LAMÉ. *Leçons ſur la théorie mathématique de l'élaſticité des corps ſolides.* *2e édit.* Paris 1866.

WINKLER, E. Die Lehre von der Elaſticität und Feſtigkeit etc. 1. Theil. Prag 1867.

BARLOW, P. *Treatiſe on the ſtrength of materials, with rules for application in architecture etc. A new edit. by* W. HUMBER. London 1867.

ANDERSON, C. E. *The ſtrength of materials and ſtructures.* London 1872.

MÜLLER, H. Elementares Handbuch der Feſtigkeitslehre etc. Berlin 1875.

KURZ, A. Taſchenbuch der Feſtigkeitslehre etc. Berlin 1877.

GRASHOF, F. Theorie der Elaſticität und Feſtigkeit etc. 2. Aufl. Berlin 1878.

KENT, W. *The ſtrength of materials.* New York 1879.

LAMBERT, P. Tabellariſche Zuſammenſtellung der Reſultate aus der angewandten Feſtigkeitslehre, mit beſonderer Berückſichtigung von Conſtructionen in Eiſen und Holz. Zürich 1880.

LINGLIN, TH. *Traité élémentaire de la réſiſtance des matériaux.* Paris 1880.

MADAMET, A. *Réſiſtance des matériaux.* Paris 1881.

SERGENT, E. *Traité pratique de la réſiſtance des matériaux.* *3e édit.* Paris. Im Erſcheinen begriffen.

---

2. Kapitel.

Normalelaſticität und Normalfeſtigkeit.

Die reine Normalelaſticität kommt nur bei geraden Stäben vor, weſshalb hier nur ſolche betrachtet werden ſollen. 278. Elaſticitäts-geſetze.

Die Elaſticitätslehre giebt für die Normalelaſticität folgende Grundgeſetze:

1) Die Verlängerung, bezw. Verkürzung eines in ſeiner Axenrichtung, d. h. auf Normalelaſticität beanſpruchten Stabes iſt, ſo lange die Beanſpruchung innerhalb der Elaſticitätsgrenze bleibt, der urſprünglichen Länge des Stabes direct proportional. Das Verhältniſs der Verlängerung (poſitiv oder negativ genommen) zu der urſprünglichen Länge heiſst das Verlängerungsverhältniſs.

2) Die Verlängerung eines, wie angegeben, beanſpruchten Stabes iſt, ſo lange die Spannung deſſelben innerhalb der Elaſticitätsgrenze liegt, direct proportional der in dem Stab herrſchenden Spannung. Iſt alſo die Spannung im Stab N, ſo iſt die Verlängerung, alſo auch das Verlängerungsverhältniſs N-mal ſo groſs, als bei der Spannung 1.

3) Das Verlängerungsverhältniſs iſt vom Material abhängig, aus welchem der Stab beſteht. Für dieſe Abhängigkeit iſt eine beſondere Bezeichnung eingeführt. Nennt man die Verlängerung, welche ein Gewicht gleich der Krafteinheit an einem Stabe hervorbringt, deſſen Querſchnitt gleich der Flächeneinheit iſt, λ, die urſprüngliche Länge des Stabes vor der Verlängerung l, ſo iſt für dieſen Fall das Verlängerungsverhältniſs $= \frac{\lambda}{l}$.

Dieſes Verlängerungsverhältniſs, welches je nach dem Material, aus welchem der Stab beſteht, verſchieden iſt, bezeichnet man mit $\frac{1}{E}$ und nennt E den Elaſticitäts-Modulus oder Elaſticitäts-Coefficienten des betreffenden Materials. Demnach iſt der Elaſticitäts-Modulus E der reciproke Werth des (poſitiven oder negativen) Verlängerungsverhältniſſes, welches durch die Spannung 1 an einem Stabe vom Querſchnitt gleich der Flächeneinheit hervorgebracht wird. 279. Elaſticitäts-Coefficient.

Wirkt in dem Stabe eine Spannung N pro Flächeneinheit des Querſchnittes, ſo iſt nach 2. das Verlängerungsverhältniſs N-mal ſo groſs, als bei der Spannung 1 pro Flächeneinheit des Querſchnittes; mithin iſt ſodann das Verlängerungsverhältniſs

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N.1}{E} = \frac{N}{E}.$$

Wirkt auf einen Stab, dessen Querschnitt F Flächeneinheiten enthält, dessen Querschnitt also gleich F ist, eine Kraft P, und kann man annehmen, dass diese Kraft sich gleichmässig über den ganzen Querschnitt vertheilt, so ist die Spannung pro Flächeneinheit derselben $N = \frac{P}{F}$, und wenn man diesen Werth für N in die Gleichung für $\frac{\Delta l}{l}$ einsetzt, erhält man folgende wichtige Gleichung:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{FE} \quad \text{oder} \quad \Delta l = \frac{Pl}{FE} \quad \text{. . . . . 1.}$$

Die hier angegebenen Resultate gelten sowohl, wenn die Verlängerung eine positive, d. h. eine wirkliche Verlängerung, als auch wenn sie eine negative, d. h. eine Verkürzung ist. Sie gelten also sowohl für Zug- als auch für Druckbeanspruchungen; nur hat für erstere im Allgemeinen E einen anderen Werth, als für letztere.

280. Zulässige Beanspruchung.

Die Gleichung $N = \frac{P}{F}$ kann benutzt werden, um die Grösse der Kraft zu bestimmen, mit welcher ein Stab von gegebenem Querschnitt höchstens auf Normalelasticität beansprucht werden darf.

Nach dieser Gleichung ist $P = NF$. Wird für N der grösste Werth eingesetzt, welchen das Material pro Flächeneinheit des Querschnittes höchstens erleiden kann, ohne zerstört zu werden, d. i. der Festigkeits-Coefficient, so ergiebt sich $P_{max} = N_{max} F$. In dieser Gleichung ist P_{max} diejenige Belastung, deren geringste Vergrösserung ein Zerreissen, bezw. Zerdrücken des Stabes zur Folge haben würde; N_{max} ist nach Früherem die Zug-, bezw. Druckfestigkeit. Die Stäbe werden nicht bis zu dieser Grenze beansprucht; vielmehr werden Sicherheits-Coefficienten eingeführt, welche für verschiedene Materialien verschiedene Werthe haben. Man trägt durch dieselben den etwa möglichen Ueberlastungen, den Fehlern im Material, den im Laufe der Zeit möglichen Veränderungen des Materials durch Rost, Faulen etc., den Stössen und anderen ungünstigen Einflüssen Rechnung.

Bezeichnet n den Sicherheits-Coefficienten, so ist als wirkliche Maximalbelastung des Stabes nur $\frac{1}{n}$ von P_{max} einzuführen, d. h. es darf nur sein:

$$P = \frac{N_{max} F}{n}.$$

Man nennt nun $\frac{N_{max}}{n}$ die zulässige Beanspruchung, die im Folgenden mit K bezeichnet werden soll. Es ist demnach

$$K = \frac{N_{max}}{n}.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt die Bedingungsgleichung für die Querschnittsgrösse:

$$F = \frac{P}{K} \quad \text{. . . . . 2.}$$

In dieser Gleichung bedeutet P die im ganzen Stabe herrschende Kraft. Welche Werthe von P und K einzusetzen sind, wird in den folgenden Artikeln entwickelt werden.

Für die Beftimmung der einem Stabe zu gebenden Querfchnittsgröfse mittels der Gleichung 2. find zwei Methoden in Gebrauch: eine ältere weniger genaue, aber für überfchlägliche Rechnungen wohl anwendbare, und eine neuere, welche fich auf die Refultate forgfältiger Verfuche gründet. 281. Querfchnitts-beftimmung. Aeltere Methode.

Der Weg bei Anwendung der älteren Methode ift folgender. Für P wird in die Gleichung 2. der Maximalwerth des im Stabe möglichen Zuges, bezw. Druckes eingefetzt, während die Werthe für K ausgeführten Conftructionen und der Natur des Bauwerkes entfprechend angenommen werden. Diefe Werthe find andere, wenn das Bauwerk ein proviforifches, als wenn es ein definitives ift; fie find ferner verfchieden, je nachdem die Belaftung mit ftarken Stöfsen oder mit mäfsigen Erfchütterungen auftritt, follen aber ftets wefentlich unter der Beanfpruchung an der Elafticitätsgrenze bleiben.

In der Columne 5. der nachfolgenden Tabelle find für die hauptfächlichften Conftructionsmaterialien die in der Praxis üblichen Werthe von K zufammengeftellt; ferner find in der Tabelle die Elafticitäts-Coefficienten, die Feftigkeits-Coefficienten, fo wie diejenigen Beanfpruchungen angegeben, bei welchen die Elafticitätsgrenze erreicht wird. Naturgemäfs können die in der Tabelle aufgeführten Werthe nur Mittelwerthe fein, die fich mit der Qualität des Materials, der Art der Beanfpruchung und anderen Umftänden ändern [154]).

1.	2.	3.		4.		5.					
						Zuläffige Beanfpruchung K für					
						definitive Bauwerke				proviforifche Bauten,	
Bezeichnung der Materialien	Elafticitäts-Coefficient E	Feftigkeits-Coefficient bei Beanfpruchung auf		Beanfpruchung an der Elafticitätsgrenze auf		Belastung mit starken Stössen		Belastung mit mässigen Erschütterungen		Belastung mit mässigen Erschütterungen	
		Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck
Schmiedeeifen	2000	3500 bis 4000	3200 bis 3600	1,56	1,56	700	700	1000	1000	—	—
Gufseifen	1000	1250 bis 1450	7500 bis 8000	0,66	1,65 bis 1,9	—	—	250	500	—	—
Stahl	2200	8000	7000	3,0	3,0	1500	1500	1800	2000	—	—
Holz in der Faferrichtung:											
Eichenholz	120	965	487	0,26	0,21	—	—	90	65	180	130
Kiefernholz	120	820	410	0,29	0,22	—	—	80	60	160	110
Holz radial, d. h. in der Richtung der Jahresringe:											
Eichenholz	18,9	120	270	—	—	—	—	—	—	—	—
Kiefernholz	9,6	120	270	—	—	—	—	—	—	—	—
Mauerwerk:											
Gewöhnliches Backfteinmauerwerk in Kalkmörtel	—	—	—	—	—	—	—	0 bis 0,9	7	—	—
Gutes Backfteinmauerwerk in Cementmörtel	—	—	—	—	—	—	—	1,3	11	—	—
Beftes Mauerwerk	—	—	—	—	—	—	—	1,8 bis 2,0	14	—	—
Natürliche Steine:											
Granit	—	—	—	—	—	—	—	5 bis 6	45	—	—
Kalkftein	—	—	—	—	—	—	—	3	25	—	—
Sandftein	—	—	—	—	—	—	—	2 bis 4	16 bis 32	—	—
Marmor	—	—	—	—	—	—	—	3	24	—	—
	Tonnen pro 1 qcm	Kilogramm pro 1 qcm		Tonnen pro 1 qcm		Kilogramm pro 1 qcm					

Beifpiele. 1) Eine fchmiedeeiferne Stange werde im Maximum mit einer Zugkraft $P = 18\,750$ kg beanfprucht. Es ift die Querfchnittsgröfse unter der Annahme zu beftimmen, dafs die Stange einer definitiven Conftruction angehört und die Belaftung nur mit mäfsigen Erfchütterungen auftritt. 282. Beifpiele.

[154]) Siehe auch die in der I. Abtheilung auf S. 84 u. 85, 141 bis 148, 161 bis 169, 183 u. 184, 186, 188 bis 190, 203 u. 204, 210, 212, 213, 215 u. 216, 218, 223 mitgetheilten Angaben über die Elafticitäts- und Feftigkeitsverhältniffe der verfchiedenen Conftructions- und Ausbau-Materialien.

Nach obiger Tabelle ift für den vorliegenden Fall $K = 1000$, fonach

$$F = \frac{P}{K} = \frac{18\,750}{1000} = 18{,}75 \text{ qcm}.$$

Wenn die Stange aus Rundeifen conftruirt werden foll, fo mufs fein:

$$d = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 18{,}75}{3{,}14}} = 4{,}9 \text{ cm}.$$

2) Bei einer gufseifernen gedrückten Stange fei die Maximal-Druckkraft $P = 5850$ kg. Der Querfchnitt derfelben ift demnach, wenn die Conftruction wiederum als definitiv und die Belaftung als mit mäfsigen Erfchütterungen wirkend angenommen wird:

$$F = \frac{P}{K} = \frac{5850}{500} = 11{,}7 \text{ qcm}.$$

Bei Wahl eines kreisförmigen Querfchnittes ergiebt fich der Durchmeffer d aus der Gleichung:

$$d = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 11{,}7}{3{,}14}} = 3{,}8 \text{ cm}.$$

3) Auf einen Holzftab mit rechteckigem Querfchnitt wirke ein Maximaldruck $P = 16\,000$ kg. Der Stab foll einer proviforifchen Conftruction, welche mäfsigen Erfchütterungen ausgefetzt ift, angehören; das Material ift Kiefernholz. Es ergiebt fich nach Gleichung 2.

$$F = \frac{16\,000}{110} = 145{,}4 \text{ qcm}.$$

Ein quadratifcher Querfchnitt von $12{,}1$ cm Seitenlänge würde demnach genügen.

283.
Querfchnittsbeftimmung. Neuere Methode.

Die im Vorftehenden gezeigte ältere Methode der Querfchnittsbeftimmung hat wefentliche Mängel. Bei der Wahl des Sicherheits-Coefficienten n und damit des Werthes für K ift den verfchiedenften Einflüffen Rechnung zu tragen. Es ift zu beachten, ob die Belaftung ftofsweife oder ruhend wirkt, ob diefelbe in regelmäfsigen gröfseren, bezw. kleineren Intervallen oder nur fehr felten auftritt, ob diefelbe im Stabe einen Wechfel zwifchen Zug-, bezw. Druckbeanfpruchung oder nur einen Wechfel zwifchen gröfserem oder geringerem Zug, bezw. Druck erzeugt, ob die Grenzbeanfpruchungen weit aus einander oder nahe an einander liegen und Anderes mehr. Allen diefen Rückfichten konnte man durch Anwendung der älteren Methode nicht gerecht werden, da die Werthe von K je nach den Umftänden wohl gröfser oder kleiner gewählt werden konnten, aber ein beftimmtes Kriterium dafür nicht exiftirte. Auch die neuere Methode ift noch nicht fo weit ausgebildet, um allen Verhältniffen Rechnung zu tragen; immerhin bedeutet diefelbe einen wefentlichen Fortfchritt gegen früher.

Zur näheren Präcifirung der zuläffigen Beanfpruchung find von *Wöhler*[155]) und *Spangenberg* ausgedehnte Verfuche, allerdings nur mit Schmiedeeifen und Stahl, vorgenommen worden. Diefelben follten hauptfächlich den Einflufs der wiederholten Beanfpruchung feftftellen und haben zur Auffindung wichtiger Gefetze geführt.

Für das Verftändnifs mögen folgende Bezeichnungen vorausgefchickt werden.

Tragfeftigkeit ift diejenige Spannung, welche bei ruhender Belaftung die Zerftörung des Materials, den Bruch herbeiführt. Bewegt fich die Inanfpruchnahme des Materials zwifchen beftimmten Grenzen, fo nennen wir die obere Grenze die Maximalfpannung, die untere Grenze die Minimalfpannung.

Finden nur oder hauptfächlich Zugfpannungen ftatt, fo follen die Zugfpannungen als pofitive, die Druckfpannungen als negative Spannungen eingeführt werden; finden dagegen nur oder vorwiegend Druckfpannungen ftatt, fo follen die Druckfpannungen als pofitive, die Zugfpannungen als negative Gröfsen

155) Vergl. hierüber:

Wöhler. Ueber die Verfuche zur Ermittelung der Feftigkeit von Axen. Zeitfchr. f. Bauw. 1863, S. 233.

Wöhler. Refultate der in der Central-Werkftatt der Niederfchlefifch-Märkifchen Eifenbahn zu Frankfurt a. d. O. angeftellten Verfuche über die relative Feftigkeit von Eifen, Stahl und Kupfer. Zeitfchr. f. Bauw. 1866, S. 67.

Wöhler, A. Ueber die Feftigkeitsverfuche mit Eifen und Stahl. Zeitfchr. f. Bauw. 1870, S. 73.

eingeführt werden. Im erften Falle ift die Maximalfpannung eine Zug-, im zweiten Falle eine Druckbeanfpruchung.

Die Gefetze, zu welchen die *Wöhler*'fchen Verfuche geführt haben, lauten nun:

1) Der Bruch des Materials kann nicht nur durch eine ruhende Spannung herbeigeführt werden, welche die Tragfeftigkeit überfchreitet, fondern auch durch niedrigere Spannungen, falls diefe häufig wiederholt werden.

2) Die Differenz der Spannungen ift für den Eintritt des Bruches, alfo für die Zerftörung des Materials mafsgebend.

3) Bleibt die Maximalfpannung unter einem gewiffen Werthe, fo tritt auch bei unendlich oft wiederholter Beanfpruchung kein Bruch ein. Diefe Grenzfpannung nennt man nach *Launhardt* die Arbeitsfeftigkeit des Materials.

4) Die Arbeitsfeftigkeit ift defto gröfser, je gröfser die Minimalfpannung ift.

Die Arbeitsfeftigkeit, welche zu der Minimalfpannung Null gehört, nennt *Launhardt* die Urfprungsfeftigkeit und bezeichnet fie mit U. Die Urfprungsfeftigkeit würde demnach diejenige Maximalfpannung fein, welche niemals den Bruch herbeiführen würde, wenn der Stab zwifchen den Beanfpruchungen immer wieder in den fpannungslofen Zuftand zurückgeht.

Auf Grund der Refultate der *Wöhler*'fchen Verfuche find nun von verfchiedenen Autoren: *Launhardt, Gerber, Schäffer, Weyrauch, Winkler* u. A. Formeln für die Berechnung der Querfchnitte aufgeftellt, von denen wir die *Winkler*'fchen [156]) angeben und entwickeln wollen.

Wird die Arbeitsfeftigkeit mit A, die zugehörige Minimalfpannung mit C bezeichnet und bedeutet α eine noch zu beftimmende Conftante, fo folgert *Winkler* aus den Verfuchsrefultaten, dafs nahezu ftattfindet:

$$A = U + \alpha C \quad \ldots \ldots \quad 3.$$

Man kann diefe Gleichung auch für ruhende Belaftung anwenden; für diefe find Maximal- und Minimalfpannung einander gleich und zwar gleich der Tragfeftigkeit, welche für Zugbeanfpruchung mit Z bezeichnet werden möge. Es ift alfo für ruhende Belaftung $A = Z$ und $C = Z$; es heifst daher die Gleichung für diefen Fall:

$$Z = U + \alpha Z, \quad \ldots \ldots \quad 4.$$

woraus

$$U = Z(1 - \alpha) \quad \ldots \ldots \quad 5.$$

Diefe Ableitung könnte Bedenken erregen, weil nach obiger Erklärung die Arbeitsfeftigkeit des Materials diejenige Maximalfpannung ift, welche nie den Bruch herbeiführt, während wir unter Tragfeftigkeit diejenige Spannung verftanden haben, welche bei ruhender Belaftung den Bruch zur Folge hat. Man braucht jedoch nur ftatt der Tragfeftigkeit eine um eine unendlich kleine Gröfse geringere Spannung zu fubftituiren, fo wird diefe bei ruhender Belaftung niemals den Bruch herbeiführen, alfo für diefe Belaftungsart die Arbeitsfeftigkeit fein. Die Gleichung 4. kann mithin als richtig angefehen werden.

Wird der Werth für U aus Gleichung 5. in 3. eingeführt, fo ergiebt fich:

$$A = (1 - \alpha) Z + \alpha C \quad \ldots \ldots \quad 6.$$

Für Beanfpruchung auf Zug erhält man nun aus den Verfuchen im Mittel

	für Schmiedeeifen:	für Stahl:	
	$\alpha = 0{,}45$	$\alpha = 0{,}56$;	
mithin	$A = 0{,}55\, Z + 0{,}45\, C$	$A = 0{,}44\, Z + 0{,}56\, C$	7.

Da für Beanfpruchung auf Druck zur Zeit genügende Verfuche nicht vorliegen, fo folgert *Winkler*, um für Druck eine brauchbare Formel zu erhalten, wie folgt.

Bezeichnet D die Tragfeftigkeit, A_1 die Arbeitsfeftigkeit und C_1 die zugehörige Minimalfpannung für Druck, fo kann man entfprechend der Gleichung 6. fetzen:

$$A_1 = (1 - \alpha_1) D + \alpha_1 C_1, \quad \ldots \ldots \quad 8.$$

in welcher Gleichung die Druckbeanfpruchungen mit pofitivem Vorzeichen einzuführen find. Wird nun die Arbeitsfeftigkeit für diejenige Beanfpruchung, bei welcher der Maximalzug gleich dem Maximaldruck ift, G genannt, d. h. ift G diejenige Arbeitsfeftigkeit, welche einer zwifchen $-G$ und $+G$ wechfelnden Beanfpruchung entfpricht, fo gilt für diefe fowohl Gleichung 6., wie Gleichung 8. In Gleichung 6. ift fodann $A = G$ und $C = -G$ zu fetzen, d. h. es wird:

$$G = (1 - \alpha) Z - \alpha G \quad \ldots \ldots \quad 9.$$

---

[156]) Siehe: Winkler, E. Wahl der zuläffigen Inanfpruchnahme der Eifenconftructionen etc. Wien 1877.

In Gleichung 8. ift $A_1 = G$ und $C_1 = - G$ zu fetzen; mithin ergiebt fich

$$G = (1 - \alpha_1)\ D - \alpha_1\ G \quad . \quad . \quad . \quad 10.$$

Man erhält aus Gleichung 9. und 10. bezw.:

$$G = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right) Z \quad \text{und} \quad G = \left(\frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_1}\right) D.$$

Die Gleichfetzung beider Werthe für G ergiebt:

$$\left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right) Z = \left(\frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_1}\right) D, \text{ woraus } \alpha_1 = \frac{D(1 + \alpha) - Z(1 - \alpha)}{D(1 + \alpha) + Z(1 + \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad 11.$$

Man kann nun fetzen

für Schmiedeeifen:	für Stahl:
$D = {}^7/_8\ Z$ und $\alpha = 0{,}45$.	$D = {}^5/_4\ Z$ und $\alpha = 0{,}56$.

Es folgt fonach aus den Gleichungen 11. und 8.

$\alpha_1 = 0{,}4$	$\alpha_1 = 0{,}63$
$A_1 = 0{,}6\ D + 0{,}4\ C_1$	$A_1 = 0{,}37\ D + 0{,}63\ C_1$ . . . . 12.

284. Eifenftäbe beanfprucht: 1) nur auf Zug.

Die vorftehenden Gleichungen 6. und 7., 8. und 12. dienen zur Beftimmung des Querfchnittes für Stäbe, welche auf Normalfeftigkeit, alfo auf Zug oder Druck beanfprucht werden.

1) Stäbe, welche nur auf Zug beanfprucht werden.

Der Maximalzug in einem Stabe fei P_{max}, der Minimalzug fei P_{min}. Der Querfchnitt fei F; alsdann ift die Maximalfpannung im Stabe pro Flächeneinheit $= \frac{P_{max}}{F}$, die Minimalfpannung pro Flächeneinheit $= \frac{P_{min}}{F}$. Die wirklich höchftens ftattfindende Beanfpruchung foll nur den n-ten Theil der betreffenden Arbeitsfeftigkeit betragen, d. h. es foll fein:

$$\frac{P_{max}}{F} = \frac{A}{n} \quad \text{und} \quad \frac{P_{min}}{F} = \frac{C}{n}.$$

Alsdann ift n der Sicherheits-Coefficient.

Aus Gleichung 6. folgt

$$\frac{A}{n} = (1 - \alpha)\ \frac{Z}{n} + \frac{\alpha\ C}{n} \quad \text{und} \quad \frac{P_{max}}{F} = (1 - \alpha)\ \frac{Z}{n} + \alpha\ \frac{P_{min}}{F}.$$

Z ift die Beanfpruchung bei ruhender Belaftung, daher $\frac{Z}{n}$ die für ruhende Belaftung zuläffige Beanfpruchung. Diefelbe möge K fein; alsdann ift

$$\frac{P_{max}}{F} = (1 - \alpha)\ K + \alpha\ \frac{P_{min}}{F} \quad \text{und} \quad F = \frac{P_{max} - \alpha\ P_{min}}{(1 - \alpha)\ K} \quad . \quad . \quad . \quad 13.$$

Bezeichnet man den im Stabe durch die ruhende conftante Belaftung auftretenden Zug mit P_0, den durch mobile Belaftung allein auftretenden Maximalzug mit P_1, fo ift $P_{max} = P_0 + P_1$ und $P_{min} = P_0$, fonach nach Gleichung 13.

$$F = \frac{P_0 + P_1 - \alpha\ P_0}{(1 - \alpha)\ K} = \frac{P_0}{K} + \frac{P_1}{(1 - \alpha)\ K} \quad . \quad . \quad . \quad 14.$$

Die für ruhenden Zug zuläffige Beanfpruchung K kann nach *Winkler* unbedenklich für Schmiedeeifen mit 1400, für Stahl mit 1800 kg pro 1 qcm angenommen werden, fo dafs fich ergiebt

für Schmiedeeifen:	für Stahl:
$F = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{770}$	$F = \frac{P_0}{1800} + \frac{P_1}{792}$ . . . . . 15.

Falls die mobile Belaftung in Verbindung mit Stöfsen wirkt, empfiehlt es fich, denfelben durch Vergröfserung des Werthes von P_1 Rechnung zu tragen. Es dürfte für die bei Hochbauten vorkommenden Fälle genügen, ftatt P_1 den Werth $1{,}2\ P_1$ einzufetzen, fo dafs dann die Gleichungen 15. übergehen in:

$$F = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{640} \quad \text{und} \quad F = \frac{P_0}{1800} + \frac{P_1}{660} \quad . \quad . \quad . \quad 16.$$

2) Stäbe, welche nur auf Druck beanſprucht werden. 285. 2) nur auf Druck.

Durch Anwendung der Gleichung 8. erhält man mittels einer analog der obigen zu führenden Entwickelung (ſiehe Gleichung 13.)

$$F = \frac{P_{max} - \alpha_1 P_{min}}{(1 - \alpha_1)\, K_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 16^a.$$

Darin bedeutet P_{max} den gröſsten im Stabe ſtattfindenden Druck, P_{min} den kleinſten im Stabe ſtattfindenden Druck. Bezeichnet wieder P_0 den durch die conſtante Belaſtung im Stabe auftretenden Druck, P_1 den durch mobile Belaſtung auftretenden Maximaldruck, ſo iſt, wie oben, $P_{max} = P_0 + P_1$ und $P_{min} = P_0$, daher

$$F = \frac{P_0 + P_1 - \alpha_1 P_0}{(1 - \alpha_1)\, K_1} = \frac{P_0}{K} + \frac{P_1}{(1 - \alpha_1)\, K_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 17.$$

Die zuläſſige Beanſpruchung K_1 auf Druck kann für Schmiedeeiſen mit 1200, für Stahl mit 2200 kg pro 1 qcm angenommen werden, und es ergiebt ſich alsdann

für Schmiedeeiſen: für Stahl:

$$F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{720} \qquad F = \frac{P_0}{2200} + \frac{P_1}{800} \quad \ldots \quad 18.$$

Bei ſtoſsweiſe beanſpruchten Stäben kann man nach Früherem wieder ſtatt P_1 den Werth 1,2 P_1 einführen und erhält:

$$F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{600} \quad \text{und} \quad F = \frac{P_0}{2200} + \frac{P_1}{670} \quad \ldots \quad 19.$$

3) Stäbe, welche auf Zug und Druck, bei überwiegendem Zug beanſprucht werden. 286. 3) auf Zug u. Druck bei überwieg. Zug.

Die Gleichung 13. gilt auch, wenn P_{min} eine Druckbeanſpruchung iſt; denn bei der Ableitung dieſer Gleichung iſt in Bezug auf P_{min} keine gegentheilige Annahme gemacht. Behalten die Bezeichnungen P_0 und P_1 dieſelbe Bedeutung, wie ſub 1. und verſtehen wir unter $-P_2$ den durch die mobile Belaſtung im Stabe entſtehenden Maximaldruck, ſo iſt:

$$P_{max} = P_0 + P_1 \quad \text{und} \quad P_{min} = P_0 - P_2;$$

mithin

$$F = \frac{P_0 + P_1 - \alpha\,(P_0 - P_2)}{(1 - \alpha)\, K} = \frac{P_0\,(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)\, K} + \frac{P_1}{(1 - \alpha)\, K} + \frac{P_2\, \alpha}{(1 - \alpha)\, K},$$

$$F = \frac{P_0}{K} + \frac{P_1}{(1 - \alpha)\, K} + \frac{\alpha\, P_2}{(1 - \alpha)\, K} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 20.$$

Unter Zugrundelegung derſelben Werthe von K, wie ſub 1., erhält man

für Schmiedeeiſen: für Stahl:

$$F = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{770} + \frac{P_2}{1700} \qquad F = \frac{P_0}{1800} + \frac{P_1}{792} + \frac{P_2}{1400} \quad . \quad 21.$$

Wirkt die mobile Belaſtung ſtoſsweiſe, ſo wird

$$F = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{640} + \frac{P_2}{1400}, \ \text{bezw.}\ F = \frac{P_0}{1800} + \frac{P_1}{660} + \frac{P_2}{1170} \quad . \quad 22.$$

4) Stäbe, welche auf Zug und Druck, bei überwiegendem Druck, beanſprucht werden. 287. 4) auf Zug u. Druck bei überwieg. Druck.

Bedeutet nunmehr P_2 die gröſste im Stabe durch die mobile Belaſtung entſtehende Zugſpannung und wird dieſelbe in Gleichung 16. negativ eingeführt, ſo ergiebt ſich, da

$$P_{max} = P_0 + P_1 \quad \text{und} \quad P_{min} = P_0 - P_2$$

iſt, ähnlich wie vorhin:

$$F = \frac{P_0}{K_1} + \frac{P_1}{(1 - \alpha_1)\, K_1} + \frac{\alpha_1\, P_2}{(1 - \alpha_1)\, K_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 23.$$

Unter Zugrundelegung der gleichen Werthe von K_1, wie ſub 2., erhält man

für Schmiedeeiſen: für Stahl:

$$F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{720} + \frac{P_2}{1800} \qquad F = \frac{P_0}{2200} + \frac{P_1}{800} + \frac{P_2}{1270} \quad . \quad 24.$$

Für mit Stöfsen wirkende Belaftung ergiebt fich:

$$F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{600} + \frac{P_2}{1500}\,, \text{ bezw. } F = \frac{P_0}{2200} + \frac{P_1}{670} + \frac{P_2}{1060} \quad . \quad 25.$$

Mit Gufseifen und mit Holz find zur Zeit noch keine gröfseren Verfuche zur Ermittelung der Einwirkung wiederholter Beanfpruchungen vorgenommen worden, und es empfiehlt fich defshalb, für Stäbe aus diefen Materialien vorläufig noch das ältere Verfahren der Querfchnittsbeftimmung anzuwenden.

288. Beifpiele. Beifpiele. 1) Eine fchmiedeeiferne Stange werde durch das Eigengewicht mit einer Zugkraft $P_0 = 6750^{\text{kg}}$ und durch mobile Belaftung im Maximum mit einer Zugkraft $P_1 = 12\,000^{\text{kg}}$ beanfprucht; es ift die Querfchnittsgröfse zu beftimmen; auf Stöfse braucht keine Rückficht genommen zu werden.

Nach Gleichung 15. ift

$$F = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{770} = \frac{6750}{1400} + \frac{12\,000}{770} = 20{,}4^{\text{ qcm}}.$$

Wird ein kreisförmiger Querfchnitt gewählt, fo ergiebt fich der Durchmeffer deffelben aus der Gleichung

$$d = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4\,.\,20{,}4}{3{,}14}} = 5{,}1^{\text{ cm}}.$$

2) Bei einer fchmiedeeifernen gedrückten Stange betrage $P_0 = 3830^{\text{kg}}$ und $P_1 = 7300^{\text{kg}}$. Alsdann ift laut Gleichung 18.

$$F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{720} = \frac{3840}{1200} + \frac{7200}{720} = 13{,}2^{\text{ qcm}}.$$

Bei Wahl eines kreisförmigen Querfchnitts ergiebt fich:

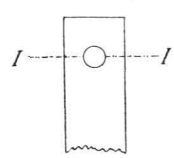
$$d = \sqrt{\frac{4\,.\,13{,}2}{3{,}14}} = 4{,}1^{\text{ cm}}.$$

Ueber die wegen Beanfpruchung auf Zerknicken bei den gedrückten Stäben vorzunehmende Vergröfserung des Querfchnittes wird im nächften Abfchnitt (Kap. 1) die Rede fein.

289. Beanfpruchung bei Querfchnitts-veränderungen. Die Gleichung 2. $N = \frac{P}{F}$ ergab fich unter der Annahme einer gleichförmigen Vertheilung der Kraft P über die ganze Querfchnittsfläche F. Diefe Annahme ift aber nur richtig, wenn 1) der Querfchnitt des Körpers conftant ift und 2) die äufsere Kraft P fich über die Endflächen gleichmäfsig vertheilt. Die Gefetze der Kraftvertheilung für den Fall, dafs diefe beiden Bedingungen nicht erfüllt find, können auf rein theoretifchem Wege nicht oder nur in einzelnen Fällen genau ermittelt werden. Gewöhnlich wird jedoch bei den Berechnungen auf die Nichtbekanntfchaft mit diefen Gefetzen keine Rückficht genommen und die Gleichung $N = \frac{P}{F}$ auch für diefe Fälle einfach als richtig angenommen.

Wenn ein Stab an einigen Stellen kleinere Querfchnittsflächen, als an anderen hat, fo ift felbftverftändlich die kleinfte Querfchnittsfläche der Berechnung des Stabes zu Grunde zu legen und diefe fo zu bemeffen, dafs die in ihr wirkende Spannung an keiner Stelle die zuläffige Beanfpruchung überfteigt. Findet in dem betreffenden Querfchnitte die Kraft P ftatt, fo berechnet man die Querfchnittsfläche F an diefer Stelle nach der Gleichung 2.

Fig. 68.



$$F = \frac{P}{K}\,,$$

worin K die zuläffige Beanfpruchung bedeutet. Der neben ftehende Stab (Fig. 68) hat feine kleinfte Querfchnittsfläche im Querfchnitte II, welcher der Nietmitte entfpricht, und es mufs demnach diefe Querfchnittsfläche der obigen Gleichung genügen. Aehnlich ift bei den Stäben in

Fig. 69 und 70 die durch die Verengung beſtimmte Stelle als ſchwächſte der Berechnung zu Grunde zu legen. Dabei iſt jedoch zu beachten, daſs bei Anwendung obiger Gleichung für K ein anderer Werth als derjenige einzuführen iſt, welcher für Berechnung einer ungeſchwächten Stange zu Grunde gelegt wird.

Fig. 69.

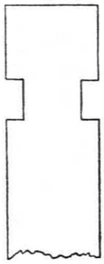
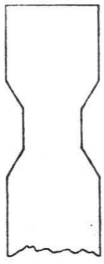


Fig. 70.



Zur Conſtatirung dieſer Thatſache hat *Winkler* [157]) Verſuche mit Kautſchukmodellen angeſtellt und dabei gefunden, daſs die Beanſpruchung pro 1 qcm bei plötzlicher Veränderung der Querſchnittsfläche weſentlich gröſser iſt, als wenn der Stab auf ſeine ganze Länge den kleinſten Querſchnitt hätte. Dieſe Vergröſserung der Beanſpruchung iſt beſonders groſs, wenn die Veränderung des Querſchnittes mittels eines ſcharfen Abſatzes ſtattfindet (Fig. 69), während ſie bedeutend kleiner iſt, wenn zur Ueberführung des kleineren Querſchnittes in den gröſseren ein allmählicher Uebergang hergeſtellt wird (Fig. 70). Im erſteren Falle zeigt ſich eine Vergröſserung der Beanſpruchung bis zu 30 und 35 Procent. Da die Verſuche noch nicht definitiv abgeſchloſſen ſind, ſo dürfte es an dieſer Stelle genügen, aus denſelben folgende Regeln zu ziehen:

1) Bei einer Querſchnittsveränderung iſt der Uebergang von der einen Querſchnittsform zur anderen möglichſt allmählich vorzunehmen.

2) Der Berechnung iſt die kleinſte Querſchnittsfläche zu Grunde zu legen.

3) Die pro Flächeneinheit des kleinſten Querſchnitts zuläſſige Beanſpruchung iſt kleiner anzunehmen, als wenn der Stab einen conſtanten Querſchnitt hätte.

Die Gröſse der Formänderung gezogener oder gedrückter Stäbe ergiebt die Gleichung 1. 290. Formänderung der Stäbe.

$$\frac{\Delta\, l}{l} = \frac{P}{F E} \quad \text{oder} \quad \Delta\, l = \frac{P\, l}{F E}\,.$$

Beiſpiel. Iſt bei der in Beiſpiel 1. auf S. 252 angenommenen Stange $l = 5^{\mathrm{m}}$, ſo wird

$$\frac{\Delta\, l}{l} = \frac{18\,750}{20{,}4\,.\,E}\,.$$

Nach der Tabelle in Art. 281, S. 247 iſt für Schmiedeeiſen $E = 2000^{\mathrm{t}}$ pro 1 qcm, daher

$$\frac{\Delta\, l}{l} = \frac{18\,750}{20{,}4\,.\,2\,000\,000} = 0{,}00046 \quad \text{und} \quad \Delta\, l = 0{,}00046\,.\,5 = 0{,}0023^{\mathrm{m}}.$$

Die Verlängerung beträgt alſo $2{,}3^{\mathrm{mm}}$.

Betrachtet man die obige Gleichung (ſiehe S. 246)

$$\frac{\Delta\, l}{l} = \frac{N}{E}$$

und unterſucht, wie groſs die Spannung N pro Flächeneinheit des Querſchnittes ſein müſſte, damit die Verlängerung $\Delta\, l$ genau ſo groſs würde, wie die urſprüngliche Stablänge — vorausgeſetzt, daſs dieſe Formel für das Verlängerungsverhältniſs noch bis zu der in dieſem Falle nöthigen Spannungsgröſse gelten würde, ſo erhält man

$$\frac{l}{l} = \frac{N}{E} = 1 \quad \text{oder} \quad N = E,$$

d. h. diejenige Spannung pro Flächeneinheit, welche den Stab auf die doppelte Länge verlängern würde, wenn das Verlängerungsgeſetz innerhalb dieſer Grenzen giltig wäre, iſt gleich E. Daher findet man häufig den Elaſticitäts-Modulus folgendermaſsen definirt: der Elaſticitäts-Modulus iſt diejenige Spannung, welche pro Flächeneinheit des Stabquerſchnittes wirken müſſte, um den Stab auf das Doppelte ſeiner urſprünglichen Länge zu vergröſsern, falls innerhalb der dadurch bedingten Spannungsgrenzen das Elaſticitätsgeſetz giltig bliebe.

---

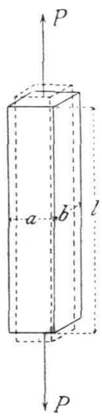
157) Deformationsverſuche mit Kautſchuk-Modellen. Civiling. 1878, S. 81.

Bei Beanfpruchung auf Druck würde die Verkürzung in diefem Falle $= l$ fein, d. h. der Stab zur Länge Null zufammengedrückt werden. Da die Elafticitätsgefetze nicht bis zu den erwähnten Grenzen gelten, fo ift die in Art. 279, S. 245 gegebene Definition des Elafticitäts-Coefficienten vorzuziehen.

291. Transverfale Längen-änderungen.

Die auf einen Körper wirkenden Kräfte P erzeugen aufser der Längenänderung in der Kraftrichtung auch folche in allen anderen Richtungen. Wir legen durch einen beliebigen Punkt der Stabaxe (Fig. 71) 3 Coordinatenaxen, deren eine mit der Stabaxe zufammenfällt, deren andere beiden normal zu der erfteren ftehen. Man nennt fodann die Längenänderung in der Richtung der Stabaxe die **longitudinale**, diejenigen in den Richtungen der beiden anderen Axen die **transverfalen** Längenänderungen.

Fig. 71.



Die transverfalen Längenänderungen find der longitudinalen Längenänderung umgekehrt proportional. Bezeichnet μ einen für verfchiedene Materialien befonders zu ermittelnden Coefficienten, fo ift

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{\mu}\frac{\Delta l}{l} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu_1}\frac{\Delta l}{l}.$$

Nun ift $\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{E}$, daher

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{\mu}\frac{N}{E} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu_1}\frac{N}{E}.$$

Bei Körpern, welche nach allen Richtungen gleiche Elafticität haben, d. h. bei fog. ifotropen Körpern ift $\mu = \mu_1$, daher

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu}\frac{N}{E}.$$

Für ifotrope Körper liegt μ zwifchen 3 und 4.

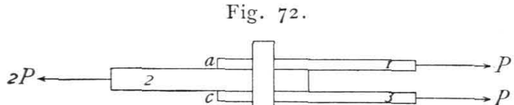
3. Kapitel.

Schubelafticität und Schubfeftigkeit.

292. Schub-fpannungen.

Der Fall der reinen Schubelafticität tritt, wie bereits in Art. 277, S. 244 gefagt wurde, ein, wenn die wirkenden Kräfte das Beftreben haben, zwei Nachbarquerfchnitte fo gegen einander zu verfchieben, dafs die Entfernung der Querfchnittebenen diefelbe bleibt. Dies ift nur möglich, wenn die Kräfte unmittelbar neben der Ebene wirken, längs deren das Beftreben einer Verfchiebung ftattfindet, und wenn diefelben fich zu zwei Refultirenden vereinen laffen, welche einander nach Gröfse und Richtung genau gleich, dem Sinne nach entgegengefetzt find. Man nennt diefe Kräfte die **abfcherenden Kräfte**.

Fig. 72.



In der Technik kommt diefer Fall ganz klar bei den Niet- und Bolzenverbindungen vor. Die beiden Kräfte P (Fig. 72) haben das Beftreben, die Bleche 1 und 3 nach rechts zu verfchieben; diefe Verfchiebung wird durch den Niet verhindert, welcher die Bleche 1 und 3 mit 2 verbindet. Längs jeder der beiden Trennungsflächen $a\,b$ und $c\,d$ wirkt je eine Kraft P nach rechts im Bleche 1, bezw. 3, je eine Kraft P nach links im Bleche 2.

Man kann für die Beftimmung der Spannungen, welche in den auf reine Schubelafticität beanfpruchten Querfchnitten entftehen, mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit annehmen, dafs die abfcherenden Kräfte fich gleichförmig über die ganzen abzufcherenden Querfchnitte vertheilen, mithin in dem Querfchnitt eine gleichförmig vertheilte Schubfpannung erzeugen. Daraus folgt, dafs der Widerftand gegen Abfcheren der Gröfse des abzufcherenden Querfchnittes direct proportional ift.