c) Stäbe, bei denen die Axialkraft nicht gleich Null iſt.

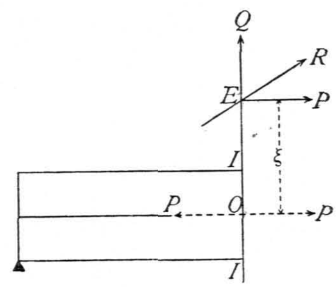
318. Neutrale Axe.

In den bisherigen Unterſuchungen wurde die Axialkraft gleich Null angenommen. Wir wollen nun die Annahme machen, daſs die Axialkraft den Werth P habe. Alsdann dient zur Ermittelung der axialen Faſerſpannung in einer Faſer mit der Ordinate z die Gleichung 33. des Art. 296, nämlich:

$$N = \frac{P}{F} + \frac{M z}{\mathfrak{J}} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad 33.$$

Der Entwickelung dieſer Formel lag die Annahme zu Grunde, daſs die Kraftebene den Querſchnitt in einer Symmetrieaxe (Hauptaxe) ſchneide. Die Mittelkraft aller an der einen Seite des Querſchnitts II (Fig. 99), d. h. aller auf den Querſchnitt II wirkenden äuſseren Kräfte ſei R und ſchneide die Verlängerung des Querſchnittes im Punkte E, im Abſtande $OE = \xi$ vom Schwerpunkt O des Querſchnittes. Wir zerlegen R im Punkte E in eine Axialkraft P und eine Transverſalkraft Q. Das Moment der äuſseren Kräfte iſt ſodann $M = P\xi$. Nach Gleichung 33. iſt

Fig. 99.



Werth der Faserspan.

$$N = \frac{P}{F} + \frac{P \xi z}{\mathfrak{J}} = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F \xi z}{\mathfrak{J}}\right) \quad . \quad 50.$$

N wird für alle diejenigen Punkte gleich Null, für welche der Klammerfactor gleich Null wird. Nennt man den ſpeciellen Werth von z, für den dies eintritt, z_0, ſo wird $N = 0$, wenn $1 + \frac{F \xi z_0}{\mathfrak{J}} = 0$ wird, d. h. für

$$z_0 = -\frac{\mathfrak{J}}{F \xi} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad 51.$$

Für alle Punkte, deren Ordinaten den Werth der Gleichung 51. haben, iſt $N = 0$; die Gleichung 51. iſt alſo die Gleichung der neutralen Axe, doch nur unter der Vorausſetzung, daſs die Kraftebene den Querſchnitt in einer Hauptaxe ſchneidet.

Aus der Gleichung 51. für die neutrale Axe ergeben ſich wichtige Folgerungen:

1) Da $\mathfrak{J}$ und F ſtets poſitive Gröſsen ſind, ſo hat z_0 ſtets anderes Vorzeichen als ξ. Die ſämmtlichen Punkte, in denen die Spannung Null ſtattfindet, liegen alſo an derjenigen Seite des Schwerpunktes, an welcher der Schnittpunkt mit der Reſultirenden R nicht liegt.

2) Für eine und dieſelbe Lage der Kraft R ſind alle Gröſsen auf der rechten Seite der Gleichung conſtant, alſo iſt auch z_0 conſtant; es liegen alſo alle Punkte, in denen N gleich Null iſt, in gleichem Abſtande von der Y-Axe, d. h. alle dieſe Punkte liegen in einer Geraden, die parallel iſt zu derjenigen Schwerpunktsaxe, welche normal ſteht zur Schnittlinie des Querſchnittes mit der Kraftebene.

3) Der Werth für z_0 iſt von der Kraftgröſse ganz unabhängig; er iſt nur von den Werthen $\mathfrak{J}$ und F, alſo von der Querſchnittsform und -Gröſse und von ξ, d. h. von der Lage des Schnittpunktes E abhängig.

4) z_0 wird Null, d. h. die neutrale Axe fällt mit der zur Kraftebene normalen Schwerpunktsaxe zuſammen, wenn $\xi = \infty$ wird, d. h. wenn die Kraft R den Querſchnitt erſt in unendlich weiter Ferne ſchneidet, wenn alſo R zu dem Querſchnitte parallel gerichtet iſt. Sodann iſt gar keine Axialkraft vorhanden. (Dieſes Reſultat wurde bereits oben in Art. 297, S. 262 auf anderem Wege gefunden.)

319. Graphiſche Ermittelung der neutralen Axe.

Die Gleichung 51. giebt ein bequemes Verfahren, die Lage der neutralen Axe graphiſch zu ermitteln.

Beſonders einfach geſtaltet ſich die Aufgabe beim rechteckigen Querſchnitt. Hier iſt nach Art. 307, S. 266

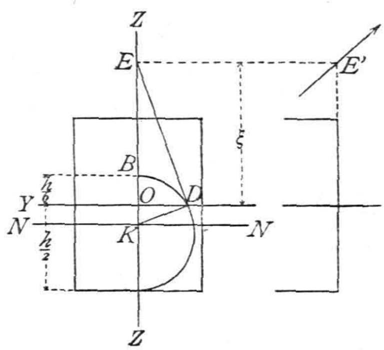
$$\mathfrak{J} = \frac{b h^3}{12} \quad \text{und} \quad F = b h.$$

Aus Gleichung 51. folgt, wenn wir zunächſt nur die abſolute Gröſse von z_0 beſtimmen,

$$z_0 = \frac{b h^3}{12 b h \xi} = \frac{h^2}{12 \xi} \quad \text{und} \quad z_0 \xi = \frac{h^2}{12} = \frac{h}{6} \cdot \frac{h}{2}.$$

Daraus ergiebt ſich die nachfolgende Conſtruction (Fig. 100). Man trägt von O aus $O\,B = \frac{h}{6}$ nach oben; alsdann liegt der Punkt B in der Höhe $\frac{2}{3}\,h$ über der Unterkante des Querſchnittes. Nun ſchlage man über dieſem Abſtand einen Halbkreis, welcher die in O zur Z-Axe gezogene Normale in D ſchneidet; alsdann iſt $\overline{O\,D}^2 = \frac{h}{6} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^2}{12}$. Man verbinde nun D mit E, ziehe durch D eine Linie $D\,K$ normal zu $D\,E$, ſo iſt $\overline{O\,D}^2 = \overline{O\,K} \, . \, \overline{O\,E}$ und

Fig. 100.



$$\frac{h^2}{12} = \overline{O\,K} \, . \, \xi \quad \text{oder} \quad \overline{O\,K} = \frac{h^2}{12\,\xi} = z_o .$$

K iſt alſo ein Punkt der neutralen Axe, und die durch K parallel zur Y-Axe gelegte Linie $N\,N$ ergiebt die neutrale Axe ſelbſt.

Bei complicirten Querſchnitten, die auch ganz unregelmäſsig ſein können, iſt dieſe Conſtruction, etwas modificirt, ebenfalls anwendbar.

Nach Art. 316, S. 271 iſt der Trägheitsradius

$$R = \sqrt{\frac{\mathfrak{J}}{F}}$$

Demnach iſt nach Gleichung 51.

$$z_o = -\frac{\mathfrak{J}}{F\,\xi} = -\frac{F\,R^2}{F\,\xi} = -\frac{R^2}{\xi},$$

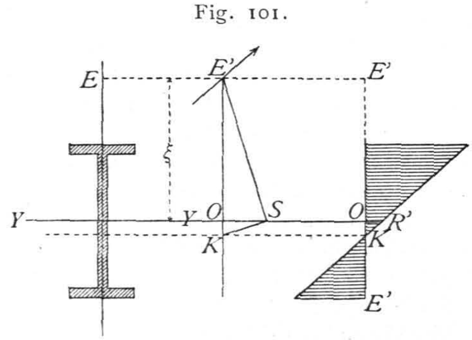
woraus ſich folgende Conſtruction (Fig. 101) ergiebt.

In O errichte man die Normale zum Querſchnitte $O\,S = R$, verbinde S mit E', ziehe durch S die Normale $S\,K$ zu $S\,E'$; alsdann iſt $R^2 = \overline{O\,K} \, . \, \overline{O\,E'} = \overline{O\,K} \, . \, \xi$ oder $O\,K = \frac{R^2}{\xi}$ (abſolute Gröſse) $= z_o$.

320. Spannungs-vertheilung.

Die Vertheilung der Spannung über die Querſchnittsfläche findet nach dem durch Gleichung 50. $N = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F\,\xi\,z}{\mathfrak{J}}\right)$ ausgedrückten Geſetze ſtatt; in derſelben ſind N und z die einzigen Variabelen, und beide kommen nur in der erſten Potenz vor. Daraus folgt, daſs die Spannung ſich nach dem Geſetze einer Geraden ändert. Ein Punkt dieſer Geraden iſt bereits gefunden, nämlich derjenige Punkt, in welchem die Gerade die Abſciſſenaxe ſchneidet, d. h. wo die Spannung gleich Null iſt, nämlich der Punkt K (Fig. 101). Gelingt es noch einen Punkt der Geraden zu finden, ſo erhält man durch Verbindung dieſes Punktes mit dem Nullpunkt K die geſuchte Gerade. Für $z = 0$ iſt

Fig. 101.



$$N_o = \frac{P}{F},$$

d. h. in den Faſern, welche in der zur Kraftebene normalen Schwerpunktsaxe liegen, iſt die Spannung eben ſo groſs, als wenn nur die Axialkraft P wirkte. Dieſe Gröſse $\frac{P}{F}$ iſt leicht zu ermitteln.

Man beſtimme $\frac{P}{F}$ und trage (Fig. 101) den gefundenen Werth für die Abſciſſe $z = 0$, d. h. im Schwerpunkt nach beliebigem Maſsſtabe auf, mache alſo $O\,R' = \frac{P}{F}$, verbinde R' mit K; alsdann ift diefe Verbindungslinie die gefuchte Gerade. Die Ordinaten diefer Geraden geben, auf dem angenommenen Mafsftabe gemeffen, die pro Flächeneinheit in den einzelnen Faferfchichten wirkenden Spannungen an. Die von der erwähnten Geraden und der Abfciffenaxe $E'E'$ eingefchloffene (in Fig. 101 fchraffirte) Fläche nennt man wohl auch die Druckfigur.

Die vorftehend angegebenen Conftructionen werden mit Nutzen angewendet, um die Druckvertheilung in den Gewölbefugen und in den Querfchnitten der Stützmauern, fo wie an den Bodenflächen der letzteren zu ermitteln. 321. Druckvertheilung in Gewölben u. Stützmauern.

Als Dimenfion normal zur Bildfläche wählt man die Einheit (gewöhnlich 1 m), fo dafs die gedrückte Fläche — der Querfchnitt — (Fig. 102 u. 103) ein Rechteck von der Breite (normal zur Bildfläche) gleich der Einheit ift. Die zweite Dimenfion des Rechtecks ift bei den Gewölben (Fig. 102) die Gewölbftärke d an der betreffenden Stelle, bei den Stützmauern die Mauerftärke d (Fig. 103). Man nimmt nun an, dafs das obige Gefetz der *Druckvertheilung auch hier giltig* fei, welche Annahme gemacht werden kann, fo lange keine Zugfpannungen im Querfchnitt vorkommen. Die auf den Querfchnitt wirkende Refultirende zerlegt fich in die Axialkraft P und die Transverfalkraft Q, welche letztere keine Axialfpannungen erzeugt. Nun kann ohne Weiteres obige Conftruction angewendet werden, was in Fig. 102 und 103 für einen Gewölbe- und einen Stützmauerquerfchnitt gefchehen ift.

Fig. 102.

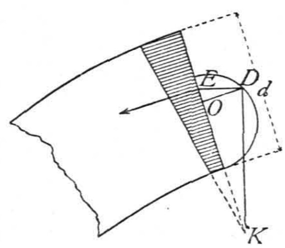
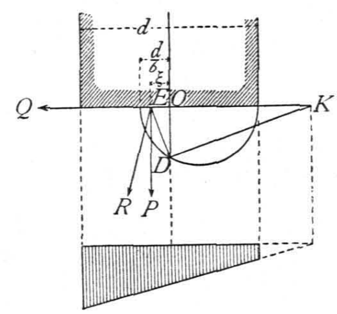


Fig. 103.

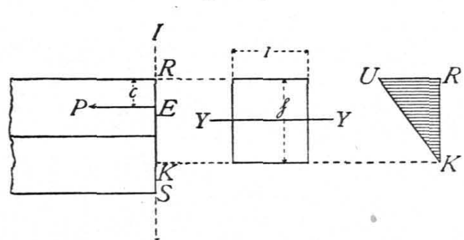


Wie bereits bemerkt, ift diefe Conftruction bei denjenigen Materialien, welche keinen Zug ertragen können, nur richtig, falls in keiner Fafer des Querfchnittes Zugfpannungen fich ergeben, bei den Gewölben aber ftets nur näherungsweife richtig, weil die Vorausfetzung der geraden Axe nicht erfüllt ift.

Im Anfchlufs an das Vorftehende foll gezeigt werden, wie fich die Spannungsvertheilung ergiebt, falls die neutrale Axe in die Querfchnittsfläche fällt und die Fafern nur Druckfpannungen aufnehmen können. Die hier in Betracht kommenden Querfchnitte find nur rechteckige, wefshalb nur diefe Form berückfichtigt wird. 322. Druckvertheilung in *Querfchnitten*, welche nur Druck aufnehmen können.

Die Kraft P (Fig. 104) fchneide die Symmetrieaxe des Querfchnittes im Abftande c von der äufserften Fafer R; die zugehörige neutrale Axe liege in K. Es ift zunächft K zu ermitteln. Die bisherigen Conftructionen find hier nicht giltig, weil bei Auffuchung der betreffenden Ausdrücke für N und z_0 in den Fafern zwifchen K und S Zugfpannungen angenommen waren, die hier nicht exiftiren. Denn, da die Fafern nur Druckfpannungen aufnehmen können, wird in allen denjenigen Fafern, in welchen Zug entftehen würde, ein Klaffen der Fugen, oder ein indifferentes Aneinanderliegen der Berührungsflächen ftattfinden. Eine Spannungsübertragung exiftirt nur in dem gedrückten Theile der Querfchnittsfläche, deffen Höhe $= \mathfrak{h}$ fei.

Fig. 104.



Deffen ungeachtet kann man die Gleichung 33. (S. 261 u. 273):

$$N = \frac{P}{F} + \frac{Mz}{\mathcal{J}}$$

anwenden, wenn jetzt unter F der Theil der Querſchnittsfläche, auf welchem Druckübertragung ſtattfindet, und unter $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment dieſes Theils der Querſchnittsfläche für die im Schwerpunkt deſſelben normal zur Kraftebene errichtete Axe YY verſtanden wird. Wird die Dimenſion normal zur Bildfläche gleich der Einheit geſetzt, ſo iſt

$$F = \mathfrak{h} \,.\, 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{J} = \frac{1 \,.\, \mathfrak{h}^3}{12}.$$

M iſt hier das Moment, bezogen auf die erwähnte Schwerpunktsaxe YY, d. h.

$$M = P\left(\frac{\mathfrak{h}}{2} - c\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 52.$$

Es iſt alſo die Spannung in einer Faſer mit der Ordinate z

$$N = \frac{P}{F}\left[1 + \frac{F\left(\frac{\mathfrak{h}}{2} - c\right) z}{\mathfrak{J}}\right] = \frac{P}{\mathfrak{h}}\left[1 + \frac{12\, z\left(\frac{\mathfrak{h}}{2} - c\right)}{\mathfrak{h}^2}\right] \quad \ldots \quad 53.$$

N wird im Punkte K, d. h. für $z = -\frac{\mathfrak{h}}{2}$, gleich Null; es iſt demnach

$$0 = \frac{P}{\mathfrak{h}}\left[1 - \frac{12\, \mathfrak{h}\left(\frac{\mathfrak{h}}{2} - c\right)}{2\, \mathfrak{h}^2}\right].$$

Dieſe Gleichung dient zur Ermittelung des Werthes für $\mathfrak{h}$; denn es iſt

$$0 = 1 - \frac{6\left(\frac{\mathfrak{h}}{2} - c\right)}{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} - 3\,\mathfrak{h} + 6\,c, \quad \text{woraus} \quad \mathfrak{h} = 3\,c \quad \ldots \quad 54.$$

Die Druckvertheilung findet alſo auf eine Fläche ſtatt, welche dreimal ſo breit iſt, wie der Abſtand des Schnittpunktes E von der nächſten Kante.

Die Druckbeanſpruchung in irgend einer Faſer mit der Ordinate z iſt demnach

$$N = \frac{P}{3\,c}\left[1 + \frac{12\, z\, \frac{c}{2}}{9\,c^2}\right] = \frac{P}{9\,c^2}\,(3\,c + 2\,z) \quad \ldots\ldots \quad 55.$$

N_{max} findet ſtatt, wenn z ſeinen gröſsten Werth $= +\frac{\mathfrak{h}}{2} = \frac{3\,c}{2}$, N_{min} dagegen, wenn z ſeinen kleinſten Werth $= -\frac{\mathfrak{h}}{2} = -\frac{3\,c}{2}$ hat; es iſt alſo

$$N_{max} = \frac{2\,P}{3\,c} \quad \text{und} \quad N_{min} = \frac{P}{9\,c^2}\,(3\,c - 3\,c) = 0 \quad \ldots\ldots \quad 56.$$

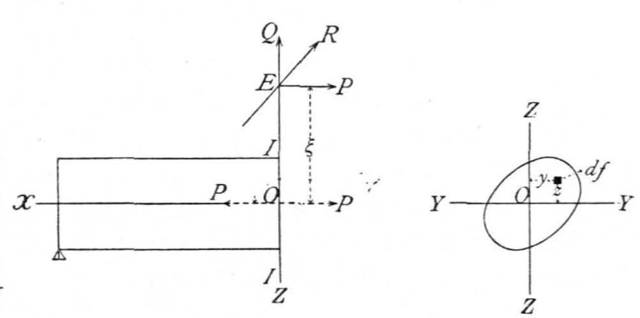
Wenn ſich der Druck P gleichförmig über die ganze gedrückte Fläche $F = \mathfrak{h} = 3\,c$ vertheilen würde, ſo wäre der Druck pro Flächeneinheit der Fläche gleich $\frac{P}{3\,c}$; der wirklich ſtattfindende Maximaldruck iſt $= \frac{2\,P}{3\,c}$, d. h. doppelt ſo groſs, als wenn P ſich gleichförmig vertheilte. Die Druckfigur wird alſo erhalten, indem man zunächſt (Fig. 104) $RE = c$ dreimal von R aus abträgt, wodurch man den Nullpunkt K findet; alsdann trägt man in R nach beliebigem Maſsſtabe

$N_{max} = \frac{2P}{3c} = RU$ auf und verbindet U mit K. Die fchraffirte Fläche giebt die Druckfigur.

In Art. 296, S. 261 war durch Gleichung 33. die axiale Faferfpannung nur für den Fall ermittelt, dafs die Kraftebene alle Querfchnitte des Balkens in zwei fymmetrifche Hälften theilte. Es foll nunmehr für den allgemeinen Fall des nicht fymmetrifchen Querfchnittes und beliebiger äufserer Kräfte der Ausdruck für die axiale Faferfpannung ermittelt werden. 323. Axiale Faferfpannung.

Auf das Balkenfragment links vom Schnitte II (Fig. 105), für welches die Werthe von N ermittelt werden follen, wirke als Refultirende aller äufseren Kräfte R. Wir zerlegen die Kraft R im Punkte E, wo fie die Verlängerung des Querfchnittes fchneidet, in eine Axialkraft P und in eine Transverfalkraft Q, bringen im Schwerpunkte O des Querfchnittes II zwei einander gleiche, aber entgegengefetzt gerichtete Kräfte P an und erhalten als Wirkung der äufseren Kräfte auf den Querfchnitt II eine Transverfalkraft Q im Querfchnitte II, ein Moment $P\xi$, welches gleich dem ftatifchen Momente der äufseren Kräfte, bezogen auf den Punkt O ift, und eine Axialkraft P, im Punkte O wirkfam.

Fig. 105.



Das Fragment links von II ift unter der Einwirkung diefer äufseren Kräfte und der auf daffelbe wirkenden inneren Kräfte oder Spannungen im Querfchnitt II im Gleichgewicht; werden alfo im Querfchnitt II die Spannungen angebracht, fo können wir auf das Ganze die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (fiehe Art. 255, S. 232) anwenden. Jede Spannung hat eine horizontale Componente, die genau genug als axiale Componente eingeführt wird, und eine verticale Componente. Die erfteren bilden die axialen Faferfpannungen N.

Durch den Schwerpunkt des Querfchnittes werden wiederum drei Coordinatenaxen gelegt: die X-Axe, welche mit der Tangente an die deformirte Stabaxe an diefer Stelle, die Z-Axe, welche mit der Durchfchnittslinie der Kraftebene und der Querfchnittsebene zufammenfällt, und die Y-Axe, welche zur X- und Z-Axe normal fteht. Es laffen fich nunmehr die drei gedachten Gleichgewichtsbedingungen für den vorliegenden Fall aufftellen.

1) Die algebraifche Summe der in die Axenrichtung fallenden Componenten mufs gleich Null fein, d. h.

$$0 = P - \int N\, df.$$

2) Die algebraifche Summe der ftatifchen Momente fämmtlicher Kräfte bezogen auf die Axe OY mufs gleich Null fein. Das Moment der äufseren Kräfte in Bezug auf die Axe OY, welche fich in der Ebene ZX im Punkte O projicirt, ift $M = P\xi$; das ftatifche Moment einer im Abftande z von der Axe OY wirken-

den Faserspannung $N\,df$ ist gleich $N\,z\,df$; folglich die Summe aller Momente der Faserspannungen gleich $\int N\,z\,df$ und

$$0 = M - \int N\,z\,df \quad \text{oder} \quad M = \int N\,z\,df.$$

Das negative Vorzeichen ist für das Moment der Faserspannungen gewählt, weil Gleichgewicht nur möglich ist, wenn beide Momente entgegengesetztes Vorzeichen, also entgegengesetzte Drehrichtung haben.

3) Die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte bezogen auf die ZZ-Axe muss gleich Null sein. In Bezug auf diese Axe haben die äusseren Kräfte kein Moment, weil diese Axe in der Ebene der äusseren Kräfte liegt, dieselben also für diese Axe den Hebelsarm Null haben. Die Faserspannung $N\,df$ hat in Bezug auf die Axe ZZ das Moment $N\,df\,y$; folglich muss

$$0 = \int N\,y\,df$$

sein. Die Integration ist über den ganzen Querschnitt auszudehnen.

Durch die Faserspannungen entstehen Längenänderungen, welche wir als der ersten Potenz von y und z proportional annehmen können, d. h. wir können, wenn dx den ursprünglichen Abstand zweier Querschnitte vor der Deformation, $\Delta\,dx$ die bei der Deformation erzeugte Aenderung des Abstandes in einer Faser mit den Coordinaten y und z bezeichnet, setzen:

$$\frac{\Delta\,dx}{dx} = \alpha + \beta y + \gamma z,$$

worin α, β und γ vorläufig unbekannte Constante sind.

Nach Art. 279, S. 246 ist $\frac{\Delta\,dx}{dx} = \frac{N}{E}$, demnach

$$N = E\alpha + E\beta y + E\gamma z = a + by + cz,$$

wenn a, b und c noch zu bestimmende Constante sind. Zur Bestimmung der letzteren dienen die aufgestellten drei Bedingungsgleichungen. Wird der Werth für N in diese Gleichungen eingesetzt, so ergiebt sich, da a, b und c für die Integration constant sind,

$$P = a\int df + b\int y\,df + c\int z\,df,$$

$$M = a\int z\,df + b\int yz\,df + c\int z^2\,df,$$

$$0 = a\int y\,df + b\int y^2\,df + c\int yz\,df.$$

$\int yz\,df$ ist identisch mit dem in Art. 313, S. 269 gefundenen Ausdruck $\int yz\,df = H$; ferner ist $\int z^2\,df = \mathfrak{J}$ und $\int y^2\,df = \mathfrak{J}_1$. Da ferner der Anfangspunkt der Coordinatenaxen im Schwerpunkt liegt, so ist nach der Schwerpunktslehre $\int z\,df = 0$ und $\int y\,df = 0$.

Bezeichnet man endlich $\int df = F$, so ist

$$P = aF, \quad M = bH + c\mathfrak{J} \quad \text{und} \quad 0 = b\mathfrak{J}_1 + cH.$$

Daraus ergeben ſich für a, b und c folgende Werthe:

$$a = \frac{P}{F}, \quad b = \frac{H\,M}{H^2 - \mathfrak{J}\mathfrak{J}_1} \quad \text{und} \quad c = \frac{\mathfrak{J}_1\,M}{\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1 - H^2}$$

und demnach

$$N = \frac{P}{F} + \frac{H\,M\,y}{H^2 - \mathfrak{J}\mathfrak{J}_1} + \frac{\mathfrak{J}_1\,M\,z}{\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1 - H^2} = \frac{P}{F} + \frac{M\,(\mathfrak{J}_1\,z - H\,y)}{\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1 - H^2} \quad . \quad . \quad 57.$$

Bei der in Fig. 105 gezeichneten Richtung und Lage der äuſseren Kräfte iſt die Axialkraft P im Punkte O ein Druck; auch erzeugt das Moment M für ſich allein in den Faſern oberhalb YY Druck. Es werden alſo hier, wenn die Z-Richtung nach oben als die poſitive eingeführt wird, die poſitiven Werthe von N Druck, die negativen Werthe Zug bedeuten; umgekehrt wäre es bei der entgegengeſetzten Richtung der Kraft R. Bei Anwendung der Gleichung 57. iſt alſo Vorſicht nöthig.

Wenn die Kraftebene den Querſchnitt in einer Symmetrieaxe ſchneidet, alſo die Z-Axe eine Symmetrieaxe iſt, ſo iſt nach Art. 314 (S. 270) $H = 0$, demnach

$$N = \frac{P}{F} + \frac{M\,z}{\mathfrak{J}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 58.$$

Dieſe Gleichung ſtimmt mit der unter den gleichen Annahmen in Art. 296, S. 261 entwickelten Gleichung 33. überein.

Die in den Art. 318 u. 319, S. 273 u. 274 für die neutrale Axe gefundenen Reſultate gelten nur für den Fall, daſs die Kraftebene den Querſchnitt in einer Hauptaxe ſchneidet. Iſt dieſe Vorausſetzung nicht erfüllt, ſo iſt die Spannung in irgend einer Faſer mit den Coordinaten y und z nach Gleichung 57. zu ermitteln.

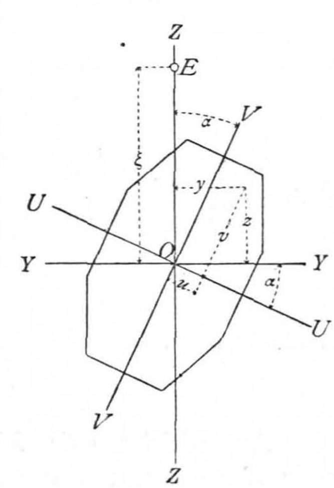
324.
Allg. Gleichung der neutralen Axe.

Bei der Entwickelung dieſer Gleichung war als Z-Axe die Linie gewählt, in welcher die Kraftebene den Querſchnitt ſchneidet, als Axe der Y die im Schwerpunkt des Querſchnittes normal zur Z-Axe gezogene Axe. Nun iſt $M = P\,\xi$, demnach

$$N = \frac{P}{F} + P\,\xi\,\frac{\mathfrak{J}_1\,z - H\,y}{\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1 - H^2} = \frac{P}{F}\left[1 + \frac{F\,\xi\,(\mathfrak{J}_1\,z - H\,y)}{\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1 - H^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad 59.$$

Es empfiehlt ſich, die beiden durch den Schwerpunkt des Querſchnittes gelegten Hauptaxen als Coordinatenaxen zu wählen; dieſelben mögen die U- und V-Axe der Fig. 106 ſein und mit den beiden Axen der Y und Z bezw. den Winkel α einſchlieſsen.

Fig. 106.



Um den Ausdruck für N auf die neuen Axen bezogen zu erhalten, hat man die Werthe von $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_1$ und H durch α und die Trägheitsmomente für die Hauptaxen, ferner die Coordinaten y und z durch u, v und α auszudrücken. Das Trägheitsmoment für die U-Axe ſei A, dasjenige für die V-Axe ſei B; alsdann iſt nach den Gleichungen 48. des Art. 315, S. 271

$$\mathfrak{J}_Y = A \cos^2\alpha + B \sin^2\alpha = \mathfrak{J},$$
$$\mathfrak{J}_Z = A \sin^2\alpha + B \cos^2\alpha = \mathfrak{J}_1,$$
$$H = (A - B) \sin\alpha \cos\alpha;$$

ferner nach Figur 106:

$$z = v \cos\alpha - u \sin\alpha \quad \text{und} \quad y = u \cos\alpha + v \sin\alpha.$$

Setzt man die eben gefundenen Werthe für $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_1$, H, z und y in den Ausdruck für N (Gleichung 59.), so ist

$$N = \frac{P}{F}\left[1 + F\xi\left(\frac{(A \sin^2\alpha + B \cos^2\alpha)(v \cos\alpha - u \sin\alpha) - (A - B)\sin\alpha \cos\alpha\,(u \cos\alpha + v \sin\alpha)}{(A \sin^2\alpha + B \cos^2\alpha)(A \cos^2\alpha + B \sin^2\alpha) - (A - B)^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha}\right)\right].$$

Die Ausführung der Multiplication ergiebt

$$N = \frac{P}{F}\left[1 + \frac{F\xi}{AB}(B v \cos\alpha - A u \sin\alpha)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60.$$

Dies ist der allgemeinste Ausdruck für die axialen Faserspannungen; darin bezeichnet α den Winkel, welchen die Durchschnittslinie der Kraftebene und der Querschnittsebene mit der V-Axe bildet, und ξ den Abstand des Durchschnittspunktes der Resultirenden R mit der Querschnittsebene vom Schwerpunkt O des Querschnittes.

Für dieselbe Lage der Resultirenden P sind ξ und α constant, also N nur mit v und u variabel.

Falls $P = 0$ ist, ergiebt sich aus Gleichung 60. für N, weil sodann $\xi = \infty$ ist, der unbestimmte Ausdruck $N = 0 \,.\, \infty$. In diesem Falle führt man für $P\xi$ wieder M ein und hat:

$$N = \frac{P}{F} + \frac{M}{AB}(B v \cos\alpha - A u \sin\alpha).$$

Für $P = 0$ ist sodann

$$N = M\left(\frac{v \cos\alpha}{A} - \frac{u \sin\alpha}{B}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60_a.$$

Alle Punkte des Querschnittes, in denen eine gleiche axiale Faserspannung, etwa C, stattfindet, genügen der Gleichung:

$$C = \frac{P}{F}\left[1 + \frac{F\xi}{AB}(B v \cos\alpha - A u \sin\alpha)\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 61.$$

liegen also auf einer Geraden, weil die einzigen Variabelen v und u nur in der ersten Potenz vorkommen. Die Auflösung der Gleichung für C nach v ergiebt

$$v = \frac{A}{B} u \operatorname{tg}\alpha + \frac{(CF - P)A}{PF\xi\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62.$$

Die sämmtlichen Punkte, in denen die axiale Faserspannung, also die Gröfse C gleich Null wird, liegen demnach gleichfalls auf einer Geraden, deren Gleichung erhalten wird, wenn in Gleichung 62. $C = 0$ gesetzt wird. Man erhält alsdann die Gleichung der neutralen Axe:

$$v = \frac{A}{B} u \operatorname{tg}\alpha - \frac{A}{F\xi\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63.$$

Wir nennen den Winkel, welchen die Neutrale mit der U-Axe einschliefst, φ; alsdann ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A}{B}\operatorname{tg}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 64.$$

Bezeichnen wir ferner den Abstand desjenigen Punktes, in welchem die Neutrale die V-Axe schneidet, mit d, so ist:

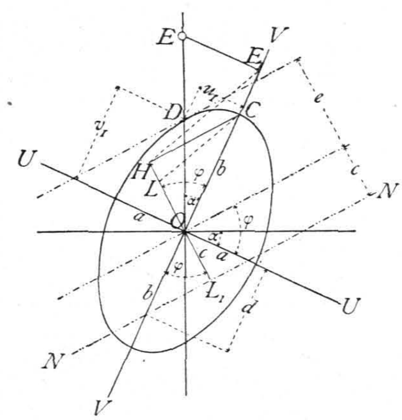
$$d = -\frac{A}{F\xi\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 65.$$

Aus Gleichung 62. folgt, dafs die Gerade, welche alle Punkte mit der Spannung C enthält, mit der Axe einen Winkel bildet, dessen Tangente gleichfalls

$= \frac{A}{B}$ tg α ift; diefe Linie ift alfo parallel zu der neutralen Axe. Daraus folgt der Satz: Alle Querfchnittspunkte, in denen gleiche axiale Faferfpannung ftattfindet, liegen auf Geraden, welche zur neutralen Axe parallel find.

Gleichung 64. giebt ein bequemes Mittel, die Lage der neutralen Axe zu conftruiren. Zeichnet man für den betreffenden Querfchnitt die Ellipfe der Trägheitsmomente (Fig. 107; fiehe Art. 317, S. 271), fo find die beiden Halbaxen bezw.

Fig. 107.



$$\frac{K}{\sqrt{A}} = a \text{ und } \frac{K}{\sqrt{B}} = b.$$

Die Gleichung der Ellipfe ift bekanntlich $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, und die trigonometrifche Tangente des Winkels, welchen die geometrifche Tangente an die Ellipfe in einem Punkte mit den Coordinaten u und v mit der U-Axe einfchliefst, ift

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u\,b^2}{v\,a^2}.$$

Die Coordinaten des Punktes D feien $-u_1$ und v_1; alsdann ift für die Tangente in diefem Punkte:

$$\frac{dv}{du} = \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2 u_1}{a^2 v_1} = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Aus den oben ftehenden Gleichungen für a und b folgt

$$A = \frac{K^2}{a^2} \text{ und } B = \frac{K^2}{b^2};$$

fonach ift nach Gleichung 64. für den Winkel φ, den die neutrale Axe mit der U-Axe einfchliefst,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta. \qquad 66.$$

Die neutrale Axe ift fonach parallel zu der Tangente, welche in demjenigen Punkte an die Ellipfe der Trägheitsmomente gelegt wird, in welchem die Schnittlinie der Kraftebene und des Querfchnittes die Ellipfe fchneidet. Die neutrale Axe ift alfo parallel zur Tangente in D.

Um die Lage der Neutralen zu finden, ift d nach Gleichung 65. zu ermitteln. Bequemer ift es, den normalen Abftand der Neutralen von dem Schwerpunkte, d. h. c einzuführen. Es ift

$$c = d\cos\varphi = -\frac{A}{F\,\xi\cos\alpha}\cos\varphi.$$

Ift die Trägheitsellipfe fo conftruirt, dafs $K = \sqrt{\frac{AB}{F}}$ ift (fiehe Art. 317, S. 272), alfo nach Früherem $A = F b^2$ ift, fo ergiebt fich

$$c = -\frac{b^2\cos\varphi}{\xi\cos\alpha} \text{ oder } \frac{c}{b\cos\varphi} = -\frac{b}{\xi\cos\alpha} \qquad 66_a.$$

Diefe Gleichung führt zu folgender Conftruction der Strecke c. Durch den Angriffspunkt E der Mittelkraft ziehe man die Linie $E E_1$ parallel zu $U U$, ferner durch C eine Linie parallel zu der Richtung der neutralen Axe und fälle von O die Normale OH auf diefe Linie. Alsdann ift $O E_1 = \xi\cos\alpha$ und $OH = b\cos\varphi$.

Man verbinde nun H mit E_1, ziehe durch C die Linie CL parallel zu $E_1 H$; alsdann ift

$$\frac{OL}{OH} = \frac{OC}{OE_1} \text{ oder } \frac{OL}{b\cos\varphi} = \frac{b}{\xi\cos\alpha}; \text{ fonach } OL = c.$$

Macht man nunmehr $OL_1 = OL$, fo ift L_1 ein Punkt der neutralen Axe und die Gerade NN die neutrale Axe felbft.

Eine andere Conftruction der Neutralen ergiebt fich wie folgt. Es ift $F e^2 = A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi = F b^2\cos^2\varphi + F a^2\sin^2\varphi$, fonach

$$e^2 = b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi = b^2\cos^2\varphi\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2\varphi\right) = b^2\cos^2\varphi\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi\right).$$

Nach Gleichung 66. ift

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{fonach} \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \frac{a^2}{b^2}, \quad \text{daher}$$

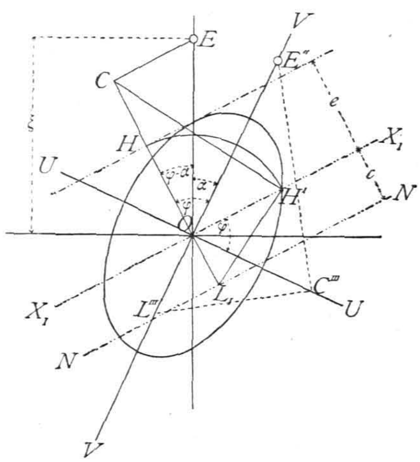
$$e^2 = b^2 \cos^2 \varphi \, (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi) = b^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi}{\cos \alpha \cos \varphi} \right) = \frac{b^2 \cos \varphi}{\cos \alpha} \cos (\varphi - \alpha).$$

Aus Gleichung 66_a. ift

$$\frac{b^2 \cos \varphi}{\cos \alpha} = - c \xi, \quad \text{alfo} \quad e^2 = - c \xi \cos (\varphi - \alpha),$$

d. h. e ift die mittlere geometrifche Proportionale zwifchen c und $\xi \cos (\varphi - \alpha)$ (vergl. Fig. 108).

Fig. 108.



Man lege durch E eine Linie parallel, durch O eine Linie normal zur Richtung der neutralen Axe; alsdann ift $\sphericalangle C O E = \varphi - \alpha$ und $C O = \xi \cos (\varphi - \alpha)$, ferner $O H = e$.

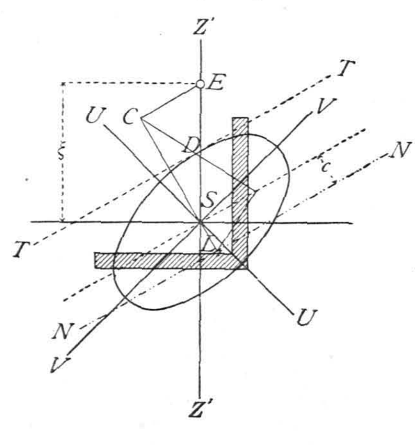
Man mache nun auf der Axe $O X_1$ $O H' = O H = e$, ziehe $C H'$ und durch H' die Normale $H' L'$ zu $C H'$. Alsdann ift $O L' = - c$; denn es ift $\overline{O H'^2} = \overline{C O} \cdot \overline{O L'}$, daher $e^2 = \xi \cos (\varphi - \alpha) \, \overline{O L'}$ und $O L' = \frac{e^2}{\xi \cos (\varphi - \alpha)} = - c$.

Die durch L_1 parallel der Axe $X_1 X_1$ gezogene Linie ift die neutrale Axe.

Fällt der Punkt E in die Hauptaxe $V V$, ift es etwa E'', fo giebt die Axe $U U$ die Richtung der neutralen Axe; alsdann ift auf $O U$ $O C''' = b$ abzutragen, ferner $E'' C'''$ und durch C''' eine Normale zu $E'' C'''$ zu ziehen, welche $V V$ in L''' fchneidet. L''' ift ein Punkt der neutralen Axe. Diefe Conftruction ift oben bereits angegeben worden.

Beifpiel. Es fei die neutrale Axe für ein gleichfchenkeliges Winkeleifen (Fig. 109) von 10^{cm} Schenkellänge und 10^{mm} Schenkelftärke zu ermitteln. Die Belaftungen wirken normal zur Richtung des einen Schenkels; der Schwerpunkt S fei bekannt; die Kraftebene fchneide den Querfchnitt in der Linie $Z' Z'$.

Fig. 109.



Die eine Hauptaxe $U U$ theilt den Querfchnitt fymmetrifch, die zweite $V V$ fteht in S normal zur erften. Es ift zunächft die Centralellipfe zu conftruiren. Es ift $F = 19{,}2$, $A = \mathfrak{J}_U = 287$ und $B = \mathfrak{J}_V = 73$; daher

$$b = \sqrt{\frac{A}{F}} = \sqrt{\frac{287}{19{,}2}} = 3{,}87 \quad \text{und}$$

$$a = \sqrt{\frac{B}{F}} = \sqrt{\frac{73}{19{,}2}} = 1{,}95.$$

Die Z-Axe fchneidet die Centralellipfe in D; die neutrale Axe ift alfo nach Art. 324, S. 281 parallel der durch D an die Ellipfe gelegten Tangente $T T$.

Es wäre noch c zu ermitteln. Die angegebene Conftruction ergiebt $S L_1 = c$.

Die Gleichungen 61. bis 64. ergeben für die neutrale Axe noch folgende Refultate:

1) Für $\alpha = 0$ fällt der Punkt E in die V-Axe, fchneidet alfo die Kraftebene den Querfchnitt in einer Hauptaxe. Alsdann ift

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad \text{daher} \quad \varphi = 0,$$

d. h. die neutrale Axe ift parallel zur U-Axe [160]). Es ift nunmehr

[160]) Der Beweis hierfür wurde in Art. 318, S. 273 auf anderem Wege gefunden.

$$d = -\frac{A}{F\xi} = -\frac{F b^2}{F\xi} = -\frac{b^2}{\xi}$$ [161]).

Für $\xi = \infty$ ift die Refultirende dem Querfchnitt parallel und fodann $d = 0$, d. h. die neutrale Axe geht durch den Schwerpunkt.

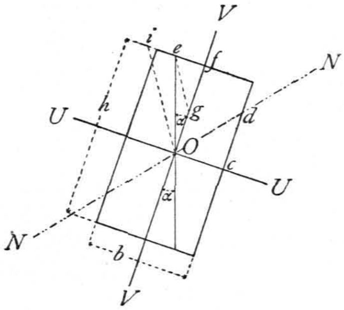
2) d und c liegen ftets an derjenigen Seite des Schwerpunktes, an welcher E nicht liegt.

3) Für $\alpha = 90$ Grad, d. h. für die Lage des Punktes E auf der U-Axe, ift $\operatorname{tg} \varphi = \infty$, $\varphi = 90$ Grad, d. h. die neutrale Axe ift parallel zur V-Axe. Alsdann ift $d = -\frac{A}{F \xi_o} = -\infty$, d. h. der Schnittpunkt der neutralen Axe mit der V-Axe liegt in unendlicher Entfernung, oder, was das Gleiche ift, diefe beiden Axen find einander parallel, was eben auch auf anderem Wege gefunden worden ift.

Beifpiel. Wenden wir obige Sätze auf die Dachpfette in Fig. 110 an, fo ift die Belaftung vertical, alfo auch die Schnittlinie der Kraftebene mit der Querfchnittsebene eine Verticale; diefelbe bilde mit der Hauptaxe $V V$ den Winkel α. Die Axialkraft P fei Null, das Moment für den zu betrachtenden Querfchnitt M. Alsdann ift nach Gleichung 60_a.

$$N = M\left(\frac{v \cos \alpha}{A} - \frac{u \sin \alpha}{B}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 67.$$

Fig. 110.



Diefe Gleichung kann auch folgender Mafsen abgeleitet werden. Durch den Schwerpunkt O des Querfchnittes find drei Coordinatenaxen gelegt: die U- und V-Axe, welche mit den Hauptaxen zufammenfallen, die X-Axe, welche normal zur Querfchnittsebene, hier horizontal ift. Das in der Verticalebene wirkende Moment M kann man in zwei Seitenmomente zerlegen, deren eines $M \cos \alpha$ in der VXV-Ebene, deren anderes $-M \sin \alpha$ in der UXU-Ebene wirkt. Die Ebenen diefer beiden Seitenmomente fchneiden den Querfchnitt in Hauptaxen; jedes einzelne erzeugt alfo in den einzelnen Fafern Spannungen, welche nach Gleichung 34. zu berechnen find. In der Fafer mit den Coordinaten u und v entftehen nach Gleichung 34. durch das Moment $M \cos \alpha$ allein die Spannungen

$$N_1 = \frac{M v \cos \alpha}{\mathfrak{J}_U} = \frac{M v \cos \alpha}{A},$$

durch das Moment $-M \sin \alpha$ allein

$$N_2 = -\frac{M u \sin \alpha}{\mathfrak{J}_V} = -\frac{u M \sin \alpha}{B}.$$

Zufammen genommen wirkt alfo, da beide Momente gleichzeitig vorhanden find, in einer Fafer mit den Coordinaten u und v eine Spannung (wie oben):

$$N = M\left(\frac{v \cos \alpha}{A} - \frac{u \sin \alpha}{B}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 67.$$

Ueber die Form des Querfchnittes find bislang noch keine Annahmen gemacht worden.

N wird gleich Null für $0 = \frac{v \cos \alpha}{A} - \frac{u \sin \alpha}{B}$, fonach

$$v = \frac{A}{B} u \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 68.$$

Dies ift die Gleichung der neutralen Axe, und zwar die Gleichung einer Geraden.

Für $u = 0$ ift $v = 0$; die neutrale Axe geht alfo durch den Anfangspunkt der Coordinatenaxen, d. i. durch den Schwerpunkt.

Für die weiteren Unterfuchungen ift eine beftimmte Querfchnittsform zu Grunde zu legen.

1) Für den rechteckigen Querfchnitt (Fig. 110) ift nach Art. 307, S. 266

$$A = \frac{b h^3}{12} \text{ und } B = \frac{b^3 h}{12},$$

$$\text{fonach } N = 12 M\left(\frac{v \cos \alpha}{b h^3} - \frac{u \sin \alpha}{h b^3}\right) = \frac{12 M}{b h}\left(\frac{v \cos \alpha}{h^2} - \frac{u \sin \alpha}{b^2}\right).$$

N hat feine gröfsten Werthe

$$\text{für } u = -\frac{b}{2},\ v = +\frac{h}{2} \text{ und für } u = +\frac{b}{2},\ v = -\frac{h}{2}.$$

[161]) Der Beweis hierfür wurde in Art. 319, S. 274 auf anderem Wege gefunden.

Für die erſten Werthe iſt:

$$N_{max} = \frac{12\,M}{b\,h}\left(\frac{h\cos\alpha}{2\,h^2} + \frac{b\sin\alpha}{2\,b^2}\right) = \frac{6\,M}{b^2\,h^2}\,(b\cos\alpha + h\sin\alpha) \quad \ldots\ldots \quad 69_a.$$

Eben ſo ergiebt ſich

$$N_{min} = -\,\frac{6\,M}{b^2\,h^2}\,(b\cos\alpha + h\sin\alpha)\,. \quad \ldots\ldots \quad 69_b.$$

Bei der gewöhnlichen Drehrichtung der Momente, welche mit derjenigen der Fig. 105 übereinſtimmt, würde, wenn die u, bezw. v nach rechts, bezw. nach oben als poſitiv eingeführt werden, N_{max} der gröſste Druck und N_{min} der gröſste Zug ſein.

Die Gleichung der neutralen Axe wird hier (ſiehe Gleichung 68.)

$$v = \frac{b\,h^3}{h\,b^3}\,u\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h^2}{b^2}\,u\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad 70.$$

Da die neutrale Axe durch O geht, ſo genügt für die Conſtruction derſelben die Auffuchung eines ihrer Punkte. Für $u = \frac{b}{2}$ iſt $v_1 = \frac{h^2}{2\,b}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Trägt man alſo v_1 als Ordinate für $u = \frac{b}{2}$ ab, d. h. macht man $c\,d = v_1$, ſo iſt d ein Punkt der neutralen Axe, und $O\,d$ giebt die neutrale Axe ſelbſt.

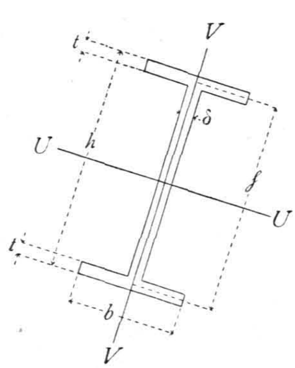
v_1 iſt leicht wie folgt zu conſtruiren. Von f aus trage man auf der V-Axe $f\,g = \frac{b}{2}$ ab, ziehe $e\,g$ und durch O eine Linie parallel zu $e\,g$, ſo erhält man $f\,i = v_1$; denn es iſt $e\,f = \frac{h}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$ und

$$\frac{e\,f}{\frac{b}{2}} = \frac{i\,f}{\frac{h}{2}}, \quad \text{fonach} \quad i\,f = \frac{\frac{h}{2}}{\frac{b}{2}}\,e\,f; \quad \text{hieraus folgt} \quad i\,f = \frac{h^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\,b} = v_1.$$

Für die Berechnung von Pfetten mit rechteckigem Querſchnitt iſt ſonach Gleichung 69_a., bezw. 69_b. zu Grunde zu legen.

2) Auch beim **I**-förmigen Querſchnitt (Fig. 111) findet N_{max} für $u = -\,\frac{b}{2}$, $v = +\,\frac{h}{2}$ und N_{min} für $u = \frac{b}{2}$, $v = -\,\frac{h}{2}$ ſtatt, weil für dieſe correſpondirenden Werthe die Variabelen u und v in der Gleichung für N gleichzeitig ihren gröſsten Werth haben.

Fig. 111.



Demnach iſt nach Gleichung 67:

$$N_{max} = M\left(\frac{h}{2}\,\frac{\cos\alpha}{A} + \frac{b\sin\alpha}{2\,B}\right) \quad \text{und}$$

$$N_{min} = -\,M\left(\frac{h\cos\alpha}{2\,A} + \frac{b\sin\alpha}{2\,B}\right) \quad \ldots\ldots \quad 71.$$

Angenähert iſt, wenn $f = b\,t$, nach Gleichung 44.

$$A = \left(f + \frac{\delta\,\mathfrak{h}}{6}\right)\frac{\mathfrak{h}^2}{2} \quad \text{und} \quad B = \frac{t\,b^3}{6} = \frac{f\,b^2}{6},$$

ſonach

$$N_{max} = M\left[\frac{h\cos\alpha}{\left(f + \frac{\delta\,\mathfrak{h}}{6}\right)\mathfrak{h}^2} + \frac{3\sin\alpha}{f\,b}\right].$$

Wird im erſten Summanden des Klammerfactors $\frac{\delta\,\mathfrak{h}}{6}$ vernachläſſigt und h^2 ſtatt $\mathfrak{h}^2$ geſchrieben, ſo wird:

$$N_{max} = M\left(\frac{\cos\alpha}{f\,h} + \frac{3\,sin\,\alpha}{f\,b}\right) \quad \text{und}$$

$$N_{\substack{max\\min}} = \pm\,\frac{M}{f}\left(\frac{\cos\alpha}{h} + \frac{3\sin\alpha}{b}\right) \quad \ldots\ldots \quad 72.$$