der durch den Punkt o normal zur Kraftebene gelegten Axe YY gleich $N\,df$, das Moment derfelben in Bezug auf o alfo gleich $N z\,df$ ift. Das gefammte Moment diefer Faferfpannungen für o als Momentenpunkt ift demnach $\int_{-a_2}^{+a_1} N z\,df$. Die Integration mufs fämmtliche Faferfpannungen umfaffen, ift alfo innerhalb der Grenzen $-a_2$ und $+a_1$ vorzunehmen. Die Bedingungsgleichung heifst fonach

$$o = M - \int_{-a_2}^{+a_1} N z\,df \quad \text{und} \quad M = \int_{-a_2}^{+a_1} N z\,df.$$

Wird für N der Werth aus Gleichung 31. eingefetzt, fo wird

$$M = \int_{-a_2}^{+a_1} \frac{P}{F} z\,df + \int_{-a_2}^{+a_1} b z \,.\, z\,df = \frac{P}{F} \int_{-a_2}^{+a_1} z\,df + b \int_{-a_2}^{+a_1} z^2\,df.$$

$\int z\,df$ ift nach Obigem gleich Null, alfo auch das erfte Glied der rechten Seite gleich Null; mithin

$$M = b \int_{-a_2}^{+a_1} z^2\,df.$$

Diefes Integral bedeutet: Es foll jedes Flächentheilchen df mit dem Quadrate feines Abftandes z von der durch o gelegten Axe YY multiplicirt und die Summe fämmtlicher Producte gebildet werden.

Man nennt diefe Summe das Trägheitsmoment der Querfchnittsfläche, bezogen auf die Axe YY. Wir bezeichnen daffelbe mit $\mathcal{J}$. Demnach ift

$$M = b\,\mathcal{J} \quad \text{und} \quad b = \frac{M}{\mathcal{J}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32.$$

Damit ift auch die zweite Conftante b gefunden, und es ergiebt fich nun aus Gleichung 31. und 32. der Werth für die Faferfpannung N, welche durch das Biegungsmoment M entfteht, zu

$$N = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{J}} z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33.$$

Wie für die Axe YY kann man auch für jede beliebige andere Axe das Trägheitsmoment auffstellen. Im Allgemeinen foll die Axe, für welche das Trägheitsmoment aufgeftellt ift, durch den Index am Fufse des Buchftaben $\mathcal{J}$ angegeben werden, fo dafs $\mathcal{J}_X$ heifst: $\mathcal{J}$ für die Axe XX etc. In vorftehendem Falle müffte demnach eigentlich $\mathcal{J}_Y$ gefchrieben fein. Der Kürze halber werden wir das Trägheitsmoment für die horizontale Schwerpunktsaxe des Querfchnittes, d. h. für YY, kurzweg mit $\mathcal{J}$ bezeichnen.

Wenn die Axialkraft P Null ift, wenn alfo nur normal zur Längsaxe des Trägers gerichtete Kräfte vorhanden find, ift

$$N = \frac{M}{\mathcal{J}} z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34.$$

Dies ift der in den meiften Fällen der Praxis angewandte Ausdruck für die axiale Faferfpannung.

Für die nächftfolgenden Unterfuchungen foll $P = o$ angenommen werden, fo dafs N durch Gleichung 34. ausgedrückt werden kann.

a) Stäbe, bei denen die Axialkraft gleich Null ift.

Für alle Fafern deffelben Querfchnittes ift bei einer gegebenen beftimmten Belaftung fowohl das Moment der äufseren Kräfte M, als auch das Trägheitsmoment $\mathcal{J}_Y$, welches nur von der Form und Gröfse der Querfchnittsfläche abhängt, 297. Neutrale Axe.

conftant. Demnach ift laut Gleichung 34. des vorigen Artikels die axiale Spannung in einem Querfchnitt nur mit dem Abftande der Fafern von der horizontalen Schwerpunktsaxe variabel, und zwar mit der erften Potenz diefes Abftandes z. Alle Punkte eines Querfchnittes, welche in gleicher Höhe z über der horizontalen Schwerpunktsaxe liegen, werden alfo gleich ftark beanfprucht. Trägt man die in den verfchiedenen Höhen z pro Flächeneinheit wirkenden Axial- oder Normalfpannungen derart graphifch auf, dafs man die z als Abfciffen, die zugehörigen N als Ordinaten zeichnet, und verbindet man die Endpunkte der Ordinaten, fo erhält man die Linie der Gleichung $N = \frac{M}{\mathcal{J}} z$. Diefe Linie wird eine Gerade, weil die Variabelen N und z nur in der erften Potenz vorkommen.

Für $z = o$ wird $N = o$, d. h. in allen in der horizontalen Schwerpunktsaxe liegenden Fafern ift die Axialfpannung gleich Null.

In diefen Fafern ift alfo auch die Verlängerung oder Verkürzung gleich Null; denn diefelben laffen fich aus der Gleichung ermitteln

$$\frac{\Delta_0\, d\,x}{d\,x} = \frac{N}{E}, \text{ fonach } \Delta_0\, d\,x = \frac{N}{E}\, d\,x = o.$$

Man nennt diefe Faferfchicht, in welcher durch die Biegung weder eine Verlängerung, noch eine Verkürzung bewirkt wird, die **neutrale Faferfchicht**, und die Axe $Y\,Y$, welche alle Punkte des Querfchnittes enthält, in denen die Axialfpannung gleich Null ift, die **neutrale Axe**.

Hiermit ift der Satz bewiefen: Bei geraden horizontalen Balken mit fymmetrifch zur Kraftebene liegenden Querfchnitten und nur normal zur Axe wirkenden Kräften fällt die neutrale Axe mit der horizontalen Schwerpunktsaxe zufammen.

298. Maximalbeanfpruchung.

Aus Gleichung 34. folgt ferner, dafs N defto gröfser ift, je gröfser z ift, d. h. je weiter die betreffende Fafer von der horizontalen Schwerpunktsaxe entfernt ift. Die gröfsten Werthe von N finden alfo in den am weiteften entfernten Fafern ftatt. Nennt man die Abftände der am weiteften nach unten und oben von der Neutralen entfernten Fafern bezw. $+ a_1$ und $- a_2$, fo ift alfo

$$N_{max} = + \frac{M}{\mathcal{J}} a_1 \text{ und } N_{min} = - \frac{M}{\mathcal{J}} a_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 35.$$

Die Gleichungen 35. werden benutzt, um die Gröfse und Form des Querfchnittes an den verfchiedenen Stellen des Balkens zu beftimmen. Bedeutet M das gröfste in einem Querfchnitt ftattfindende Moment, fo ift die gröfste in diefem Querfchnitt vorhandene Zug-, bezw. Druckfpannung aus den Gleichungen 35. zu ermitteln. Ift für das betreffende Material und den vorliegenden Fall die zuläffige Beanfpruchung pro Flächeneinheit des Querfchnittes K', bezw. $- K''$ (für Zug, bezw. Druck), fo darf höchftens ftattfinden:

$$N_{max} = K' \text{ und } N_{min} = - K'',$$

d. h. die Bedingungsgleichungen für den Querfchnitt werden:

$$K' = \frac{M}{\mathcal{J}} a_1, \quad - K'' = - \frac{M}{\mathcal{J}} a_2 \text{ oder } K'' = \frac{M}{\mathcal{J}} a_2.$$

Die beiden Gleichungen für K' und K'' können auch gefchrieben werden:

$$\frac{\mathcal{J}}{a_1} = \frac{M}{K'} \text{ und } \frac{\mathcal{J}}{a_2} = \frac{M}{K''} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 36.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 36. können wir als bekannt annehmen; es wird weiterhin gezeigt werden, wie man für die verfchiedenen Fälle die Werthe von M ermittelt; die Werthe der zuläſſigen Beanſpruchung, d. h. die Werthe für K' und K'' ſind aus Art. 280 bis 288 bekannt, und wir werden im folgenden Artikel die Modificationen angeben, welche ſich für die Biegungselaſticität ergeben. Demnach ſind nunmehr die Werthe für $\frac{\mathfrak{J}}{a_1}$ und $\frac{\mathfrak{J}}{a_2}$ ſo zu beſtimmen, daſs die Gleichungen 36. erfüllt ſind. $\mathfrak{J}$, a_1 und a_2 ſind aber Werthe, welche nur von der Gröſse und Form des Querſchnittes abhängen.

Für den Quotienten $\frac{\mathfrak{J}}{a}$ hat man eine beſondere Bezeichnung: das Widerſtandsmoment eingeführt. 299. Widerſtands moment.

Es möge noch bemerkt werden, daſs die Maximalwerthe der axialen Faſerſpannungen N nicht ohne Weiteres die überhaupt in den Faſern wirkenden Maximalſpannungen repräſentiren. In den meiſten Fällen aber iſt die Maximalſpannung entweder gleich dem Maximalwerth der axialen Faſerſpannung oder doch ſo wenig von demſelben verſchieden, daſs der letztere Werth unbedenklich als Maximalwerth der Faſerſpannung überhaupt eingeführt werden kann.

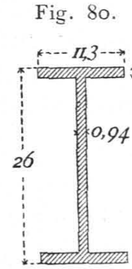
Bei dem bis vor Kurzem allein üblichen und für viele Zwecke des Hochbauweſens auch wohl ausreichenden älteren Verfahren werden die Querſchnitte der auf Biegungselaſticität beanſpruchten Stäbe mittels der Gleichungen 36. beſtimmt, indem für M der gröſstmögliche Werth des Biegungsmomentes in dem betreffenden Querſchnitte, für K' und K'' die bezüglichen Werthe aus der Tabelle in Art. 281, S. 247 eingeführt werden. Eine günſtige Querſchnittsdispoſition wird ſtattfinden, wenn gleichzeitig in den am meiſten gezogenen, bezw. gedrückten Faſerſchichten das zuläſſige Maximum der Beanſpruchung ſtattfindet. 300. Querſchnittsbeſtimmung. Aeltere Methode.

Für Schmiedeeiſen und Stahl ſind die für Zug, bezw. Druck zuläſſigen Beanſpruchungen (abſolut genommen) einander nahezu gleich, ſo daſs für die Querſchnittsbildung in den Gleichungen 36. $K' = K''$ zu ſetzen iſt. Es ergiebt ſich alsdann 301. Stäbe aus Schmiedeeiſen und Stahl.

$$\frac{M}{\mathfrak{J}} a_1 = \frac{M}{\mathfrak{J}} a_2 \quad \text{oder} \quad a_1 = a_2,$$

d. h. die Querſchnittsform für Stäbe aus Schmiedeeiſen und Stahl, welche auf Biegungselaſticität beanſprucht werden, iſt ſo zu wählen, daſs die am meiſten gezogenen, bezw. gedrückten Faſern gleich weit vom Schwerpunkte des Querſchnittes entfernt ſind, daſs alſo der Schwerpunkt der Querſchnittsfläche in halber Höhe liegt.

Fig. 80.



Beiſpiel. Das Maximalmoment in einem ſchmiedeeiſernen Walzbalken mit I-förmigem Querſchnitt betrage $M = 280\,000$ kgcm.

Nach der Tabelle auf S. 247 iſt für Schmiedeeiſen $K' = K'' = K = 700$ kg pro 1 qcm, alſo

$$\frac{\mathfrak{J}}{a_1} = \frac{\mathfrak{J}}{a_2} = \frac{M}{K} = \frac{280\,000}{700} = 400.$$

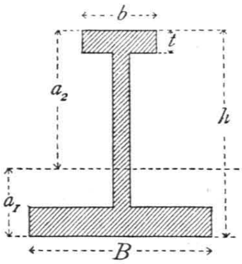
Das neben ſtehende Profil Nr. 26 der »Deutſchen Normalprofile für I-Eiſen« (Fig. 80) hat nach der Tabelle auf S. 198 ein Trägheitsmoment $\mathfrak{J} = 5798$; ferner iſt $a = \frac{26}{2} = 13$ cm, demnach $\frac{\mathfrak{J}}{a} = 446$, ſo daſs dieſer Querſchnitt im vorliegenden Falle genügt.

Für Guſseiſen iſt die zuläſſige Beanſpruchung auf Druck doppelt ſo groſs, als diejenige auf Zug (vergl. die Tabelle auf S. 247), alſo $K'' = 2\,K'$, und demnach 302. Stäbe aus Guſseiſen.

$$\frac{M}{\mathfrak{J}} a_2 = 2 \frac{M}{\mathfrak{J}} a_1 \quad \text{und} \quad a_2 = 2\,a_1.$$

Nun iſt die ganze Höhe des Querſchnitts $h = a_1 + a_2 = 3\,a_1$, woraus $a_1 = \frac{h}{3}$.

Fig. 81.



Daraus folgt die Regel: Die Querſchnitte der guſs-eiſernen Balken (Fig. 81) ſind ſo zu disponiren, daſs der Schwerpunkt um $\frac{1}{3}$ der Geſammthöhe des Querſchnittes von der am meiſten gezogenen Faſer entfernt liegt. Befinden ſich alſo die gezogenen Faſern, wie meiſtens, unten, die gedrückten Faſern oben, ſo ſoll der Schwerpunkt im Abſtande $\frac{h}{3}$ über der Baſis des Querſchnittes liegen.

303. Stäbe aus Holz.

Die auf Biegung beanſpruchten Stäbe aus Holz werden der Natur des Materials entſprechend mit rechteckigem Querſchnitt hergeſtellt; der Schwerpunkt des Querſchnittes liegt alſo in halber Höhe h, und es iſt $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$. Demnach wird $K' = K''$, und es iſt aus der Tabelle auf S. 247 der kleinere der beiden Werthe, welche als zuläſſige Zug-, bezw. Druckbeanſpruchung angegeben ſind, einzuführen. Wenn dieſer Werth K genannt wird, ſo iſt

$$\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M}{K}.$$

Beiſpiel. Es ſei etwa $M = 180\,000^{\mathrm{kgcm}}$; alsdann muſs für kieferne Balken ſtattfinden:

$$\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{180\,000}{60} = 3000.$$

Es wird weiter unten (Art. 307, S. 266) entwickelt werden, daſs beim Rechteckquerſchnitt von der Breite b und der Höhe h das Trägheitsmoment

$$\mathfrak{J} = \frac{b\,h^3}{12} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{b\,h^3}{12\,\frac{h}{2}} = \frac{b\,h}{6}$$

iſt. Im vorliegenden Falle muſs alſo ſein

$$\frac{b\,h^2}{6} = 3000 \quad \text{oder} \quad b\,h^2 = 18\,000.$$

Sei $b = \frac{3}{4}\,h$, ſo iſt $\frac{3}{4}\,h^3 = 18\,000$ und $h = \sqrt[3]{24\,000}$ = rot. 29^{cm}, ſonach $b = 22^{\mathrm{cm}}$.

304. Querſchnittsbeſtimmung. Neuere Methode.

Die aus den *Wöhler*'ſchen Verſuchen für die Normal-Elaſticität (vergl. Art. 283, S. 248) ermittelten Reſultate können mit Vortheil auch für Stäbe angewendet werden, welche auf Biegungselaſticität beanſprucht ſind.

Aus den Gleichungen 6. und 8. (S. 249) folgt, wenn n der Sicherheitscoefficient iſt und K, K_1 dieſelbe Bedeutung, wie in Art. 284 u. 285 (S. 250 u. 251) haben,

für Zug: für Druck:

$$\frac{A}{n} = (1 - \alpha)\,K + \alpha\,\frac{C}{n} \qquad \frac{A_1}{n} = (1 - \alpha_1)\,K_1 + \alpha_1\,\frac{C_1}{n} \quad \ldots \quad 37.$$

Bei den auf Normal-Elaſticität beanſpruchten Stäben vertheilte ſich der Zug, bezw. Druck gleichmäſsig über den ganzen Querſchnitt, und es bedeutete daſelbſt $\frac{A}{n}$ und $\frac{A_1}{n}$ die durch die gröſste Zug-, bezw. Druckkraft pro Flächeneinheit des Querſchnittes erzeugte Zug-, bezw. Druckbeanſpruchung. Anders hier. Hier iſt unter $\frac{A}{n}$, bezw. $\frac{A_1}{n}$ die gröſste, in der am meiſten gezogenen, bezw. am meiſten gedrückten Faſer des Querſchnittes ſtattfindende Zug-, bezw. Druckbeanſpruchung pro Flächeneinheit zu verſtehen, unter $\frac{C}{n}$, bezw. $\frac{C_1}{n}$ die kleinſte, in derſelben Faſer ſtattfindende Zug-, bezw. Druckbeanſpruchung. Da daſſelbe Moment gleichzeitig in den verſchiedenen Faſern Zug- und Druckbeanſpruchungen erzeugt, ſo wird gleichzeitig $\frac{A}{n}$ und $\frac{A_1}{n}$, bezw. $\frac{C}{n}$ und $\frac{C_1}{n}$ in verſchiedenen Faſern des Querſchnittes ſtattfinden.

Bedeutet M_{max} das gröfste, M_{min} das kleinfte im Querfchnitt mögliche Moment, fo findet die gröfste Zugbeanfpruchung in der um a_1 von der neutralen entfernten Fafer ftatt, und diefelbe ift

$$\frac{A}{n} = \frac{M_{max}\, a_1}{\mathfrak{J}}.$$

Die gröfste Druckbeanfpruchung findet in der um a_2 von der neutralen entfernten Fafer ftatt, und es ift

$$\frac{A_1}{n} = \frac{M_{max}\, a_2}{\mathfrak{J}}.$$

Eben fo ergiebt fich:

$$\frac{C}{n} = \frac{M_{min}\, a_1}{\mathfrak{J}} \quad \text{und} \quad \frac{C_1}{n} = \frac{M_{min}\, a_2}{\mathfrak{J}}.$$

Werden diefe Werthe in die Gleichungen 37. eingefetzt, fo erhält man:

$$\frac{M_{max}\, a_1}{\mathfrak{J}} = (1-\alpha)\, K + \alpha \frac{M_{min}\, a_1}{\mathfrak{J}} \quad \text{und} \quad \frac{M_{max}\, a_2}{\mathfrak{J}} = (1-\alpha_1)\, K_1 + \alpha_1 \frac{M_{min}\, a_2}{\mathfrak{J}},$$

$$\text{d. h. } \frac{\mathfrak{J}}{a_1} = \frac{M_{max} - \alpha\, M_{min}}{(1-\alpha)\, K} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{J}}{a_2} = \frac{M_{max} - \alpha_1\, M_{min}}{(1-\alpha_1)\, K_1} \quad \ldots\ldots \quad 38.$$

Wir bezeichnen mit M_0 des Moment durch permanente Belaftung, mit M_1 das gröfste Moment durch die mobile Belaftung; alsdann ift

$$M_{max} = M_0 + M_1 \quad \text{und} \quad M_{min} = M_0,$$

daher

$$\frac{\mathfrak{J}}{a_1} = \frac{M_0 + M_1 - \alpha\, M_0}{(1-\alpha)\, K} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{J}}{a_2} = \frac{M_0 + M_1 - \alpha\, M_0}{(1-\alpha_1)\, K_1},$$

$$\frac{\mathfrak{J}}{a_1} = \frac{M_0}{K} + \frac{M_1}{(1-\alpha)\, K} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{J}}{a_2} = \frac{M_0}{K_1} + \frac{M_1}{(1-\alpha_1)\, K_1} \quad \ldots\ldots \quad 39.$$

Aus den beiden Gleichungen 39. kann man genauer, als dies in den Art. 301 bis 303 gefchehen ift, das Verhältnifs berechnen, in welchem a_1 und a_2, d. h. der Abftand der am meiften gezogenen Fafer von der neutralen Axe und der Abftand der am meiften gedrückten Fafer von der neutralen Axe, zu einander ftehen müffen. Die Divifion der beiden Gleichungen 39. ergiebt

$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{M_0 (1-\alpha) + M_1}{M_0 (1-\alpha_1) + M_1}\right) \frac{(1-\alpha_1)\, K_1}{(1-\alpha)\, K} \quad \ldots\ldots \quad 40.$$

Wendet man diefe Ermittelungen auf fchmiedeeiferne Stäbe an, fo war nach Art. 283, S. 249

$$\alpha = 0{,}45 \quad \text{und} \quad K = \frac{Z}{n}, \quad \text{ferner} \quad \alpha_1 = 0{,}4 \quad \text{und} \quad K_1 = \frac{D}{n},$$

fonach

$$\frac{K_1}{K} = \frac{D}{Z} = \frac{7}{8}$$

$$\text{und} \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{0{,}6 \cdot 7}{0{,}55 \cdot 8} \cdot \frac{\frac{M_0}{M_1}\, 0{,}55 + 1}{\frac{M_0}{M_1}\, 0{,}6 + 1} = 0{,}955 \frac{1 + 0{,}55 \frac{M_0}{M_1}}{1 + 0{,}6 \frac{M_0}{M_1}}.$$

Für eine Reihe von Werthen des Verhältniffes $\frac{M_0}{M_1}$ ergiebt fich $\frac{a_2}{a_1}$ wie folgt:

$$\text{für } \frac{M_0}{M_1} = 1{,}0 \qquad 1{,}25 \qquad 1{,}5 \qquad 1{,}75 \qquad 2{,}0 \qquad 3{,}0$$

$$\frac{a_2}{a_1} = 0{,}924 \qquad 0{,}920 \qquad 0{,}917 \qquad 0{,}914 \qquad 0{,}912 \qquad 0{,}903.$$

Das Verhältnifs $\frac{a_2}{a_1}$ ergiebt fich nahezu conftant und fo nahe gleich 1, dafs man unbedenklich auch hier $\frac{a_2}{a_1} = 1$, d. h. $a_2 = a_1$ annehmen kann. Alsdann ift der Berechnung die zweite der Gleichungen 39. zu Grunde zu legen, weil jetzt, da $a_1 = a_2$ ift, nur eine diefer beiden Gleichungen erfüllt fein kann und defshalb diejenige zu wählen ift, welche eine geringere Beanfpruchung ergiebt. Werden die früheren Zahlenwerthe eingeführt, fo ergiebt fich

$$\frac{\mathfrak{J}}{a_2} = \frac{\mathfrak{J}}{a_1} = \frac{M_0}{1200} + \frac{M_1}{720} \quad \ldots\ldots \quad 41.$$

und bei ftofsweife ftattfindender Belaftung:

$$\frac{\mathcal{J}}{a_2} = \frac{\mathcal{J}}{a_1} = \frac{M_0}{1200} + \frac{M_1}{600} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 41_a.$$

Für Stahl iſt die Gleichung leicht aufzuſtellen; doch kann davon hier, wegen der geringen Anwendung des Stahls im Hochbauweſen, abgeſehen werden.

b) Trägheitsmomente, Trägheitsradius und Trägheitsellipſe.

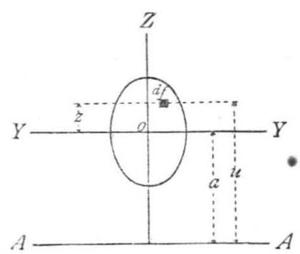
305. Trägheitsmomente.

Die Beſtimmung der Querſchnittsform und -Gröſse auf Biegung beanſpruchter Balken bedingt die Kenntniſs des Trägheitsmomentes $\mathcal{J}_Y$ des Querſchnittes, bezogen auf die normal zur Biegungsebene ſtehende Schwerpunktsaxe. Es ſoll deſshalb die Ermittelung der Trägheitsmomente für verſchiedene Querſchnitte gezeigt werden, und zwar bezogen auf verſchiedene Axen, da man das $\mathcal{J}_Y$ oft bequem aus dem Trägheitsmoment für eine andere Axe entwickelt, auch für ſpätere Aufgaben die Kenntniſs der Trägheitsmomente für die verſchiedenen Axen vorhanden ſein muſs.

306. Trägheitsmomente für zur Schweraxe parallele Axen.

Nach der oben in Art. 296, S. 261 gegebenen Erklärung iſt das Trägheitsmoment eines Querſchnittes F (Fig. 82) bezogen auf eine Axe $A\,A$ die Summe ſämmtlicher Producte, welche durch Multiplication jedes Flächentheilchens df des Querſchnittes mit dem Quadrate ſeines Abſtandes u von der Axe $A\,A$ erhalten werden, d. h. es iſt:

Fig. 82.



$$\mathcal{J}_A = \int u^2\, df.$$

Die Integration iſt über den ganzen Querſchnitt auszudehnen. Nun iſt

$$u = a + z \quad \text{und} \quad u^2 = a^2 + 2\,a\,z + z^2,$$

$$\text{alſo} \quad \mathcal{J}_A = \int u^2\, df = a^2 \int df + 2\,a \int z\, df + \int z^2\, df$$

Es iſt jedoch $\int df = F$ und $\int z^2\, df = \mathcal{J}_Y$, ferner nach der Lehre vom Schwerpunkt $\int z\, df = o$, mithin

$$\mathcal{J}_A = F\,a^2 + \mathcal{J}_Y \quad \ldots\ldots\ldots \quad 42.$$

Das Trägheitsmoment eines Querſchnittes bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsaxe parallele Axe iſt gleich dem Trägheitsmomente für dieſe Schwerpunktsaxe, vermehrt um das Product aus der Querſchnittsfläche in das Quadrat des Abſtandes beider Axen.

307. Rechteckige Querſchnitte.

1) Trägheitsmoment für den rechteckigen Querſchnitt (Fig. 83). Für dieſen iſt

$$\mathcal{J}_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2\, df.$$

Da nun $df = b\, dz$ iſt, wird

$$\mathcal{J}_Y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2\, dz = \left[\frac{b\,z^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3}\left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right] = \frac{b\,h^3}{12} \quad \ldots\ldots \quad 43.$$

Das Trägheitsmoment für eine Axe $A\,A$, welche mit einer Kante des Rechteckes zuſammenfällt, iſt nach Gleichung 42.