

## Quasi-Zufall auf Abruf *Pseudo-Randomness on Demand*

Peter Grabner, Robert Tichy

Der Spezialforschungsbereich (SFB) „Quasi-Monte-Carlo-Methoden: Theorie und Anwendungen“ wurde mit 1. Februar 2014 mit Teilprojekten in Linz, Graz, Salzburg und Wien mit einer Laufzeit von vier Jahren und der Möglichkeit der Verlängerung um weitere vier Jahre eingerichtet.

### Was sind Quasi-Monte-Carlo-Methoden?

Um zu erklären, was der Titel des SFB mit Monte Carlo und damit wohl mit dem dortigen Casino zu tun hat, muss etwas ausgeholt werden. Die Monte-Carlo-Methode wird schon seit Langem in der Physik, besonders der Kernphysik, für Simulationen verwendet. Der Name bezieht sich auf die Verwendung von zufällig erzeugten Punkten zur Lösung mathematischer Probleme. „Zufällig erzeugte Punkte“ beinhalten zwei Probleme, nämlich einerseits die Frage, wie man auf dem Computer wirklich „zufällig“ Zahlenwerte erzeugen kann, und andererseits die prinzipielle Einschränkung der Größenordnung des Fehlers aus der Wahrscheinlichkeitstheorie mit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Punkte. Darüber hinaus erhält man Resultate, die immer „mit hoher Wahrscheinlichkeit“ korrekt sind.

Diese beiden Einschränkungen führten zur Prägung des neuen Begriffs „Quasi-Monte-Carlo (QMC)-Methode“, bei der man versucht, die Stützstellen für das jeweilige numerische Verfahren deterministisch, also ohne zufälligen Einfluss, zu wählen, aber nach Möglichkeit mit zumindest gleich guten Eigenschaften wie zufällige Punkte. Tatsächlich stellt sich bei den Konstruktionen solcher Punkte heraus, dass die Fehlerordnung  $1/\sqrt{N}$  sogar auf  $\log(N)^d/N$  verbessert werden kann; dabei steht  $d$  für die Dimension des zugrunde liegenden Bereichs. Durch den Übergang von Monte-Carlo-Methoden zu QMC-Methoden kann also nicht nur eine deutliche Verbesserung der Konvergenzordnung der Verfahren, sondern auch ein garantiert korrektes Ergebnis erreicht werden. Die Konstruktion von möglichst vielen, oft problemangepassten QMC-Punktfolgen besonders für hohe Dimensionen ist ein in Österreich schon seit Jahrzehnten besonders stark vertretenes >

*The special research area (SFB) “Quasi-Monte Carlo Methods: Theory and Applications” was established with participating research projects in Linz, Graz, Salzburg, and Vienna on February 1, 2014. The special research area is funded for four years, with a possible extension for four additional years.*

### What are Quasi-Monte Carlo Methods?

*In order to clarify what the title of the SFB has to do with Monte Carlo, and possibly with the casino there, we have to give some explanations. The “Monte Carlo Method” was used for a long time in nuclear physics for simulations. The name alludes to the fact that randomly generated points were used for the solution of complex mathematical problems. Randomly generated points have two intrinsic problems, namely first the question of how to generate them efficiently on a computer, and secondly the fact that probability theory predicts an error for the numerical error that decays like the square root of the number of points. Furthermore, the results obtained are only correct “with high probability”.*

*These restriction have led to the introduction of the new notion of the Quasi-Monte Carlo (QMC) Method, which replaces the random points by deterministically chosen points, preserving their good properties. >*

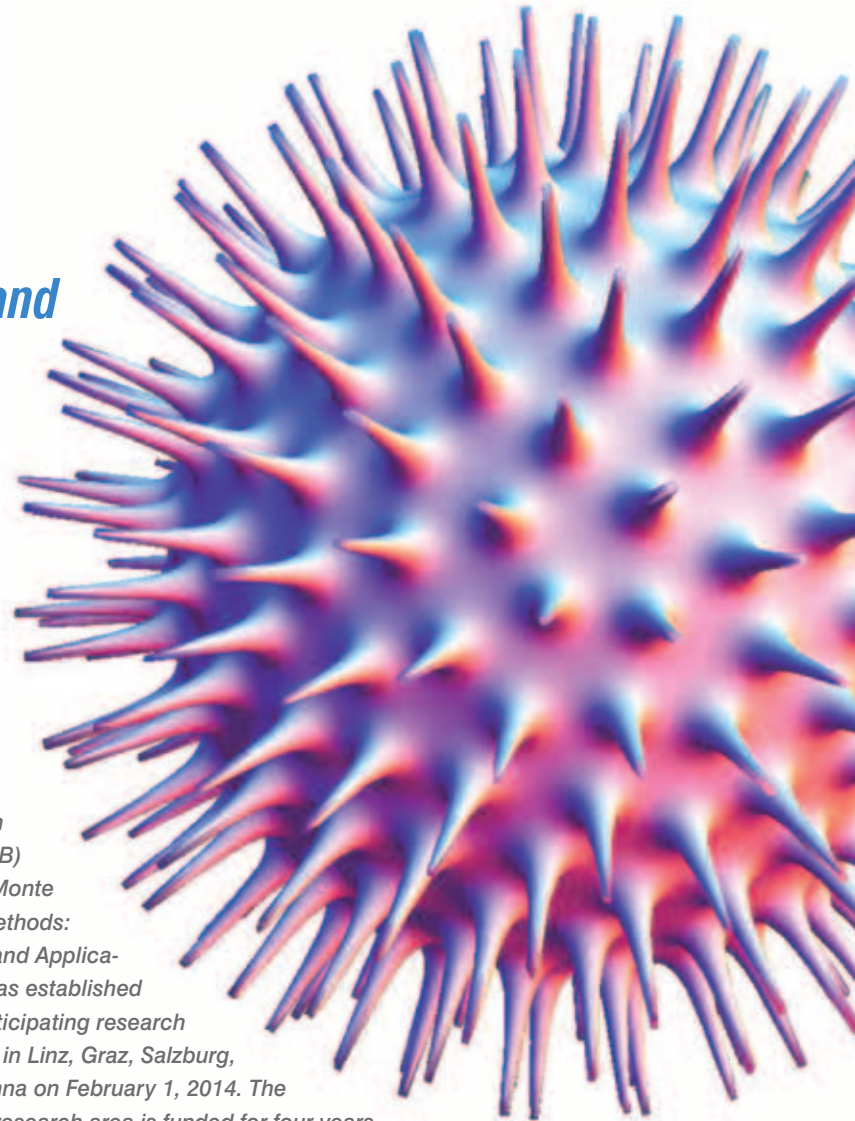
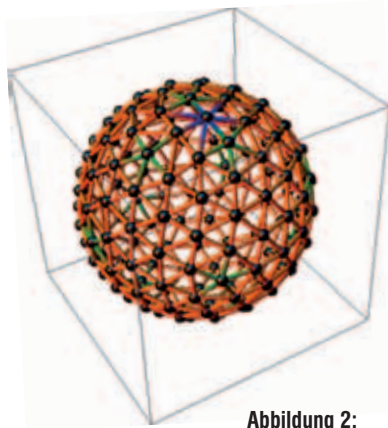


Abbildung 1:  
Seeigel: Punktverteilung  
minimaler Energie.  
Figure 1:  
Sea urchin: point  
set of minimal energy.

© Institut für Analysis und Computational Number Theory



**Abbildung 2:**  
**Punktverteilung**  
**minimaler Energie.**

*Figure 2:*  
*Minimal energy point set.*



**Abbildung 3:**  
**Potenzial einer Punktverteilung**  
**minimaler Energie.**

*Figure 3:*  
*Potential of a point set of*  
*minimal energy.*

Abbildungen/Figures © Institut für Analysis und Computational Number Theory

mathematisches Forschungsgebiet, das in dem erwähnten SFB gebündelt wird. Die beteiligten Forschungsgruppen haben weltweite Kontakte, etwa in die USA, nach Japan, Australien, Kanada, Deutschland, Frankreich und Italien.

### **Punktverteilungen auf Sphären und Mannigfaltigkeiten: minimale Energie und sphärische Designs**

Dieses von Peter Grabner geleitete Teilprojekt beschäftigt sich mit der Konstruktion von gut verteilten Punktmengen auf Mannigfaltigkeiten besonders der  $d$ -dimensionalen Sphäre. Zwei Konstruktionsprinzipien sollen besonders untersucht werden:

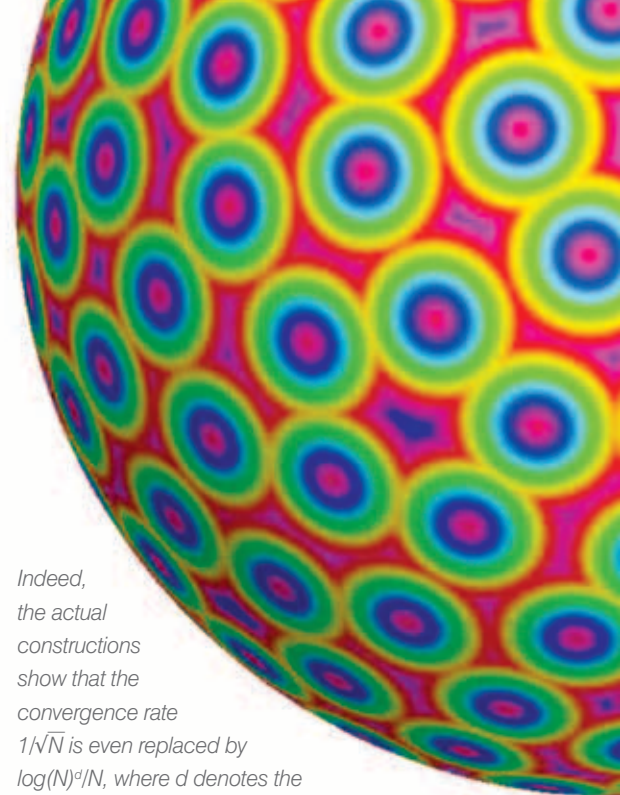
**Minimale Energie:** Für eine Menge von  $N$  Punkten auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  und eine positive reelle Zahl  $s$  ist die  $s$ -Energie durch die Summe der negativen  $s$ -ten Potenzen der paarweisen Abstände der Punkte gegeben. Eine Konfiguration von  $N$  Punkten heißt Punktmenge minimaler Energie, wenn sie diesen Ausdruck minimiert. Die Motivation für die Untersuchung solcher Konfigurationen stammt aus Physik und Chemie, wo Selbstorganisation durch lokale Interaktion oft zu beobachten ist. Wenn  $N$  für festen Wert des Parameters  $s$  gegen unendlich geht, strebt die Verteilung gegen eine Grenzverteilung.

**Sphärische Designs:** Ein sphärisches  $t$ -Design ist eine endliche Punktmenge auf der Sphäre, für die die Quadraturformel mit gleichen Gewichten Polynome bis zum Grad  $t$  exakt integriert. Erst 2010 gelang es A. V. Bondarenko et al. zu zeigen, dass es sphärische  $t$ -Designs mit  $O(t^d)$  Punkten gibt; dies ist dieselbe Größenordnung wie bekannte untere Schranken für diese Anzahl. Im Rahmen dieses Projektes sollen Diskrepanz, Integrationsfehler und Separationseigenschaften von Punktmengen minimaler Energie bzw. Designs untersucht werden. Darüber hinaus sollen auch zahlen-theoretische Konstruktionen für gut verteilte Punktmengen betrachtet werden.

### **Diophantische Gleichungen, Diskrepanz und Finanzmathematik**

Dieses von Robert Tichy geleitete Teilprojekt beschäftigt sich mit der Qualitätsanalyse von QMC-Methoden und deren Anwendungen in der Finanz- und Versicherungsmathematik. Dabei spielen drei Konzepte eine zentrale Rolle:

**1. Diskrepanz:** Dabei geht es um quantitative Untersuchungen zur Güte der Verteilung von deterministisch erzeugten Punktfolgen. Insbesondere ist



*Indeed, the actual constructions show that the convergence rate  $1/\sqrt{N}$  is even replaced by  $\log(N)^d/N$ , where  $d$  denotes the dimension of the underlying domain. Replacing the Monte Carlo Method by the QMC method not only yields a considerable improvement in the convergence rate, but also guarantees correct results. The construction of QMC points, especially those designed for specific applications and large dimensions, is a research field with a long tradition in Austria and has been focused on in this SFB. The different research groups have widespread international contacts, for instance in the United States, Japan, Australia, Canada, Germany, France and Italy.*

### **Distributing points on spheres and manifolds: minimal energy and designs**

*This project is directed by Peter Grabner and is concerned with the construction of well-distributed point sets on manifolds, especially the  $d$ -dimensional sphere. Mainly, two construction principles are investigated:*

**Minimal energy:** *For a set of  $N$  points on a manifold  $M$  and a positive real number  $s$ , the sum of the negative  $s$ -th powers of the mutual distances of the points is denoted as the  $s$ -energy of the point set. A configuration is called minimal energy configuration if it minimises this quantity. The motivation for these constructions comes from physics and chemistry, where self-organisation by local interactions is a commonly observed phenomenon. If the number points  $N$  tend to infinity for a fixed value of the parameter  $s$  the distribution of the points tends to a limiting distribution.*

**Spherical designs:** *A spherical  $t$ -design is a finite point set on the sphere inducing an equal weight quadrature formula, which is exact for polynomials up to the degree  $t$ . In 2010 A. V. Bondarenko et al. could prove that spherical  $t$ -designs with  $O(t^d)$  points exist; this is the same order of magnitude as the known lower bounds for this number.*



**Abbildung 4:**  
**Abstandsfunktion eines sphärischen Designs.**

**Figure 4:**  
**Mesh function of a spherical design.**

*In the course of this project the discrepancy, integration error and separation properties of point sets of minimal energy and spherical designs shall be investigated. Furthermore, number-theoretic constructions for well distributed point sets shall also be considered.*

**Diophantine equations, discrepancy, and actuarial mathematics**

*This project is directed by Robert Tichy and investigates the quality of QMC methods as well as their application in financial and actuarial mathematics. Three concepts play a crucial role in this context:*

**1. Discrepancy:** *This is used for the quantitative study of the distribution of deterministically generated point sequences. More precisely, it is desirable to find out which properties of random sequences are preserved for pseudo-random sequences of small discrepancy. For this purpose different notions of discrepancy, such as the classical discrepancy with respect to the supremum norm, the mean square discrepancy (with respect to axis parallel rectangles), or directional versions of discrepancy are used. There are interesting connections to harmonic analysis, fractal structures, and a number-theoretic problem of Zaremba.*

**2. Diophantine Equations:** *Estimates for the number of solutions of certain equations over the integers are used to prove probabilistic laws for the discrepancy. For instance, a law of the iterated logarithm and a central limit theorem for certain exponentially increasing sequences could be established. These laws turn out to be much more subtle than the "usual" analogous laws from probability theory: the occurring constants are no more universal, but they depend on the arithmetic structure of the sequence, and the laws are no more invariant under permutations of the sequence.*

**3. Applications in financial and actuarial mathematics:** *Important quantities in financial mathematics, such as the "fair" price of options or other financial derivatives, can be expressed as expectations with respect to certain probability laws. Evaluating these often leads to the computation of high-dimensional (dimension >1000) integrals, which can be treated numerically with QMC methods. Actuarial copula models are also considered in this project. Such models are needed for the implementation of the Basel III accord, and allow for the modelling of dependencies. ■*

es  
wün-  
schens-  
wert,  
herauszufinden,  
welche Eigenschaf-  
ten zufälliger Folgen für  
solche deterministischen  
Folgen kleiner Diskrepanz erhalten

bleiben. Dazu werden neben den klassischen Diskrepanzen bezüglich der Supremumsnorm und bezüglich des quadratischen Mittels (bezogen auf achsenparallele Testquader) auch richtungsunabhängige Diskrepanzen herangezogen. Dies führt zu interessanten Querverbindungen zur harmonischen Analysis, zu fraktalen Strukturen und zu einem zahlentheoretischen Problem von Zaremba.

**2. Diophantische Gleichungen:** Hier werden starke Abschätzungen für die Anzahl der Lösungen spezieller Klassen von Gleichungen in ganzen Zahlen dazu verwendet, wahrscheinlichkeitstheoretische Grundgesetze für Diskrepanzen zu beweisen. So gelingt es etwa, für exponentiell wachsende Folgen einer gewissen Bauart ein Gesetz vom iterierten Logarithmus und einen zentralen Grenzwertsatz herzuleiten. Diese Gesetze erweisen sich aber als viel subtiler als die aus der „gewöhnlichen“ Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannten Analoga: Die dabei auftretenden Konstanten sind nicht universell (sie hängen von der arithmetischen Feinstruktur ab) und die Gesetze sind nicht mehr unabhängig von der Anordnung der Punktfolgen.

**3. Anwendungen in der Finanz- und Versicherungsmathematik:** Wesentliche Kenngrößen der Finanzmathematik (etwa der „faire“ Preis von Optionen oder anderen Finanzderivaten) können als Erwartungswerte bezüglich gewisser Verteilungen dargestellt werden. Dies führt im Allgemeinen auf hochdimensionale Integrale (Dimension > 1000), die mittels QMC-Methoden effizient numerisch behandelt werden können. Auch versicherungsmathematische Copula-Modelle werden im Projekt berücksichtigt. Damit gelingt es, wie von Basel III gefordert, auch Abhängigkeitsstrukturen zu modellieren und numerisch zu simulieren. ■



Peter Grabner arbeitet am Institut für Analysis und Computational Number Theory auf dem Gebiet der Zahlentheorie, Kombinatorik und Gleichverteilung, im Besonderen der Konstruktion von gut verteilten Punktmengen auf Mannigfaltigkeiten.

*Peter Grabner works at the Institute for Analysis and Computational Number Theory. His research interests are in number theory, combinatorics, and uniform distribution, especially in the construction of well distributed point sets on manifolds.*



Robert Tichy ist Leiter des Instituts für Analysis und Computational Number Theory. Forschungsschwerpunkte im Bereich der Analysis, der Zahlentheorie und der Versicherungsmathematik.

*Robert Tichy is head of the Institute for Analysis and Computational Number Theory. His research interests are in analysis, number theory and actuarial and financial mathematics.*