Zufallsgraphen: Von der Natur zur Gesellschaft zum Gehirn
Random Graphs: from Nature to Society to the Brain

Mihyun Kang

Der folgende Beitrag beleuchtet die Entwicklung des Gebiets der Zufallsgraphen in den letzten 50 Jahren. Einerseits hat sich gezeigt, dass die Theorie der Zufallsgraphen dafür geeignet ist, komplexe Strukturen zu beschreiben und zu analysieren, die in der Natur, der Gesellschaft und sogar im Gehirn auftreten. Anderseits motivieren diverse Anwendungen zur weiteren Untersuchung von Zufallsgraphen. Die Ausbreitung der Theorie der Zufallsgraphen und deren vielfältige Anwendungen zeigen immer wieder, wie viel wir aus abstrakten mathematischen Ideen über die „reale" Welt lernen können.

Zufallsgraphen

Im Jahr 1959 veröffentlichten Erdös und Rényi einen Artikel mit dem Titel „On random graphs I" und begründeten damit die Theorie der Zufallsgraphen. Ein Jahr danach entdeckten sie dann, dass Zufallsgraphen eine drastische Änderung in der Größe der größten Komponente erleben, von logarithmischer zu sublinearer und dann zu linearer Größe, wenn die Anzahl der Kanten über die halbe Anzahl der Knoten hinauswächst.

Seit dem Entstehen der Zufallsgraphentheorie vor fünf Jahrzehnten sind verschiedene Modelle für Zufallsgraphen eingeführt und untersucht worden, z. B. gerichtete Zufallsgraphen, inhomogene Zufallsgraphen, planare Zufallsgraphen und Zufallsgraphenprozesse. Zufallsgraphen sind eng verwandt mit anderen zufälligen diskreten Strukturen, wie z. B. zufälligen Flächen, zufälligen Matrizen, zufälligen Erfüllbarkeitsproblemen, dem Ising- und dem Pottsmodell und der Perkolation. Die Theorie der Zufallsgraphen hat mittlerweile auch in anderen Wissenschaften Einzug gehalten – als reiche Quelle für Modelle zur Beschreibung grundlegender Aspekte eines breiten Spektrums von komplexen Phänomenen. >

This brief article gives a flavour of how the field of random graphs has evolved over the last 50 years. On one hand, the theory of random graphs has proven to be appropriate for the description and analysis of complex structures arising everywhere from nature to society, even the brain. On the other hand, diverse applications continue to motivate and inform the study of random graphs. The expansion of random graph theory and its applications shows us again how much abstract mathematical ideas can teach us about the 'real world'.

Random graphs

Erdös and Rényi initiated the theory of random graphs in their paper entitled "On random graphs I" published in 1959, in which they addressed, among other things, the questions of the probability of a random graph being connected, and the probability that the largest component of a random graph covers almost all vertices. One year later, Erdös and Rényi discovered that a random graph undergoes a drastic change in the number of vertices contained in the largest component, from logarithmic to sublinear and then to linear order, when the number of edges passes through half the number of vertices.

Since the foundation of the theory of random graphs by Erdös and Rényi five decades ago, various random graph models have been introduced and studied. Examples include random hypergraphs, random directed graphs, random graphs with a given vertex degree sequence, inhomogeneous random graphs, random planar graphs, and random graph processes. Random graphs are closely related to other random discrete structures such as random surfaces, random maps, random matrices, random satisfiability problems, Ising and Potts models, and percolation. Random graph theory has meanwhile found its way into other sciences as a rich source of models describing fundamental aspects of a broad range of complex phenomena. >

Mihyun Kang leitet das Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik. Ihre Forschungsthemen umfassen Zufallsgraphen, Zufallsgraphenprozesse und planare Zufallsgraphen. Kang untersucht deren asymptotische Eigenschaften und Grenzverhalten sowie deren strukturelle, abzählende und algorithmische Aspekte, durch das Zusammenspiel der Methoden aus der Probabilistik und Graphentheorie und Methoden der analytischen Kombinatorik.

Mihyun Kang is head of the Institute of Optimization and Discrete Mathematics. Her research areas include random graphs, random graph processes, random planar graphs. Kang studies their asymptotic properties and limit behaviour as well as their structural, enumerative and algorithmic aspects, through the interplay between methods from probability theory, graph theory and analytic combinatorics.

Wenn die Anzahl der Kanten klein ist, besteht der Zufallsgraph aus vielen kleinen Komponenten.

When the number of edges is small, the random graph consists of many small components.

Wenn mehr Kanten hinzugefügt werden, taucht eine ‚GIANT'-KOMPONENTE auf (blau).

As more edges are added, a GIANT COMPONENT emerges (blue).

Ein PLANARER GRAPH kann so in der Ebene dargestellt werden, dass sich keine Kanten schneiden.

A PLANAR GRAPH can be drawn in plane so that its edges do not cross.

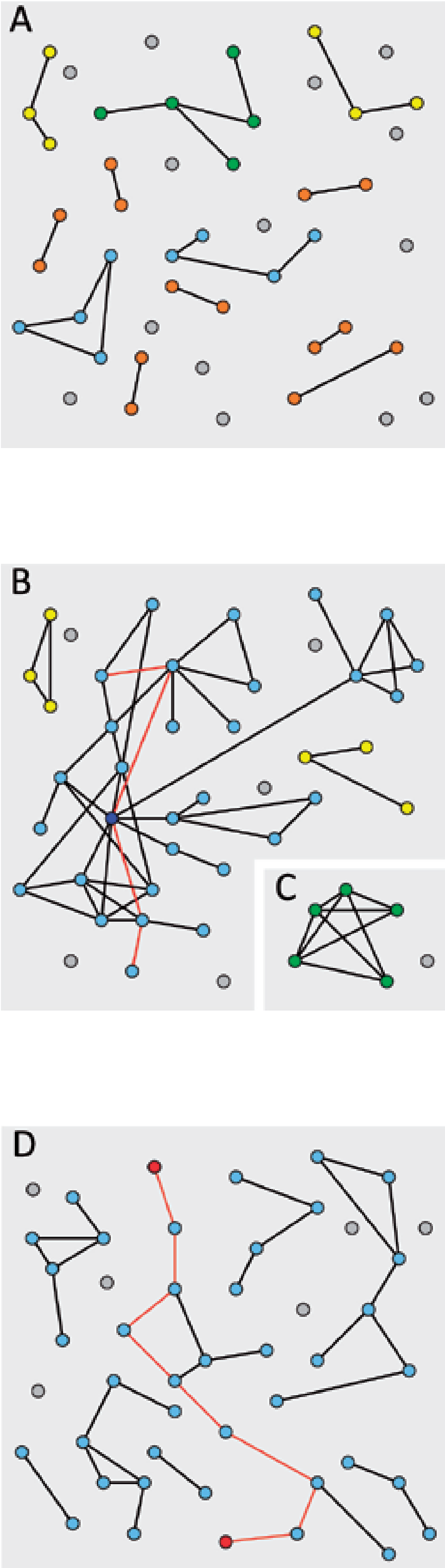

Abbildung 1:
Zufallsgraphen und deren Struktur.

- Der GRAD EINES KNOTENS ist die Anzahl der benachbarten Knoten. Der dunkelblaue Knoten in B hat den größten Grad neun.
- Die GRÖSSE EINER KOMPONENTE ist deren Knotenanzahl. Die blaue Komponente in B hat Größe 30, die gefärbten Komponenten in A haben Größe vier (blau), drei (gelb), zwei (orange) und eins (grau).
- Der DURCHMESSER eines Graphen ist der größte minimale Abstand zwischen zwei Knoten. Die größte Komponente in A hat den Durchmesser drei, in B vier, in C zwei und in D acht.
- In einem „SMALL-WORLD"-Netzwerk ist der typische kürzeste Abstand zwischen zwei beliebigen Knoten in der größten Komponente „klein",d. h. die größte Komponente hat einen kleinen Durchmesser (markiert durch die roten Linien in B und D).
- Ein „hohes" KLUSTERING bedeutet, dass es sehr wahrscheinlich ist, dass je zwei Nachbarknoten eines Knotens auch benachbart sind, wie in der grünen Komponente in C.
- „Reale"-Welt-Netzwerke haben oft einen kleinen DURCHMESSER und zeigen hohes KLUSTERING.

Figure 1:
Random graphs and their structure.

- *The DEGREE OF A VERTEX is the number of adjacent edges. The darkblue vertex in B has the largest degree 9.*
- *The ORDER OF A COMPONENT is the number of vertices it contains. The blue component in B has order 30, the coloured components in A have order 4 (blue), 3 (yellow), 2 (orange) and 1 (grey).*
- *The graph DIAMETER is the longest minimum distance between any two vertices. The largest component in A has a diameter three, in B four, in C two, and in D eight.*
- *In a SMALL-WORLD network, the typical shortest distance between any two vertices in the large component is "short", i. e., the largest component has a small diameter (marked by a red line in B and D).*
- *High CLUSTERING means that any neighbours of a vertex are also very likely to be connected, as in the green component in C.*
- *Real-world networks often have a small DIAMETER and exhibit high CLUSTERING.*

Biowissenschaften

Der Boom in den Biowissenschaften in den letzten Jahren hat große Mengen von Daten erzeugt: Das Erbgut ganzer Organismen ist entschlüsselt; Proteine sowie deren Interaktionsmuster sind identifiziert; metabolische Netzwerke, die biochemische Reaktionen erklären, sind erforscht. Es wird erwartet, dass die detaillierte Analyse von Genen, Protein-Interaktionen und metabolischen Netzwerken mittels Methoden aus der Graphentheorie dabei hilft, die Eigenschaften der Netzwerke zu verstehen, die vorrangig auf großskaligen Strukturen beruhen und im Wesentlichen nicht von physikalischen oder chemischen Details der individuellen Interaktionen abhängig sind.

Sozialwissenschaften

Die Graphentheorie ist für die Analyse der menschlichen Kommunikation von großer Bedeutung. Eines der ältesten und bekanntesten Beispiele ist das „six degrees of separation"-Phänomen, das vor Jahrzehnten beschrieben wurde: Zwei beliebige Menschen können durch eine Kette von Bekanntschaften mit einer durchschnittlichen Pfadlänge von sechs verbunden werden. Das heißt, ähnlich wie die Erdös-Rényi-Zufallsgraphen hat der Bekanntschaftsgraph einen kleinen Durchmesser oder in anderen Worten: Er ist ein „small-world"-Netzwerk. Dennoch, im Unterschied zu den Erdös-Rényi-Zufallsgraphen hat er einen großen „Clustering"-Koeffizienten. Viele weitere Netzwerke der „realen" Welt haben diese Struktur, zum Beispiel auch das Netzwerk, das Mathematiker mit dem Begriff Erdös-Zahl in Verbindung bringen: In diesem werden die Autorinnen und Autoren wissenschaftlicher Artikel in Beziehung gesetzt, wenn eine gemeinsame Publikation vorliegt.

Das Gehirn

Die Graphentheorie kann helfen, die vielleicht komplexeste Struktur der Natur zu verstehen: das Gehirn. Das Netzwerk der miteinander verknüpften Nervenzellen des Gehirns wurde als Zufallsgraph mit anderen Eigenschaften modelliert, z. B. als skalenfreie Netzwerke. Die Art und Weise, wie die Nervenzellen miteinander vernetzt sind und aufeinander einwirken, entscheidet über die Funktionalität des Gehirns. Experimentelle Untersuchungen spontaner Gehirnaktivitäten produzieren häufig Ergebnisse, die durch die Potenzgesetz-Verteilung beschrieben werden können. Dies hat zur Vermutung geführt, dass sich das Gehirn möglicherweise als ein Netzwerk von Nervenzellen im kritischen Bereich beschreiben lässt, also in einem Zustand in der Nähe des Phasenübergangs. ■

Life sciences

The recent boom in life sciences has generated huge amounts of data: genomes of whole organisms have been sequenced; proteins and patterns of their interactions have been identified; and metabolic networks relating the biochemical reactions have been mapped. Detailed analysis of genes, protein interaction and metabolic networks using the methods of graph theory is expected to help us to understand the properties of the network that are determined by its large-scale structure rather than by the physical or chemical details of individual interactions.

Social sciences

Analysis of human communication by means of the theory of graphs is a useful tool in the social sciences. One of the oldest and best-known examples is the 'six degree of separation' phenomenon described decades ago: any two people can be connected by a chain of acquaintances on average six persons long. This means that, similarly to the Erdös-Rényi random graph, the graph of human acquaintanceship has a small diameter; it is a 'small-world' network. However, unlike the Erdös-Rényi random graph, it has a high clustering coefficient. Many real-world networks have this structure, for example, the scientific co-authorship network, known to mathematicians by the concept of the Erdös number.

The brain

The theory of graphs can help us to understand also perhaps the most complex structure found in nature: the brain. The network of interconnected neurons in the brain has been modelled as a random graph with different properties (for example, scale-free network). The way the neurons are connected and interact with each other largely determines the brain functionality. The experimental studies of spontaneous brain activity often produce results that can be described by power-law distributions. This has led to a hypothesis that the brain, viewed as a network of neurons, may be operating at a critical state, a state close to a phase transition. ■