

$$\frac{\mathcal{J}}{a_2} = \frac{\mathcal{J}}{a_1} = \frac{M_0}{1200} + \frac{M_1}{600} \dots \dots \dots 41a.$$

Für Stahl ist die Gleichung leicht aufzustellen; doch kann davon hier, wegen der geringen Anwendung des Stahls im Hochbauwesen, abgesehen werden.

**b) Trägheitsmomente, Trägheitsradius und Trägheitsellipse.**

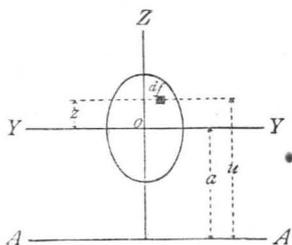
305.  
Trägheitsmomente.

Die Bestimmung der Querschnittsform und -Größe auf Biegung beanspruchter Balken bedingt die Kenntniss des Trägheitsmomentes  $\mathcal{J}_Y$  des Querschnittes, bezogen auf die normal zur Biegungsebene stehende Schwerpunktsaxe. Es soll deshalb die Ermittlung der Trägheitsmomente für verschiedene Querschnitte gezeigt werden, und zwar bezogen auf verschiedene Axen, da man das  $\mathcal{J}_Y$  oft bequem aus dem Trägheitsmoment für eine andere Axe entwickelt, auch für spätere Aufgaben die Kenntniss der Trägheitsmomente für die verschiedenen Axen vorhanden sein muß.

306.  
Trägheitsmomente für zur Schweraxe parallele Axen.

Nach der oben in Art. 296, S. 261 gegebenen Erklärung ist das Trägheitsmoment eines Querschnittes  $F$  (Fig. 82) bezogen auf eine Axe  $AA$  die Summe sämtlicher Producte, welche durch Multiplication jedes Flächentheilchens  $df$  des Querschnittes mit dem Quadrate seines Abstandes  $u$  von der Axe  $AA$  erhalten werden, d. h. es ist:

Fig. 82.



$$\mathcal{J}_A = \int u^2 df.$$

Die Integration ist über den ganzen Querschnitt auszudehnen. Nun ist

$$u = a + z \text{ und } u^2 = a^2 + 2az + z^2,$$

$$\text{also } \mathcal{J}_A = \int u^2 df = a^2 \int df + 2a \int z df + \int z^2 df$$

Es ist jedoch  $\int df = F$  und  $\int z^2 df = \mathcal{J}_Y$ , ferner nach der Lehre vom Schwerpunkt  $\int z df = 0$ , mithin

$$\mathcal{J}_A = F a^2 + \mathcal{J}_Y \dots \dots \dots 42.$$

Das Trägheitsmoment eines Querschnittes bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsaxe parallele Axe ist gleich dem Trägheitsmomente für diese Schwerpunktsaxe, vermehrt um das Product aus der Querschnittsfläche in das Quadrat des Abstandes beider Axen.

307.  
Rechteckige Querschnitte.

**1) Trägheitsmoment für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 83).**

Für diesen ist

$$\mathcal{J}_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 df.$$

Da nun  $df = b dz$  ist, wird

$$\mathcal{J}_Y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \left[ \frac{b z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left[ \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right] = \frac{b h^3}{12} \dots \dots \dots 43.$$

Das Trägheitsmoment für eine Axe  $AA$ , welche mit einer Kante des Rechteckes zusammenfällt, ist nach Gleichung 42.

$$\mathcal{J}_A = \frac{b h^3}{12} + b h \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{b h^3}{12} + \frac{b h^3}{4} = \frac{b h^3}{3}.$$

Für eine zu  $YY$  normal stehende Schwerpunktsaxe  $ZZ$  ist nach Obigem

$$\mathcal{J}_Z = \frac{h b^3}{12}$$

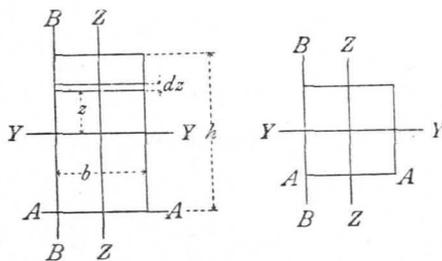
und für die Kante  $BB$  ist

$$\mathcal{J}_B = \frac{h b^3}{3}.$$

Das Quadrat ist ein Rechteck mit gleich langen Seiten; ist dessen Seitenlänge =  $d$ , so ergeben sich

$$\mathcal{J}_Z = \mathcal{J}_Y = \frac{d^4}{12} \text{ und } \mathcal{J}_A = \mathcal{J}_B = \frac{d^4}{3}.$$

Fig. 83.



2) Trägheitsmomente für aus Rechtecken zusammengesetzte Querschnitte. Die für das Rechteck gefundenen Werthe von  $\mathcal{J}$  werden vielfach angewendet, um für zusammengesetzte Querschnitte die Trägheitsmomente zu finden.

Das Trägheitsmoment des Querschnittes Fig. 84 ist gleich der Differenz des Trägheitsmomentes des ganzen Rechteckes  $abcd$  weniger dem Trägheitsmoment des Rechteckes  $efig$ , d. h. es ist

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12} B H^3 - \frac{1}{12} B h^3 = \frac{B}{12} (H^3 - h^3).$$

Für den symmetrischen I-förmigen (Fig. 85) und für den C-förmigen Querschnitt (Fig. 86) ergibt sich hiernach

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{12} \left[ b (h^3 - (h - 2t)^3) + d (h - 2t)^3 \right].$$

Dieser für die Berechnung unbequeme Ausdruck kann wesentlich vereinfacht werden. Wird der Abstand der Schwerpunkte des oberen, bezw. unteren Rechteckes mit  $\eta$  bezeichnet, also  $h - t = \eta$  gesetzt und im letzten Gliede obigen Ausdruckes statt  $h - 2t$  (nicht ganz genau, jedoch mit kleinem Fehler)  $\eta$  eingeführt, so ist

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} b t (h^2 - 2 h t + t^2) + \frac{1}{6} b t^3 + \frac{d \eta^3}{12}.$$

Wir setzen  $b t = f$ ; alsdann wird

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} f (h - t)^2 + \frac{f t^2}{6} + \frac{d \eta^3}{12}.$$

$\frac{f t^2}{6}$  ist gegen das erste Glied sehr klein und kann ohne Bedenken vernachlässigt werden; dann ist der Ausdruck für das Trägheitsmoment:

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} f \eta^2 + \frac{d \eta^3}{12} = \frac{\eta^2}{2} \left( f + \frac{d \eta}{6} \right) \dots \dots \dots 44.$$

Denkt man sich die ganze Querschnittsfläche  $f$  des oberen Rechteckes im Schwerpunkt desselben vereinigt, also im Abstände  $\frac{\eta}{2}$  von der Axe  $YY$ , und eben so die des unteren Rechteckes in dem resp. Schwerpunkt, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Querschnittes

$$i = 2 f \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 = \frac{f \eta^2}{2}.$$

Dies ist aber der erste Theil unseres obigen Ausdruckes 44. für  $\mathcal{J}_Y$ ; der zweite Theil des Ausdruckes stellt demnach den Beitrag dar, welchen der Steg zum Trägheitsmoment leistet. Mit ziemlich genauer Annäherung erhält man demnach das Trägheitsmoment des symmetrischen I-förmigen Querschnittes, indem man die Querschnittsfläche des oberen und unteren Gurtes vermehrt um je  $\frac{1}{6}$  der Querschnittsfläche des Steges (bis zu den Gurtsehwerpunkten gerechnet), im Schwerpunkt des oberen und unteren Gurtes vereinigt denkt und dafür das Trägheitsmoment aufsucht.

Die neutrale Axe fällt nach Art. 297, S. 262 bei den hier in Betracht kommenden Belastungen mit der horizontalen Schwerpunktsaxe zusammen. Es ist also bei der Berechnung der Trägheitsmomente stets zuerst der Schwerpunkt des Querschnittes aufzufuchen. Bei den bisher betrachteten symmetrischen

308.  
Symmetrische  
I- u. E-förmige  
Querschnitte.

Fig. 84.

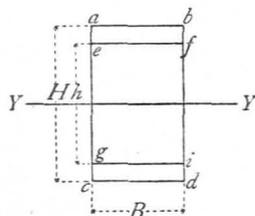
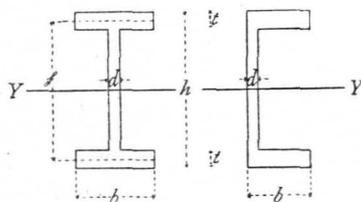


Fig. 85.

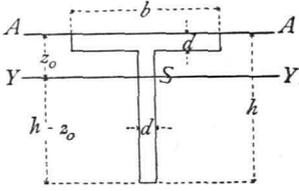
Fig. 86.



309.  
I-förmige  
Querschnitte.

Querschnitten lag der Schwerpunkt in halber Höhe, so daß eine befondere Unterfuchung in dieser Richtung nicht nöthig war. Bei den unfymmetrifchen Querschnitten ist die Auffuchung des Schwerpunktes nach den bekannten Regeln vorzunehmen.

Fig. 87.



Wird beim T-förmigen Querschnitt (Fig. 87) der Abstand des Schwerpunktes von der durch die eine Kante gelegten Axe AA mit  $z_0$  bezeichnet, so ist nach der Schwerpunktslehre

$$F z_0 = d (b - d) \frac{d}{2} + d h \frac{h}{2}, \text{ ferner } F = (b - d) d + d h.$$

Sonach ist

$$z_0 = \frac{(b - d) \frac{d^2}{2} + d h^2}{2 [(b - d) d + d h]} = \frac{(b - d) d + h^2}{2 (b - d) + 2 h}$$

$$\text{und } \mathcal{I}_Y = \frac{1}{3} [d (h - z_0)^3 + d z_0^3 + (b - d) z_0^3 - (b - d) (z_0 - d)^3].$$

Das Trägheitsmoment für die Axe AA ist:

$$\mathcal{I}_A = \frac{1}{3} [d h^3 + (b - d) d^3].$$

310.  
Unfymmetrifche  
I-förmige  
Querschnitte.

Für den unfymmetrifchen I-förmigen Querschnitt (Fig. 88) ist, wenn man die früheren Bezeichnungen beibehält

$$z_0 = \frac{\frac{d h \cdot h}{2} + (b - d) t \left( h - \frac{t}{2} \right) + \frac{(B - d) t^2}{2}}{d h + (b - d) t + (B - d) t} = \frac{d h^2 + (b - d) t (2 h - t) + (B - d) t^2}{2 [d h + (b - d) t + (B - d) t]}$$

Fig. 88.

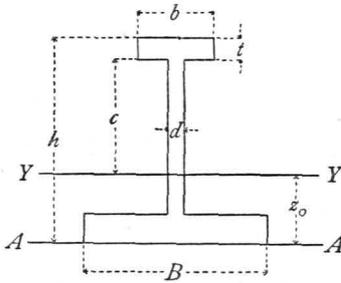
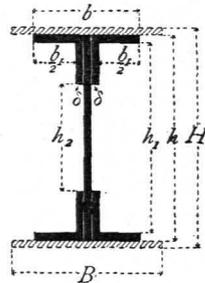


Fig. 89.



$$\text{und } \mathcal{I}_Y = \frac{1}{3} [b (h - z_0)^3 + B z_0^3 - (b - d) c^3 - (B - d) (z_0 - t)^3].$$

311.  
Blechträger-  
Querschnitte.

Bei den Querschnitten der Blechträger (Fig. 89) liegt der Schwerpunkt, also auch die neutrale Axe in halber Höhe. Alsdann ist, falls nur das Verticalblech und die 4 Winkeleisen vorhanden sind:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{12} (b h^3 - b_1 h_1^3 - 2 \delta h_2^3).$$

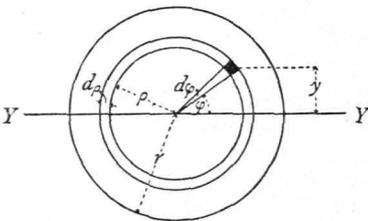
Falls noch Blechplatten vorhanden sind, ermittelt man deren Trägheitsmomente am besten besonders und addirt sie zu dem Trägheitsmoment des Querschnittes ohne Deckplatten. Das Trägheitsmoment dieser Deckplatten ist alsdann:

$$\mathcal{I}' = \frac{1}{12} B (H^3 - h^3).$$

312.  
Kreisförmige  
Querschnitte.

### 3) Trägheitsmomente für kreisförmige Querschnitte (Fig. 90).

Fig. 90.



Der Kreisradius sei  $r$ , der Durchmesser  $d$ . Es soll zuerst das Trägheitsmoment der oberen Halbkreisfläche für die Axe  $YY$  bestimmt werden. Man zerlege die Kreisfläche in concentrische Ringe und bestimme zunächst das Trägheitsmoment einer halben Ringfläche. Der Radius eines solchen Ringes sei  $\rho$ , dessen Breite  $d\rho$ . Der Flächeninhalt eines Theilchens  $d f$  dieser Ringfläche, welches zum Centriwinkel  $d\varphi$  gehört, ist  $d f = \rho d\varphi d\rho$  und dessen Trägheitsmoment bezogen auf die Axe  $YY$

$$d i = d f y^2 = \rho d\varphi d\rho y^2 = \rho^3 \sin^2 \varphi d\rho d\varphi.$$

Nun kann man durch Integration das Trägheitsmoment

des halben Ringes und durch abermalige Integration das Trägheitsmoment der oberen Querschnittshälfte bestimmen. Schliesslich ergibt sich als Trägheitsmoment des ganzen Kreisquerschnittes

$$\mathcal{I} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Man sieht leicht, dass beim Kreisquerschnitt die Trägheitsmomente für alle Schwerpunktsachsen gleich sind.

Das Trägheitsmoment eines Querschnittes für die beliebige Axe  $A Y_1$  (Fig. 91), welche den Winkel  $\alpha$  mit der Axe  $Y Y$  einschließt, ist nach Art. 296 (S. 261)

$$\mathcal{I}_{Y_1} = \int z_1^2 df;$$

für die Axe  $A Z_1$  ist

$$\mathcal{I}_{Z_1} = \int y_1^2 df.$$

Nach Fig. 91 ist

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

$$y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha;$$

folglich

$$\mathcal{I}_{Y_1} = \int z^2 \cos^2 \alpha df + \int y^2 \sin^2 \alpha df - \int 2yz \sin \alpha \cos \alpha df,$$

$$\text{und } \mathcal{I}_{Z_1} = \int y^2 \cos^2 \alpha df + \int z^2 \sin^2 \alpha df + \int 2yz \sin \alpha \cos \alpha df.$$

Die Integration ist über den gesammten Querschnitt auszudehnen; für die ganze Integration ist aber  $\alpha$  constant, also

$$\mathcal{I}_{Y_1} = \cos^2 \alpha \int z^2 df + \sin^2 \alpha \int y^2 df - \sin 2\alpha \int yz df,$$

$$\mathcal{I}_{Z_1} = \cos^2 \alpha \int y^2 df + \sin^2 \alpha \int z^2 df + \sin 2\alpha \int yz df.$$

Nun ist

$$\int z^2 df = \mathcal{I}_Y = \mathcal{I} \text{ und } \int y^2 df = \mathcal{I}_Z = \mathcal{I};$$

mithin, wenn man noch  $\int yz df = H$  setzt,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{I}_{Y_1} &= \mathcal{I} \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_1 \sin^2 \alpha - H \sin 2\alpha \\ \mathcal{I}_{Z_1} &= \mathcal{I}_1 \cos^2 \alpha + \mathcal{I} \sin^2 \alpha + H \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 45.$$

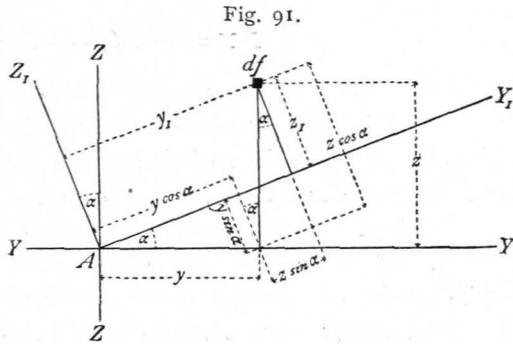
Die beiden Gleichungen 45. geben die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Lage der Trägheitsschwerachsen an. Von besonderem Interesse ist die Lage der Axe, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum und ein Minimum wird.  $\mathcal{I}_{Y_1}$  wird ein Maximum für den Werth von  $\alpha$ , für welchen

$$\frac{d \mathcal{I}_{Y_1}}{d \alpha} = -2 \mathcal{I} \cos \alpha \sin \alpha + 2 \mathcal{I}_1 \sin \alpha \cos \alpha - 2 H \cos 2\alpha = 0,$$

d. h. für welchen  $(\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}) \sin 2\alpha = 2 H \cos 2\alpha$  wird. Es ist also

$$(\operatorname{tg} 2\alpha)_{\max} = \frac{2 H}{\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}} \dots \dots \dots 46$$

Diesem Werthe entsprechen zwei Winkelgrößen  $2\alpha$ , welche um 180 Grad aus einander liegen, da  $\operatorname{tg} (180 + 2\alpha) = \operatorname{tg} 2\alpha$  ist. Die beiden Maximalwerthe von  $\alpha$  liegen also um 90 Grad aus einander, d. h. die beiden Axen, für welche das Trägheitsmoment seine Maxima erreicht, stehen normal zu einander. Ob Maximum oder Minimum für die eine oder andere Axe stattfindet, ergibt die zweite Differentiation.



313.  
Trägheits-  
momente  
für verschiedene  
Schwerpunkts-  
achsen.

Es ist 
$$\frac{d \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha} = (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \sin 2 \alpha - 2 H \cos 2 \alpha,$$

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha^2} = 2 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \cos 2 \alpha + 4 H \sin 2 \alpha.$$

Setzt man statt  $\alpha$  den um 90 Grad abweichenden Werth  $(90 + \alpha)$  ein, so ist

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha^2} = + 2 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \cos (180 + 2 \alpha) + 4 H \sin (180 + 2 \alpha),$$

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha^2} = - 2 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \cos 2 \alpha - 4 H \sin 2 \alpha.$$

Die zweiten Ableitungen sind also für zwei Winkel, welche um 90 Grad von einander differiren, numerisch gleich, haben aber entgegengesetztes Vorzeichen; entspricht demnach dem Winkel  $\alpha$  das Maximum, so tritt für den Winkel  $(90 + \alpha)$  das Minimum des Trägheitsmomentes ein.

314.  
Hauptaxen.

Es folgt daraus der Satz: In jedem Querschnitt ist eine Schwerpunktsaxe vorhanden, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum, eine andere, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird. Beide Axen stehen zu einander normal.

Man nennt diese Axen die Hauptaxen. Diejenige, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum wird, nennt man die erste Hauptaxe, diejenige, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird, heißt die zweite Hauptaxe.

Wir bezeichnen oben  $\int y z \, df = H$ ; setzt man analog  $H_1 = \int y_1 z_1 \, df$  und führt für  $y_1$  und  $z_1$  die oben gefundenen Werthe ein, so wird:

$$H_1 = \int (y \cos \alpha + z \sin \alpha) (z \cos \alpha - y \sin \alpha) \, df,$$

$$H_1 = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int y z \, df + \frac{\sin 2 \alpha}{2} \left( \int z^2 \, df - \int y^2 \, df \right),$$

$$H_1 = \cos 2 \alpha H + \frac{\sin 2 \alpha}{2} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_1). \quad \dots \quad 47.$$

$H_1$  wird gleich Null für  $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_1) \sin 2 \alpha = - 2 \cos 2 \alpha H$ , sonach für

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = - \frac{2 H}{\mathcal{F} - \mathcal{F}_1} = \frac{2 H}{\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}}.$$

Dies ist derselbe Werth, für welchen nach Gleichung 46. die Maxima des Trägheitsmomentes stattfinden. Für die Hauptaxen ist sonach

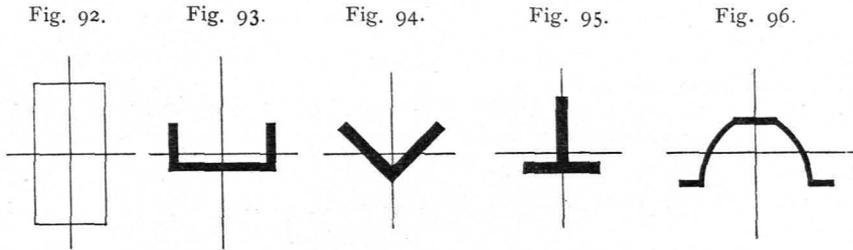
$$H_1 = \int y_1 z_1 \, df = 0.$$

Für viele Querschnitte ist hierdurch ein bequemes Kriterium zur Erkennung der Hauptaxen gefunden. Man suche diejenigen Axen, für welche  $H_1 = 0$  ist; alsdann sind die gefundenen die Hauptaxen. Es genügt, eine Hauptaxe zu suchen, da ja die andere nach Früherem stets einen Winkel von 90 Grad mit derselben einschließt.

Bei sämtlichen zu einer oder mehreren Axen symmetrisch liegenden Querschnitten sind die Symmetriemaxen die Hauptaxen. Denn sei etwa die  $Z$ -Axe eine Symmetriemaxe, so entspricht jedem  $df$  mit den Coordinaten  $y_1 z_1$  ein  $df$  mit den Coordinaten  $-y_1 z_1$  (Fig. 97). Die Beiträge der beiden  $df$  zu  $H_1$  sind also  $df y_1 z_1 - df y_1 z_1 = 0$ .

Genau eben so ist es mit sämtlichen übrigen Querschnittstheilen, so dass also die Gesamtsomme  $H_1 = \int y_1 z_1 \, df = 0$  ist.

Bei den in Fig. 92 bis 96 dargestellten Querschnitten sind die Haupttaxen angegeben. In den auf S. 194 bis 198 mitgetheilten Tabellen über die »Deutschen Normal-



profile für Walzeisen« sind die Trägheitsmomente für solche Axen mit aufgenommen worden, welche beim Berechnen von Hochbau-Constructions eine Rolle spielen.

Wählt man die Haupttaxen als Axen der  $Y$  und  $Z$  (Fig. 97), so ist für diese nach Obigem  $\int y z df = H = 0$ ; mithin ist, wenn man das Trägheitsmoment in Bezug auf die eine Hauptaxe mit  $A$ , dasjenige in Bezug auf die andere mit  $B$  bezeichnet, in den Gleichungen 45. und 46. für  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}_1$ , bezw.  $A$  und  $B$ , so wie für  $H = 0$  einzusetzen. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_{Y_1} &= A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha \\ \mathcal{F}_{Z_1} &= A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha \\ H_1 &= (A - B) \frac{\sin 2 \alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots 48.$$

Sind  $A$  und  $B$ , d. h. die beiden Hauptträgheitsmomente einander gleich, so ist:

$$\mathcal{F}_{Y_1} = A (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = A,$$

d. h.  $\mathcal{F}_{Y_1}$  ist alsdann von  $\alpha$  unabhängig, also für jedes  $\alpha$  gleich  $A$ .

Hieraus folgt: Sind die beiden Hauptträgheitsmomente gleich groß, so sind alle Trägheitsmomente gleich groß.

Bedeutet  $\mathcal{F}$  das Trägheitsmoment für eine beliebige Axe, so kann man  $\mathcal{F} = F R^2$  setzen, in welcher Gleichung  $F$  die Querschnittsfläche bedeutet. Es ist dann

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}},$$

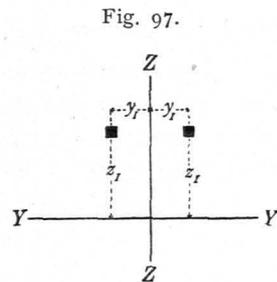
und es wird  $R$  der Trägheitsradius für die betreffende Axe genannt. Beispielsweise würden sich die Trägheitsradien für die Haupttaxen aus den Gleichungen:

$$A = F R_1^2 \text{ und } B = F R_2^2 \text{ zu } R_1 = \sqrt{\frac{A}{F}} \text{ und } R_2 = \sqrt{\frac{B}{F}}$$

ergeben.

Die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes mit der Veränderung des Winkels  $\alpha$  kann man graphisch veranschaulichen, indem man von dem Schwerpunkte aus auf jeder Axe eine Länge abträgt, welche dem Trägheitsmomente für diese Axe entspricht. Wählt man die Haupttaxen als Coordinatenaxen und trägt auf jeder Axe  $\frac{K}{\sqrt{\mathcal{F}}}$  ab, in welcher Gleichung  $K$  eine zunächst beliebige Constante,

315.  
Wahl der Haupttaxen als Axen der  $y$  und  $z$ .



316.  
Trägheitsradius.

317.  
Ellipse der Trägheitsmomente.

$\mathcal{J}$  das Trägheitsmoment für die betreffende Axe bedeutet, so erhält man als Endpunkt eines Radius vector etwa den Punkt  $P$  (Fig. 98). Alsdann ist:

$$r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}, \quad \cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y \sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}{K} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{z}{r} = \frac{z \sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}{K}.$$

Nach Gleichung 48. ist:

$$\mathcal{J}_{Y_1} = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha = \frac{A y^2 \mathcal{J}_{Y_1}}{K^2} + \frac{B z^2 \mathcal{J}_{Y_1}}{K^2},$$

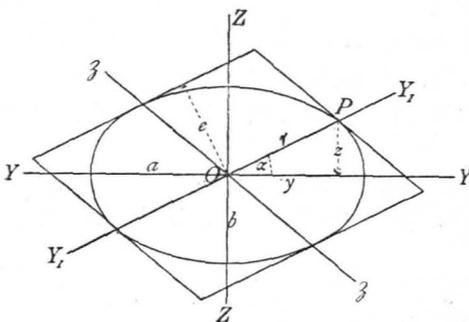
$$K^2 = A y^2 + B z^2 \quad \text{und} \quad 1 = \frac{y^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{B}}\right)^2} \dots \dots \dots 49.$$

Gleichung 49. ist die Gleichung der Curve für die Punkte  $P$ ; die Endpunkte der Radii vectores liegen also auf einer Ellipse, deren beide Halbaxen  $\frac{K}{\sqrt{A}}$  und  $\frac{K}{\sqrt{B}}$  sind;  $\frac{K}{\sqrt{A}}$  ist der Radius vector auf der Hauptaxe  $OY$ ,  $\frac{K}{\sqrt{B}}$  derjenige auf der Hauptaxe  $OZ$ .

Man nennt diese Ellipse die Ellipse der Trägheitsmomente. Dieselbe kann für jeden beliebigen Punkt der Ebene als Mittelpunkt construirt werden; gehen sämtliche Axen, wie hier, durch den Schwerpunkt des Querschnittes, so nennt man dieselbe die Centraellipse.

Der Werth für  $K$  kann beliebig angenommen werden. Durch passende Wahl dieses Werthes kann man erreichen, daß der normale Abstand einer Schwerpunktsaxe und der zu ersterer parallelen Tangente an die Ellipse gleich dem Trägheitsradius für die betreffende Schwerpunktsaxe, daß also  $e$  (Fig. 98) der Trägheitsradius für die Axe  $Y_1 Y_1$  ist.

Fig. 98.



Alsdann ist

$$\mathcal{J}_{Y_1} = F e^2.$$

Der für  $K$  zu diesem Zwecke zu wählende Werth ergibt sich wie folgt. Zieht man die vier Tangenten, welche dem Durchmesser  $Y_1 Y_1$  und dem zugehörigen conjugirten Durchmesser  $\mathcal{J} \mathcal{J}$  entsprechen, so schließen dieselben bekanntlich eine Fläche ein, welche  $= 4 a b$  ist. Diese Fläche ist aber auch  $= 4 r e$ ; daher ist  $a b = r e$  und

$$e = \frac{a b}{r}.$$

Nun ist  $a = \frac{K}{\sqrt{A}}$ ,  $b = \frac{K}{\sqrt{B}}$ ,  $r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}$ , also  $e = \frac{K^2 \sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}{K \sqrt{A B}} = K \sqrt{\frac{\mathcal{J}_{Y_1}}{A B}}.$

Soll  $e$  gleich dem Trägheitsradius für  $Y_1 Y_1$  sein, so muß  $F e^2 = \mathcal{J}_{Y_1}$  sein, d. h.

$$\mathcal{J}_{Y_1} = F e^2 = \frac{F K^2 \mathcal{J}_{Y_1}}{A B} \quad \text{oder} \quad 1 = \frac{F K^2}{A B},$$

daher

$$K = \sqrt{\frac{A B}{F}}.$$

Wird also  $K = \sqrt{\frac{A B}{F}}$  gewählt, so ist für jede Axe der Trägheitsradius ohne Weiteres durch Ziehen der parallelen Tangente und Abmessen des normalen Abstandes dieser beiden Linien zu ermitteln. Sodann ist  $a$  der Trägheitsradius für die  $Z$ -Axe,  $b$  der Trägheitsradius für die  $Y$ -Axe, d. h.  $A = F b^2$  und  $B = F a^2$ .