

Allgemeines.

Die Statik der Hochbau-Constructionen ist die Lehre vom Gleichgewichte der Hochbauten; sie ermittelt die Bedingungen, unter denen die Bauwerke und deren Theile im Gleichgewichte sind und bleiben; sie bestimmt danach die denselben zu gebenden Constructionenformen.

251.
Aufgaben.

Die Statik der Bauconstructionen hat hiernach hauptsächlich zwei Aufgaben zu erfüllen: sie hat erstens die Dimensionen aller Theile der Bauwerke so zu bestimmen, daß dieselben mit Sicherheit den auf sie einwirkenden Kräften widerstehen können; sie hat zweitens für die einzelnen Constructionen rationelle Formen zu ermitteln.

Die Lösung der ersten Aufgabe erheischt, daß jeder Constructionstheil genügend stark, auch für die ungünstigsten Falles wirkenden Kräfte, angeordnet wird. Die dazu nöthigen Dimensionen sind wesentlich von der für die ganze Construction gewählten Form abhängig. Durch günstige Wahl dieser Form ist es möglich, wesentlich an Material zu sparen, ohne die Sicherheit zu verringern. Die Ermittlung derjenigen Form, bei welcher die verlangte Sicherheit mit geringstem Materialaufwande, oder, was annähernd dasselbe befaßt, mit geringstem Kostenaufwande erreicht wird, ist die zweite Aufgabe der Statik der Bauconstructionen.

Für die Lösung beider Aufgaben ist die Kenntniß derjenigen Kräfte nöthig, welche bei den verschiedenartigen möglichen Belastungszuständen im Inneren der Constructionen entstehen, d. h. der sog. inneren Kräfte oder Spannungen, die wohl auch widerstehende Kräfte genannt werden. Die inneren Kräfte aber stehen wiederum in einem ganz bestimmten Verhältniß zu den von Außen auf die Constructionen wirkenden Kräften, zu den sog. äußeren Kräften, welche auch als die angreifenden Kräfte bezeichnet werden.

252.
Äußere
und innere
Kräfte.

Eine jede statische Untersuchung zerfällt deshalb zunächst in zwei Operationen: in die Ermittlung der äußeren Kräfte, eventuell der für den zu untersuchenden Constructionstheil ungünstigsten äußeren Kräfte, und in die Ermittlung der inneren Kräfte oder Spannungen, welche durch die äußeren Kräfte hervorgerufen werden.

Die äußeren Kräfte lassen sich in zwei Hauptgruppen theilen:

1) Die Belastungen. Dieselben sind beim Beginne der Untersuchung theils gegeben, theils, wie z. B. die Eigengewichte, nicht gegeben; jedoch sind gewöhnlich ähnliche Constructionen ausgeführt und bekannt, nach denen die Belastungen annähernd bestimmt werden können.

2) Die Reactionen der festen Punkte, welche die zu betrachtenden Constructionen stützen. Diese Reactionen sind meistens von vornherein nicht gegeben und sind nach den Gesetzen der Statik, bezw. der Elasticitätslehre zu ermitteln.

253.
Ermittlung
der äußeren
Kräfte.

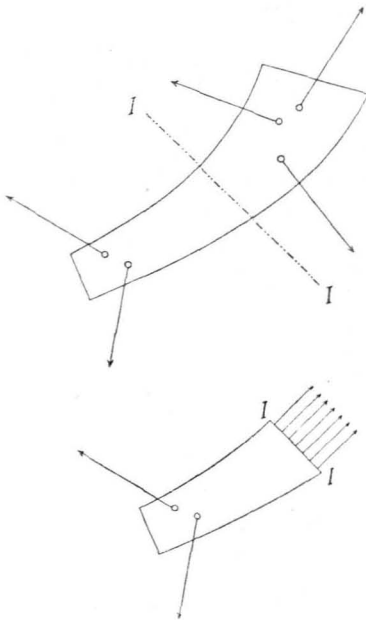
Da sich die Statik der Bauconstructions nur mit solchen Körpern beschäftigt, welche unter der Einwirkung der äußeren Kräfte im Gleichgewicht sind, so kann man für die sämtlichen äußeren Kräfte, welche auf eine Construction wirken, die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen und mittels der so gefundenen Gleichungen die unbekanntes äußeren Kräfte, die Reactionen ermitteln. Man führt deshalb die Reactionen als vorläufig unbekanntes Kräfte ein und stellt die Gleichgewichtsbedingungen auf. So lange die Kräfte in einer Ebene wirken, wie es in den hier zu betrachtenden Fällen meistens stattfindet, giebt es drei Gleichgewichtsbedingungen, also auch drei Gleichungen für die Ermittlung der Unbekannten. Aus drei Gleichungen kann man nur drei Unbekannte finden; sind mehr als drei Unbekannte vorhanden, so genügt die angegebene Methode nicht mehr. Die Reactionen dürfen also nicht mehr als drei Unbekannte enthalten, wenn die Aufgabe auf dem angegebenen Wege lösbar sein soll; anderenfalls ist zur Ermittlung der Reactionen die Elasticitätslehre zu Hilfe zu nehmen.

254.
Ermittlung
der inneren
Kräfte.

Nachdem die sämtlichen äußeren Kräfte gefunden sind, müssen die inneren Kräfte oder Spannungen aufgesucht werden. Das hierbei einzuschlagende Verfahren ist folgendes.

Man denkt den Körper an derjenigen Stelle, an welcher man die inneren Kräfte kennen lernen will, durch eine Ebene II (Fig. 52) durchgeschnitten und den

Fig. 52.



Theil links oder rechts dieser Ebene fortgenommen. Hier möge der Theil rechts fortgenommen werden. Vor dem Durchschneiden wurden auf das übrig bleibende Fragment links der Ebene von dem fortgehobenen Theile gewisse innere Kräfte übertragen, welche das Fragment im Verein mit den auf dasselbe wirkenden äußeren Kräften im Gleichgewicht hielten; denn nicht nur der ganze Körper, sondern auch jeder Theil desselben war vorher im Gleichgewichte. Bringt man demnach diese inneren Kräfte an der Schnittstelle wieder an, so befindet sich das Fragment wiederum im Gleichgewichte. Man kann daher auf das Fragment die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anwenden und aus diesen die unbekanntes inneren Kräfte ermitteln. Wie oben, stehen auch hier drei Bedingungsgleichungen zu Gebote; deshalb ist auch hier die Ermittlung der unbekanntes inneren Kräfte auf diesem Wege nur dann möglich, wenn dieselben bloß drei Unbekannte enthalten.

a) Grundgesetze der Statik fester Körper.

Obleich die Statik fester Körper im Allgemeinen hier als bekannt vorausgesetzt werden kann, sollen im Folgenden doch einige der wichtigsten zu verwendenden Sätze kurz angeführt werden, damit über die gemachten Annahmen keine Unklarheit herrsche.

1) Satz des statischen Momentes. Bekanntlich ist das statische Moment einer Kraft R in Bezug auf einen Punkt o (Fig. 53) das Product aus der Größe

255.
Statische
Momente.

der Kraft R in den normalen Abstand der Richtung dieser Kraft vom Punkte o , d. h. das statische Moment von R in Bezug auf den Punkt o ist $M = Rr$.

Dabei wird der normale Abstand r der Krafrichtung vom Punkte o der Hebelsarm der Kraft R für o genannt.

Aus dieser Erklärung folgt, daß die statischen Momente stets Producte von Kräften und Längen sind. Die Maßeinheiten, in denen sie ausgedrückt werden, sind demnach Producte aus Längen- und Kräfteinheiten. Ist die Kraft in Kilogrammen, die Länge in Centimetern angegeben, so ergibt sich das statische Moment in Kilogramm-Centimetern; ist die Kraft in Tonnen, die Länge in Metern angegeben, so ergibt sich das statische Moment in Tonnen-Metern etc.

Die Kraft R hat das Bestreben, die Ebene um den als fest gedachten Punkt o , resp. um eine im Punkte o normal zur Krafebene errichtete Axe zu drehen, hier also nach links. Wenn die statischen Momente mehrerer Kräfte aufzustellen sind, so ist zu beachten, daß die verschiedenen Kräfte allgemein verschiedene Drehrichtungen haben. Welche von diesen als positiv eingeführt wird, ist gleichgültig; ist aber die eine Drehrichtung als positiv angenommen, so ist die entgegengesetzte als negativ einzuführen.

Der im Folgenden häufig anzuwendende Satz des statischen Momentes lautet: Das statische Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene, in welcher die Kräfte liegen, ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte in Bezug auf denselben Punkt.

Dieser Satz giebt oft ein bequemes Mittel zur Ermittlung der Unbekannten. Wählt man den Punkt, in Bezug auf welchen man das statische Moment aufstellt, auf der Richtungslinie der Mittelkraft, so hat die letztere in Bezug auf diesen Punkt den Hebelsarm Null, also auch das statische Moment Null. Für diesen besonderen Fall heißt der obige Satz: Die algebraische Summe der statischen Momente einer Reihe von Kräften in Bezug auf einen auf der Richtungslinie der Mittelkraft liegenden Punkt ist gleich Null.

2) Satz vom Gleichgewicht der Kräfte. Derselbe lautet: Die an einem Körper angreifenden, in einer Ebene liegenden Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der in zwei normal zu einander stehende, sonst beliebige Richtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null ist und außerdem die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null ist.

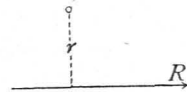
Man zerlege demnach sämtliche Kräfte ($K_1, K_2, K_3 \dots$ in Fig. 54) nach zwei Richtungen, die normal zu einander stehen, wobei die eine Richtung ganz willkürlich angenommen werden kann. Alsdann erhält man als Gleichgewichtsbedingungen für die sämtlichen Kräfte die Relationen:

$$\begin{aligned} \Sigma (K \cos \alpha) &= 0, & \Sigma (K \sin \alpha) &= 0, \\ \Sigma (K r) &= 0 \end{aligned}$$

Hier ist A als Momentenpunkt angenommen; es hätte indess auch jeder beliebige andere Punkt der Krafebene gewählt werden können.

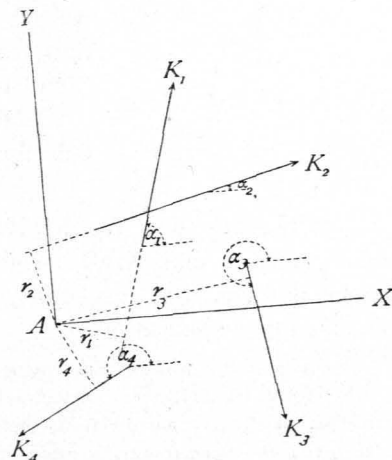
In sehr vielen Fällen ist die Mehrzahl aller

Fig. 53.



256.
Gleichgewicht
der
Kräfte.

Fig. 54.



äußeren Kräfte vertical gerichtet; fodann empfiehlt es sich, die Kräfte $K_1, K_2, K_3 \dots$ nach der horizontalen und verticalen Richtung zu zerlegen. In diesem Falle heißen die Bedingungsgleichungen, wenn wiederum alle Kräfte in einer Ebene liegen: Die an einem Körper angreifenden Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn

- α) die algebraische Summe der Horizontalkräfte gleich Null ist,
- β) die algebraische Summe der Verticalkräfte gleich Null ist,
- γ) die algebraische Summe der statischen Momente bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null ist.

Aus dem hier vorgeführten Satze gehen ohne Weiteres die folgenden, unter 3. bis 5. ausgesprochenen Sätze hervor.

- 3) Zwei auf einen Körper wirkende Kräfte halten denselben nur dann im Gleichgewicht, wenn beide der Größe nach genau gleich, dem Sinne nach genau einander entgegengesetzt sind und mit ihren Richtungslinien zusammenfallen (Fig. 55); denn nur dann sind alle drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt.

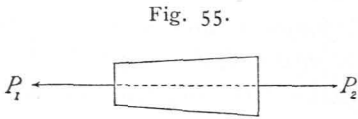
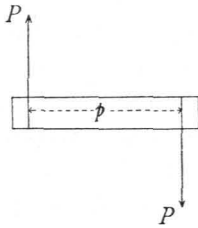


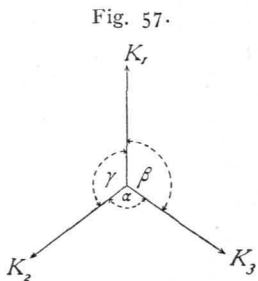
Fig. 56.



Sind die beiden Kräfte P und P (Fig. 56) zwar der Größe nach genau gleich, dem Sinne nach genau einander entgegengesetzt, fallen sie aber mit ihren Richtungslinien nicht zusammen, so sind allerdings die beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, nicht aber die dritte. Man nennt zwei solche Kräfte ein Kräftepaar und versteht unter dem Momente des Kräftepaares das Product aus der Größe der Kraft P in den

normalen Abstand der beiden Richtungslinien der Kräfte; d. h. es ist das Moment $M = Pp$.

- 4) Drei auf einen Körper wirkende Kräfte sind nur dann im Gleichgewichte, wenn sich ihre Richtungslinien in einem Punkte schneiden, jede der drei Kräfte numerisch genau eben so groß ist, wie die Resultirende der beiden anderen Kräfte, und mit der betreffenden Resultirenden einen Winkel von 180 Grad einschließt.



5) Wenn drei in derselben Ebene liegende Kräfte, welche sich in einem Punkte schneiden, im Gleichgewichte sind, so verhalten sich die Kräfte zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel.

Die drei Kräfte K_1, K_2 und K_3 (Fig. 57) befinden sich sonach im Gleichgewicht, wenn

$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

- 6) Gesetz der Wechselwirkung. Dasselbe lautet: Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, so erleidet er durch diesen Körper eine Kraft, welche der von ihm ausgeübten der Größe nach genau gleich, der Richtung nach genau entgegengesetzt ist.

Dieses Gesetz wird in der Folge sehr häufig angewendet werden. Es kommt unter Anderem bei den Auflagern der Träger in Betracht. Ein Träger AB (Fig. 58) übt durch sein Eigengewicht und die wirkenden Belastungen auf die Auflagerpunkte A und B die Drücke K und K_1 aus; dieselben sind nach unten gerichtet. Genau eben so groß sind die Gegendrücke, welche die Auflager auf die Träger aus-

237.
Zwei Kräfte
auf einen Körper
wirksam.

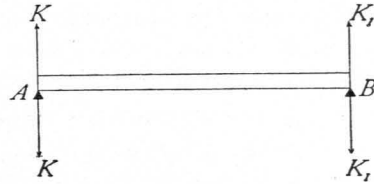
238.
Drei Kräfte
auf einen Körper
wirksam.

239.
Gesetz
der Wechsel-
wirkung.

üben. Diese sind nach oben gerichtet, da sie den ersteren Drücken K und K_1 genau entgegengesetzt gerichtet sein müssen.

Betrachtet man nur den Träger, so hat man die nach oben wirkenden Kräfte K und K_1 — als Reactionen — einzuführen; betrachtet man die Auflager, so sind die nach unten gerichteten Drücke K und K_1 der Untersuchung zu Grunde zu legen.

Fig. 58.



b) Grundlagen für die graphische Behandlung baustatischer Aufgaben.

Die Aufgaben der Statik der Bauconstructions können nicht nur durch Rechnung (auf analytischem Wege), sondern auch auf graphischem (geometrischem) Wege gelöst werden. Die graphische Behandlung hat manche Vortheile. Dieselbe führt in vielen Fällen rascher und leichter zum Ziele und gewährt fast in allen Fällen eine klarere Uebersicht über die Wirkung der Kräfte, als die Rechnung.

In den folgenden Untersuchungen werden meistens beide Methoden berücksichtigt werden. Damit über die bei der graphischen Behandlung vorauszusetzenden Begriffe volle Klarheit herrsche und um Wiederholungen zu vermeiden, sollen die Grundlagen für die graphische Behandlung hier kurz vorgeführt werden. Dabei wird die Annahme gemacht, dass sämtliche Kräfte in einer Ebene wirken.

1) Kräfte an einem Angriffspunkte. Die an einem Punkte angreifenden Kräfte können durch ihre Resultirende oder Mittelkraft ersetzt werden. Um diese Mittelkraft nach GröÙe und Richtung zu erhalten, construirt man das sog. Kraftpolygon.

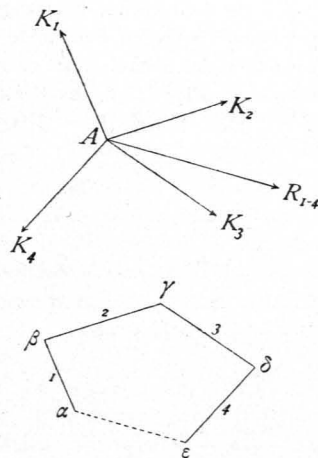
260.
Kraft-
polygon.

Das Kraftpolygon für eine Anzahl von Kräften ist derjenige Linienzug, welchen man erhält, wenn man sämtliche Kräfte nach irgend einem Maßstabe so aneinander reiht, dass die GröÙe, die Richtung und der Sinn einer jeden Kraft in diesem Linienzuge mit der GröÙe, der Richtung und dem Sinne der gegebenen Kraft übereinstimmt und dass der Anfangspunkt jeder Kraft mit dem Endpunkte der vorhergehenden Kraft zusammenfällt.

Der Maßstab für das Auftragen der Kräfte kann beliebig angenommen werden; doch müssen sämtliche Kräfte nach demselben Maßstabe aufgetragen werden.

Um das Kraftpolygon für die Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 zu erhalten, welche im Punkte A (Fig. 59) angreifen, trage man zunächst von einem beliebig anzunehmenden Punkte α aus nach irgend einem Maßstabe so viele Kräfteeinheiten ab, wie K_1 enthält, und zwar nach einer Richtung $\alpha\beta$, welche mit derjenigen von K_1 übereinstimmt. Ist etwa $K_1 = 20t$ und der Maßstab so gewählt, dass $1cm = 20t$ bedeutet, so würde man von α aus $1cm$ abzutragen haben. Man ziehe also durch α eine Linie parallel zur Richtung von K_1 und trage auf dieser Linie $\alpha\beta = K_1$ ab. Daran trage man K_2 ; zu dem Zwecke ziehe man durch β eine Linie parallel zur Richtung von K_2 und trage auf dieser Linie $\beta\gamma = K_2$ ab. In derselben Weise verfähre man weiter und erhält so $\gamma\delta = K_3, \delta\varepsilon = K_4$. Alsdann ist $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ das Kraftpolygon für die Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 .

Fig. 59.



Es ist oben angegeben, dass der Sinn der Kraft im Kraftpolygon mit dem der gegebenen Kraft übereinstimmen muss. In der gegebenen Kraft ist der Sinn durch einen Pfeil ausgedrückt, so dass Unklarheit über denselben nicht bestehen kann; im Kraftpolygon ergibt sich der Sinn ebenfalls unzweideutig, wenn man die Kräfte stets so aufrägt, dass die Richtung vom früheren Buchstaben des Alphabetes bis

zum höheren Buchstaben desselben mit der Pfeilrichtung der gegebenen Kraft übereinstimmt. Die Kraft $\alpha\beta$ wirkt also im Sinne von α nach β , nicht im Sinne von β nach α .

261.
Satz I.

Die GröÙe, die Richtung und der Sinn der Mittelkraft aller an einem Punkte A (Fig. 59) angreifenden Kräfte wird erhalten, indem man den Anfangspunkt des für diese Kräfte construirten Kraftpolygons mit dessen Endpunkte verbindet.

In Fig. 59 giebt also $\alpha\varepsilon$ die GröÙe, die Richtung und den Sinn der Mittelkraft der vier Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 an.

Die Mittelkraft der beiden Kräfte K_1 und K_2 wird nach dem bekannten Satz vom Parallelogramm der Kräfte durch die Diagonale des aus diesen beiden Kräften construirten Parallelogramms dargestellt;

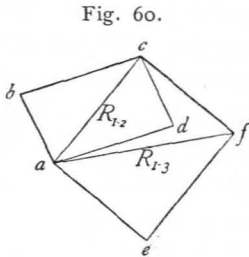


Fig. 60.

d. h. es stellt in Fig. 60 ac die Mittelkraft von K_1 und K_2 nach GröÙe und Richtung dar, wenn $ab = K_1, ad = K_2$ ist. Die Diagonale ac theilt das Parallelogramm $abcd$ in zwei congruente Dreiecke; es wird also genügen, das Dreieck abc zu construire, in welchem $ab = K_1$ und $bc = K_2$ ist. Alsdann ist die dritte Seite ac des Dreiecks gleich der Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2 . Das Dreieck abc ist aber nach der oben gegebenen Erklärung das Kraftpolygon für die beiden Kräfte K_1 und K_2 , und ac verbindet den Anfangspunkt a desselben mit dem Endpunkte c . Für zwei Kräfte ist damit unser Satz bewiesen.

Kommt eine dritte Kraft K_3 hinzu, so ist die Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2 mit K_3 zu vereinen, um die Resultirende R_{1-3} von K_1, K_2 und K_3 zu erhalten. Sei $K_3 = ae$, so construire man das Parallelogramm $acfe$, und ziehe die Diagonale af desselben. Die letztere ist die gesuchte Resultirende. Auch hier genügt es, um af zu erhalten, nur das Dreieck acf zu zeichnen. Man erhält also die Resultirende R_{1-3} , indem man an den Endpunkt der Resultirenden $R_{1-2} = ac$ die Kraft K_3 nach GröÙe und Richtung gleich cf anträgt und a mit f verbindet. Der Linienzug $abcfe$ ist aber nach obiger Erklärung das Kraftpolygon für die drei Kräfte K_1, K_2 und K_3 und af die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit dessen Endpunkte. Damit ist der Beweis unseres Satzes auch für drei Kräfte geliefert. In derselben Weise kann er ohne Schwierigkeit für eine beliebige Anzahl von Kräften geführt werden.

Das Kraftpolygon ist nur eine Hilfsfigur, welche wohl GröÙe, Richtung und Sinn der Mittelkraft, nicht aber deren Lage in der Ebene angiebt. Die Lage derselben ist aber nicht zweifelhaft, sobald man außer der Richtung der Kraft einen Punkt kennt, durch welchen die Kraft hindurch geht. Die Richtung wird hier durch das Kraftpolygon gegeben. Der Punkt ist auch bekannt; denn die Mittelkraft aller Kräfte muß durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt derselben, d. h. durch A (Fig. 59) gehen. Zieht man also durch A eine Linie parallel zu $\alpha\varepsilon$, so ergiebt diese die Mittelkraft nach Lage und Richtung; die GröÙe derselben ist $\alpha\varepsilon$.

262.
Satz II.

Wenn die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sind, so ist das Kraftpolygon eine geschlossene Figur.

Sind die auf einen Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, so ist ihre Resultirende gleich Null; die Resultirende wird aber nach Satz I durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit dessen Endpunkte dargestellt. Diese Verbindungslinie muß also für den Fall des Gleichgewichtes gleich Null sein; es muß demnach der Anfangspunkt des Kraftpolygons mit dessen Endpunkte zusammen fallen, d. h. das Kraftpolygon muß eine geschlossene Figur sein.

263.
Satz III.

Der Sinn der Mittelkraft ist vom Anfangspunkte des aus den Seitenkräften construirten Kraftpolygons nach dem Endpunkte desselben gerichtet; der Umfahrungsinn des ganzen Polygons mit Einschluss der Mittelkraft erleidet also am Endpunkte der Einzelkräfte eine Unterbrechung.

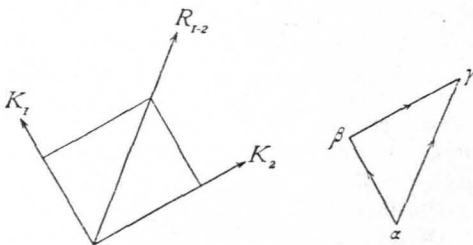


Fig. 61.

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es, die Mittelkraft zweier Kräfte aufzusuchen. Ist in Fig. 61 $\alpha\beta = K_1$ und $\beta\gamma = K_2$, so haben beide den durch die Pfeile angedeuteten Umfahrungsinn, welcher, wenn noch eine beliebige Anzahl von Kräften hinzukommt, immer derselbe bleibt, d. h. er ist stets vom Anfangs-

punkte des Kraftpolygons nach dem Endpunkte desselben gerichtet. Der Sinn der Resultirenden $R_{1-2} = \alpha\gamma$ ist aber, wie sich aus der Parallelogramm-Construction in Fig. 61 ergibt, von α nach γ gerichtet; er ist also dem Umlaufsinne der Einzelkräfte direct entgegengesetzt. Damit ist der Satz für zwei Kräfte bewiesen. Jede dritte Kraft K_3 läßt sich aber mit R_{1-2} in derselben Weise, wie bei K_1 und K_2 gezeigt, zusammenfassen; es handelt sich dabei auch stets nur um zwei Kräfte und gilt deshalb das Gefagte auch für R_{1-2} und K_3 , d. h. für K_1, K_2, K_3 . Die Mittelkraft der durch das Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ dargestellten Kräfte (Fig. 59) ist $\alpha\varepsilon$, der Sinn ist von α nach ε gerichtet; der Umlaufsinne erleidet sonach bei ε eine Unterbrechung.

Sind die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewicht, so ist für das ganze Kraftpolygon der Umlaufsinne derselbe.

264.
Satz IV.

Denn alsdann ist die Resultirende gleich Null, und diese ist nach Satz III die einzige Kraft, welche einen anderen Umlaufsinne hat, als die übrigen Kräfte. Diese einzige Kraft fällt hier fort; mithin haben in diesem Falle alle Kräfte denselben Umlaufsinne.

2) Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten. Wenn die auf einen Körper wirkenden Kräfte an verschiedenen Punkten desselben angreifen, so ist zunächst die Ermittlung der Größe und Richtung der Mittelkraft genau, wie unter I. angegeben, vorzunehmen.

265.
Kräfte an
versch. Angriffspunkten.

Denn man kann (Fig. 62) zunächst die beiden Kräfte K_1 und K_2 auf ihren Richtungslinien beliebig verschieben, also auch bis zu dem Schnittpunkte C derselben. Für die beiden im Punkte C angreifenden Kräfte liegt nun die Aufgabe genau so, wie oben entwickelt ist. Ist $K_1 = \alpha\beta$ und $K_2 = \beta\gamma$, so ist $\alpha\gamma$ die Resultirende R_{1-2} von K_1 und K_2 .

Diese Resultirende R_{1-2} greift in C , dem Schnittpunkte der beiden Kräfte K_1 und K_2 , an und hat die Richtung, welche durch $\alpha\gamma$ festgelegt ist, d. h. sie ist parallel zu $\alpha\gamma$. Um jetzt die Resultirende von R_{1-2} und K_3 , d. h. diejenige von K_1, K_2, K_3 zu finden, verfährt man genau so, wie bei der Zusammenfassung von K_1 und K_2 . Man verschiebt R_{1-2} und K_3 bis zum Schnittpunkte E ihrer Richtungslinien; in diesem muß die gefuchte Mittelkraft R_{1-3} angreifen. Die Zusammenfassung von R_{1-2} ($= \alpha\gamma$ im Kraftpolygon) und K_3 ($= \gamma\delta$ im Kraftpolygon) kann nun wiederum genau in der oben gezeigten Weise erfolgen, indem man $\gamma\delta = K_3$ an γ anträgt und $\alpha\delta$ zieht. $\alpha\delta$ giebt die Größe und Richtung der Resultirenden R_{1-3} von K_1, K_2 und K_3 an; diese Resultirende geht durch den Punkt E . In der gleichen Weise kann man auch bei mehreren Kräften weiter verfahren.

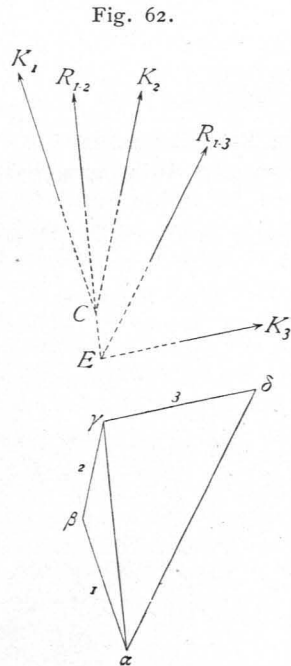


Fig. 62.

Wenn die Größe und Richtung der Mittelkraft gefunden ist, ist auch die Lage derselben bekannt, sobald ein Punkt bekannt ist, durch welchen sie gehen muß; denn durch diesen Punkt läßt sich nur eine Parallele zu der im Kraftpolygon gefundenen Richtung der Mittelkraft legen.

Ein solcher Punkt ist in Fig. 62 bei R_{1-2} der Punkt C , bei R_{1-3} der Punkt E etc.

Bei einer großen Anzahl von Kräften würde die gezeigte Ermittlung der Lage der Mittelkraft sehr umständlich sein; deshalb hat man zur Erleichterung eine Hilfsconstruction eingeführt, das sog. Seilpolygon. Dasselbe ergibt sich durch die folgende Betrachtung.

266.
Seil-
polygon.

Wie man die Größe und Richtung der Mittelkraft zweier Kräfte K_1 und K_2 in der dritten Seite $\alpha\gamma$ (Fig. 63) des für die beiden Kräfte construirten Kraftpolygons $\alpha\beta\gamma$, hier der Schlufsseite des Kraftdreiecks findet, so kann man auch irgend eine gegebene Kraft R als Mittelkraft zweier Kräfte K_1 und K_2 auffassen. Diese beiden Kräfte müssen nur zwei Bedingungen genügen, und zwar:

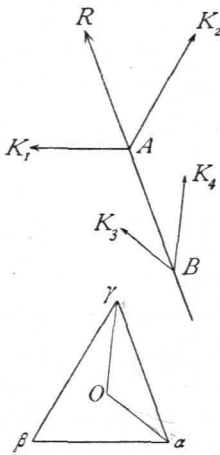
α) Das aus ihnen construirte Kraftpolygon muß als dritte Seite die gegebene Kraft nach Größe und Richtung enthalten; und

β) die beiden Kräfte müssen sich auf einem Punkte der gegebenen Krafrichtung schneiden.

Man kann also R als Mittelkraft der beiden Kräfte K_1 und K_2 auffassen, die im Kraftpolygon durch beziehungsweise $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ dargestellt sind und deren Richtungslinien sich auf dem Punkte A der

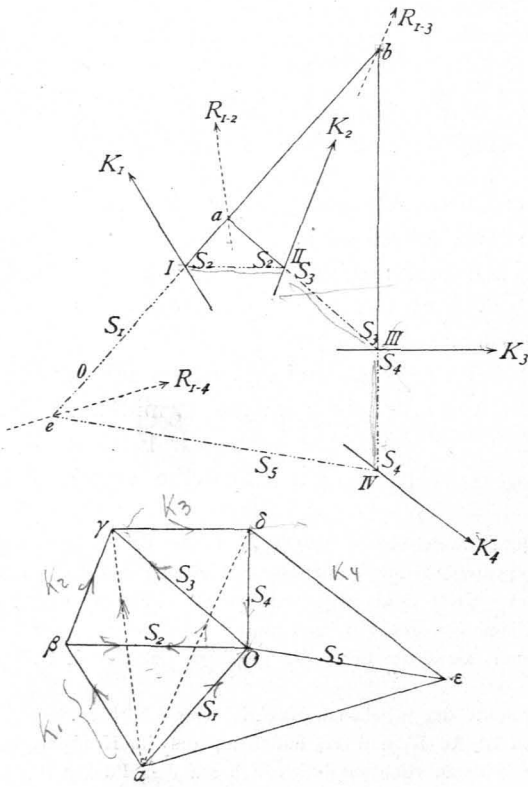
Kraftrichtung R schneiden. In gleicher Weise kann R auch als Mittelkraft der beiden Kräfte K_3 und K_4 angesehen werden, denen das Kraftdreieck $\alpha O \gamma$ entspricht, die also im Kraftpolygon durch beziehungsweise αO und $O \gamma$ dargestellt werden und deren Richtungslinien sich im Punkte B der gegebenen Kraftrichtung schneiden. Man kann demnach die gegebene Kraft R sowohl durch die Kräfte K_1 und K_2 , wie durch K_3 und K_4 ersetzen. Daraus folgt, dass man für die Zerlegung einer gegebenen Kraft den Punkt O ganz beliebig, den Punkt B auf der Richtungslinie der gegebenen Kraft beliebig wählen kann.

Fig. 63.



Ist nun eine größere Anzahl von Kräften $K_1, K_2, K_3, K_4 \dots$ gegeben (Fig. 64), so kann man zunächst K_1 in der angegebenen Weise zerlegen. K_1 werde im Kraftpolygon durch $\alpha \beta$ dargestellt und möge in $\alpha O = S_1$ und $O \beta = S_2$ zerlegt werden. Nach Früherem ist, da K_1 den Sinn von α nach β hat, S_1 von α nach O , S_2 von O nach β gerichtet. Als Schnittpunkt dieser beiden Seitenkräfte von K_1 kann der Punkt I auf der Richtungslinie von K_1 beliebig angenommen werden. Ferner kann K_2 , welches im Kraftpolygon durch $\beta \gamma$ dargestellt wird, ebenfalls in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit $\beta \gamma$ zusammen ein Dreieck bilden müssen. Die Spitze des Dreiecks kann wiederum beliebig gewählt werden; man kann also den Punkt O als diese Spitze annehmen. Sodann erhält man als die beiden Seitenkräfte von K_2 ($= \beta \gamma$) die Kraftlinien βO und $O \gamma$. Die erste dieser Seitenkräfte ist nach Größe und Richtung der zweiten Seitenkraft von K_1 genau gleich, da diese $O \beta$ war. $S_2 = \beta O$ hat den Sinn von β nach O , $S_3 = O \gamma$ den Sinn von O nach γ . Wählt man jetzt als Zerlegungspunkt der Kraft K_2 den Punkt II , in welchem die Richtungslinie der Kraft K_2 von der zweiten Seitenkraft S_2 der Kraft K_1 geschnitten wird, so greifen in diesem Punkte die beiden Kräfte S_2 und S_3 an. In der Richtungslinie $I II$ wirken also die beiden Kräfte S_2 , deren eine in I , deren andere in II angreift. Beide sind, wie eben entwickelt ist, nach Größe einander gleich; sie haben dieselbe Richtung, aber entgegengesetzten Sinn, heben sich also gegenseitig auf. Die beiden gegebenen Kräfte K_1 und K_2 sind also durch vier neue Kräfte ersetzt, nämlich durch S_1, S_2, S_2, S_3 ; zwei von diesen Kräften heben einander auf, nämlich die beiden S_2 ; es verbleiben also zwei Kräfte S_1 und S_3 , welche die gegebenen Kräfte K_1 und K_2 vollständig ersetzen. Die Mittelkraft von S_1 und S_3 ist demnach mit derjenigen von K_1 und K_2 identisch in der Größe, in der Richtung, im Sinn und in der Lage. Die Mittelkraft von S_1 und S_3 geht aber durch den Schnittpunkt a der Richtungslinien derselben; durch diesen Punkt a muss also auch die Mittelkraft von K_1 und K_2 gehen.

Fig. 64.



Verfährt man nun mit der dritten Kraft K_3 eben so, wie mit K_2 , d. h. zerlegt man K_3 in zwei Seitenkräfte so, dass der Punkt O als Spitze des Kraftdreiecks für die Zerlegung von $K_3 = \gamma \delta$ gewählt wird, so werden die beiden Seitenkräfte $S_3 = \gamma O$ und $S_4 = O \delta$ sein. Die erste dieser beiden Seitenkräfte ist wiederum gleich der zweiten Seitenkraft von K_2 , hat aber entgegengesetzten Sinn. Wählt man ferner als Zerlegungspunkt von K_3 den Punkt III , in welchem die Richtungslinie von K_3 durch die Richtungslinie der Seitenkraft S_3 der Kraft K_2 geschnitten wird, so wirken in der Linie $II III$ zwei Kräfte S_3 , welche einander wiederum aufheben. Die Kräfte K_1, K_2, K_3 sind jetzt durch sechs Kräfte ersetzt,

nämlich durch $S_1, S_2, S_2, S_3, S_3, S_4$, von denen sich die vier mittleren, die beiden S_2 und die beiden S_3 , gegenseitig aufheben, so dass nur S_1 und S_4 übrig bleiben. Die Mittelkraft von S_1 und S_4 ist also mit derjenigen von K_1, K_2 und K_3 identisch. Daraus folgt, dass die Mittelkraft von K_1, K_2 und K_3 durch den Schnittpunkt der Krafrichtungen S_1 und S_4 , also durch den Punkt b geht.

Verfährt man so weiter, so erhält man einen Linienzug $O I II III IV \dots$, welchen man das Seilpolygon nennt. Aus der vorstehenden Erklärung der Entstehung ergibt sich folgender Satz:

Die Mittelkraft einer Anzahl auf einander folgender Kräfte geht durch den Schnittpunkt der Richtung derjenigen Seilpolygonseite, welche der ersten dieser Kräfte vorhergeht, mit der Richtung derjenigen Seilpolygonseite, welche auf die letzte dieser Kräfte folgt.

Denn die in den mittleren Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte heben sich sämtlich gegenseitig auf, und es bleiben nur die in den äusseren Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte übrig, deren Mittelkraft identisch mit derjenigen der gegebenen Kräfte sein muss.

Den Punkt O (Fig. 64) nennt man den Pol des Seilpolygons.

Durch das Kraft- und Seilpolygon ist die Mittelkraft ganz beliebig wirkender Kräfte bestimmt. Die Grösse, die Richtung und den Sinn derselben giebt das Kraftpolygon, die Lage in der Ebene giebt das Seilpolygon an, da dasselbe einen Punkt der Richtungslinie der Mittelkraft ergibt. Zieht man durch diesen eine Parallele zu der mit Hilfe des Kraftpolygons gefundenen Richtung der Mittelkraft, so erhält man die wirkliche Lage derselben, über welche ein Zweifel nicht mehr herrschen kann, da durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer gegebenen Richtung möglich ist.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass Kraft- und Seilpolygon nicht nur die Mittelkraft der sämtlichen wirkenden Kräfte, sondern auch einer beliebigen Gruppe dieser Kräfte ergeben. So ist die Mittelkraft von K_1 und K_2 (Fig. 64) nach Grösse und Richtung $= \alpha \gamma$ und geht durch a . Zieht man also durch a eine Linie parallel zu $\alpha \gamma$, so erhält man diese Mittelkraft R_{1-2} . So ist ferner die Mittelkraft von K_1, K_2 und K_3 nach Grösse und Richtung $= \alpha \delta$ und geht durch b ; eine durch b parallel zu $\alpha \delta$ gezogene Linie ergibt R_{1-3} . Die Mittelkraft von K_1, K_2, K_3 und K_4 ist nach Grösse und Richtung $= \alpha \varepsilon$ und geht durch e etc.

Wenn die an verschiedenen Punkten eines Körpers angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sind, so ist sowohl das Kraftpolygon, wie auch das Seilpolygon eine geschlossene Figur.

Dass das Kraftpolygon in dem angegebenen Falle eine geschlossene Figur sein muss, geht aus dem Früheren hervor; denn es ist nachgewiesen, dass das Kraftpolygon für an verschiedenen Punkten angreifende Kräfte genau eben so konstruiert wird und genau dieselbe Bedeutung hat, wie für an einem Punkte angreifende Kräfte. Es muss also nach Satz II das Kraftpolygon eine geschlossene Figur sein, auch wenn die im Gleichgewicht befindlichen Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen.

Dass sich auch das Seilpolygon schliessen muss, ergibt sich folgendermassen.

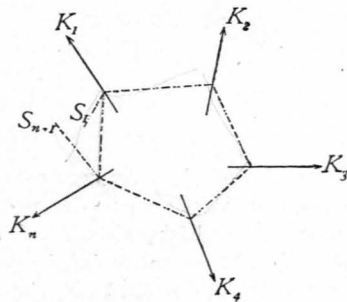
Konstruiert man das Seilpolygon für eine beliebige Anzahl von Kräften, so heben sich, wie oben auseinandergesetzt, die sämtlichen in den mittleren Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte auf, und es bleiben als einzig wirkende Kräfte diejenigen übrig, welche in den beiden äussersten Seilpolygonseiten wirken, d. h. diejenige, welche der ersten Kraft K_1 vorangeht und diejenige, welche auf die letzte Kraft K_n folgt, also S_1 und S_{n+1} (Fig. 65). Diese beiden Kräfte ersetzen alle gegebenen Kräfte $K_1, K_2, K_3 \dots K_n$.

Die letzteren sind nach der Voraussetzung im Gleichgewicht; folglich müssen auch S_1 und S_{n+1} im Gleichgewicht sein. Gleichgewicht zwischen zwei Kräften ist aber nur möglich, wenn ihre Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen. Es muss also diejenige Seilpolygonseite, welche der ersten Kraft K_1 vorhergeht, mit derjenigen Seilpolygonseite, welche auf die letzte Kraft K_n folgt, zusammenfallen, d. h. das Seilpolygon muss eine geschlossene Figur sein.

267.
Satz V.

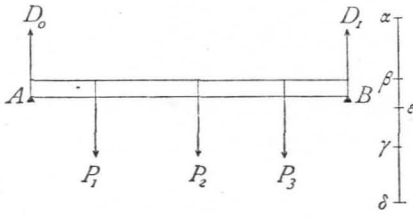
268.
Satz VI.

Fig. 65.



In der Statik der Bauconstruktionen kommt sehr häufig der Fall vor, daß alle wirkenden Kräfte parallel sind. In diesem Falle wird das Kraftpolygon eine Gerade.

Fig. 66.



Sind diese Kräfte im Gleichgewicht, so schließt sich nach Satz VI das Kraftpolygon; es fallen also dann Anfangs- und Endpunkt des Kraftpolygons auch hier zusammen.

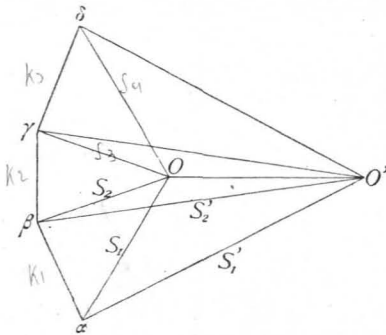
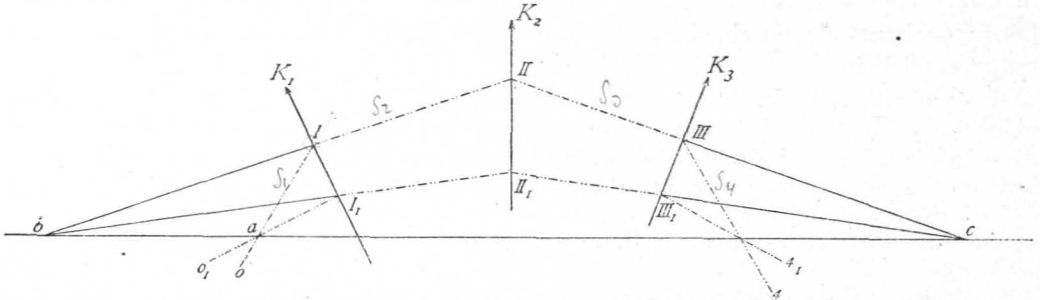
Für neben stehenden Balken (Fig. 66) sei im Kraftpolygon $P_1 = \alpha \beta$, $P_2 = \beta \gamma$, $P_3 = \gamma \delta$, $D_1 = \delta \varepsilon$; alsdann muß, wenn die Kräfte den Balken im Gleichgewicht halten sollen, der Endpunkt von D_0 mit dem Anfangspunkt von P_1 zusammen fallen, d. h. D_0 muß gleich $\varepsilon \alpha$ sein.

269.
Satz VII.

Construirt man für eine Anzahl von Kräften aus zwei verschiedenen Polen die entsprechenden Seilpolygone, so liegen die sämtlichen Schnittpunkte der gleichvielten Seilpolygoneiten auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie beider Pole parallel ist.

Das aus einem beliebigen Pole O (Fig. 67) construirte Seilpolygon sei $o I II III \dots$, das aus einem anderen Pole O' construirte sei $o_1 I_1 II_1 III_1 \dots$. Alsdann schneiden sich die beiden ersten Seiten $o I$ und

Fig. 67.



$o_1 I_1$ in a , die beiden zweiten Seiten $I II$ und $I_1 II_1$ in b , die dritten Seiten $II III$ und $II_1 III_1$ in c etc. Die sämtlichen Punkte $a, b, c, d \dots$ liegen auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie der Pole, d. h. zu $O O'$ parallel ist.

Nach der Erklärung des Seilpolygons ist $K_1 = \alpha \beta$ im ersten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte S_1 und S_2 zerlegt, deren Größe und Richtung sich im Kraftpolygon zu bezw. αO und $O \beta$ ergibt; dieselbe Kraft ist im zweiten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte S_1' und S_2' zerlegt, deren Größe und Richtung bezw. $\alpha O'$ und $O' \beta$ ist. Denkt man nun den Sinn der beiden Seitenkräfte S_1' und S_2' umgekehrt, so sind diese beiden Kräfte die Seitenkräfte einer Kraft K_1 , welche mit der gegebenen Kraft K_1 nach Größe und Richtung genau übereinstimmt, deren

Sinn aber demjenigen der gegebenen gerade entgegengesetzt ist. Diese neue Kraft K_1 muß sich also mit der gegebenen Kraft K_1 im Gleichgewicht halten; folglich müssen auch die vier Seitenkräfte dieser beiden Kräfte K_1 im Gleichgewicht sein. Verbindet man S_1 und S_1' zu einer, S_2 und S_2' zur anderen Mittelkraft, so geht die erstere durch den Schnittpunkt a dieser beiden Kräfte, die zweite durch den Schnittpunkt b der beiden Kräfte S_2 und S_2' . Beide Mittelkräfte halten sich im Gleichgewichte, sie müssen also in eine gerade Linie fallen; dieselbe ist durch die beiden Punkte a und b , durch welche beide Mittelkräfte gehen müssen, bestimmt.

Nun ist die Mittelkraft von S_1 und S_1' nach Größe und Richtung die Schlußlinie des Kraftpolygons $O' \alpha O$, d. h. $O' O$. Die Richtungslinie der Mittelkraft ist also parallel zu $O O'$, d. h. die Linie $a b$ ist parallel zu $O O'$, zur Verbindungslinie der beiden Pole.

Genau in derselben Weise ist es un schwer zu beweisen, daß der Schnittpunkt b von S_2 und S_2' mit dem Schnittpunkte c von S_3 und S_3' auf einer zu OO' parallelen Geraden liegt, d. h. auf der Linie ab , da durch b zu OO' nur eine Parallele möglich ist, womit der obige Satz bewiesen ist.

Literatur.

Bücher über »Statik der Bauconstructions«.

- EYTELWEIN. Handbuch der Statik fester Körper. Mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Architektur. Berlin 1826.
- NAVIER, L. M. H. *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines.* 2. Ausg. Paris 1833. — Deutsche Bearbeitung (3. Aufl.) von G. WESTPHAL u. A. FÖEPL. Hannover 1881.
- MOSELEY, H. *The mechanical principles of engineering and architecture.* New edit. London 1855. — Deutsch von H. SCHEFFLER. Braunschweig 1845.
- RIEDLIN, C. Anweisung und Berechnung des Mauerwerkes und der am häufigsten vorkommenden Dachstühle. München 1856.
- BEHSE, W. H. Die Berechnung der Festigkeit von Holz- und Eisenconstructions ohne höhere mathematische Vorkenntnisse. Leipzig 1864.
- HEINZERLING, F. Grundzüge der constructiven Anordnung und statischen Berechnung der Brücken- und Hochbau-Constructions. Leipzig 1870.
- COLLIGNON, E. *Cours élémentaire de mécanique (statique).* Paris 1870.
- BAUSCHINGER, J. Elemente der graphischen Statik. München 1871.
- KOPKA, C. Die Bau-Mechanik. Leipzig 1872.
- OTT, K. v. Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. 3. Aufl. Prag 1874.
- LEVY, M. *La statique graphique et ses applications aux constructions.* Paris 1874.
- CREMONA, L. *Elementi di calcolo grafico.* Torino 1874. — Deutsch von M. CURTZE. Leipzig 1875.
- CULMANN, K. Die graphische Statik. Zürich 1866. — Von der 2. Aufl. nur Bd. I (Zürich 1875) erschienen.
- RITTER, A. Lehrbuch der höheren Mechanik. II. Theil: Ingenieur-Mechanik. Hannover 1875.
- REBHANN, G. Höhere Ingenieurwissenschaften. Wien. I. Bd.: Theorie der Holz- und Eisenconstructions mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. 1856. — II. Bd.: Theorie des Erddrucks und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. 1876.
- HOLZHEY, E. Vorträge über Baumechanik. Wien 1872–76.
- HEINZERLING, F. Die angreifenden und widerstehenden Kräfte der Brücken- und Hochbau-Constructions. Zum Gebrauch beim Berechnen von Brücken- und Hochbauten. 2. Aufl. Berlin 1876. Deutsche bautechnische Taschenbibliothek. 9. Heft. Die Baumechanik. Von W. JEEP. Leipzig 1876.
- RANKINE, W. J. M. *Manual of civil engineering.* 12. Aufl. London 1877. — Deutsch von F. KREUTER. Wien 1879.
- DU BOIS, A. J. *Elements of graphical statics etc.* New York 1876.
- ROLLA, L. *Elementi di statica grafica etc.* Milano 1876.
- CROFTON, M. W. *Lectures on the elements of applied mechanics, comprising: I. Stability of structures. II. Strength of materials.* London 1877.
- OTT, K. v. Vorträge über Baumechanik. Prag. I. Theil: Die Statik des Erdbaues, der Futtermauern und der Gewölbe. 2. Aufl. Prag 1877. — II. Theil: Die Zug-, Druck- und Schubfestigkeit, resp. Elasticität sammt deren Anwendung. 2. Aufl. 1878.
- KLASEN, L. Graphische Ermittlung der Spannungen in den Hochbau- und Brücken-Constructions. Leipzig 1878.
- ZUCCHETTI, F. *Statica grafica, sua teoria ed applicazioni.* Torino 1878.
- HUMBER, W. *Handy book for the calculation of strains on girders and similar structures.* 3. edit. London 1879.
- WENCK, J. Die graphische Statik etc. Berlin 1879.
- CAIN, W. *Theory of solid and braced elastic arches, applied to arch bridges and roofs in iron, wood, concrete, or other material. Graphical analysis.* New-York 1879.
- BRESSE. *Cours de mécanique appliquée.* 3e edit. 1re partie: Résistance des matériaux et stabilité des constructions. Paris 1880.

- CLARKE, G. S. *The principles of graphic statics*. London 1880.
- EDDY, H. T. *News constructions in graphical statics*. New York 1877. — Deutsche vom Verfasser verm. u. verb. Ausgabe. Leipzig 1880.
- ORLANDER, E. *A new method of graphic statics applied to the construction of wrought-iron girders*. London 1880.
- MÜLLER-Breslau, F. B. *Elemente der graphischen Statik der Bauconstruktionen für Architekten und Ingenieure*. Berlin 1881.
- ALBERT, F. *Die technische Mechanik im Hochbau*. Plauen 1881.
- CHALMERS, J. B. *Graphical determination of forces in engineering structures*. London 1881.
- CROFTON, M. W. *Lectures on the elements of applied mechanics*. London 1881.
- WEISBACH, J. *Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik*. II. Theil, 1. Abth.: *Statik der Bauwerke*. 5. Aufl. Braunschweig 1882.
- WITTMANN, W. *Statik der Hochbau-Construktionen*. Berlin. 1. Theil: *Steinconstruktionen*. 1879. — II. Theil: *Holzconstruktionen*. 1882.
- WENK, J. *Die Baumechanik etc.* 2. Aufl. Leipzig 1882.
- BELLOT. *Die wichtigsten Lehren der Baumechanik*. Leipzig 1882.

I. Abschnitt.

Elemente der Elasticitäts- und Festigkeitslehre.

I. Kapitel.

Grundbegriffe.

270.
Molecüle.

Jeder in der Natur vorkommende Körper besteht aus einzelnen, mit einander verbundenen, außerordentlich kleinen Theilen, den sog. Molecülen. Diese einzelnen Theile sind nicht unabänderlich fest zu einem starren System mit einander verbunden; vielmehr verändert sich die gegenseitige Lage derselben, also auch die Form des Körpers, wenn Kräfte auf den Körper wirken. Die Größe und Form der Aenderung ist von dem Material des Körpers, von seiner Form, von der Größe und Wirkungsdauer der wirkenden Kräfte, von der Temperatur und von verschiedenen anderen Factoren abhängig.

Wenn die Kräfte, welche die Formveränderung hervorgebracht haben, zu wirken aufhören, so nimmt unter gewissen Bedingungen der Körper seine frühere Form wieder an.

271.
Elasticität.

Man nennt Elasticität diejenige Eigenschaft der Körper, vermöge deren sie, wenn sie unter der Einwirkung der Kräfte ihre ursprüngliche Form verändert haben, dieselbe nach dem Aufhören der Kräfteeinwirkung mehr oder weniger wieder annehmen. Vollkommen elastisch würde ein Körper sein, wenn er nach dem Aufhören der Kraft seine frühere Gestalt genau wieder annähme; vollkommen unelastisch derjenige Körper, der die in Folge der Kraftwirkung deformirte Gestalt genau beibehalten würde, auch wenn die Kräfte zu wirken aufhörten.

Es giebt in der Natur weder vollkommen elastische, noch vollkommen unelastische Körper. Daraus folgt, daß kein Körper nach dem Aufhören der Kräftewirkung vollständig seine frühere Form wieder annimmt; je näher er dem