inneren der Balken auftretenden Beanſpruchungen eingehend zu löſen, wären noch die Normal- und Schubſpannungen in einem Querſchnitte aufzuſuchen, welcher einen beliebigen Winkel mit der Horizontalen macht. Auf dieſe Unterſuchungen einzugehen, mangelt hier der Raum, und es kann auch in den meiſten Fällen des Hochbaues auf eine dahin gehende Berechnung verzichtet werden. Die Leſer, welche ſich über dieſen Gegenſtand inſtruiren wollen, werden auf die S. 245 genannten Werke von *Grashof* und *Winkler* verwieſen. 330. Spannungen f. ein beliebiges Flächen-element.

Wenn ein Balken dem Einfluſſe biegender Kräfte unterworfen iſt, ſo wird eine Formänderung oder Deformation deſſelben eintreten. Die Axe des urſprünglich geraden Balkens wird eine krumme Linie (Fig. 120), und zwar iſt dieſe krumme Linie eine ebene Curve, wenn alle Kräfte in einer Ebene wirken, welche ſämmtliche Querſchnitte in Hauptaxen — meiſt Symmetrieaxen — ſchneidet. Sodann liegen alle Punkte der deformirten Axe in der Kraftebene. Man nennt die deformirte Axe die elaſtiſche Linie. 331. Elaſtiſche Linie.

Fig. 120.




Die Gleichung der elaſtiſchen Linie läſſt ſich folgendermaſsen entwickeln.

Wir legen durch einen Punkt $A$ der Balkenaxe drei Coordinatenaxen, von denen die $X$-Axe mit der urſprünglichen Balkenaxe zuſammenfalle, die $Y$-Axe normal zu derselben in der Kraftebene, die $Z$-Axe normal zur Kraftebene steht, und betrachten ein Balkenstück zwischen den Ebenen $II$ und $IIII$, dessen Länge vor der Deformation $dx$ war. Die Ebenen $II$ und $IIII$ waren vor der Deformation parallel und normal zur Balkenaxe und hatten die Abscissen $x$ und $x + dx$; die Länge einer Faser $DD'$ in der Höhe $v$ über der Axe war $dx$.

Wir bestimmen nunmehr die Deformation dieser Faser $DD'$. Durch die beiden Punkte der deformirten Axe $C_1$ und $C_1'$ legen wir Ebenen normal zu der deformirten Axe; der Winkel beider sei $d\tau$, der Winkel der ersten dieser Ebene mit der Verticalebene sei $\tau$. Die einzelnen Punkte der Ebenen $II$ und $IIII$ werden nach der Deformation allgemein nicht mehr in Ebenen liegen; man kann aber annehmen, dass der Abstand zweier Punkte in der Höhe $v$ über der Axe nach der Deformation eben so gross ist, wie der Abstand der Normalebenen in der Höhe $v$ über der Axe, d. h. dass stattfindet

$$D_1 D_1' = C_1 C_1' + v\, d\tau.$$

Nennt man die Verlängerung des Stückes $CC'$ bei der Deformation $d\sigma$, so ist

$$C_1 C_1' = dx + d\sigma \quad \text{und} \quad D_1 D_1' = dx + d\sigma + v\, d\tau.$$

Dies ist die Länge der deformirten Faser. Die ursprüngliche Länge derselben war $DD' = dx$; folglich ist die Verlängerung durch die Deformation

$$D_1 D_1' - DD' = dx + d\sigma + v\, d\tau - dx = d\sigma + v\, d\tau$$

und das Verlängerungsverhältniss $\dfrac{d\sigma + v\, d\tau}{dx}$.

Ist $N$ die axiale Faserspannung in dieser Faser, so ist

$$\frac{N}{E} = \frac{d\sigma + v\, d\tau}{dx} = \frac{d\sigma}{dx} + \frac{v\, d\tau}{dx},$$

$$N = E\frac{d\sigma}{dx} + \frac{E v\, d\tau}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 81.$$

Nach Gleichung 33. ist aber auch

$$N = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 82.$$

Für $v = 0$, d. h. für die Axe ist nach Gleichung 81. und 82.

$$N_o = E\frac{d\sigma}{dx} = \frac{P}{F},$$

d. h.

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{P}{EF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 83.$$

Die Gleichsetzung der Gleichungen 81. und 82. ergiebt

$$\frac{E.d\sigma}{dx} + \frac{E.v.d\tau}{dx} = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{J}$$

und da nach Gleichung 83. $\dfrac{E\, d\sigma}{dx} = \dfrac{P}{F}$ ist, wird

$$\frac{E v\, d\tau}{dx} = \frac{Mv}{J}$$

oder

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{M}{EJ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 84.$$

Nun ist $\operatorname{tg}\tau = \dfrac{dy}{dx}$, sonach $\dfrac{d\operatorname{tg}\tau}{dx} = \dfrac{d\tau}{\cos^2\tau\, dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Bei den hier in Betracht kommenden Deformationen ist $\tau$ so klein, dafs $\cos^2 \tau$ unbedenklich gleich 1 gesetzt werden kann, d. h. dafs nahezu

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 85.$$

Für $\frac{d\tau}{dx}$ den Werth aus Gleichung 84. eingesetzt, giebt

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 86.$$

Gleichung 86. ist die Differentialgleichung der elastischen Linie. In derselben bedeutet $M$ das Moment an der Stelle mit der Abscisse $x$, im Allgemeinen also etwas Variabeles; $\mathfrak{J}$ ist das Trägheitsmoment für die horizontale Schwerpunktsaxe des Querschnittes an derselben Stelle.

Die Gleichung der elastischen Linie wird durch zweimalige Integration der Gleichung 86. erhalten; bei der Integration ist $E$ constant. Es wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E}\int \frac{M}{\mathfrak{J}}\, dx + C_1$$

und

$$y = \frac{1}{E}\int\!\!\int \frac{M}{\mathfrak{J}}\, (dx)^2 + C_1 x + C_2.$$

Bekanntlich ist der Krümmungsradius für eine ebene Curve

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

oder wenn $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$ nur klein ist, angenähert

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

Danach wird die Gleichung der elastischen Linie auch geschrieben werden können:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 87.$$

Für $M = 0$ wird $\rho = \infty$, d. h. die elastische Linie eine Gerade. Das Moment $M$ ist Null an demjenigen Punkt des Balkens, wo es aus dem positiven in den negativen Werth übergeht, also das Vorzeichen wechselt; an diesen Punkten hat sonach die elastische Linie sog. Wende- oder Inflexionspunkte.