

4. Kapitel.

Bieungselasticität und Bieungsfeftigkeit.

Der Fall der Bieungselasticität tritt, wie in Art. 277, S. 244 bereits gefagt wurde, auf, wenn die äußeren Kräfte zwei Nachbarquerfchnitte um eine normal zur Kraftebene stehende Axe so zu drehen streben, dafs deren Entfernung von einander sich ändert. Daraus folgt, dafs eine Beanspruchung auf Biegung nur stattfinden kann, wenn ein Bestreben zum Verdrehen vorhanden ist, d. h. wenn die äußeren Kräfte in Bezug auf die betrachteten Querfchnitte ein Bieungsmoment haben. Gewöhnlich ist aufser dem Moment der äußeren Kräfte noch eine abfcherende Kraft vorhanden. Dieselbe ruft Schubbeanspruchungen hervor, welche sich mit den reinen Bieungsbeanspruchungen combiniren.

295.
Bieungsmoment
und
Transversalkraft

Der allgemeine Fall der Bieungselasticität ist durch Fig. 75 veranschaulicht.

Die Mittelkraft R aller an der einen Seite irgend eines Querfchnittes $\alpha\alpha$ wirkenden Kräfte schneide die Axe des Körpers unter dem Winkel φ . Zerlegt man R in zwei Seitenkräfte, deren eine P parallel zur Axe des Körpers an der betreffenden Stelle gerichtet ist, deren andere Q die Axe des Körpers unter 90 Grad schneidet, so nennt man die erstere die Axialkraft, die zweite die Transversalkraft. Das statische Moment der Kraft R in Bezug auf den Schwerpunkt des zu betrachtenden Querfchnittes ($M = Rr$) ist das Bieungsmoment.

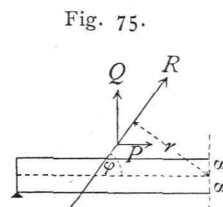


Fig. 75.

Wenn bei einem Balken mit horizontaler Axe (Fig. 76) nur verticale äußere Kräfte wirksam sind, so ist die Mittelkraft R aller an der einen Seite jedes Querfchnittes wirkenden Kräfte mit der Transversalkraft Q für den betreffenden Querfchnitt identisch und die Axialkraft P für alle Querfchnitte gleich Null. Man nennt alsdann die Transversalkraft wohl auch Verticalkraft.

Für diesen Fall läßt sich auch eine einfache Beziehung zwischen Bieungsmoment und Transversalkraft aufstellen.

Der Balken AB (Fig. 76) trage eine beliebige variable Belastung q pro Längeneinheit und eine Reihe von Einzellaften P_1, P_2, P_3 . Es ist dies der allgemeinste Fall; jeder andere Fall ist eine Vereinfachung desselben. Die Größe von q werde an jeder Stelle durch die Ordinate der Curve mno dargestellt. Die Abscisse irgend eines Querfchnittes II sei x ; links von diesem Querfchnitt wirken D_0, P_1 und $\int_0^x q dx$. Die

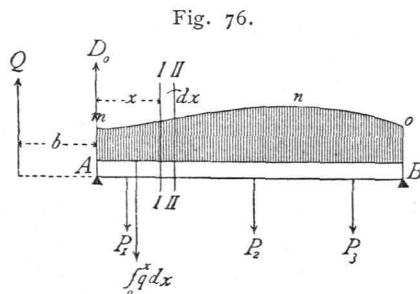


Fig. 76.

Resultirende dieser drei Kräfte ist die Transversalkraft Q , d. h. es ist

$$Q = D_0 - P_1 - \int_0^x q dx.$$

Q möge im Abstände b links von A angreifen. Das Angriffsmoment für den Querfchnitt II ist gleich der algebraischen Summe der Angriffsmomente der Einzelkräfte links von II , und da das statische Moment der Mittelkraft gleich der

algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte ist, so ist das statische Moment von Q gleich dem gebogenen Angriffsmoment, d. h. es ist

$$M = Q (b + x).$$

Betrachtet man einen zweiten Querschnitt $II II$, der um dx von $I I$ entfernt ist, so ist für diesen das Moment $M + dM$.

Dieses Moment setzt sich zusammen aus den Momenten der links von $II II$ wirkenden Kräfte, d. h. der Kraft Q , und der zwischen $I I$ und $II II$ liegenden Kraft $q dx$. Der Hebelsarm von Q ist $b + x + dx$, derjenige von $q dx$ ist $\frac{dx}{2}$; mithin ist

$$M + dM = Q (b + x + dx) - q dx \frac{dx}{2} = Q (b + x) + Q dx - q \frac{dx^2}{2}.$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung die oben für M gefundene, so bleibt:

$$dM = Q dx - \frac{q dx^2}{2}.$$

$\frac{q dx^2}{2}$ ist eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung und verschwindet gegen die übrigen Größen der Gleichung, welche unendlich kleine Größen erster Ordnung sind. Es ist demnach

$$dM = Q dx \quad \text{und} \quad Q = \frac{dM}{dx}, \dots \dots \dots 28.$$

d. h. die Transversalkraft ist gleich dem Differentialquotienten des Biegemomentes.

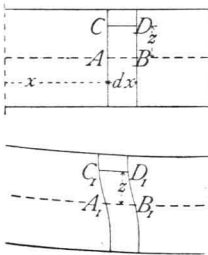
Wird $Q = 0$, so ist auch $\frac{dM}{dx} = 0$, also M ein Maximum. Hieraus folgt, daß das Moment für denjenigen Querschnitt zum Maximum wird, für den die Transversalkraft gleich Null ist.

296.
Axiale
Faserpannung.

Für die nachfolgenden Untersuchungen sollen zunächst nur Balken mit gerader Axe angenommen werden; dagegen soll der größeren Allgemeinheit wegen die Annahme gemacht werden, daß die Mittelkraft R aller an der einen Seite des Querschnittes thätigen äußeren Kräfte sowohl eine Axialkraft P , als auch eine Transversalkraft Q hat.

Unter der Einwirkung des Biegemomentes werden in den einzelnen Querschnitten des Balkens an den verschiedenen Stellen Faserpannungen entstehen. Zur

Fig. 77.



Ermittelung derselben möge der Betrachtung ein ursprünglich gerades Balkenstück (Fig. 77) von der Länge dx zu Grunde gelegt werden; die in der Axe liegende Faser sei AB . Nach der Biegung werden die Fasern ihre Längen geändert haben, und es werden im Allgemeinen die vor der Biegung durch A und B hindurch gelegten Querschnitte nicht mehr eben sein. Irgend eine Faser im Abstände z von der Axe hat sich von CD zu C_1D_1 deformirt. Die ursprüngliche Länge desselben CD war dx ; die jetzige Länge ist $C_1D_1 = dx + \Delta dx$.

Die Verlängerung derselben ist also

$$C_1D_1 - CD = dx + \Delta dx - dx = \Delta dx$$

und das Verlängerungsverhältniß dieser Faser $\frac{\Delta dx}{dx}$.

Wird die in dieser Fafer pro Flächeneinheit des Querschnittes herrschende Spannung N und der Elasticitäts-Modulus des Materials E genannt, so ist nach Art. 279, S. 246 das Verlängerungsverhältniß

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N}{E}, \text{ also } N = E \frac{\Delta dx}{dx}.$$

Es soll die in der Praxis meistens zutreffende Voraussetzung gemacht werden, daß die Kraftebene jeden Querschnitt des Körpers in zwei symmetrische Hälften theilt, wie die Querschnitte in Fig. 78 andeuten. Man kann alsdann mit hinreichender Genauigkeit annehmen, daß die Verlängerungsverhältnisse in den verschiedenen Fasern mit dem Abstände derselben von der durch den Schwerpunkt des Querschnittes normal zur Kraftebene gelegten Axe $Y Y$ variabel sind, und zwar von der ersten Potenz dieses Abstandes abhängen; demnach ist $\frac{\Delta dx}{dx}$ von der ersten Potenz von z abhängig. Allgemein wird also, wenn α und β zwei noch zu bestimmende Constanten sind,

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \alpha + \beta z.$$

Wird der für $\frac{\Delta dx}{dx}$ ermittelte Werth in die Gleichung für N eingesetzt, so wird $N = E(\alpha + \beta z)$. Nun sind die Größen E , α und β für den ganzen Querschnitt constant, also auch $E\alpha$ und $E\beta$. Es sei $E\alpha = a$ und $E\beta = b$, dann wird

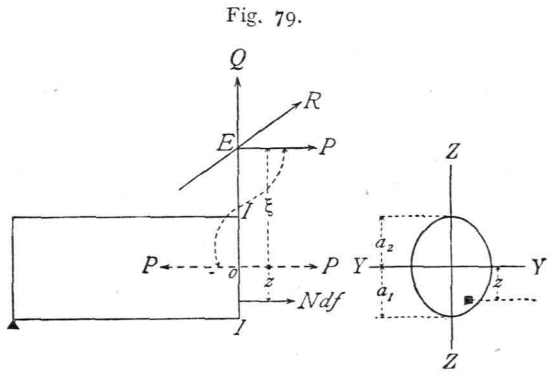
$$N = a + bz \dots \dots \dots 29.$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Constanten sind zu bestimmen, um den Werth für N zu erhalten. Zu diesem Zwecke denke man den Balken

(Fig. 79) im Querschnitte II durchschnitten; betrachtet man das Fragment links von diesem Querschnitt, so müssen die an demselben wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sein.

Auf das Fragment wirken:

1) Außere Kräfte, deren Resultirende R ist. R schneide die Querschnittsverlängerung in E und werde dort in die Axialkraft P und die Transversalkraft Q zerlegt. Dann wird durch Anbringung zweier gleich



gerichteter aber entgegengesetzter Kräfte P im Schwerpunkte o des Querschnittes nichts geändert, und wir haben das Biegemoment $M = P\xi$, die Axialkraft P im Punkte o und die Transversalkraft Q .

Von der Transversalkraft Q , welche auf die axiale Faserverspannung ohne Einfluß ist, soll vorläufig hier abgesehen werden; die Wirkung dieser Kraft wird weiter unten berücksichtigt.

2) Die inneren Kräfte, d. h. die Faserverspannungen im Querschnitt II . Wir suchen hier nur die axialen Faserverspannungen, d. h. diejenigen Componenten der Faserverspannungen, welche in die Richtung der Axe fallen.

Bei den hier zu betrachtenden geraden Trägern ist die Abweichung der Faserichtung von der Horizontalen außerordentlich gering, so daß man die Faserspannungen als horizontal gerichtet annehmen kann.

Die Summe der sämtlichen auf das Fragment wirkenden Horizontalkräfte muß nun gleich Null sein. Die wirkenden Horizontalkräfte sind die Faserspannungen und die Axialkraft P ; mithin muß deren Summe gleich Null sein. In irgend einer Faser vom Querschnitte df ist die Spannung pro Flächeneinheit N , also für df Flächeneinheiten Ndf . Die Summe der sämtlichen am Querschnitte angreifenden Faserspannungen ist also $\int_{-a_2}^{+a_1} Ndf$, so daß die erste Gleichgewichtsbedingung in diesem Falle heißt:

$$\int_{-a_2}^{+a_1} Ndf - P = 0.$$

Setzt man für N den Werth aus Gleichung 29. ein, so ist

$$\int_{-a_2}^{+a_1} (a + bz) df - P = \int_{-a_2}^{+a_1} a df + \int_{-a_2}^{+a_1} bz df - P = 0.$$

a und b sind für die ganze Fläche constant, mithin

$$a \int_{-a_2}^{+a_1} df + b \int_{-a_2}^{+a_1} z df = P.$$

Es ist $\int_{-a_2}^{+a_1} df = F$, wenn F den Flächeninhalt des ganzen Querschnittes bedeutet. $\int_{-a_2}^{+a_1} z df$ bedeutet: Es soll jedes Flächentheilchen df der Querschnittsfläche mit feinem Abstände von der Axe multiplicirt und die Summe dieser sämtlichen Producte gebildet werden. Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist aber $\int_{-a_2}^{+a_1} z df = Fz_o$, wenn z_o der Abstand des Schwerpunktes der ganzen Fläche von der Axe ist, für welche das Product $\int z df$ gebildet wird. Diese Axe ist hier eine Schwerpunktsaxe; demnach ist der Abstand derselben von dem Schwerpunkte $z_o = 0$, folglich auch $\int_{-a_2}^{+a_1} z df = 0$.

In obiger Gleichung fällt also das zweite Glied fort, und sie ändert sich in:

$$a \int_{-a_2}^{+a_1} df = aF = P, \text{ woraus } a = \frac{P}{F} \dots \dots \dots 30.$$

Damit ist die erste Constante a der Gleichung 29. bestimmt, und es verbleibt:

$$N = \frac{P}{F} + bz \dots \dots \dots 31.$$

Die Gleichung zur Bestimmung von b wird erhalten, indem für das Fragment diejenige der in Art. 256, S. 233 vorgeführten Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt wird, welche befagt, daß die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher wirkenden Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null ist. Wählt man als Momentenpunkt den Schwerpunkt o des Querschnittes, so hat man als Moment der äußeren Kräfte M . Was das Moment der inneren Kräfte anbelangt, so ist zu erwägen, daß die Spannung einer Faser im Abstände z von

der durch den Punkt o normal zur Kraftebene gelegten Axe YY gleich Ndf , das Moment derselben in Bezug auf o also gleich $Nzdf$ ist. Das gefammte Moment dieser Faserspannungen für o als Momentenpunkt ist demnach $\int_{-a_2}^{+a_1} Nzdf$. Die Integration muß sämtliche Faserspannungen umfassen, ist also innerhalb der Grenzen $-a_2$ und $+a_1$ vorzunehmen. Die Bedingungsgleichung heißt sonach

$$o = M - \int_{-a_2}^{+a_1} Nzdf \quad \text{und} \quad M = \int_{-a_2}^{+a_1} Nzdf.$$

Wird für N der Werth aus Gleichung 31. eingesetzt, so wird

$$M = \int_{-a_2}^{+a_1} \frac{P}{F} zdf + \int_{-a_2}^{+a_1} bz \cdot zdf = \frac{P}{F} \int_{-a_2}^{+a_1} zdf + b \int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df.$$

$\int zdf$ ist nach Obigem gleich Null, also auch das erste Glied der rechten Seite gleich Null; mithin

$$M = b \int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df.$$

Dieses Integral bedeutet: Es soll jedes Flächentheilchen df mit dem Quadrate seines Abstandes z von der durch o gelegten Axe YY multiplicirt und die Summe sämtlicher Producte gebildet werden.

Man nennt diese Summe das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche, bezogen auf die Axe YY . Wir bezeichnen dasselbe mit \mathcal{F} . Demnach ist

$$M = b \mathcal{F} \quad \text{und} \quad b = \frac{M}{\mathcal{F}} \quad \dots \dots \dots 32.$$

Damit ist auch die zweite Constante b gefunden, und es ergibt sich nun aus Gleichung 31. und 32. der Werth für die Faserspannung N , welche durch das Biegemoment M entsteht, zu

$$N = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{F}} z \quad \dots \dots \dots 33.$$

Wie für die Axe YY kann man auch für jede beliebige andere Axe das Trägheitsmoment aufstellen. Im Allgemeinen soll die Axe, für welche das Trägheitsmoment aufgestellt ist, durch den Index am Fuße des Buchstaben \mathcal{F} angegeben werden, so daß \mathcal{F}_X heißt: \mathcal{F} für die Axe XX etc. In vorstehendem Falle müßte demnach eigentlich \mathcal{F}_Y geschrieben sein. Der Kürze halber werden wir das Trägheitsmoment für die horizontale Schwerpunktsaxe des Querschnittes, d. h. für YY , kurzweg mit \mathcal{F} bezeichnen.

Wenn die Axialkraft P Null ist, wenn also nur normal zur Längsaxe des Trägers gerichtete Kräfte vorhanden sind, ist

$$N = \frac{M}{\mathcal{F}} z \quad \dots \dots \dots 34.$$

Dies ist der in den meisten Fällen der Praxis angewandte Ausdruck für die axiale Faserspannung.

Für die nächstfolgenden Untersuchungen soll $P = 0$ angenommen werden, so daß N durch Gleichung 34. ausgedrückt werden kann.

a) Stäbe, bei denen die Axialkraft gleich Null ist.

Für alle Fasern desselben Querschnittes ist bei einer gegebenen bestimmten Belastung sowohl das Moment der äußeren Kräfte M , als auch das Trägheitsmoment \mathcal{F}_Y , welches nur von der Form und Größe der Querschnittsfläche abhängt,

constant. Demnach ist laut Gleichung 34. des vorigen Artikels die axiale Spannung in einem Querschnitt nur mit dem Abstände der Fasern von der horizontalen Schwerpunktsaxe variabel, und zwar mit der ersten Potenz dieses Abstandes z . Alle Punkte eines Querschnittes, welche in gleicher Höhe z über der horizontalen Schwerpunktsaxe liegen, werden also gleich stark beansprucht. Trägt man die in den verschiedenen Höhen z pro Flächeneinheit wirkenden Axial- oder Normalspannungen derart graphisch auf, das man die z als Abscissen, die zugehörigen N als Ordinaten zeichnet, und verbindet man die Endpunkte der Ordinaten, so erhält man die Linie der Gleichung $N = \frac{M}{\mathcal{F}} z$. Diese Linie wird eine Gerade, weil die Variablen N und z nur in der ersten Potenz vorkommen.

Für $z = 0$ wird $N = 0$, d. h. in allen in der horizontalen Schwerpunktsaxe liegenden Fasern ist die Axialspannung gleich Null.

In diesen Fasern ist also auch die Verlängerung oder Verkürzung gleich Null; denn dieselben lassen sich aus der Gleichung ermitteln

$$\frac{\Delta_0 dx}{dx} = \frac{N}{E}, \text{ folglich } \Delta_0 dx = \frac{N}{E} dx = 0.$$

Man nennt diese Faserschicht, in welcher durch die Biegung weder eine Verlängerung, noch eine Verkürzung bewirkt wird, die neutrale Faserschicht, und die Axe YY , welche alle Punkte des Querschnittes enthält, in denen die Axialspannung gleich Null ist, die neutrale Axe.

Hiermit ist der Satz bewiesen: Bei geraden horizontalen Balken mit symmetrisch zur Kraftebene liegenden Querschnitten und nur normal zur Axe wirkenden Kräften fällt die neutrale Axe mit der horizontalen Schwerpunktsaxe zusammen.

298.
Maximal-
beanspruchung.

Aus Gleichung 34. folgt ferner, das N desto größer ist, je größer z ist, d. h. je weiter die betreffende Faser von der horizontalen Schwerpunktsaxe entfernt ist. Die größten Werthe von N finden also in den am weitesten entfernten Fasern statt. Nennt man die Abstände der am weitesten nach unten und oben von der Neutralen entfernten Fasern bezw. $+a_1$ und $-a_2$, so ist also

$$N_{max} = + \frac{M}{\mathcal{F}} a_1 \text{ und } N_{min} = - \frac{M}{\mathcal{F}} a_2 \dots \dots \dots 35.$$

Die Gleichungen 35. werden benutzt, um die Größe und Form des Querschnittes an den verschiedenen Stellen des Balkens zu bestimmen. Bedeutet M das größte in einem Querschnitt stattfindende Moment, so ist die größte in diesem Querschnitt vorhandene Zug-, bezw. Druckspannung aus den Gleichungen 35. zu ermitteln. Ist für das betreffende Material und den vorliegenden Fall die zulässige Beanspruchung pro Flächeneinheit des Querschnittes K' , bezw. $-K''$ (für Zug, bezw. Druck), so darf höchstens stattfinden:

$$N_{max} = K' \text{ und } N_{min} = -K'',$$

d. h. die Bedingungsgleichungen für den Querschnitt werden:

$$K' = \frac{M}{\mathcal{F}} a_1, \quad -K'' = -\frac{M}{\mathcal{F}} a_2 \text{ oder } K'' = \frac{M}{\mathcal{F}} a_2.$$

Die beiden Gleichungen für K' und K'' können auch geschrieben werden:

$$\frac{\mathcal{F}}{a_1} = \frac{M}{K'} \text{ und } \frac{\mathcal{F}}{a_2} = \frac{M}{K''} \dots \dots \dots 36.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 36. können wir als bekannt annehmen; es wird weiterhin gezeigt werden, wie man für die verschiedenen Fälle die Werthe

von M ermittelt; die Werthe der zulässigen Beanspruchung, d. h. die Werthe für K' und K'' sind aus Art. 280 bis 288 bekannt, und wir werden im folgenden Artikel die Modificationen angeben, welche sich für die Biegeelasticität ergeben. Demnach sind nunmehr die Werthe für $\frac{\mathcal{F}}{a_1}$ und $\frac{\mathcal{F}}{a_2}$ so zu bestimmen, dass die Gleichungen 36. erfüllt sind. \mathcal{F} , a_1 und a_2 sind aber Werthe, welche nur von der Gröfse und Form des Querschnittes abhängen.

Für den Quotienten $\frac{\mathcal{F}}{a}$ hat man eine besondere Bezeichnung: das Widerstandsmoment eingeführt.*

Es möge noch bemerkt werden, dass die Maximalwerthe der axialen Faferspannungen N nicht ohne Weiteres die überhaupt in den Fasern wirkenden Maximalspannungen repräsentiren. In den meisten Fällen aber ist die Maximalspannung entweder gleich dem Maximalwerth der axialen Faferspannung oder doch so wenig von demselben verschieden, dass der letztere Werth unbedenklich als Maximalwerth der Faferspannung überhaupt eingeführt werden kann.

Bei dem bis vor Kurzem allein üblichen und für viele Zwecke des Hochbauwesens auch wohl ausreichenden älteren Verfahren werden die Querschnitte der auf Biegeelasticität beanspruchten Stäbe mittels der Gleichungen 36. bestimmt, indem für M der größtmögliche Werth des Biegemomentes in dem betreffenden Querschnitte, für K' und K'' die bezüglichen Werthe aus der Tabelle in Art. 281, S. 247 eingeführt werden. Eine günstige Querschnittsdisposition wird stattfinden, wenn gleichzeitig in den am meisten gezogenen, bezw. gedrückten Faferfichten das zulässige Maximum der Beanspruchung stattfindet.

Für Schmiedeeisen und Stahl sind die für Zug, bezw. Druck zulässigen Beanspruchungen (absolut genommen) einander nahezu gleich, so dass für die Querschnittsbildung in den Gleichungen 36. $K' = K''$ zu setzen ist. Es ergibt sich alsdann

$$\frac{M}{\mathcal{F}} a_1 = \frac{M}{\mathcal{F}} a_2 \quad \text{oder} \quad a_1 = a_2,$$

d. h. die Querschnittsform für Stäbe aus Schmiedeeisen und Stahl, welche auf Biegeelasticität beansprucht werden, ist so zu wählen, dass die am meisten gezogenen, bezw. gedrückten Fasern gleich weit vom Schwerpunkte des Querschnittes entfernt sind, dass also der Schwerpunkt der Querschnittsfläche in halber Höhe liegt.

Beispiel. Das Maximalmoment in einem schmiedeeisernen Walzbalken mit I-förmigem Querschnitt betrage $M = 280\,000$ kgcm.

Nach der Tabelle auf S. 247 ist für Schmiedeeisen $K' = K'' = K = 700$ kg pro 1 qcm, also

$$\frac{\mathcal{F}}{a_1} = \frac{\mathcal{F}}{a_2} = \frac{M}{K} = \frac{280\,000}{700} = 400.$$

Das neben stehende Profil Nr. 26 der »Deutschen Normalprofile für I-Eisen« (Fig. 80) hat nach der Tabelle auf S. 198 ein Trägheitsmoment $\mathcal{F} = 5798$; ferner

ist $a = \frac{26}{2} = 13$ cm, demnach $\frac{\mathcal{F}}{a} = 446$, so dass dieser Querschnitt im vorliegenden Falle genügt.

Für Gußeisen ist die zulässige Beanspruchung auf Druck doppelt so groß, als diejenige auf Zug (vergl. die Tabelle auf S. 247), also $K'' = 2K'$, und demnach

$$\frac{M}{\mathcal{F}} a_2 = 2 \frac{M}{\mathcal{F}} a_1 \quad \text{und} \quad a_2 = 2 a_1.$$

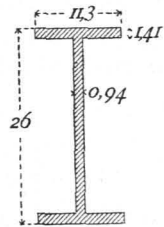
Nun ist die ganze Höhe des Querschnitts $h = a_1 + a_2 = 3 a_1$, woraus $a_1 = \frac{h}{3}$.

299.
Widerstandsmoment.

300.
Querschnittsbestimmung.
Ältere Methode.

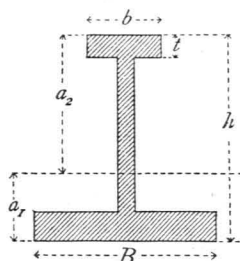
301.
Stäbe aus Schmiedeeisen und Stahl.

Fig. 80.



302.
Stäbe aus Gußeisen.

Fig. 81.



Daraus folgt die Regel: Die Querschnitte der gußeisernen Balken (Fig. 81) sind so zu disponiren, daß der Schwerpunkt um $\frac{1}{3}$ der Gesamthöhe des Querschnittes von der am meisten gezogenen Faser entfernt liegt. Befinden sich also die gezogenen Fasern, wie meistens, unten, die gedrückten Fasern oben, so soll der Schwerpunkt im Abstände $\frac{h}{3}$ über der Basis des Querschnittes liegen.

303.
Stäbe
aus
Holz.

Die auf Biegung beanspruchten Stäbe aus Holz werden der Natur des Materials entsprechend mit rechteckigem Querschnitt hergestellt; der Schwerpunkt des Querschnittes liegt also in halber Höhe h , und es ist $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$. Demnach wird $K' = K''$, und es ist aus der Tabelle auf S. 247 der kleinere der beiden Werthe, welche als zulässige Zug-, bezw. Druckbeanspruchung angegeben sind, einzuführen. Wenn dieser Werth K genannt wird, so ist

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{M}{K}.$$

Beispiel. Es sei etwa $M = 180\,000$ kgcm; alsdann muß für kieferne Balken stattfinden:

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{180\,000}{60} = 3000.$$

Es wird weiter unten (Art. 307, S. 266) entwickelt werden, daß beim Rechteckquerschnitt von der Breite b und der Höhe h das Trägheitsmoment

$$\mathcal{F} = \frac{b h^3}{12} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{b h^3}{12 \frac{h}{2}} = \frac{b h}{6}$$

ist. Im vorliegenden Falle muß also sein

$$\frac{b h^2}{6} = 3000 \quad \text{oder} \quad b h^2 = 18\,000.$$

Sei $b = \frac{3}{4} h$, so ist $\frac{3}{4} h^3 = 18\,000$ und $h = \sqrt[3]{24\,000} = \text{rot. } 29 \text{ cm}$, fonach $b = 22 \text{ cm}$.

304.
Querschnitts-
bestimmung.
Neuere
Methode.

Die aus den Wöhler'schen Versuchen für die Normal-Elasticität (vergl. Art. 283, S. 248) ermittelten Resultate können mit Vortheil auch für Stäbe angewendet werden, welche auf Biegeelasticität beansprucht sind.

Aus den Gleichungen 6. und 8. (S. 249) folgt, wenn n der Sicherheitscoefficient ist und K, K_1 dieselbe Bedeutung, wie in Art. 284 u. 285 (S. 250 u. 251) haben,

$$\begin{array}{l} \text{für Zug:} \\ \frac{A}{n} = (1 - \alpha) K + \alpha \frac{C}{n} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{für Druck:} \\ \frac{A_1}{n} = (1 - \alpha_1) K_1 + \alpha_1 \frac{C_1}{n} \end{array} \dots 37.$$

Bei den auf Normal-Elasticität beanspruchten Stäben vertheilte sich der Zug, bezw. Druck gleichmäßig über den ganzen Querschnitt, und es bedeutete daselbst $\frac{A}{n}$ und $\frac{A_1}{n}$ die durch die größte Zug-, bezw. Druckkraft pro Flächeneinheit des Querschnittes erzeugte Zug-, bezw. Druckbeanspruchung. Anders hier. Hier ist unter $\frac{A}{n}$, bezw. $\frac{A_1}{n}$ die größte, in der am meisten gezogenen, bezw. am meisten gedrückten Faser des Querschnittes stattfindende Zug-, bezw. Druckbeanspruchung pro Flächeneinheit zu verstehen, unter $\frac{C}{n}$, bezw. $\frac{C_1}{n}$ die kleinste, in derselben Faser stattfindende Zug-, bezw. Druckbeanspruchung. Da dasselbe Moment gleichzeitig in den verschiedenen Fasern Zug- und Druckbeanspruchungen erzeugt, so wird gleichzeitig $\frac{A}{n}$ und $\frac{A_1}{n}$, bezw. $\frac{C}{n}$ und $\frac{C_1}{n}$ in verschiedenen Fasern des Querschnittes stattfinden.

Bedeutet M_{max} das größte, M_{min} das kleinste im Querschnitt mögliche Moment, so findet die größte Zugbeanspruchung in der um a_1 von der neutralen entfernten Fafer statt, und dieselbe ist

$$\frac{A}{n} = \frac{M_{max} a_1}{\mathcal{F}}$$

Die größte Druckbeanspruchung findet in der um a_2 von der neutralen entfernten Fafer statt, und es ist

$$\frac{A_1}{n} = \frac{M_{max} a_2}{\mathcal{F}}$$

Eben so ergibt sich:

$$\frac{C}{n} = \frac{M_{min} a_1}{\mathcal{F}} \quad \text{und} \quad \frac{C_1}{n} = \frac{M_{min} a_2}{\mathcal{F}}$$

Werden diese Werthe in die Gleichungen 37. eingesetzt, so erhält man:

$$\frac{M_{max} a_1}{\mathcal{F}} = (1 - \alpha) K + \alpha \frac{M_{min} a_1}{\mathcal{F}} \quad \text{und} \quad \frac{M_{max} a_2}{\mathcal{F}} = (1 - \alpha_1) K_1 + \alpha_1 \frac{M_{min} a_2}{\mathcal{F}},$$

d. h. $\frac{\mathcal{F}}{a_1} = \frac{M_{max} - \alpha M_{min}}{(1 - \alpha) K}$ und $\frac{\mathcal{F}}{a_2} = \frac{M_{max} - \alpha_1 M_{min}}{(1 - \alpha_1) K_1}$ 38.

Wir bezeichnen mit M_0 des Moment durch permanente Belastung, mit M_1 das größte Moment durch die mobile Belastung; alsdann ist

$$M_{max} = M_0 + M_1 \quad \text{und} \quad M_{min} = M_0,$$

daher

$$\frac{\mathcal{F}}{a_1} = \frac{M_0 + M_1 - \alpha M_0}{(1 - \alpha) K} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{F}}{a_2} = \frac{M_0 + M_1 - \alpha M_0}{(1 - \alpha_1) K_1},$$

$$\frac{\mathcal{F}}{a_1} = \frac{M_0}{K} + \frac{M_1}{(1 - \alpha) K} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{F}}{a_2} = \frac{M_0}{K_1} + \frac{M_1}{(1 - \alpha_1) K_1} \quad \dots \dots \dots 39.$$

Aus den beiden Gleichungen 39. kann man genauer, als dies in den Art. 301 bis 303 geschehen ist, das Verhältniß berechnen, in welchem a_1 und a_2 , d. h. der Abstand der am meisten gezogenen Fafer von der neutralen Axe und der Abstand der am meisten gedrückten Fafer von der neutralen Axe, zu einander stehen müssen. Die Division der beiden Gleichungen 39. ergibt

$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{M_0(1 - \alpha) + M_1}{M_0(1 - \alpha_1) + M_1} \right) \frac{(1 - \alpha_1) K_1}{(1 - \alpha) K} \quad \dots \dots \dots 40.$$

Wendet man diese Ermittlungen auf schmiedeeiserne Stäbe an, so war nach Art. 283, S. 249

$$\alpha = 0,45 \quad \text{und} \quad K = \frac{Z}{n}, \quad \text{ferner} \quad \alpha_1 = 0,4 \quad \text{und} \quad K_1 = \frac{D}{n},$$

sonach

$$\frac{K_1}{K} = \frac{D}{Z} = \frac{7}{8}$$

$$\text{und} \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{0,6 \cdot 7}{0,55 \cdot 8} \cdot \frac{\frac{M_0}{M_1} 0,55 + 1}{\frac{M_0}{M_1} 0,6 + 1} = 0,955 \frac{1 + 0,55 \frac{M_0}{M_1}}{1 + 0,6 \frac{M_0}{M_1}}$$

Für eine Reihe von Werthen des Verhältnisses $\frac{M_0}{M_1}$ ergibt sich $\frac{a_2}{a_1}$ wie folgt:

für $\frac{M_0}{M_1} = 1,0$	1,25	1,5	1,75	2,0	3,0
$\frac{a_2}{a_1} = 0,924$	0,920	0,917	0,914	0,912	0,903.

Das Verhältniß $\frac{a_2}{a_1}$ ergibt sich nahezu constant und so nahe gleich 1, dafs man unbedenklich

auch hier $\frac{a_2}{a_1} = 1$, d. h. $a_2 = a_1$ annehmen kann. Alsdann ist der Berechnung die zweite der Gleichungen 39. zu Grunde zu legen, weil jetzt, da $a_1 = a_2$ ist, nur eine dieser beiden Gleichungen erfüllt sein kann und deshalb diejenige zu wählen ist, welche eine geringere Beanspruchung ergibt. Werden die früheren Zahlenwerthe eingeführt, so ergibt sich

$$\frac{\mathcal{F}}{a_2} = \frac{\mathcal{F}}{a_1} = \frac{M_0}{1200} + \frac{M_1}{720} \quad \dots \dots \dots 41.$$

und bei stofsweise stattfindender Belastung:

$$\frac{\mathcal{J}}{a_2} = \frac{\mathcal{J}}{a_1} = \frac{M_0}{1200} + \frac{M_1}{600} \dots \dots \dots 41a.$$

Für Stahl ist die Gleichung leicht aufzustellen; doch kann davon hier, wegen der geringen Anwendung des Stahls im Hochbauwesen, abgesehen werden.

b) Trägheitsmomente, Trägheitsradius und Trägheitsellipse.

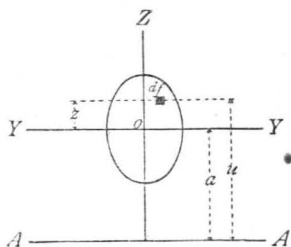
305.
Trägheitsmomente.

Die Bestimmung der Querschnittsform und -Größe auf Biegung beanspruchter Balken bedingt die Kenntniss des Trägheitsmomentes \mathcal{J}_Y des Querschnittes, bezogen auf die normal zur Biegungsebene stehende Schwerpunktsaxe. Es soll deshalb die Ermittlung der Trägheitsmomente für verschiedene Querschnitte gezeigt werden, und zwar bezogen auf verschiedene Axen, da man das \mathcal{J}_Y oft bequem aus dem Trägheitsmoment für eine andere Axe entwickelt, auch für spätere Aufgaben die Kenntniss der Trägheitsmomente für die verschiedenen Axen vorhanden sein muß.

306.
Trägheitsmomente für zur Schweraxe parallele Axen.

Nach der oben in Art. 296, S. 261 gegebenen Erklärung ist das Trägheitsmoment eines Querschnittes F (Fig. 82) bezogen auf eine Axe AA die Summe sämtlicher Producte, welche durch Multiplication jedes Flächentheilchens df des Querschnittes mit dem Quadrate seines Abstandes u von der Axe AA erhalten werden, d. h. es ist:

Fig. 82.



$$\mathcal{J}_A = \int u^2 df.$$

Die Integration ist über den ganzen Querschnitt auszudehnen. Nun ist

$$u = a + z \text{ und } u^2 = a^2 + 2az + z^2,$$

$$\text{also } \mathcal{J}_A = \int u^2 df = a^2 \int df + 2a \int z df + \int z^2 df$$

Es ist jedoch $\int df = F$ und $\int z^2 df = \mathcal{J}_Y$, ferner nach der Lehre vom Schwerpunkt $\int z df = 0$, mithin

$$\mathcal{J}_A = F a^2 + \mathcal{J}_Y \dots \dots \dots 42.$$

Das Trägheitsmoment eines Querschnittes bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsaxe parallele Axe ist gleich dem Trägheitsmomente für diese Schwerpunktsaxe, vermehrt um das Product aus der Querschnittsfläche in das Quadrat des Abstandes beider Axen.

307.
Rechteckige Querschnitte.

1) Trägheitsmoment für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 83).

Für diesen ist

$$\mathcal{J}_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 df.$$

Da nun $df = b dz$ ist, wird

$$\mathcal{J}_Y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \left[\frac{b z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right] = \frac{b h^3}{12} \dots \dots \dots 43.$$

Das Trägheitsmoment für eine Axe AA , welche mit einer Kante des Rechteckes zusammenfällt, ist nach Gleichung 42.

$$\mathcal{J}_A = \frac{b h^3}{12} + b h \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{b h^3}{12} + \frac{b h^3}{4} = \frac{b h^3}{3}.$$

Für eine zu YY normal stehende Schwerpunktsaxe ZZ ist nach Obigem

$$\mathcal{J}_Z = \frac{h b^3}{12}$$

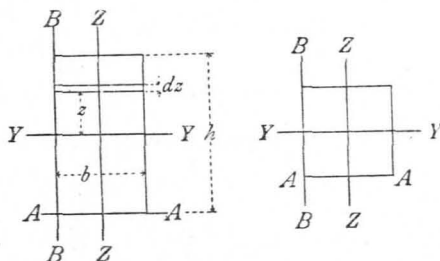
und für die Kante BB ist

$$\mathcal{J}_B = \frac{h b^3}{3}.$$

Das Quadrat ist ein Rechteck mit gleich langen Seiten; ist dessen Seitenlänge = d , so ergeben sich

$$\mathcal{J}_Z = \mathcal{J}_Y = \frac{d^4}{12} \text{ und } \mathcal{J}_A = \mathcal{J}_B = \frac{d^4}{3}.$$

Fig. 83.



2) Trägheitsmomente für aus Rechtecken zusammengesetzte Querschnitte. Die für das Rechteck gefundenen Werthe von \mathcal{J} werden vielfach angewendet, um für zusammengesetzte Querschnitte die Trägheitsmomente zu finden.

Das Trägheitsmoment des Querschnittes Fig. 84 ist gleich der Differenz des Trägheitsmomentes des ganzen Rechteckes $abcd$ weniger dem Trägheitsmoment des Rechteckes $efig$, d. h. es ist

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12} B H^3 - \frac{1}{12} B h^3 = \frac{B}{12} (H^3 - h^3).$$

Für den symmetrischen I-förmigen (Fig. 85) und für den C-förmigen Querschnitt (Fig. 86) ergibt sich hiernach

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{12} \left[b (h^3 - (h - 2t)^3) + d (h - 2t)^3 \right].$$

Dieser für die Berechnung unbequeme Ausdruck kann wesentlich vereinfacht werden. Wird der Abstand der Schwerpunkte des oberen, bezw. unteren Rechteckes mit η bezeichnet, also $h - t = \eta$ gesetzt und im letzten Gliede obigen Ausdruckes statt $h - 2t$ (nicht ganz genau, jedoch mit kleinem Fehler) η eingeführt, so ist

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} b t (h^2 - 2 h t + t^2) + \frac{1}{6} b t^3 + \frac{d \eta^3}{12}.$$

Wir setzen $b t = f$; alsdann wird

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} f (h - t)^2 + \frac{f t^2}{6} + \frac{d \eta^3}{12}.$$

$\frac{f t^2}{6}$ ist gegen das erste Glied sehr klein und kann ohne Bedenken vernachlässigt werden; dann ist

der Ausdruck für das Trägheitsmoment:

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} f \eta^2 + \frac{d \eta^3}{12} = \frac{\eta^2}{2} \left(f + \frac{d \eta}{6} \right) \dots \dots \dots 44.$$

Denkt man sich die ganze Querschnittsfläche f des oberen Rechteckes im Schwerpunkt desselben vereinigt, also im Abstände $\frac{\eta}{2}$ von der Axe YY , und eben so die des unteren Rechteckes in dem resp. Schwerpunkt, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Querschnittes

$$i = 2f \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 = \frac{f \eta^2}{2}.$$

Dies ist aber der erste Theil unseres obigen Ausdruckes 44. für \mathcal{J}_Y ; der zweite Theil des Ausdruckes stellt demnach den Beitrag dar, welchen der Steg zum Trägheitsmoment leistet. Mit ziemlich genauer Annäherung erhält man demnach das Trägheitsmoment des symmetrischen I-förmigen Querschnittes, indem man die Querschnittsfläche des oberen und unteren Gurtes vermehrt um je $\frac{1}{6}$ der Querschnittsfläche des Steges (bis zu den Gurtschwerpunkten gerechnet), im Schwerpunkt des oberen und unteren Gurtes vereinigt denkt und dafür das Trägheitsmoment aufsucht.

Die neutrale Axe fällt nach Art. 297, S. 262 bei den hier in Betracht kommenden Belastungen mit der horizontalen Schwerpunktsaxe zusammen. Es ist also bei der Berechnung der Trägheitsmomente stets zuerst der Schwerpunkt des Querschnittes aufzufuchen. Bei den bisher betrachteten symmetrischen

308.
Symmetrische
I- u. E-förmige
Querschnitte.

Fig. 84.

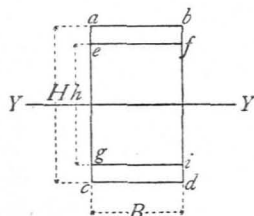
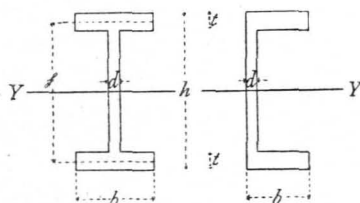


Fig. 85.

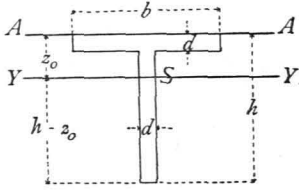
Fig. 86.



309.
I-förmige
Querschnitte.

Querschnitten lag der Schwerpunkt in halber Höhe, so daß eine befondere Unterfuchung in dieser Richtung nicht nöthig war. Bei den unfymmetrischen Querschnitten ist die Auffuchung des Schwerpunktes nach den bekannten Regeln vorzunehmen.

Fig. 87.



Wird beim T-förmigen Querschnitt (Fig. 87) der Abstand des Schwerpunktes von der durch die eine Kante gelegten Axe AA mit z_0 bezeichnet, so ist nach der Schwerpunktslehre

$$F z_0 = d (b - d) \frac{d}{2} + d h \frac{h}{2}, \text{ ferner } F = (b - d) d + d h.$$

Sonach ist

$$z_0 = \frac{(b - d) \frac{d^2}{2} + d h^2}{2 [(b - d) d + d h]} = \frac{(b - d) d + h^2}{2 (b - d) + 2 h}$$

$$\text{und } \mathcal{I}_Y = \frac{1}{3} [d (h - z_0)^3 + d z_0^3 + (b - d) z_0^3 - (b - d) (z_0 - d)^3].$$

Das Trägheitsmoment für die Axe AA ist:

$$\mathcal{I}_A = \frac{1}{3} [d h^3 + (b - d) d^3].$$

310.
Unfymmetrische
I-förmige
Querschnitte.

Für den unfymmetrischen I-förmigen Querschnitt (Fig. 88) ist, wenn man die früheren Bezeichnungen beibehält

$$z_0 = \frac{\frac{d h \cdot h}{2} + (b - d) t \left(h - \frac{t}{2} \right) + \frac{(B - d) t^2}{2}}{d h + (b - d) t + (B - d) t} = \frac{d h^2 + (b - d) t (2 h - t) + (B - d) t^2}{2 [d h + (b - d) t + (B - d) t]}$$

Fig. 88.

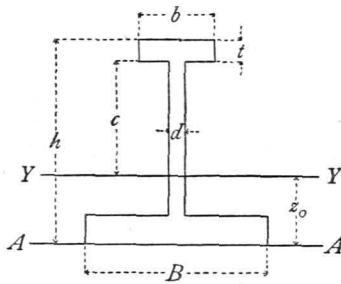
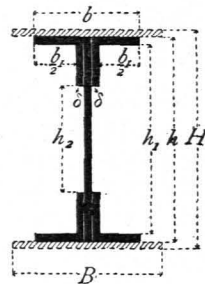


Fig. 89.



$$\text{und } \mathcal{I}_Y = \frac{1}{3} [b (h - z_0)^3 + B z_0^3 - (b - d) c^3 - (B - d) (z_0 - t)^3].$$

311.
Blechträger-
Querschnitte.

Bei den Querschnitten der Blechträger (Fig. 89) liegt der Schwerpunkt, also auch die neutrale Axe in halber Höhe. Alsdann ist, falls nur das Verticalblech und die 4 Winkeleisen vorhanden sind:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{12} (b h^3 - b_1 h_1^3 - 2 \delta h_2^3).$$

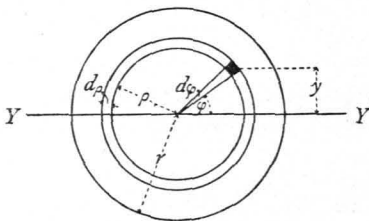
Falls noch Blechplatten vorhanden sind, ermittelt man deren Trägheitsmomente am besten besonders und addirt sie zu dem Trägheitsmoment des Querschnittes ohne Deckplatten. Das Trägheitsmoment dieser Deckplatten ist alsdann:

$$\mathcal{I}' = \frac{1}{12} B (H^3 - h^3).$$

312.
Kreisförmige
Querschnitte.

3) Trägheitsmomente für kreisförmige Querschnitte (Fig. 90).

Fig. 90.



Der Kreisradius sei r , der Durchmesser d . Es soll zuerst das Trägheitsmoment der oberen Halbkreisfläche für die Axe YY bestimmt werden. Man zerlege die Kreisfläche in concentrische Ringe und bestimme zunächst das Trägheitsmoment einer halben Ringfläche. Der Radius eines solchen Ringes sei ρ , dessen Breite $d\rho$. Der Flächeninhalt eines Theilchens df dieser Ringfläche, welches zum Centriwinkel $d\varphi$ gehört, ist $df = \rho d\varphi d\rho$ und dessen Trägheitsmoment bezogen auf die Axe YY

$$di = df y^2 = \rho d\varphi d\rho y^2 = \rho^3 \sin^2 \varphi d\rho d\varphi.$$

Nun kann man durch Integration das Trägheitsmoment

des halben Ringes und durch abermalige Integration das Trägheitsmoment der oberen Querschnittshälfte bestimmen. Schliesslich ergibt sich als Trägheitsmoment des ganzen Kreisquerschnittes

$$\mathcal{J} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Man sieht leicht, dass beim Kreisquerschnitt die Trägheitsmomente für alle Schwerpunktsachsen gleich sind.

Das Trägheitsmoment eines Querschnittes für die beliebige Axe $A Y_1$ (Fig. 91), welche den Winkel α mit der Axe $Y Y$ einschließt, ist nach Art. 296 (S. 261)

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \int z_1^2 df;$$

für die Axe $A Z_1$ ist

$$\mathcal{J}_{Z_1} = \int y_1^2 df.$$

Nach Fig. 91 ist

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

$$y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha;$$

folglich

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \int z^2 \cos^2 \alpha df + \int y^2 \sin^2 \alpha df - \int 2yz \sin \alpha \cos \alpha df,$$

$$\text{und } \mathcal{J}_{Z_1} = \int y^2 \cos^2 \alpha df + \int z^2 \sin^2 \alpha df + \int 2yz \sin \alpha \cos \alpha df.$$

Die Integration ist über den gesammten Querschnitt auszudehnen; für die ganze Integration ist aber α constant, also

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \cos^2 \alpha \int z^2 df + \sin^2 \alpha \int y^2 df - \sin 2\alpha \int yz df,$$

$$\mathcal{J}_{Z_1} = \cos^2 \alpha \int y^2 df + \sin^2 \alpha \int z^2 df + \sin 2\alpha \int yz df.$$

Nun ist

$$\int z^2 df = \mathcal{J}_Y = \mathcal{J} \text{ und } \int y^2 df = \mathcal{J}_Z = \mathcal{J};$$

mithin, wenn man noch $\int yz df = H$ setzt,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}_{Y_1} &= \mathcal{J} \cos^2 \alpha + \mathcal{J}_1 \sin^2 \alpha - H \sin 2\alpha \\ \mathcal{J}_{Z_1} &= \mathcal{J}_1 \cos^2 \alpha + \mathcal{J} \sin^2 \alpha + H \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 45.$$

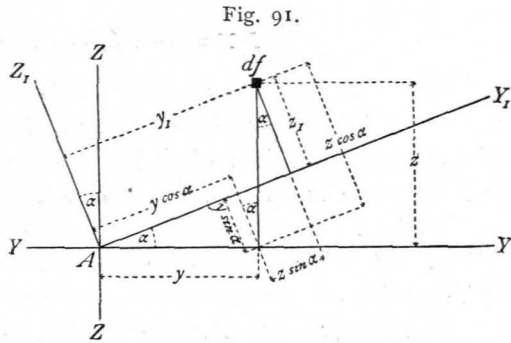
Die beiden Gleichungen 45. geben die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Lage der Trägheitsschwerachsen an. Von besonderem Interesse ist die Lage der Axe, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum und ein Minimum wird. \mathcal{J}_{Y_1} wird ein Maximum für den Werth von α , für welchen

$$\frac{d \mathcal{J}_{Y_1}}{d \alpha} = -2 \mathcal{J} \cos \alpha \sin \alpha + 2 \mathcal{J}_1 \sin \alpha \cos \alpha - 2 H \cos 2\alpha = 0,$$

d. h. für welchen $(\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}) \sin 2\alpha = 2 H \cos 2\alpha$ wird. Es ist also

$$(\operatorname{tg} 2\alpha)_{\max} = \frac{2 H}{\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}} \dots \dots \dots 46$$

Diesem Werthe entsprechen zwei Winkelgrößen 2α , welche um 180 Grad aus einander liegen, da $\operatorname{tg} (180 + 2\alpha) = \operatorname{tg} 2\alpha$ ist. Die beiden Maximalwerthe von α liegen also um 90 Grad aus einander, d. h. die beiden Axen, für welche das Trägheitsmoment seine Maxima erreicht, stehen normal zu einander. Ob Maximum oder Minimum für die eine oder andere Axe stattfindet, ergibt die zweite Differentiation.



313.
Trägheits-
momente
für verschiedene
Schwerpunkts-
achsen.

Es ist
$$\frac{d \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha} = (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \sin 2 \alpha - 2 H \cos 2 \alpha,$$

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha^2} = 2 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \cos 2 \alpha + 4 H \sin 2 \alpha.$$

Setzt man statt α den um 90 Grad abweichenden Werth $(90 + \alpha)$ ein, so ist

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha^2} = + 2 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \cos (180 + 2 \alpha) + 4 H \sin (180 + 2 \alpha),$$

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha^2} = - 2 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \cos 2 \alpha - 4 H \sin 2 \alpha.$$

Die zweiten Ableitungen sind also für zwei Winkel, welche um 90 Grad von einander differiren, numerisch gleich, haben aber entgegengesetztes Vorzeichen; entspricht demnach dem Winkel α das Maximum, so tritt für den Winkel $(90 + \alpha)$ das Minimum des Trägheitsmomentes ein.

314.
Hauptaxen.

Es folgt daraus der Satz: In jedem Querschnitt ist eine Schwerpunktsaxe vorhanden, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum, eine andere, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird. Beide Axen stehen zu einander normal.

Man nennt diese Axen die Hauptaxen. Diejenige, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum wird, nennt man die erste Hauptaxe, diejenige, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird, heißt die zweite Hauptaxe.

Wir bezeichnen oben $\int y z \, df = H$; setzt man analog $H_1 = \int y_1 z_1 \, df$ und führt für y_1 und z_1 die oben gefundenen Werthe ein, so wird:

$$H_1 = \int (y \cos \alpha + z \sin \alpha) (z \cos \alpha - y \sin \alpha) \, df,$$

$$H_1 = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int y z \, df + \frac{\sin 2 \alpha}{2} \left(\int z^2 \, df - \int y^2 \, df \right),$$

$$H_1 = \cos 2 \alpha H + \frac{\sin 2 \alpha}{2} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_1). \quad \dots \quad 47.$$

H_1 wird gleich Null für $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_1) \sin 2 \alpha = - 2 \cos 2 \alpha H$, sonach für

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = - \frac{2 H}{\mathcal{F} - \mathcal{F}_1} = \frac{2 H}{\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}}.$$

Dies ist derselbe Werth, für welchen nach Gleichung 46. die Maxima des Trägheitsmomentes stattfinden. Für die Hauptaxen ist sonach

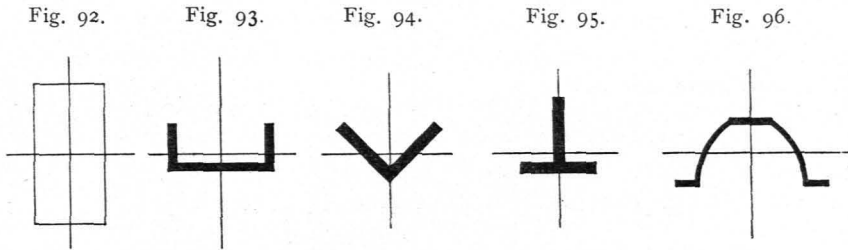
$$H_1 = \int y_1 z_1 \, df = 0.$$

Für viele Querschnitte ist hierdurch ein bequemes Kriterium zur Erkennung der Hauptaxen gefunden. Man suche diejenigen Axen, für welche $H_1 = 0$ ist; alsdann sind die gefundenen die Hauptaxen. Es genügt, eine Hauptaxe zu suchen, da ja die andere nach Früherem stets einen Winkel von 90 Grad mit derselben einschließt.

Bei sämtlichen zu einer oder mehreren Axen symmetrisch liegenden Querschnitten sind die Symmetriemaxen die Hauptaxen. Denn sei etwa die Z -Axe eine Symmetriemaxe, so entspricht jedem df mit den Coordinaten $y_1 z_1$ ein df mit den Coordinaten $-y_1 z_1$ (Fig. 97). Die Beiträge der beiden df zu H_1 sind also $df y_1 z_1 - df y_1 z_1 = 0$.

Genau eben so ist es mit sämtlichen übrigen Querschnittstheilen, so dass also die Gesamtsomme $H_1 = \int y_1 z_1 \, df = 0$ ist.

Bei den in Fig. 92 bis 96 dargestellten Querschnitten sind die Haupttaxen angegeben. In den auf S. 194 bis 198 mitgetheilten Tabellen über die »Deutschen Normal-



profile für Walzeisen« sind die Trägheitsmomente für solche Axen mit aufgenommen worden, welche beim Berechnen von Hochbau-Constructions eine Rolle spielen.

Wählt man die Haupttaxen als Axen der Y und Z (Fig. 97), so ist für diese nach Obigem $\int y z df = H = 0$; mithin ist, wenn man das Trägheitsmoment in Bezug auf die eine Hauptaxe mit A , dasjenige in Bezug auf die andere mit B bezeichnet, in den Gleichungen 45. und 46. für \mathcal{F} und \mathcal{F}_1 , bezw. A und B , so wie für $H = 0$ einzusetzen. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_{Y_1} &= A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha \\ \mathcal{F}_{Z_1} &= A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha \\ H_1 &= (A - B) \frac{\sin 2 \alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots 48.$$

Sind A und B , d. h. die beiden Hauptträgheitsmomente einander gleich, so ist:

$$\mathcal{F}_{Y_1} = A (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = A,$$

d. h. \mathcal{F}_{Y_1} ist alsdann von α unabhängig, also für jedes α gleich A .

Hieraus folgt: Sind die beiden Hauptträgheitsmomente gleich groß, so sind alle Trägheitsmomente gleich groß.

Bedeutet \mathcal{F} das Trägheitsmoment für eine beliebige Axe, so kann man $\mathcal{F} = F R^2$ setzen, in welcher Gleichung F die Querschnittsfläche bedeutet. Es ist dann

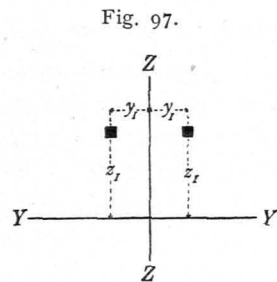
$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}},$$

und es wird R der Trägheitsradius für die betreffende Axe genannt. Beispielsweise würden sich die Trägheitsradien für die Haupttaxen aus den Gleichungen:

$$A = F R_1^2 \text{ und } B = F R_2^2 \text{ zu } R_1 = \sqrt{\frac{A}{F}} \text{ und } R_2 = \sqrt{\frac{B}{F}}$$

ergeben.

Die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes mit der Veränderung des Winkels α kann man graphisch veranschaulichen, indem man von dem Schwerpunkte aus auf jeder Axe eine Länge abträgt, welche dem Trägheitsmomente für diese Axe entspricht. Wählt man die Haupttaxen als Coordinatenaxen und trägt auf jeder Axe $\frac{K}{\sqrt{\mathcal{F}}}$ ab, in welcher Gleichung K eine zunächst beliebige Constante,



315. Wahl der Haupttaxen als Axen der y und z .

316. Trägheitsradius.

317. Ellipse der Trägheitsmomente.

\mathcal{J} das Trägheitsmoment für die betreffende Axe bedeutet, so erhält man als Endpunkt eines Radius vector etwa den Punkt P (Fig. 98). Alsdann ist:

$$r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}, \quad \cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y \sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}{K} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{z}{r} = \frac{z \sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}{K}.$$

Nach Gleichung 48. ist:

$$\mathcal{J}_{Y_1} = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha = \frac{A y^2 \mathcal{J}_{Y_1}}{K^2} + \frac{B z^2 \mathcal{J}_{Y_1}}{K^2},$$

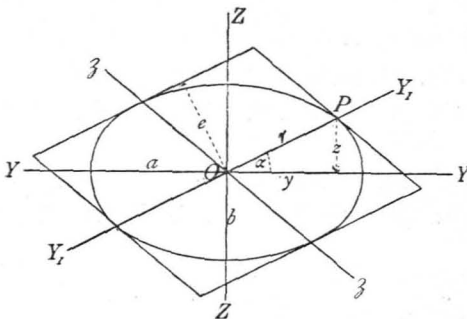
$$K^2 = A y^2 + B z^2 \quad \text{und} \quad 1 = \frac{y^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{B}}\right)^2} \dots \dots \dots 49.$$

Gleichung 49. ist die Gleichung der Curve für die Punkte P ; die Endpunkte der Radii vectores liegen also auf einer Ellipse, deren beide Halbaxen $\frac{K}{\sqrt{A}}$ und $\frac{K}{\sqrt{B}}$ sind; $\frac{K}{\sqrt{A}}$ ist der Radius vector auf der Hauptaxe OY , $\frac{K}{\sqrt{B}}$ derjenige auf der Hauptaxe OZ .

Man nennt diese Ellipse die Ellipse der Trägheitsmomente. Dieselbe kann für jeden beliebigen Punkt der Ebene als Mittelpunkt construirt werden; gehen sämmtliche Axen, wie hier, durch den Schwerpunkt des Querschnittes, so nennt man dieselbe die Centraellipse.

Der Werth für K kann beliebig angenommen werden. Durch passende Wahl dieses Werthes kann man erreichen, daß der normale Abstand einer Schwerpunktsaxe und der zu ersterer parallelen Tangente an die Ellipse gleich dem Trägheitsradius für die betreffende Schwerpunktsaxe, daß also e (Fig. 98) der Trägheitsradius für die Axe $Y_1 Y_1$ ist.

Fig. 98.



Alsdann ist

$$\mathcal{J}_{Y_1} = F e^2.$$

Der für K zu diesem Zwecke zu wählende Werth ergibt sich wie folgt. Zieht man die vier Tangenten, welche dem Durchmesser $Y_1 Y_1$ und dem zugehörigen conjugirten Durchmesser $Z_1 Z_1$ entsprechen, so schließen dieselben bekanntlich eine Fläche ein, welche $= 4 a b$ ist. Diese Fläche ist aber auch $= 4 r e$; daher ist $a b = r e$ und

$$e = \frac{a b}{r}.$$

Nun ist $a = \frac{K}{\sqrt{A}}$, $b = \frac{K}{\sqrt{B}}$, $r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}$, also $e = \frac{K^2 \sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}{K \sqrt{A B}} = K \sqrt{\frac{\mathcal{J}_{Y_1}}{A B}}.$

Soll e gleich dem Trägheitsradius für $Y_1 Y_1$ sein, so muß $F e^2 = \mathcal{J}_{Y_1}$ sein, d. h.

$$\mathcal{J}_{Y_1} = F e^2 = \frac{F K^2 \mathcal{J}_{Y_1}}{A B} \quad \text{oder} \quad 1 = \frac{F K^2}{A B},$$

daher

$$K = \sqrt{\frac{A B}{F}}.$$

Wird also $K = \sqrt{\frac{A B}{F}}$ gewählt, so ist für jede Axe der Trägheitsradius ohne Weiteres durch Ziehen der parallelen Tangente und Abmessen des normalen Abstandes dieser beiden Linien zu ermitteln. Sodann ist a der Trägheitsradius für die Z -Axe, b der Trägheitsradius für die Y -Axe, d. h. $A = F b^2$ und $B = F a^2$.

c) Stäbe, bei denen die Axialkraft nicht gleich Null ist.

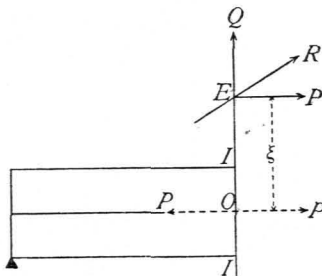
In den bisherigen Untersuchungen wurde die Axialkraft gleich Null angenommen. Wir wollen nun die Annahme machen, daß die Axialkraft den Werth P habe. Alsdann dient zur Ermittlung der axialen Faserfspannung in einer Faser mit der Ordinate z die Gleichung 33. des Art. 296, nämlich:

318.
Neutrale
Axe.

$$N = \frac{P}{F} + \frac{Mz}{\mathcal{F}} \dots \dots \dots 33.$$

Der Entwicklung dieser Formel lag die Annahme zu Grunde, daß die Kraftebene den Querschnitt in einer Symmetriearie (Hauptaxe) schneide. Die Mittelkraft aller an der einen Seite des Querschnitts II (Fig. 99), d. h. aller auf den Querschnitt II wirkenden äußeren Kräfte sei R und schneide die Verlängerung des Querschnittes im Punkte E , im Abstände $OE = \xi$ vom Schwerpunkt O des Querschnittes. Wir zerlegen R im Punkte E in eine Axialkraft P und eine Transversalkraft Q . Das Moment der äußeren Kräfte ist sodann $M = P\xi$. Nach Gleichung 33. ist

Fig. 99.



Wird die Faserfspannung $N = \frac{P}{F} + \frac{P\xi z}{\mathcal{F}} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F\xi z}{\mathcal{F}} \right) \dots \dots \dots 50.$

N wird für alle diejenigen Punkte gleich Null, für welche der Klammerfactor gleich Null wird. Nennt man den speciellen Werth von z , für den dies eintritt, z_0 , so wird $N=0$, wenn $1 + \frac{F\xi z_0}{\mathcal{F}} = 0$ wird, d. h. für

$$z_0 = - \frac{\mathcal{F}}{F\xi} \dots \dots \dots 51.$$

Für alle Punkte, deren Ordinaten den Werth der Gleichung 51. haben, ist $N=0$; die Gleichung 51. ist also die Gleichung der neutralen Axe, doch nur unter der Voraussetzung, daß die Kraftebene den Querschnitt in einer Hauptaxe schneidet.

Aus der Gleichung 51. für die neutrale Axe ergeben sich wichtige Folgerungen:

- 1) Da \mathcal{F} und F stets positive Größen sind, so hat z_0 stets anderes Vorzeichen als ξ . Die sämtlichen Punkte, in denen die Spannung Null stattfindet, liegen also an derjenigen Seite des Schwerpunktes, an welcher der Schnittpunkt mit der Resultierenden R nicht liegt.
- 2) Für eine und dieselbe Lage der Kraft R sind alle Größen auf der rechten Seite der Gleichung constant, also ist auch z_0 constant; es liegen also alle Punkte, in denen N gleich Null ist, in gleichem Abstände von der Y -Axe, d. h. alle diese Punkte liegen in einer Geraden, die parallel ist zu derjenigen Schwerpunktsaxe, welche normal steht zur Schnittlinie des Querschnittes mit der Kraftebene.
- 3) Der Werth für z_0 ist von der Kraftgröße ganz unabhängig; er ist nur von den Werthen \mathcal{F} und F , also von der Querschnittsform und -Größe und von ξ , d. h. von der Lage des Schnittpunktes E abhängig.
- 4) z_0 wird Null, d. h. die neutrale Axe fällt mit der zur Kraftebene normalen Schwerpunktsaxe zusammen, wenn $\xi = \infty$ wird, d. h. wenn die Kraft R den Querschnitt erst in unendlich weiter Ferne schneidet, wenn also R zu dem Querschnitte parallel gerichtet ist. Sodann ist gar keine Axialkraft vorhanden. (Dieses Resultat wurde bereits oben in Art. 297, S. 262 auf anderem Wege gefunden.)

Die Gleichung 51. giebt ein bequemes Verfahren, die Lage der neutralen Axe graphisch zu ermitteln.

319.
Graphische
Ermittlung
der neutralen
Axe.

Befonders einfach gestaltet sich die Aufgabe beim rechteckigen Querschnitt. Hier ist nach Art. 307,

S. 266

$$\mathcal{F} = \frac{b h^3}{12} \text{ und } F = b h.$$

Aus Gleichung 51. folgt, wenn wir zunächst nur die absolute Größe von z_0 bestimmen,

$$z_0 = \frac{b h^3}{12 b h \xi} = \frac{h^2}{12 \xi} \text{ und } z_0 \xi = \frac{h^2}{12} = \frac{h}{6} \cdot \frac{h}{2}.$$

Daraus ergibt sich die nachfolgende Construction (Fig. 100). Man trägt von O aus $OB = \frac{h}{6}$ nach oben; alsdann liegt der Punkt B in der Höhe $\frac{2}{3}h$ über der Unterkante des Querschnittes. Nun schlage man über diesem Abstand einen Halbkreis, welcher die in O zur Z -Axe gezogene Normale in D

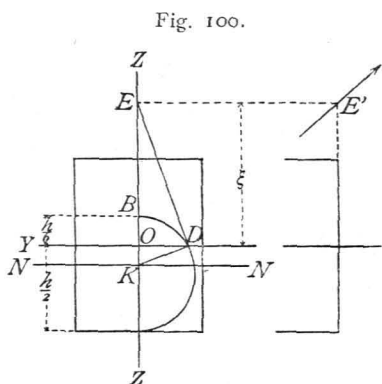


Fig. 100.

schneidet; alsdann ist $\overline{OD}^2 = \frac{h}{6} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^2}{12}$. Man verbinde nun D mit E , ziehe durch D eine Linie DK normal zu DE , so ist $\overline{OD}^2 = \overline{OK} \cdot \overline{OE}$ und

$$\frac{h^2}{12} = \overline{OK} \cdot \xi \text{ oder } \overline{OK} = \frac{h^2}{12\xi} = z_0.$$

K ist also ein Punkt der neutralen Axe, und die durch K parallel zur Y -Axe gelegte Linie NN ergibt die neutrale Axe selbst.

Bei complicirten Querschnitten, die auch ganz unregelmäßig fein können, ist diese Construction, etwas modificirt, ebenfalls anwendbar.

Nach Art. 316, S. 271 ist der Trägheitsradius

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{F}}$$

Demnach ist nach Gleichung 51.

$$z_0 = -\frac{\mathcal{J}}{F\xi} = -\frac{FR^2}{F\xi} = -\frac{R^2}{\xi},$$

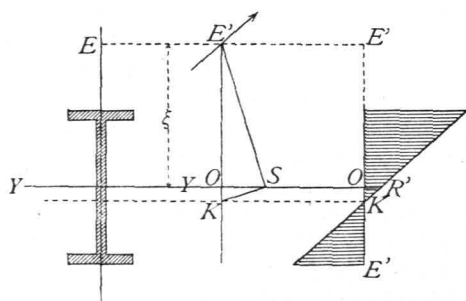
woraus sich folgende Construction (Fig. 101) ergibt.

In O errichte man die Normale zum Querschnitte $OS = R$, verbinde S mit E' , ziehe durch S die Normale SK zu SE' ; alsdann ist $R^2 = \overline{OK} \cdot \overline{OE}' = \overline{OK} \cdot \xi$ oder $OK = \frac{R^2}{\xi}$ (absolute Größe) = z_0 .

320.
Spannungs-
vertheilung.

Die Vertheilung der Spannung über die Querschnittsfläche findet nach dem durch Gleichung 50. $N = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F\xi z}{\mathcal{J}} \right)$ ausgedrückten Gesetze statt; in denselben sind N und z die einzigen Variablen, und beide kommen nur in der ersten Potenz vor. Daraus folgt, dass die Spannung sich nach dem Gesetze einer Geraden ändert. Ein Punkt dieser Geraden ist bereits gefunden, nämlich derjenige Punkt, in welchem die Gerade die Abscissenaxe schneidet, d. h. wo die Spannung gleich Null ist, nämlich der Punkt K (Fig. 101).

Fig. 101.



Gelingt es noch einen Punkt der Geraden zu finden, so erhält man durch Verbindung dieses Punktes mit dem Nullpunkt K die gesuchte Gerade. Für $z = 0$ ist

$$N_0 = \frac{P}{F},$$

d. h. in den Fasern, welche in der zur Kraftebene normalen Schwerpunktsaxe liegen, ist die Spannung eben so groß, als wenn nur die Axialkraft P wirkte. Diese Größe $\frac{P}{F}$

ist leicht zu ermitteln.

Man bestimme $\frac{P}{F}$ und trage (Fig. 101) den gefundenen Werth für die Abscisse

$z = 0$, d. h. im Schwerpunkt nach beliebigem Maßstabe auf, mache also $OR' = \frac{P}{F}$,

verbinde R' mit K ; alsdann ist diese Verbindungslinie die gefuchte Gerade. Die Ordinaten dieser Geraden geben, auf dem angenommenen Maßstabe gemessen, die pro Flächeneinheit in den einzelnen Faserschichten wirkenden Spannungen an. Die von der erwähnten Geraden und der Abscissenaxe $E' E'$ eingeschlossene (in Fig. 101 schraffierte) Fläche nennt man wohl auch die Druckfigur.

Die vorstehend angegebenen Constructions werden mit Nutzen angewendet, um die Druckvertheilung in den Gewölbefugen und in den Querschnitten der Stützmauern, so wie an den Bodenflächen der letzteren zu ermitteln.

321.
Druck-
vertheilung
in Gewölben u.
Stützmauern.

Als Dimension normal zur Bildfläche wählt man die Einheit (gewöhnlich 1 m), so daß die gedrückte Fläche — der Querschnitt — (Fig. 102 u. 103) ein Rechteck von der Breite (normal zur Bildfläche) gleich der Einheit ist. Die zweite Dimension des Rechtecks ist bei den Gewölben (Fig. 102) die Gewölbstärke d an der betreffenden Stelle, bei den Stützmauern die Mauerstärke d (Fig. 103). Man nimmt nun an, daß das obige Gesetz der Druckvertheilung auch hier giltig sei, welche Annahme gemacht werden kann, so lange keine Zugspannungen im Querschnitt vorkommen. Die auf den Querschnitt wirkende Resultirende zerlegt sich in die Axialkraft P und die Transversalkraft Q ,

Fig. 102.

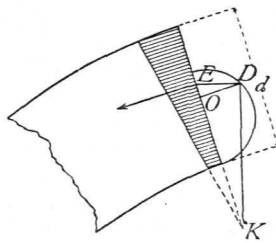
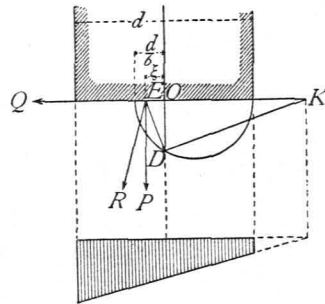


Fig. 103.



welche letztere keine Axialspannungen erzeugt. Nun kann ohne Weiteres obige Construction angewendet werden, was in Fig. 102 und 103 für einen Gewölbe- und einen Stützmauerquerschnitt geschehen ist.

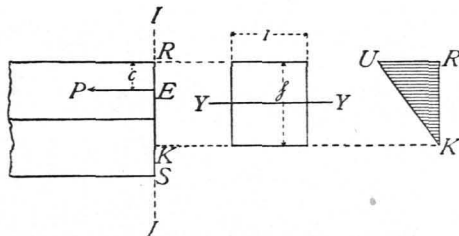
Wie bereits bemerkt, ist diese Construction bei denjenigen Materialien, welche keinen Zug ertragen können, nur richtig, falls in keiner Faser des Querschnittes Zugspannungen sich ergeben, bei den Gewölben aber stets nur näherungsweise richtig, weil die Voraussetzung der geraden Axe nicht erfüllt ist.

Im Anschluß an das Vorstehende soll gezeigt werden, wie sich die Spannungsvertheilung ergibt, falls die neutrale Axe in die Querschnittsfläche fällt und die Fasern nur Druckspannungen aufnehmen können. Die hier in Betracht kommenden Querschnitte sind nur rechteckige, weshalb nur diese Form berücksichtigt wird.

322.
Druck-
vertheilung in
Querschnitten,
welche nur
Druck auf-
nehmen können.

Die Kraft P (Fig. 104) schneide die Symmetrieaxe des Querschnittes im Abstände c von der äußersten Faser R ; die zugehörige neutrale Axe liege in K . Es ist zunächst K zu ermitteln. Die bisherigen Constructions sind hier nicht giltig, weil bei Auffuchung der betreffenden Ausdrücke für N und z_0 in den Fasern zwischen K und S Zugspannungen angenommen waren, die hier nicht existiren. Denn, da die Fasern nur Druckspannungen aufnehmen können, wird in allen denjenigen Fasern, in welchen Zug entstehen würde, ein Klaffen der Fugen, oder ein indifferentes Aneinanderliegen der Berührungsflächen stattfinden. Eine Spannungsübertragung existirt nur in dem gedrückten Theile der Querschnittsfläche, dessen Höhe $= h$ sei.

Fig. 104.



Dessen ungeachtet kann man die Gleichung 33. (S. 261 u. 273):

$$N = \frac{P}{F} + \frac{Mz}{\mathcal{F}}$$

anwenden, wenn jetzt unter F der Theil der Querschnittsfläche, auf welchem Druckübertragung stattfindet, und unter \mathcal{F} das Trägheitsmoment dieses Theils der Querschnittsfläche für die im Schwerpunkt desselben normal zur Kraftebene errichtete Axe YY verstanden wird. Wird die Dimension normal zur Bildfläche gleich der Einheit gesetzt, so ist

$$F = \eta \cdot 1 \quad \text{und} \quad \mathcal{F} = \frac{1 \cdot \eta^3}{12}.$$

M ist hier das Moment, bezogen auf die erwähnte Schwerpunktsaxe YY , d. h.

$$M = P \left(\frac{\eta}{2} - c \right) \dots \dots \dots 52.$$

Es ist also die Spannung in einer Fafer mit der Ordinate z

$$N = \frac{P}{F} \left[1 + \frac{F \left(\frac{\eta}{2} - c \right) z}{\mathcal{F}} \right] = \frac{P}{\eta} \left[1 + \frac{12 z \left(\frac{\eta}{2} - c \right)}{\eta^2} \right] \dots \dots 53.$$

N wird im Punkte K , d. h. für $z = -\frac{\eta}{2}$, gleich Null; es ist demnach

$$0 = \frac{P}{\eta} \left[1 - \frac{12 \eta \left(\frac{\eta}{2} - c \right)}{2 \eta^2} \right].$$

Diese Gleichung dient zur Ermittlung des Werthes für η ; denn es ist

$$0 = 1 - \frac{6 \left(\frac{\eta}{2} - c \right)}{\eta} = \eta - 3 \eta + 6c, \quad \text{woraus} \quad \eta = 3c \quad \dots \dots 54.$$

Die Druckvertheilung findet also auf eine Fläche statt, welche dreimal so breit ist, wie der Abstand des Schnittpunktes E von der nächsten Kante.

Die Druckbeanspruchung in irgend einer Fafer mit der Ordinate z ist demnach

$$N = \frac{P}{3c} \left[1 + \frac{12z}{9c^2} \right] = \frac{P}{9c^2} (3c + 2z) \dots \dots \dots 55.$$

N_{max} findet statt, wenn z seinen größten Werth $= +\frac{\eta}{2} = \frac{3c}{2}$, N_{min} dagegen, wenn z seinen kleinsten Werth $= -\frac{\eta}{2} = -\frac{3c}{2}$ hat; es ist also

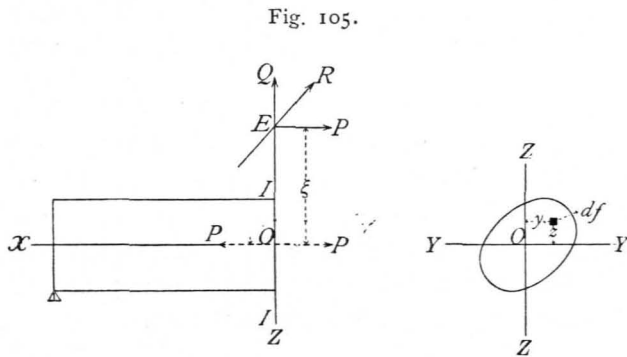
$$N_{max} = \frac{2P}{3c} \quad \text{und} \quad N_{min} = \frac{P}{9c^2} (3c - 3c) = 0 \quad \dots \dots \dots 56.$$

Wenn sich der Druck P gleichförmig über die ganze gedrückte Fläche $F = \eta = 3c$ vertheilen würde, so wäre der Druck pro Flächeneinheit der Fläche gleich $\frac{P}{3c}$; der wirklich stattfindende Maximaldruck ist $= \frac{2P}{3c}$, d. h. doppelt so groß, als wenn P sich gleichförmig vertheilte. Die Druckfigur wird also erhalten, indem man zunächst (Fig. 104) $RE = c$ dreimal von R aus abträgt, wodurch man den Nullpunkt K findet; alsdann trägt man in R nach beliebigem Maßstabe

$N_{max} = \frac{2P}{3c} = RU$ auf und verbindet U mit K . Die schraffierte Fläche giebt die Druckfigur.

In Art. 296, S. 261 war durch Gleichung 33. die axiale Faserfpannung nur für den Fall ermittelt, daß die Kraftebene alle Querschnitte des Balkens in zwei symmetrische Hälften theilte. Es soll nunmehr für den allgemeinen Fall des nicht symmetrischen Querschnittes und beliebiger äußerer Kräfte der Ausdruck für die axiale Faserfpannung ermittelt werden.

Auf das Balkenfragment links vom Schnitte II (Fig. 105), für welches die Werthe von N ermittelt werden sollen, wirke als Resultirende aller äußerer Kräfte R . Wir zerlegen die Kraft R im Punkte E , wo sie die Verlängerung des Querschnittes schneidet, in eine Axialkraft P und in eine Transversalkraft Q , bringen im Schwerpunkte O des Querschnittes II zwei einander gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte P an und erhalten als Wirkung der äußerer Kräfte auf den Querschnitt II eine Transversalkraft Q im Querschnitte II , ein Moment $P\xi$, welches gleich dem statischen Momente der äußerer Kräfte, bezogen auf den Punkt O ist, und eine Axialkraft P , im Punkte O wirksam.



323.
Axiale
Faserfpannung.

Das Fragment links von II ist unter der Einwirkung dieser äußerer Kräfte und der auf dasselbe wirkenden inneren Kräfte oder Spannungen im Querschnitt II im Gleichgewicht; werden also im Querschnitt II die Spannungen angebracht, so können wir auf das Ganze die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (siehe Art. 255, S. 232) anwenden. Jede Spannung hat eine horizontale Componente, die genau genug als axiale Componente eingeführt wird, und eine verticale Componente. Die ersteren bilden die axialen Faserfpannungen N .

Durch den Schwerpunkt des Querschnittes werden wiederum drei Coordinatenachsen gelegt: die X -Axe, welche mit der Tangente an die deformirte Stabaxe an dieser Stelle, die Z -Axe, welche mit der Durchschnittslinie der Kraftebene und der Querschnittsebene zusammenfällt, und die Y -Axe, welche zur X - und Z -Axe normal steht. Es lassen sich nunmehr die drei gedachten Gleichgewichtsbedingungen für den vorliegenden Fall aufstellen.

1) Die algebraische Summe der in die Axenrichtung fallenden Componenten muß gleich Null sein, d. h.

$$0 = P - \int N df.$$

2) Die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte bezogen auf die Axe OY muß gleich Null sein. Das Moment der äußerer Kräfte in Bezug auf die Axe OY , welche sich in der Ebene ZX im Punkte O projectirt, ist $M = P\xi$; das statische Moment einer im Abstände z von der Axe OY wirken-

den Faserspannung $N df$ ist gleich $N z df$; folglich die Summe aller Momente der Faserspannungen gleich $\int N z df$ und

$$0 = M - \int N z df \quad \text{oder} \quad M = \int N z df.$$

Das negative Vorzeichen ist für das Moment der Faserspannungen gewählt, weil Gleichgewicht nur möglich ist, wenn beide Momente entgegengesetztes Vorzeichen, also entgegengesetzte Drehrichtung haben.

3) Die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte bezogen auf die ZZ -Axe muß gleich Null sein. In Bezug auf diese Axe haben die äußeren Kräfte kein Moment, weil diese Axe in der Ebene der äußeren Kräfte liegt, dieselben also für diese Axe den Hebelsarm Null haben. Die Faserspannung $N df$ hat in Bezug auf die Axe ZZ das Moment $N df y$; folglich muß

$$0 = \int N y df$$

sein. Die Integration ist über den ganzen Querschnitt auszudehnen.

Durch die Faserspannungen entstehen Längenänderungen, welche wir als der ersten Potenz von y und z proportional annehmen können, d. h. wir können, wenn dx den ursprünglichen Abstand zweier Querschnitte vor der Deformation, Δdx die bei der Deformation erzeugte Aenderung des Abstandes in einer Fafer mit den Coordinaten y und z bezeichnet, setzen:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \alpha + \beta y + \gamma z,$$

worin α , β und γ vorläufig unbekannte Constante sind.

Nach Art. 279, S. 246 ist $\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N}{E}$, demnach

$$N = E \alpha + E \beta y + E \gamma z = a + b y + c z,$$

wenn a , b und c noch zu bestimmende Constante sind. Zur Bestimmung der letzteren dienen die aufgestellten drei Bedingungsgleichungen. Wird der Werth für N in diese Gleichungen eingesetzt, so ergibt sich, da a , b und c für die Integration constant sind,

$$P = a \int df + b \int y df + c \int z df,$$

$$M = a \int z df + b \int y z df + c \int z^2 df,$$

$$0 = a \int y df + b \int y^2 df + c \int y z df.$$

$\int y z df$ ist identisch mit dem in Art. 313, S. 269 gefundenen Ausdruck $\int y z df = H$; ferner ist $\int z^2 df = \mathcal{F}$ und $\int y^2 df = \mathcal{F}_1$. Da ferner der Anfangspunkt der Coordinatenaxen im Schwerpunkt liegt, so ist nach der Schwerpunktslehre $\int z df = 0$ und $\int y df = 0$.

Bezeichnet man endlich $\int df = F$, so ist

$$P = a F, \quad M = b H + c \mathcal{F} \quad \text{und} \quad 0 = b \mathcal{F}_1 + c H.$$

Daraus ergeben sich für a , b und c folgende Werthe:

$$a = \frac{P}{F}, \quad b = \frac{HM}{H^2 - \mathcal{F}\mathcal{F}_1} \quad \text{und} \quad c = \frac{\mathcal{F}_1 M}{\mathcal{F}\mathcal{F}_1 - H^2}$$

und demnach

$$N = \frac{P}{F} + \frac{HM y}{H^2 - \mathcal{F}\mathcal{F}_1} + \frac{\mathcal{F}_1 M z}{\mathcal{F}\mathcal{F}_1 - H^2} = \frac{P}{F} + \frac{M(\mathcal{F}_1 z - Hy)}{\mathcal{F}\mathcal{F}_1 - H^2} \quad \dots \quad 57.$$

Bei der in Fig. 105 gezeichneten Richtung und Lage der äusseren Kräfte ist die Axialkraft P im Punkte O ein Druck; auch erzeugt das Moment M für sich allein in den Fasern oberhalb YY Druck. Es werden also hier, wenn die Z -Richtung nach oben als die positive eingeführt wird, die positiven Werthe von N Druck, die negativen Werthe Zug bedeuten; umgekehrt wäre es bei der entgegengesetzten Richtung der Kraft R . Bei Anwendung der Gleichung 57. ist also Vorzicht nöthig.

Wenn die Kraftebene den Querschnitt in einer Symmetrieaxe schneidet, also die Z -Axe eine Symmetrieaxe ist, so ist nach Art. 314 (S. 270) $H = 0$, demnach

$$N = \frac{P}{F} + \frac{Mz}{\mathcal{F}} \quad \dots \quad 58.$$

Diese Gleichung stimmt mit der unter den gleichen Annahmen in Art. 296, S. 261 entwickelten Gleichung 33. überein.

Die in den Art. 318 u. 319, S. 273 u. 274 für die neutrale Axe gefundenen Resultate gelten nur für den Fall, dass die Kraftebene den Querschnitt in einer Hauptaxe schneidet. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so ist die Spannung in irgend einer Faser mit den Coordinaten y und z nach Gleichung 57. zu ermitteln.

324.
Allg. Gleichung
der neutralen
Axe.

Bei der Entwicklung dieser Gleichung war als Z -Axe die Linie gewählt, in welcher die Kraftebene den Querschnitt schneidet, als Axe der Y die im Schwerpunkt des Querschnittes normal zur Z -Axe gezogene Axe. Nun ist $M = P\xi$, demnach

$$N = \frac{P}{F} + P\xi \frac{\mathcal{F}_1 z - Hy}{\mathcal{F}\mathcal{F}_1 - H^2} = \frac{P}{F} \left[1 + \frac{F\xi(\mathcal{F}_1 z - Hy)}{\mathcal{F}\mathcal{F}_1 - H^2} \right] \quad \dots \quad 59.$$

Es empfiehlt sich, die beiden durch den Schwerpunkt des Querschnittes gelegten Hauptaxen als Coordinatenachsen zu wählen; dieselben mögen die U - und V -Axe der Fig. 106 sein und mit den beiden Axen der Y und Z bzw. den Winkel α einschliessen.

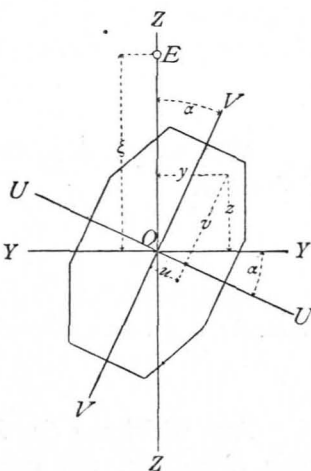
Um den Ausdruck für N auf die neuen Axen bezogen zu erhalten, hat man die Werthe von \mathcal{F} , \mathcal{F}_1 und H durch α und die Trägheitsmomente für die Hauptaxen, ferner die Coordinaten y und z durch u , v und α auszudrücken. Das Trägheitsmoment für die U -Axe sei A , dasjenige für die V -Axe sei B ; alsdann ist nach den Gleichungen 48. des Art. 315, S. 271

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_Y &= A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha = \mathcal{F}, \\ \mathcal{F}_Z &= A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha = \mathcal{F}_1, \\ H &= (A - B) \sin \alpha \cos \alpha; \end{aligned}$$

ferner nach Figur 106:

$$z = v \cos \alpha - u \sin \alpha \quad \text{und} \quad y = u \cos \alpha + v \sin \alpha.$$

Fig. 106.



Setzt man die eben gefundenen Werthe für \mathcal{F} , \mathcal{F}_1 , H , z und y in den Ausdruck für N (Gleichung 59.), so ist

$$N = \frac{P}{F} \left[1 + F\xi \left(\frac{(A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha) (v \cos \alpha - u \sin \alpha) - (A - B) \sin \alpha \cos \alpha (u \cos \alpha + v \sin \alpha)}{(A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha) (A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha) - (A - B)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \right) \right].$$

Die Ausführung der Multiplication ergibt

$$N = \frac{P}{F} \left[1 + \frac{F\xi}{AB} (Bv \cos \alpha - Au \sin \alpha) \right] \dots \dots \dots 60.$$

Dies ist der allgemeinste Ausdruck für die axialen Faserstressungen; darin bezeichnet α den Winkel, welchen die Durchschnittslinie der Kraftebene und der Querschnittsebene mit der V -Axe bildet, und ξ den Abstand des Durchschnittspunktes der Resultirenden R mit der Querschnittsebene vom Schwerpunkt O des Querschnittes.

Für dieselbe Lage der Resultirenden P sind ξ und α constant, also N nur mit v und u variabel.

Falls $P = 0$ ist, ergibt sich aus Gleichung 60. für N , weil sodann $\xi = \infty$ ist, der unbestimmte Ausdruck $N = 0 \cdot \infty$. In diesem Falle führt man für $P\xi$ wieder M ein und hat:

$$N = \frac{P}{F} + \frac{M}{AB} (Bv \cos \alpha - Au \sin \alpha).$$

Für $P = 0$ ist sodann

$$N = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} - \frac{u \sin \alpha}{B} \right) \dots \dots \dots 60_a.$$

Alle Punkte des Querschnittes, in denen eine gleiche axiale Faserstressung, etwa C , stattfindet, genügen der Gleichung:

$$C = \frac{P}{F} \left[1 + \frac{F\xi}{AB} (Bv \cos \alpha - Au \sin \alpha) \right], \dots \dots \dots 61.$$

liegen also auf einer Geraden, weil die einzigen Variablen v und u nur in der ersten Potenz vorkommen. Die Auflösung der Gleichung für C nach v ergibt

$$v = \frac{A}{B} u \operatorname{tg} \alpha + \frac{(CF - P)A}{PF\xi \cos \alpha} \dots \dots \dots 62.$$

Die sämtlichen Punkte, in denen die axiale Faserstressung, also die Gröfse C gleich Null wird, liegen demnach gleichfalls auf einer Geraden, deren Gleichung erhalten wird, wenn in Gleichung 62. $C = 0$ gesetzt wird. Man erhält alsdann die Gleichung der neutralen Axe:

$$v = \frac{A}{B} u \operatorname{tg} \alpha - \frac{A}{F\xi \cos \alpha} \dots \dots \dots 63.$$

Wir nennen den Winkel, welchen die Neutrale mit der U -Axe einschließt, φ ; alsdann ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots 64.$$

Bezeichnen wir ferner den Abstand desjenigen Punktes, in welchem die Neutrale die V -Axe schneidet, mit d , so ist:

$$d = -\frac{A}{F\xi \cos \alpha} \dots \dots \dots 65.$$

Aus Gleichung 62. folgt, daß die Gerade, welche alle Punkte mit der Spannung C enthält, mit der Axe einen Winkel bildet, dessen Tangente gleichfalls

$= \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha$ ist; diese Linie ist also parallel zu der neutralen Axe. Daraus folgt der Satz: Alle Querschnittspunkte, in denen gleiche axiale Faserfspannung stattfindet, liegen auf Geraden, welche zur neutralen Axe parallel sind.

Gleichung 64. giebt ein bequemes Mittel, die Lage der neutralen Axe zu construiren. Zeichnet man für den betreffenden Querschnitt die Ellipse der Trägheitsmomente (Fig. 107; siehe Art. 317, S. 271), so sind die beiden Halbaxen bezw.

$$\frac{K}{\sqrt{A}} = a \quad \text{und} \quad \frac{K}{\sqrt{B}} = b.$$

Die Gleichung der Ellipse ist bekanntlich $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, und die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die geometrische Tangente an die Ellipse in einem Punkte mit den Coordinaten u und v mit der U -Axe einschließt, ist

$$\frac{dv}{du} = - \frac{u b^2}{v a^2}.$$

Die Coordinaten des Punktes D seien $-u_1$ und v_1 ; alsdann ist für die Tangente in diesem Punkte:

$$\frac{dv}{du} = \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2 u_1}{a^2 v_1} = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Aus den oben stehenden Gleichungen für a und b folgt

$$A = \frac{K^2}{a^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{K^2}{b^2};$$

sonach ist nach Gleichung 64. für den Winkel φ , den die neutrale Axe mit der U -Axe einschließt,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta. \quad \dots \dots \dots 66.$$

Die neutrale Axe ist sonach parallel zu der Tangente, welche in demjenigen Punkte an die Ellipse der Trägheitsmomente gelegt wird, in welchem die Schnittlinie der Kräfteebene und des Querschnittes die Ellipse schneidet. Die neutrale Axe ist also parallel zur Tangente in D .

Um die Lage der Neutralen zu finden, ist d nach Gleichung 65. zu ermitteln. Bequemer ist es, den normalen Abstand der Neutralen von dem Schwerpunkte, d. h. c einzuführen. Es ist

$$c = d \cos \varphi = - \frac{A}{F \xi \cos \alpha} \cos \varphi.$$

Ist die Trägheitsellipse so construirt, daß $K = \sqrt{\frac{AB}{F}}$ ist (siehe Art. 317, S. 272), also nach Früherem $A = F b^2$ ist, so ergibt sich

$$c = - \frac{b^2 \cos \varphi}{\xi \cos \alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{c}{b \cos \varphi} = - \frac{b}{\xi \cos \alpha} \quad \dots \dots \dots 66a.$$

Diese Gleichung führt zu folgender Construction der Strecke c . Durch den Angriffspunkt E der Mittelkraft ziehe man die Linie $E E_1$ parallel zu $U U$, ferner durch C eine Linie parallel zu der Richtung der neutralen Axe und falle von O die Normale $O H$ auf diese Linie. Alsdann ist $O E_1 = \xi \cos \alpha$ und $O H = b \cos \varphi$.

Man verbinde nun H mit E_1 , ziehe durch C die Linie $C L$ parallel zu $E_1 H$; alsdann ist

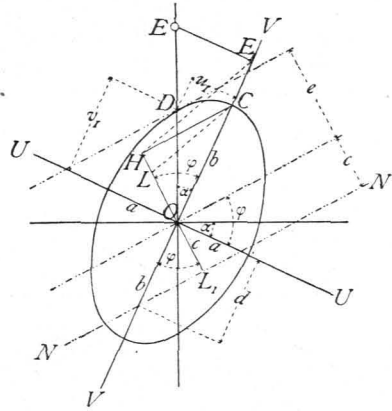
$$\frac{O L}{O H} = \frac{O C}{O E_1} \quad \text{oder} \quad \frac{O L}{b \cos \varphi} = \frac{b}{\xi \cos \alpha}; \quad \text{sonach} \quad O L = c.$$

Macht man nunmehr $O L_1 = O L$, so ist L_1 ein Punkt der neutralen Axe und die Gerade $N N$ die neutrale Axe selbst.

Eine andere Construction der Neutralen ergibt sich wie folgt. Es ist $F e^2 = A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi = F b^2 \cos^2 \varphi + F a^2 \sin^2 \varphi$, sonach

$$e^2 = b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi = b^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) = b^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi \right).$$

Fig. 107.



Nach Gleichung 66. ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha, \text{ f\u00f6r } \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \frac{a^2}{b^2}, \text{ daher}$$

$$e^2 = b^2 \cos^2 \varphi (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi) = b^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi}{\cos \alpha \cos \varphi} \right) = \frac{b^2 \cos \varphi}{\cos \alpha} \cos(\varphi - \alpha).$$

Aus Gleichung 66a. ist

$$\frac{b^2 \cos \varphi}{\cos \alpha} = -c \xi, \text{ also } e^2 = -c \xi \cos(\varphi - \alpha),$$

d. h. e ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen c und $\xi \cos(\varphi - \alpha)$ (vergl. Fig. 108).

Man lege durch E eine Linie parallel der neutralen Axe; alsdann ist $\sphericalangle COE = \varphi - \alpha$ und $CO = \xi \cos(\varphi - \alpha)$, ferner $OH = e$.

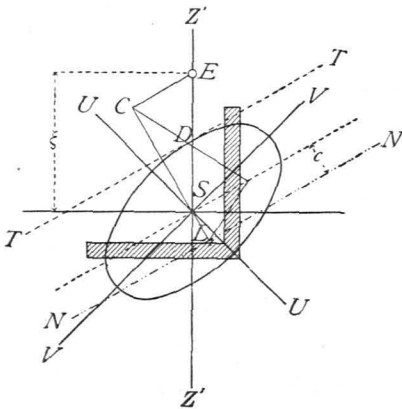
Man mache nun auf der Axe OX_1 $OH' = OH = e$, ziehe CH' und durch H' die Normale $H'L'$ zu CH' . Alsdann ist $OL' = -c$; denn es ist $\overline{OH'^2} = \overline{CO} \cdot \overline{OL'}$, daher $e^2 = \xi \cos(\varphi - \alpha) \overline{OL'}$ und $OL' = \frac{e^2}{\xi \cos(\varphi - \alpha)} = -c$.

Die durch L_1 parallel der Axe $X_1 X_1$ gezogene Linie ist die neutrale Axe.

F\u00e4llt der Punkt E in die Hauptaxe VV , ist es etwa E'' , so giebt die Axe UU die Richtung der neutralen Axe; alsdann ist auf OU $OC''' = b$ abzutragen, ferner $E''C'''$ und durch C''' eine Normale zu $E''C'''$ zu ziehen, welche VV in L''' schneidet. L''' ist ein Punkt der neutralen Axe. Diese Construction ist oben bereits angegeben worden.

Beispiel. Es sei die neutrale Axe f\u00fcr ein gleichschenkeliges Winkeleisen (Fig. 109) von 10 cm Schenkell\u00e4nge und 10 mm Schenkelf\u00e4rke zu ermitteln. Die Belastungen wirken normal zur Richtung des einen Schenkels; der Schwerpunkt S sei bekannt; die Kraftebene schneide den Querschnitt in der Linie $Z'Z'$.

Fig. 109.



Die eine Hauptaxe UU theilt den Querschnitt symmetrisch, die zweite VV steht in S normal zur ersten. Es ist zun\u00e4chst die Centralellipse zu construieren. Es ist $F = 19,2$, $A = \mathcal{J}_U = 287$ und $B = \mathcal{J}_V = 73$; daher

$$b = \sqrt{\frac{A}{F}} = \sqrt{\frac{287}{19,2}} = 3,87 \text{ und}$$

$$a = \sqrt{\frac{B}{F}} = \sqrt{\frac{73}{19,2}} = 1,95.$$

Die Z -Axe schneidet die Centralellipse in D ; die neutrale Axe ist also nach Art. 324, S. 281 parallel der durch D an die Ellipse gelegten Tangente TT .

Es w\u00e4re noch c zu ermitteln. Die angegebene Construction ergibt $SL_1 = c$.

Die Gleichungen 61. bis 64. ergeben f\u00fcr die neutrale Axe noch folgende Resultate:

1) F\u00fcr $\alpha = 0$ f\u00e4llt der Punkt E in die V -Axe, schneidet also die Kraftebene den Querschnitt in einer Hauptaxe. Alsdann ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha = 0, \text{ daher } \varphi = 0,$$

d. h. die neutrale Axe ist parallel zur U -Axe¹⁶⁰⁾. Es ist nunmehr

¹⁶⁰⁾ Der Beweis hierf\u00fcr wurde in Art. 318, S. 273 auf anderem Wege gefunden.

$$d = -\frac{A}{F\xi} = -\frac{Fb^2}{F\xi} = -\frac{b^2}{\xi} \text{ (61)}$$

Für $\xi = \infty$ ist die Resultierende dem Querschnitt parallel und sodann $d = 0$, d. h. die neutrale Axe geht durch den Schwerpunkt.

- 2) d und c liegen stets an derjenigen Seite des Schwerpunktes, an welcher E nicht liegt.
- 3) Für $\alpha = 90$ Grad, d. h. für die Lage des Punktes E auf der U -Axe, ist $\text{tg } \varphi = \infty$, $\varphi = 90$ Grad, d. h. die neutrale Axe ist parallel zur V -Axe. Alsdann ist $d = -\frac{A}{F\xi_0} = -\infty$, d. h.

der Schnittpunkt der neutralen Axe mit der V -Axe liegt in unendlicher Entfernung, oder, was das Gleiche ist, diese beiden Axen sind einander parallel, was eben auch auf anderem Wege gefunden worden ist.

Beispiel. Wenden wir obige Sätze auf die Dachpfette in Fig. 110 an, so ist die Belastung vertical, also auch die Schnittlinie der Kräfteebene mit der Querschnittsebene eine Verticale; dieselbe bildet mit der Hauptaxe VV den Winkel α . Die Axialkraft P sei Null, das Moment für den zu betrachtenden Querschnitt M . Alsdann ist nach Gleichung 60,

$$N = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} - \frac{u \sin \alpha}{B} \right) \dots \dots \dots 67.$$

Diese Gleichung kann auch folgender Maßen abgeleitet werden. Durch den Schwerpunkt O des Querschnittes sind drei Coordinatenachsen gelegt: die U - und V -Axe, welche mit den Hauptaxen zusammenfallen, die X -Axe, welche normal zur Querschnittsebene, hier horizontal ist. Das in der Verticalebene wirkende Moment M kann man in zwei Seitenmomente zerlegen, deren eines $M \cos \alpha$ in der VXV -Ebene, deren anderes $-M \sin \alpha$ in der UXU -Ebene wirkt. Die Ebenen dieser beiden Seitenmomente schneiden den Querschnitt in Hauptaxen; jedes einzelne erzeugt also in den einzelnen Fasern Spannungen, welche nach Gleichung 34. zu berechnen sind. In der Faser mit den Coordinaten u und v entstehen nach Gleichung 34. durch das Moment $M \cos \alpha$ allein die Spannungen

$$N_1 = \frac{M v \cos \alpha}{\mathcal{F}_U} = \frac{M v \cos \alpha}{A},$$

durch das Moment $-M \sin \alpha$ allein

$$N_2 = -\frac{M u \sin \alpha}{\mathcal{F}_V} = -\frac{u M \sin \alpha}{B}.$$

Zusammen genommen wirkt also, da beide Momente gleichzeitig vorhanden sind, in einer Faser mit den Coordinaten u und v eine Spannung (wie oben):

$$N = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} - \frac{u \sin \alpha}{B} \right) \dots \dots \dots 67.$$

Über die Form des Querschnittes sind bislang noch keine Annahmen gemacht worden.

N wird gleich Null für $0 = \frac{v \cos \alpha}{A} - \frac{u \sin \alpha}{B}$, folglich

$$v = \frac{A}{B} u \text{ tg } \alpha \dots \dots \dots 68.$$

* Dies ist die Gleichung der neutralen Axe, und zwar die Gleichung einer Geraden.

Für $u = 0$ ist $v = 0$; die neutrale Axe geht also durch den Anfangspunkt der Coordinatenachsen, d. i. durch den Schwerpunkt.

Für die weiteren Untersuchungen ist eine bestimmte Querschnittsform zu Grunde zu legen.

1) Für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 110) ist nach Art. 307, S. 266

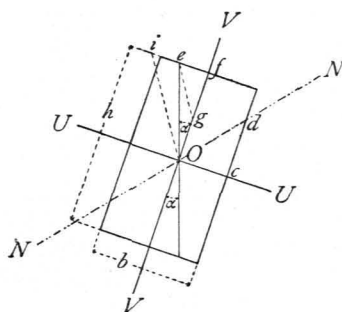
$$A = \frac{b h^3}{12} \text{ und } B = \frac{b^3 h}{12},$$

$$\text{folglich } N = 12 M \left(\frac{v \cos \alpha}{b h^3} - \frac{u \sin \alpha}{h b^3} \right) = \frac{12 M}{b h} \left(\frac{v \cos \alpha}{h^2} - \frac{u \sin \alpha}{b^2} \right).$$

N hat seine größten Werthe

$$\text{für } u = -\frac{b}{2}, v = +\frac{h}{2} \text{ und für } u = +\frac{b}{2}, v = -\frac{h}{2}.$$

Fig. 110.



161) Der Beweis hierfür wurde in Art. 319, S. 274 auf anderem Wege gefunden.

Für die ersten Werthe ist :

$$N_{max} = \frac{12 M}{b h^3} \left(\frac{h \cos \alpha}{2 h^2} + \frac{b \sin \alpha}{2 b^2} \right) = \frac{6 M}{b^2 h^2} (b \cos \alpha + h \sin \alpha) \dots 69a.$$

Eben so ergibt sich

$$N_{min} = - \frac{6 M}{b^2 h^2} (b \cos \alpha + h \sin \alpha) \dots 69b.$$

Bei der gewöhnlichen Drehrichtung der Momente, welche mit derjenigen der Fig. 105 übereinstimmt, würde, wenn die u , bezw. v nach rechts, bezw. nach oben als positiv eingeführt werden, N_{max} der größte Druck und N_{min} der größte Zug sein.

Die Gleichung der neutralen Axe wird hier (siehe Gleichung 68.)

$$v = \frac{b h^3}{h b^3} u \operatorname{tg} \alpha = \frac{h^2}{b^2} u \operatorname{tg} \alpha \dots 70.$$

Da die neutrale Axe durch O geht, so genügt für die Construction derselben die Auffuchung eines ihrer Punkte. Für $u = \frac{b}{2}$ ist $v_1 = \frac{h^2}{2 b} \operatorname{tg} \alpha$. Trägt man also v_1 als Ordinate für $u = \frac{b}{2}$ ab, d. h. macht man $cd = v_1$, so ist d ein Punkt der neutralen Axe, und Od giebt die neutrale Axe selbst.

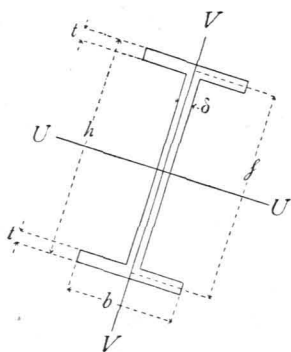
v_1 ist leicht wie folgt zu construiren. Von f aus trage man auf der V -Axe $fg = \frac{b}{2}$ ab, ziehe eg und durch O eine Linie parallel zu eg , so erhält man $fi = v_1$; denn es ist $ef = \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha$ und

$$\frac{ef}{\frac{b}{2}} = \frac{if}{\frac{h}{2}}, \text{ fonach } if = \frac{\frac{h}{2}}{\frac{b}{2}} ef; \text{ hieraus folgt } if = \frac{h^2 \operatorname{tg} \alpha}{2 b} = v_1.$$

Für die Berechnung von Pfetten mit rechteckigem Querschnitt ist fonach Gleichung 69a., bezw. 69b. zu Grunde zu legen.

2) Auch beim I-förmigen Querschnitt (Fig. 111) findet N_{max} für $u = -\frac{b}{2}$, $v = +\frac{h}{2}$ und N_{min} für $u = \frac{b}{2}$, $v = -\frac{h}{2}$ statt, weil für diese correspondirenden Werthe die Variablen u und v in

Fig. 111.



der Gleichung für N gleichzeitig ihren größten Werth haben.

Demnach ist nach Gleichung 67:

$$N_{max} = M \left(\frac{h \cos \alpha}{2 A} + \frac{b \sin \alpha}{2 B} \right) \text{ und}$$

$$N_{min} = - M \left(\frac{h \cos \alpha}{2 A} + \frac{b \sin \alpha}{2 B} \right) \dots 71.$$

Angenähert ist, wenn $f = b t$, nach Gleichung 44.

$$A = \left(f + \frac{\delta h}{6} \right) \frac{h^2}{2} \text{ und } B = \frac{t b^3}{6} = \frac{f b^2}{6},$$

fonach

$$N_{max} = M \left[\frac{h \cos \alpha}{\left(f + \frac{\delta h}{6} \right) h^2} + \frac{3 \sin \alpha}{f b} \right].$$

Wird im ersten Summanden des Klammerfactors $\frac{\delta h}{6}$ vernachlässigt und h^2 statt h^2 geschrieben, so wird:

$$N_{max} = M \left(\frac{\cos \alpha}{f h} + \frac{3 \sin \alpha}{f b} \right) \text{ und}$$

$$N_{min} = \pm \frac{M}{f} \left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{3 \sin \alpha}{b} \right) \dots 72.$$

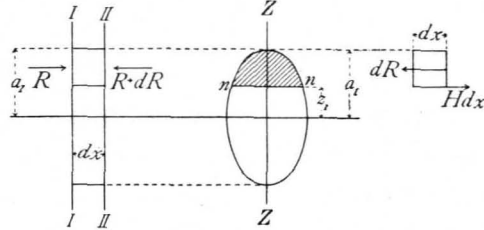
d) Schubspannungen; elastische Linie.

Außer den oben ermittelten axialen Faserstressungen N treten bei verschiedenen Belastungszuständen der Balken auch noch Schubspannungen auf, von denen hier zunächst die horizontalen Schubspannungen betrachtet werden mögen.

325.
Horizontale
Schub-
spannungen.

Angenommen, die Axialkräfte P seien gleich Null, und es sollen die horizontalen Schubspannungen ermittelt werden, welche in derjenigen Faserschicht zwischen den unendlich nahe an einander gelegenen Querschnitten II und $IIII$ (Fig. 112) wirken, die um z_1 über der Balkenaxe liegt. Dabei sollen die vereinfachenden Annahmen gemacht werden, daß die Querschnitte II und $IIII$ einander gleich seien, daß die horizontale Schubspannung pro Flächeneinheit in der ganzen Breite der Faser nn constant sei und daß die Kräfteebene sämtliche Querschnitte in Symmetrieachsen schneide.

Fig. 112.



Auf den Theil des Balkenstückes zwischen II und $IIII$, welcher oberhalb der Faserschicht nn liegt, wirken zwei Kräfte, nämlich normal zur Ebene II die Summe R der axialen Faserstressungen und normal zur Ebene $IIII$ die Kraft $R + dR$. Nun ist

$$R = \int_{z_1}^{a_1} N \, df,$$

und da nach Gleichung 34. $N = \frac{M}{\mathcal{F}} z$ ist,

$$R = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M}{\mathcal{F}} z \, df \quad \text{und} \quad R + dR = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M + dM}{\mathcal{F}} z \, df.$$

Die Differenz der beiden Kräfte R und $R + dR$ ist gleich ihrer Resultirenden; mithin ist die auf das Balkenstück wirkende axiale Faserstressung

$$R + dR - R = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M + dM}{\mathcal{F}} z \, df - \int_{z_1}^{a_1} \frac{M}{\mathcal{F}} z \, df.$$

Für die Integration zwischen z_1 und a_1 sind M , dM und \mathcal{F} constant; diese Werthe können also vor das Integralzeichen gesetzt werden, d. h. es ist

$$dR = \frac{M + dM}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z \, df - \frac{M}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z \, df = \frac{dM}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z \, df.$$

Damit das betrachtete Balkenstück im Gleichgewicht sei, muß die algebraische Summe der auf dasselbe wirkenden Horizontalkräfte gleich Null sein; es muß also noch eine Horizontalkraft auf das Balkenstück wirken, welche der Größe nach genau gleich der obigen Kraft dR , der Richtung nach derselben entgegengesetzt ist. Diese Kraft kann nur in der horizontalen Faserschicht wirken, mittels deren dieses Stück mit dem anderen Balkentheile zusammenhängt, d. h. in der um z_1

über der neutralen Axe liegenden Schicht. Längs dieser Schicht entfteht demnach eine Schubspannung. Wird die Gröfse derselben pro Längeneinheit des Balkens mit H bezeichnet, fo beträgt fie für dx Längeneinheiten $H dx$, und es ergibt sich für die Ermittlung von H die Bedingungsgleichung:

$$H dx = dR = \frac{dM}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z df \quad \text{und} \quad H = \frac{dM}{dx} \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z df.$$

Nach Gleichung 28. (Art. 295, S. 258) ift $\frac{dM}{dx} = Q$; demnach

$$H = \frac{Q}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z df \quad \dots \dots \dots \quad 73.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen bedeutet: Es foll für jedes Flächen-theilchen df zwischen den Ordinaten z_1 und a_1 das Product aus diefem Flächen-theilchen in feinen Abstand von der Schwerpunktsaxe gebildet und die fämmtlichen Producte follten addirt werden.

Man nennt bekanntlich diefes Integral das ftatische Moment der Fläche zwischen den Ordinaten z_1 und a_1 bezogen auf die Schweraxe. Setzen wir nun

$$S_{z_1}^{a_1} = \int_{z_1}^{a_1} z df,$$

fo wird

$$H = \frac{Q S_{z_1}^{a_1}}{\mathcal{F}} \quad \dots \dots \dots \quad 74.$$

Die horizontale Schubspannung pro Längeneinheit für irgend eine Fafer-schicht wird demnach erhalten, indem man die Transverfalkraft für die betreffende Stelle mit dem auf die neutrale Axe bezogenen ftatischen Moment des Querschnitts-theiles oberhalb der bezüglichen Faferfchicht multiplicirt und diefes Product durch das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes für die neutrale Axe dividirt.

Aus Obigem folgt:

1) In demselben Querschnitt find Q und \mathcal{F} für alle Fafern constant; mithin ift die Gröfse der horizontalen Schubspannung pro Längeneinheit des Balkens an den ver-schiedenen Querschnittsstellen von der Gröfse des Ausdrucks für S abhängig. H wird für diejenigen Fafern am gröfsten, für welche S feinen gröfsten Werth hat. Das ftatische Moment des oberhalb befindlichen Flächentheils ift am gröfsten für die horizontale Schweraxe; dort ift es gleich $S_o^{a_1}$. Am kleinsten ift S für die äußerften Fafern; denn dafelbst ift es gleich $S_{a_1}^{a_1} = 0$.

Die horizontale Schubspannung pro Längeneinheit des Balkens ift demnach am gröfsten in der horizontalen Schweraxe; fie ift gleich Null in den am weitesten von derselben entfernten Faferfchichten, d. h. in den gespanntesten Fafern.

2) Der in Gleichung 74. gefundene Ausdruck giebt die Gröfse der Schub-spannung pro Längeneinheit an. Diefe Schubspannung vertheilt sich über die ganze Breite der Faferfchicht, wie man in den Fällen der Praxis meift annehmen kann, nahezu gleichmäfsig. Ift demnach die Breite des Querschnittes in der Höhe der betrachteten Faferfchicht gleich w , fo vertheilt sich der gefundene Werth H

über w .1 Flächeneinheiten, und es ergibt sich als Schubspannung pro Flächeneinheit:

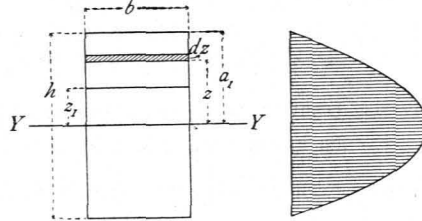
$$\mathfrak{S} = \frac{Q S_{z_1}^{a_1}}{w \mathcal{F}} \dots \dots \dots 75.$$

Im Nachstehenden sollen für einige, im Hochbauwesen häufiger vorkommende Querschnittsformen die horizontalen Schubspannungen bestimmt werden.

326.
Rechteckige
Querschnitte.

1) Für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 113) liegt die horizontale Schwerpunktsaxe in halber Höhe. Die horizontale Schubspannung in der Höhe z_1 über der neutralen Axe ist nach Gleichung 74. zu bestimmen.

Fig. 113.



Für den vorliegenden Querschnitt ist

$$S_{z_1}^{a_1} = S_{z_1}^2 = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} z df \text{ und, da } df = b dz,$$

$$S_{z_1}^{a_1} = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} b dz \cdot z = \left[\frac{b z^2}{2} \right]_{z_1}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2 \right).$$

Da ferner $\mathcal{F} = \frac{b h^3}{12}$, wird nach Gleichung 74.

$$H = \frac{Q \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2 \right)}{\frac{b h^3}{12}} = \frac{6 Q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2 \right) = \frac{6 Q}{h} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z_1}{h} \right)^2 \right] \dots \dots 76.$$

In diesem Ausdruck ist nur eine Variable z_1 ; alle andern Factoren sind für sämtliche Fasern des Querschnittes constant. Trägt man demnach für jede Faser die Größe der in ihr pro Längeneinheit stattfindenden Horizontal-Schubspannung als Ordinate graphisch auf und verbindet die Endpunkte derselben, so erhält man als Verbindungslinie eine Curve, die Curve der Gleichung 76. Die Form der Gleichung zeigt, daß diese Curve eine Parabel ist.

Für $z_1 = 0$ ist $H_0 = H_{max} = \frac{6 Q}{4 h} = \frac{3 Q}{2 h}$, und für $z_1 = \frac{h}{2}$ ist $H_{\frac{h}{2}} = \frac{6 Q}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 0$.

Die Horizontalspannung pro Flächeneinheit längs der einzelnen Fasern ist $\mathfrak{S} = \frac{H}{b}$, d. h.

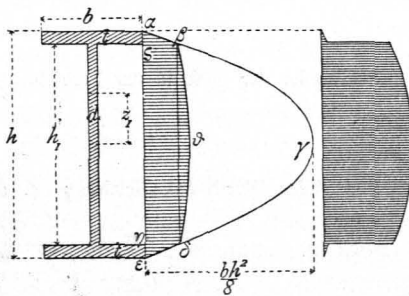
$$\mathfrak{S} = \frac{6 Q}{b h} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z_1}{h} \right)^2 \right], \text{ ferner } \mathfrak{S}_0 = \frac{3 Q}{2 b h} \text{ und } \mathfrak{S}_{\frac{h}{2}} = 0.$$

Die in Fig. 113 gezeichnete Curve giebt also auch die graphische Darstellung der pro Flächeneinheit stattfindenden Horizontal-Schubspannungen.

2) Für den symmetrischen I-förmigen Querschnitt (Fig. 114) liegt die horizontale Schwerpunktsaxe gleichfalls in halber Höhe. Die Größen Q und \mathcal{F} sind für alle Fasern desselben Querschnittes constant, mithin H mit S veränderlich. Für irgend eine Faser des Steges in der Höhe z_1 über der neutralen Axe ist nach Gleichung 74.

327.
I-förmige
Querschnitte.

Fig. 114.



$$H = \frac{Q}{\mathcal{F}} \left[\frac{b t (h-t)}{2} + \frac{\left(\frac{h}{2} - t - z_1 \right) d \left(\frac{h}{2} - t + z_1 \right)}{2} \right],$$

$$H = \frac{Q}{\mathcal{F}} \left[\frac{b t (h-t)}{2} + \frac{d \left(\left(\frac{h}{2} - t \right)^2 - z_1^2 \right)}{2} \right] 77.$$

Ein anschauliches Bild der Veränderlichkeit der horizontalen Schubkräfte erhält man, indem man für jede Faser die in ihr herrschende Schubspannung als Ordinate

aufträgt. Da der Quotient $\frac{Q}{\mathcal{F}}$ constant ist, so kann derselbe vorläufig bei Seite gelassen werden, und man kann sich auf das Auftragen der Werthe für S beschränken.

Wäre das Rechteck von der Breite b und der Höhe h vollständig, so würde man als graphische Darstellung der Veränderlichkeit von S eine Parabel erhalten (siehe Art. 326, S. 287), deren Ordinate in der Höhe z_1 über der neutralen Axe wäre:

$$S = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} dfz = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2 \right).$$

Für $z_1 = 0$ ist die Ordinate $S_o = \frac{b h^2}{8}$, für $z_1 = \frac{h}{2}$ ist die Ordinate $S_{\frac{h}{2}} = 0$. Demnach ist die Parabel leicht zu construiren. Dieselbe ist in Fig. 114 in $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon$ gezeichnet.

Für die Fasern nun, welche der oberen und unteren Gurtung angehören, ist das statische Moment $S_{\frac{h}{2}}$ des über demselben liegenden Querschnittstheiles beim I-förmigen Querschnitt genau eben so groß wie beim vollen Rechteckquerschnitt. Für diese Fasern sind also die Ordinaten der Parabel $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon$ die richtigen. Der Theil der Parabel $\alpha \beta$ und $\delta \varepsilon$ ist also auch für den I-förmigen Querschnitt die graphische Darstellung der S . Es erübrigt noch die Darstellung der Werthe von S für die Fasern des Steges. Wäre nur das Rechteck von der Breite d und der Höhe h_1 vorhanden, so wäre nach Obigem die graphische Darstellung von S eine Parabel der Gleichung

$$s = \frac{d}{8} (h_1^2 - 4 z_1^2).$$

In Folge der Gurtungen kommt aber für jede Fafer noch das statische Moment der Gurtung, d. h. der Rechtecksfläche $b t$ bezogen auf die neutrale Axe hinzu. Dieses ist aber soeben bereits in den Ordinaten $\varepsilon \beta$ und $\gamma \delta$ gefunden. Um diesen constanten Summanden werden die Ordinaten s zu vermehren sein, was am einfachsten dadurch geschieht, daß man die Parabelordinaten der obigen Gleichung $s = \frac{d}{8} (h_1^2 - 4 z_1^2)$ von der Linie $\beta \delta$ aus abträgt.

In der neutralen Axe ist $z_1 = 0$, daher $s_o = \frac{d h_1^2}{8}$; für die Abscisse $\pm \frac{h_1}{2}$ ist

$$s = \frac{d}{8} \left(h_1^2 - 4 \frac{h_1^2}{4} \right) = 0.$$

Aus diesen Werthen ist die Parabel leicht in der bekannten Weise zu construiren. Es ergibt sich die Parabel $\beta \vartheta \delta$. Die horizontale Schubspannung pro Längeneinheit findet man daraus durch Multiplication der für S gefundenen Werthe mit $\frac{Q}{\mathcal{F}}$. In den meisten Fällen ist d sehr klein und eben so $\frac{h-h_1}{2}$, d. i. die Flanchenstärke t verhältnißmäßig gering gegen h . Man kann sodann ohne merklichen Fehler die Curve für S durch die gebrochene aus geraden Stücken zusammen gesetzte Linie $\alpha \beta \delta \varepsilon$ ersetzen. Es ist

$$\varepsilon \beta = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) = \frac{b}{8} (h - h_1) (h + h_1) = \frac{b}{4} \left(\frac{h - h_1}{2} \right) (h + h_1) = \frac{b t}{4} (h + h_1).$$

Alsdann ist in der horizontalen Schwerpunktsaxe nahezu

$$H = \frac{Q b t (h + h_1)}{4 \mathcal{F}}.$$

Sei wieder der Abstand der Flanchenschwerpunkte η , der Flanchenquerschnitt $b t = f$, so ist

$$\eta = \frac{h_1 + h}{2}, \text{ d. h. } H = \frac{Q f \eta}{2 \mathcal{F}}.$$

Für \mathcal{F} den Werth aus Gleichung 44. eingesetzt, giebt

$$H = \frac{Q f \eta}{\left(f + \frac{d \eta}{6} \right) \eta^2} = \frac{Q f}{\left(f + \frac{d \eta}{6} \right) \eta} \dots \dots \dots 78.$$

Ist $\frac{d \eta}{6}$ gegen f klein, so ist nahezu

$$H = \frac{Q}{\eta} \dots \dots \dots 78a.$$

Die Ordinaten in Fig. 114 geben die horizontalen Schubspannungen pro Längeneinheit des Trägers an; die Schubspannung pro Flächeneinheit wird erhalten, indem man die pro Längeneinheit stattfindende durch die Anzahl der auf eine Längeneinheit kommenden Flächeneinheiten dividirt, d. h. durch die Breite des Querschnittes in der betreffenden Faer. Man erhält sodann die gleichfalls in Fig. 114 gezeichneten Ordinaten als horizontale Schubspannungen pro Flächeneinheit. In den Flanfchen ist die Breite, also der Divisor groß, mithin die Spannung klein; umgekehrt ist es im Stege.

3) Querschnitt der Blechträger. Bei den aus einem einzigen Stücke bestehenden Querschnitten werden die in den einzelnen Fasern wirkenden horizontalen Schubspannungen durch den Widerstand aufgehoben, den der Zusammenhang der Fasern dem Verschieben entgegen stellt; die Querschnittsdimensionen sind demnach so zu wählen, das die erlaubte Beanspruchung auf Schub nicht überschritten wird. Ist dagegen der Querschnitt aus mehreren Theilen zusammengesetzt, so müssen die in den Fugen zwischen den einzelnen Theilen entstehenden Schubspannungen durch künstliche Mittel aufgehoben werden. Bei den Blechträgern dient dazu der Abfcherungswiderstand der Niete. Die Niete sind demnach so zu bestimmen, das ihr Schubwiderstand die auftretenden Schubspannungen aufhebt. Um deshalb den Abstand der Niete zu ermitteln, welche zur Verbindung der Lamellen mit den Winkeleisen dienen, suche man die pro Längeneinheit in der Fuge aa (Fig. 115) stattfindende Schubspannung auf die oben gezeigte Weise, durch Rechnung oder graphisch.

328.
Blechträger-
Querschnitte.

Es ist wieder $H = \frac{Q S}{\mathcal{F}}$, worin S das statische Moment der Lamellenfläche bezogen auf die neutrale Axe bezeichnet. Nennt man den Abstand der Nietbolzen e , so ist die Gesamtschubspannung auf die Länge e gleich

$$\int_x^{x+e} \frac{Q S}{\mathcal{F}} dx = \frac{S}{\mathcal{F}} \int_x^{x+e} Q dx.$$

Allerdings ändert sich Q mit x ; doch kann man $\int Q dx = Q_I e$ setzen, wenn Q_I den Mittelwerth von Q auf der betrachteten Strecke e bedeutet. Mithin ist die gesammte Schubspannung auf dieser Strecke

$$D = \frac{S}{\mathcal{F}} Q_I e.$$

Diese Schubspannung ist durch zwei einschnittige Niete aufzunehmen, deren Widerstand gegen Abfcheren nach Art. 292, S. 254

$$W = 2 \frac{d^2 \pi T}{4}$$

ist, wenn T die erlaubte Schubbeanspruchung pro Flächeneinheit der abzufcherenden Fläche ist. Durch Gleichsetzung beider Werthe erhält man eine Gleichung für e :

$$\frac{Q_I}{\mathcal{F}} S e = \frac{2 d^2 \pi T}{4} \text{ und } e = \frac{d^2 \pi T \mathcal{F}}{2 Q_I S}.$$

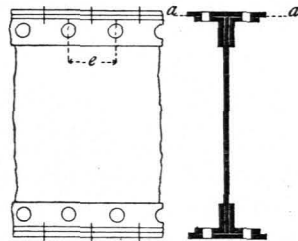
Je größer Q_I ist, desto kleiner wird e , desto näher sind also die Niete zu setzen.

Die angegebene Berechnung ist nur für die horizontalen Fugen genau; sie kann aber mit hinreichender Genauigkeit auch für die verticalen Fugen, also zur Bestimmung der Niete dienen, welche die horizontale Schubkraft in den verticalen Fugen aufzunehmen bestimmt sind. Für diese Berechnung ist sodann unter S das statische Moment desjenigen Theiles der Querschnittsfläche zu verstehen, welcher durch die Niete mit der Blechwand verbunden wird, also die Querschnittsfläche der Winkeleisen und der Lamellen.

Um für die verticalen Schubspannungen einen Ausdruck aufzustellen, sei ein horizontaler Balken (Fig. 116) vorausgesetzt, auf den nur verticale Belastungen wirken. Auf den Balkentheil links von einem beliebigen Querschnitt II wirkt eine Anzahl äußerer Kräfte, die zu einer Resultirenden, der sog. Transversalkraft Q vereinigt sein mögen. Damit dieses Balkenfragment im Gleichgewicht sei, muß die algebraische Summe der auf dasselbe wirkenden Verticalkräfte gleich Null sein. Die

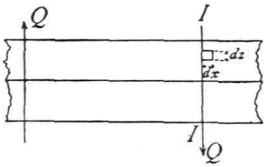
329.
Verticale
Schub-
spannungen.

Fig. 115.



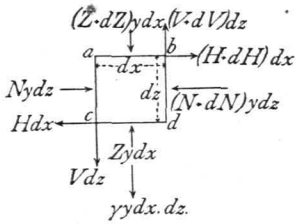
Kraft Q ist allgemein nicht gleich Null; es muß also am Fragment noch eine verticale Kraft wirken, welche der Kraft Q entgegengesetzt gerichtet, ihr an Gröfse aber genau gleich ist, d. h. mit Q zusammen die Summe Null ergibt. Eine solche Kraft kann aber nur längs des Querschnittes II wirken, da nur durch diese das Fragment mit den anderen Theilen des Balkens zusammenhängt. Diese Kraft ist der Widerstand, welchen die Fasern dem Verschieben des Balkentheiles längs des Querschnittes II entgegen setzen.

Fig. 116.



Es folgt hieraus: In jedem verticalen Querschnitt wirken verticale Schubspannungen, deren Summe genau gleich der Transversalkraft ist, welche sich für diesen Querschnitt ergibt.

Fig. 117.



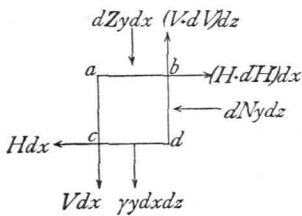
Die Vertheilung dieser Schubspannungen über den Querschnitt findet nach folgendem Gesetze statt: Die an irgend einer Stelle pro Längeneinheit wirkende verticale Schubspannung ist gleich der an derselben Stelle pro Längeneinheit wirkenden horizontalen Schubspannung.

Um dieses Gesetz nachzuweisen, betrachten wir ein im Abstände z (Fig. 117) über der neutralen Axe liegendes Balkenstück von der Länge dx und der Höhe dz . Auf dieses wirken im Allgemeinen folgende Kräfte:

- normal zur Fläche ac wirkt $Nydz$; längs der Fläche cd wirkt Hdx ;
- » » » bd » $(N+dN)ydz$; » » » ab » $(H+dH)dx$;
- » » » cd » $Zydx$; » » » ac » Vdz ;
- » » » ab » $(Z+dZ)ydx$; » » » bd » $(V+dV)dz$.

Hierin bedeutet y die Dicke des Elementes $dz \cdot dx$ normal zur Bildfläche gemessen, Z und $Z + dZ$ die auf die horizontalen Flächen ab und cd wirkenden Normalspannungen und V die verticale Schubspannung pro Längeneinheit. Endlich wirkt noch das Eigengewicht des Elementes $= \gamma y dx dz$.

Fig. 118.



Lassen wir diejenigen Kräfte, welche einander gegenseitig aufheben, fort, so bleiben die in Fig. 118 angegebenen übrig. Dieselben halten das Balkenstück im Gleichgewicht; es müssen also die Summen der statischen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Bildebene, gleich Null sein.

Es sei b dieser Drehpunkt; alsdann ist

$$0 = V dz dx - H dx dz + \gamma y \frac{dx dz dx}{2} + d Z y dx \frac{dx}{2} - d N y dz \frac{dz}{2}.$$

Die unendlich kleinen Gröfsen dritter Ordnung fallen gegen die unendlich kleinen Gröfsen zweiter Ordnung fort; es bleibt also

$$0 = V dz dx - H dx dz, \quad V = H. \quad \dots \quad 79.$$

woraus

Dies gilt für jede Stelle des Balkens, womit der obige Satz bewiesen ist. Es ist mithin nach Gleichung 74.

$$V = \frac{Q S_{z_1}^{a_1}}{f} \quad \dots \quad 80.$$

Die in Art. 326 bis 328 für verschiedene Querschnittsformen ermittelten Werthe und graphischen Darstellungen für H gelten also auch für V .

Das Gesetz, nach welchem sich die verticalen Schubspannungen im Querschnitt vertheilen, ist von besonderer Wichtigkeit, wenn es sich darum handelt, die auf die einzelnen Niete in neben stehender Verbindung (Fig. 119) entfallenden Beanspruchungen zu ermitteln. Der I-förmige Walzträger wird durch Winkelbleiben mit dem Blechträger vereinigt. Die im Querschnitt aa des I-Trägers entstehende Transversalkraft Q ist durch die Niete auf den Blechträger zu übertragen. Die einzelnen Niete sind nun so zu vertheilen, daß deren Entfernung der Größe der durch den betreffenden Niet zu übertragenden Schubspannung entspricht. Sei an einer Stelle die Entfernung der Nietmitten e , die verticale Schubspannung pro Längeneinheit im Mittel in dieser Höhe gleich V , so kommt auf einen Niet die Schubkraft $V e$.

Der Niet wird in zwei Querschnitten abgeseuert; mithin ist der Abseuerungswiderstand des Nietes $\frac{2 d^2 \pi}{4} T$; es ergibt sich also für e die Gleichung:

$$V e = \frac{2 d^2 \pi}{4} T, \text{ woraus } e = \frac{\pi d^2 T}{2 V}.$$

Da V von der neutralen Axe nach der oberen und unteren Gurtung zu abnimmt, so sind die Niete in der Nähe der Neutralen näher zu setzen, als in der Nähe der Gurtung. Für die gewöhnlichen I-förmigen Walzbalken kann man die oben stehende Fig. 119 als graphische Darstellung der Veränderlichkeit der verticalen Schubspannung annehmen, d. h. mit genügender Annäherung V als constant über die ganze Trägerfeghöhe annehmen, worin nach Gleichung 78_a. $V = \frac{Q}{h}$.

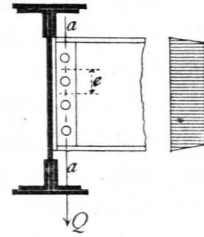
In den bisherigen Betrachtungen sind nur die Normalspannungen, welche in den verticalen Balkenquerschnitten, und die Schubspannungen, welche in den horizontalen und verticalen Balkenquerschnitten entstehen, ermittelt worden. Um die Frage der im Inneren der Balken auftretenden Beanspruchungen eingehend zu lösen, wären noch die Normal- und Schubspannungen in einem Querschnitte aufzufuchen, welcher einen beliebigen Winkel mit der Horizontalen macht. Auf diese Untersuchungen einzugehen, mangelt hier der Raum, und es kann auch in den meisten Fällen des Hochbaues auf eine dahin gehende Berechnung verzichtet werden. Die Leser, welche sich über diesen Gegenstand instruiren wollen, werden auf die S. 245 genannten Werke von *Grashof* und *Winkler* verwiesen.

Wenn ein Balken dem Einflusse biegender Kräfte unterworfen ist, so wird eine Formänderung oder Deformation desselben eintreten. Die Axe des ursprünglich geraden Balkens wird eine krumme Linie (Fig. 120), und zwar ist diese krumme Linie eine ebene Curve, wenn alle Kräfte in einer Ebene wirken, welche sämtliche Querschnitte in Hauptaxen — meist Symmetriaxen — schneidet. Sodann liegen alle Punkte der deformirten Axe in der Kräfteebene. Man nennt die deformirte Axe die elastische Linie.

Die Gleichung der elastischen Linie läßt sich folgendermaßen entwickeln.

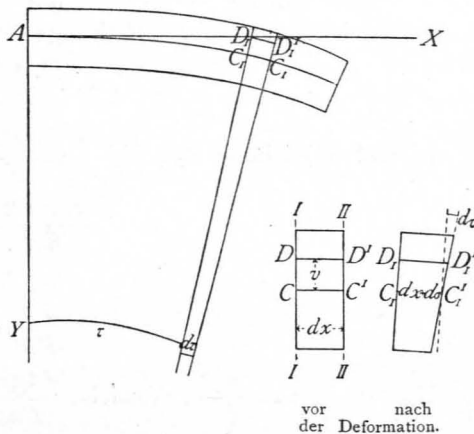
Wir legen durch einen Punkt A der Balkenaxe drei Coordinatenachsen, von denen die X -Axe mit der ursprünglichen Balkenaxe zusammenfällt, die Y -Axe

Fig. 119.



330.
Spannungen
ein beliebiges
Flächenelement.

Fig. 120.



331.
Elastische Linie.

vor der Deformation. nach der Deformation.

normal zu derselben in der Kraftebene, die Z -Axe normal zur Kraftebene steht, und betrachten ein Balkenstück zwischen den Ebenen II und III , dessen Länge vor der Deformation dx war. Die Ebenen II und III waren vor der Deformation parallel und normal zur Balkenaxe und hatten die Abscissen x und $x + dx$; die Länge einer Faser DD' in der Höhe v über der Axe war dx .

Wir bestimmen nunmehr die Deformation dieser Faser DD' . Durch die beiden Punkte der deformirten Axe C_1 und C_1' legen wir Ebenen normal zu der deformirten Axe; der Winkel beider sei $d\tau$, der Winkel der ersten dieser Ebene mit der Verticalebene sei τ . Die einzelnen Punkte der Ebenen II und III werden nach der Deformation allgemein nicht mehr in Ebenen liegen; man kann aber annehmen, daß der Abstand zweier Punkte in der Höhe v über der Axe nach der Deformation eben so groß ist, wie der Abstand der Normalebene in der Höhe v über der Axe, d. h. daß stattfindet

$$D_1 D_1' = C_1 C_1' + v d\tau.$$

Nennt man die Verlängerung des Stückes CC' bei der Deformation $d\sigma$, so ist

$$C_1 C_1' = dx + d\sigma \quad \text{und} \quad D_1 D_1' = dx + d\sigma + v d\tau.$$

Dies ist die Länge der deformirten Faser. Die ursprüngliche Länge derselben war $DD' = dx$; folglich ist die Verlängerung durch die Deformation

$$D_1 D_1' - DD' = dx + d\sigma + v d\tau - dx = d\sigma + v d\tau$$

und das Verlängerungsverhältniß $\frac{d\sigma + v d\tau}{dx}$.

Ist N die axiale Faser Spannung in dieser Faser, so ist

$$\frac{N}{E} = \frac{d\sigma + v d\tau}{dx} = \frac{d\sigma}{dx} + \frac{v d\tau}{dx},$$

$$N = E \frac{d\sigma}{dx} + \frac{E v d\tau}{dx} \dots \dots \dots 81.$$

Nach Gleichung 33. ist aber auch

$$N = \frac{P}{F} + \frac{M v}{\mathcal{F}} \dots \dots \dots 82.$$

Für $v = 0$, d. h. für die Axe ist nach Gleichung 81. und 82.

$$N_0 = E \frac{d\sigma}{dx} = \frac{P}{F},$$

d. h.

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{P}{E F} \dots \dots \dots 83.$$

Die Gleichsetzung der Gleichungen 81. und 82. ergibt

$$\frac{E \cdot d\sigma}{dx} + \frac{E \cdot v \cdot d\tau}{dx} = \frac{P}{F} + \frac{M v}{\mathcal{F}}$$

und da nach Gleichung 83. $\frac{E d\sigma}{dx} = \frac{P}{F}$ ist, wird

$$\frac{E v d\tau}{dx} = \frac{M v}{\mathcal{F}}$$

oder

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{M}{E \mathcal{F}} \dots \dots \dots 84.$$

Nun ist $\text{tg } \tau = \frac{dy}{dx}$, folglich $\frac{d \text{tg } \tau}{dx} = \frac{d\tau}{\cos^2 \tau dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$.

Bei den hier in Betracht kommenden Deformationen ist τ so klein, daß $\cos^2 \tau$ unbedenklich gleich 1 gesetzt werden kann, d. h. daß nahezu

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots \dots \dots 85.$$

Für $\frac{d\tau}{dx}$ den Werth aus Gleichung 84. eingesetzt, giebt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E\mathcal{I}} \dots \dots \dots 86.$$

Gleichung 86. ist die Differentialgleichung der elastischen Linie. In derselben bedeutet M das Moment an der Stelle mit der Abscisse x , im Allgemeinen also etwas Variables; \mathcal{I} ist das Trägheitsmoment für die horizontale Schwerpunktsaxe des Querschnittes an derselben Stelle.

Die Gleichung der elastischen Linie wird durch zweimalige Integration der Gleichung 86. erhalten; bei der Integration ist E constant. Es wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E} \int \frac{M}{\mathcal{I}} dx + C_1$$

und

$$y = \frac{1}{E} \iint \frac{M}{\mathcal{I}} (dx)^2 + C_1x + C_2.$$

Bekanntlich ist der Krümmungsradius für eine ebene Curve

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

oder wenn $\text{tg } \tau = \frac{dy}{dx}$ nur klein ist, angenähert

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Danach wird die Gleichung der elastischen Linie auch geschrieben werden können:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E\mathcal{I}} \dots \dots \dots 87.$$

Für $M=0$ wird $\rho = \infty$, d. h. die elastische Linie eine Gerade. Das Moment M ist Null an demjenigen Punkt des Balkens, wo es aus dem positiven in den negativen Werth übergeht, also das Vorzeichen wechselt; an diesen Punkten hat sonach die elastische Linie sog. Wende- oder Inflexionspunkte.