Um die zweite Projektionsebene festzusetzen, halbire man die Linie $a'i'$ Fig. 231 in α' und ziehe $\alpha'e'$; normal auf der Richtung $\alpha'e'$ nehme man die Vertikalebene an und die Linie AB als Grundschnitt.

Auf die Linie AB projicire man die Punkte a' nach a'', e' nach e^0, b' nach b^0 und d' nach d^0; errichte in den Punkten b^0, d^0 und e^0 Normalen auf AB und mache $b^0 b''$ gleich lang mit $b' b_{,,}$, $d^0 d''$ gleich $d' d_{,,}$ und $e^0 e''$ gleich $e' e_{,,}$. Die Punkte a'', b'', d'' und e'' sind Punkte der Leitlinie des Gewölbes im Aufriss. (Bei unserer Konstruktion fiel der Punkt d^0 in den Punkt x'', deshalb ist d^0 in der Figur nicht angegeben worden.) — Eben so werden die Punkte i'', h'' und f'' erhalten. Die Aufrisse der Leibungsfugen werden nun erhalten, wenn man aus dem Punkte e^0 nach den Punkten b'', d'', f'' und h'' gerade Linien zieht, die Punkte p'' und t'' nach der Höhe der Anfänger festsetzt und aus dem Punkte e^0 den Kreisbogen $w'' k'' x''$ beschreibt, durch welchen die Grösse des Auges oder Kerns festgesetzt wird. Der Radius des Kerns ist beliebig, jedoch mit Rücksicht darauf festzusetzen, dass die Gewölbsteine in der Nähe des Kerns nicht zu dünn ausfallen. Die Grundrisse der Leibungsfugen werden mit Hülfe der Aufrisse derselben leicht erhalten. Um etwa den Grundriss der Leibungsfuge md des Schlusssteins zu erhalten, nehme man in der Linie $d'' m''$ die Punkte c_2'' und b_2'' beliebig an, ziehe $c_2'' c''$, $b_2'' b''$ und $m'' \beta''$ parallel mit der Achse BA, projicire die Punkte c'', b'', β'' auf die Linie $e'a'$ Fig. 231 nach c', b' und β' und ziehe aus diesen Punkten gerade Linien mit der Linie $a'i'$ parallel. Auf diese Parallelen projicire man nun den Punkt c_2'' nach c_2', b_2'' nach b_2' und m'' nach m'; die Kurve $d' c_2' b_2' m'$ ist der Grundriss der Leibungsfuge md des Schlusssteins. Eben so werden die Grundrisse der übrigen Leibungsfugen erhalten.

Die Richtung der Fugen $d_{,,} q_{,,}$ und $b_{,,} p_{,,}$ Fig. 232 ist nicht normal auf dem Bogen $a_{,} b_{,,} d_{,,} e_{,,}$, da dieselben im Punkte e sich schneiden müssen, weil die Aufrisse dieser Fugen im Punkte e^0, dem Aufrisse von e, sich schneiden.

§. 80.

Fig. 235 ist der Grundriss einer konischen Kernwölbung auf der rund abgestutzten Ecke. $a' l' k' i' g'$ ist die Richtungslinie und m' der Mittelpunkt einer cylindrischen Mauer, welche bis zur Kernwölbung sich erhebt. Die Richtungen $s'y'$ und $g'z'$ der Mauern eines Gebäudes, welche über der Kernwölbung die Ecke $y'd'z'$ bilden, sind Tangenten des Bogens $a'g'$ und $a' b_{,,} c_{,,} d_{,,}$ Fig. 336 ist eine beliebig steigende Kurve, welche über $a'd'$ in der Art sich erhebt, dass die Höhe $d' d_{,,}$ wenigstens um die Hälfte grösser ist als die Basis $a'd'$.

In sofern sich schneidende Tangenten eines Kreisbogens gleich gross sind, wird die Länge $a'd'$ gleich der Länge $d'g'$ sein müssen und es wird daher über $g'd'$ eine zweite Kurve sich erheben müssen, welche der Kurve $a' b_{,,} c_{,,} d_{,,}$ kongruent ist. Beide Kurven werden im Punkte d sich schneiden.

Die Entstehung der inneren Wölbungsfläche dieser Kernwölbung ist ziemlich dieselbe wie im vorigen Beispiele, mit dem Unterschiede jedoch, dass die Durchschnittsfiguren, welche hervorgehen, wenn man die innere Wölbungsfläche durch horizontale Ebenen schneidet, hier horizontale Kreisbogen sind, deren Mittelpunkte in der durch den Punkt m' gedachten lothrechten Achse sich befinden (Umdrehungsfläche), wogegen im vorigen Beispiele diese horizontalen Durchschnittsfiguren gerade Linien waren (Cylinderflächen). — Fig. 234 ist der Aufriss dieser Kernwölbung.

Die Linien $l'' p''$, $k'' q''$, $i'' v''$ und $h'' t''$ sind die Aufrisse der Lagerfugen, deren Richtungen im Punkte d^0 sich schneiden. Es werden daher auch die Centralfugen $p_{,,} b_{,,}$ und $q_{,,} c_{,,}$ des Hauptes Fig. 236 im Punkte d' sich schneiden, ohne auf den Bogen $a' b_{,,} c_{,,} d_{,,}$ normal zu stehen.

Diese Fugen anzuordnen, mache man $a' b_{,,} = b_{,,} c_{,,}$, die Länge $c_{,,} d_{,,}$ aber gleich der Hälfte von $b_{,,} c_{,,}$ oder $\frac{3}{4}$ von $b_{,,} c_{,,}$. Aus den Punkten $b_{,,}$, $c_{,,}$ ziehe man die Linien $b_{,,} b'$ und $c_{,,} c'$ normal auf $a'd'$, projicire die Punkte a', b', c', d' auf den Grundschnitt AB der Aufrissebene, errichte in den erhaltenen Punkten Normalen auf AB und mache dieselben mit $b_{,,} b_{,}$, $c_{,,} c_{,}$ und $d_{,,} d_{,}$ beziehlich gleich gross, dadurch werden die Punkte $d_{,,}$, $c_{,,}$, $b_{,,}$, $a_{,,}$ erhalten, durch welche die Kurve $a'' d''$ konstruirt werden kann, so wie auch die geraden Linien $l'' p''$ und $k'' q''$. Eben so erhält man die Kurve $g'' d''$, so wie die Fugen $h'' t''$ und $i'' v''$. Die Punkte c'' und e'', so wie b'' und f'' werden in geraden Linien sich befinden, welche parallel der Linie AB sind. Um nun den Grundriss der Fuge qk zu erhalten, projicire man den Punkt q'' auf die Linie $a'd'$ nach q', den Punkt c'' nach c', so ist die Länge $q'c'$ der Grundriss der Fuge qc, so weit solche im Haupte sich befindet. Man ziehe ferner die gerade Linie $\delta'' \varphi''$ durch einen beliebigen Punkt α'' der Linie $q'' k''$ parallel mit AB, projicire den Punkt δ'' nach δ', konstruire mit $m'\delta'$ als Radius aus dem Mittelpunkte m' den Kreisbogen $\delta'\sigma'$, und projicire den Punkt α'' auf diesen Kreisbogen nach α'; die Punkte α'' und α' sind dann die Projektionen eines Punktes α der Fuge qk.

In derselben Weise erhält man die Punkte β' und k' als Projektionen der Punkte β und k dieser Fuge. — Die Bearbeitung der Steine dieser Kernwölbung geschieht am füglichsten nach Schablonen; es ist deshalb nothwendig, dass sämmtliche Lagerfugen ausgetragen werden.

Fig. 237 stellt die ausgetragene Lagerfuge des Schlusssteins vor. Diese zu konstruiren, ziehe man CD parallel mit der Linie AB und konstruire die Linien $q' q_3'$, $c' c_3'$, $\alpha' \alpha_3'$, $\beta' \beta_3'$ und $k' k_3'$ normal auf CD. Sodann mache man die Länge $(q_2)\,(k_2)$ Fig. 237 gleich $q'' k''$ Fig. 234,

$$
\begin{aligned}
(q_2)\,(c_2) &= q''\,c'', \\
(q_2)\,(\alpha_2) &= q''\,\alpha'' \\
\text{und } (q_2)\,(\beta_2) &= q''\,\beta'',
\end{aligned}
$$

konstruire in den Punkten (q_2), (c_2), (α_2), (β_2) und (k_2) gerade Linien normal auf $(q_2)\,(k_2)$ und mache $(q_2)\,(q)$ gleich $q_2' q'$ Fig. 235, $(q_2)\,(q_3)$ gleich $q_2' q_3'$, $(c_2)\,(c)$ gleich $c_2' c'$ und $(c_2)\,(c_3)$ gleich $c_2' c_3'$, $(\alpha_2)\,(\alpha)$ gleich $\alpha_2' \alpha'$ und $(\alpha_2)\,(\alpha_3)$ gleich $\alpha_2' \alpha_3'$, $(\beta_5)\,(\beta)$ gleich $\beta_2' \beta'$ und $(\beta_2)\,(\beta_3)$ gleich $\beta_2' \beta_3'$, $(k_2)\,(k)$ gleich $k_2' k'$ und $(k_2)\,(k_3)$ gleich $k_2' k_3'$; verbinde die Punkte (q) und (c) durch eine gerade Linie, (c), (α), (β) und (k) aber durch eine entsprechende Kurve. Dasselbe geschehe mit den Punkten (q_3), (c_3), (α_3), (β_3) und (k_3). Die hervorgehende Figur ist die verlangte.

VIERTES KAPITEL.

Von den sphärischen Gewölben, Kuppelgewölbe.

§. 81.

Unter sphärischen Gewölben versteht man solche, deren Leibung eine sphärische Fläche, eine Umdrehungsfläche bildet, d. h. eine Fläche, welche entsteht, wenn irgend eine Kurve (Ellipse, Parabel, Hyperbel etc.) um eine Gerade als Drehungsachse gedreht wird. Die Kurve heisst die Erzeugende, jede einzelne Lage derselben ein Meridian. Gewöhnlich wird die Hauptachse der Ellipse, Parabel oder Hyperbel als Drehungsachse genommen. Ist die Erzeugende ein Viertelkreis $a'' b''$ (Fig. 238 Taf. XV) und wird der Halbmesser $m'' b''$ als Drehungsachse verwendet, so entsteht eine Kugelfläche und ein Gewölbe, dessen Leibung ein Theil einer Kugel ist, heisst Kugelgewölbe.

Im einfachsten Falle wird das Kuppelgewölbe von einer runden cylindrischen Mauer unterstützt. Hat ein Kugelgewölbe ein polygones (vier- oder achtseitiges) Widerlager derart, dass die Widerlagsmauern die kugelförmige Leibung durchschneiden (Fig. 246), wobei der grösste Kreis der Kugel durch die Ecken des Polygons $p', z' \ldots$ (Fig. 247) geht, die innere Mauerflucht demnach ein dem grössten Kreis der Kugel einbeschriebenes Polygon (Viereck, Achteck u. s. w.) bildet, so heisst ein solches Gewölbe eine Hängekuppel. Besteht die Gewölbleibung nur aus einem kleineren Theil der Kugelfläche (Kalotte), so heisst das Gewölbe ein Kappengewölbe (Taf. XVII).

§. 82.

Aus der Art der Erzeugung der Leibungsfläche der sphärischen Gewölbe (als Umdrehungsfläche) folgt unmittelbar:

1. jede horizontale Ebene schneidet die Fläche (ihre Drehungsachse senkrecht stehend gedacht) in einem Kreis (Parallelkreis),

2. jede Ebene, welche durch die Drehungsachse gelegt wird, schneidet die Fläche in einem Meridian (d. h. in einer der Erzeugenden gleichen Kurve).

§. 83.

Grundregeln für den Fugenschnitt sphärischer Gewölbe.

1. Die Stossfugen sind Meridianschnitte, wie z. B. die Stossfuge 1′2′3′4′ (Fig. 239) im Aufriss 1″2″3″4″ (Fig. 238); sie ist der Fläche $\delta'' \omega'' \sigma'' \pi''$ des Gewölbequerschnittes gleich.

2. Denkt man sich die Linie $q'e'$ (Fig. 238) bis zum Mittelpunkte m'' verlängert, so beschreibt diese Linie bei der Umdrehung eine Kegelfläche, deren Grundfläche der Parallelkreis $q''\sigma''$ und deren Spitze in m'' ist. Die Lagerfugen der sphärischen Gewölbe, (wie z. B. $q''e''\omega''\sigma''$) sind daher Theile von Kegelflächen, welche ihre Spitze in m'' und ihre Achse mit der Umdrehungsfläche gemeinschaftlich haben. Die Meridianebenen (Stossfugenflächen) schneiden daher diese Kegelflächen in Mantellinien; die Linien 2″3″, 1″4″ sind daher gerade Linien.

3. Bei sphärischen Gewölben wird das Widerlager gewöhnlich über die Kämpferfuge erhöht, d. h. die Gewölbe werden auf ½ bis ⅔ ihrer Höhe hintermauert. Besteht die Hintermauerung (wie wir das im Steinschnitt voraussetzen müssen) ebenfalls aus Werksteinen, so ist dieselbe mit der eigentlichen Wölbung in Verband zu bringen.

In diesem Theil der Konstruktion ($a''e''l''$ Fig. 238) brauchen aber die Lagerfugen, wie z. B. $r''d''$, nur eine geringe Tiefe zu haben, ja es kann selbst die normale Richtung der Lagerfugen, so lange die Grösse des Winkels dies erlaubt, ganz weggelassen und bis in die Leibung herein horizontal (wie $p''d''$) durchgeführt werden.

§. 84.

Zur Bearbeitung der Steine dieser Gewölbe braucht der Steinmetz die Schablone der Stossfuge, die der Lagerfuge, so wie drittens die Schablone der Leibung. Diese Schablonen anzufertigen, müssen sämmtliche Lagerfugen der verschiedenen Steinschichten ausgetragen werden. Die Stossfugen des Gewölbes brauchen nicht ausgetragen zu werden, weil die Schablonen derselben dem mittleren Querdurchschnitt gleich sind.

Die Lagerfuge irgend einer Steinschicht bildet einen normalen abgekürzten Kegelmantel, dessen Seite die Stärke des Gewölbes in dieser Lagerfuge ist. Die Spitze des Ergänzungskegels ist der Mittelpunkt m des Gewölbes. Um daher etwa die Lagerfuge auszutragen, deren Aufriss in dem Durchschnitt Fig. 238 die Linien $q''e''$ und $\sigma''\omega''$ sind, lege man den Mantel desjenigen Kegels, welcher durch Umdrehung des rechtwinkligen Dreiecks $m''e''e_2''$ um die Achse $m''e_2''$ beschrieben wird, in eine Ebene. Zu dem Ende denke man diesen Kegelmantel in der Seite $m''e''$ aufgeschnitten und abgewickelt; er bildet alsdann einen Kreisausschnitt, dessen Radius die Linie $m''e''$ ist und dessen Bogen der Peripherie $2 . e_2''e'' . \pi$ gleich ist. Um diesen Kreisausschnitt zu zeichnen, bedarf man des Mittelpunktswinkels η; derselbe ergiebt sich aber aus der Proportion

$$\eta : 360 = 2 . e''e_2'' . \pi : 2 . m''e'' . \pi,$$

$$\text{oder } \eta = \frac{e''e_2''}{m''e''} . 360^\circ,$$

$$\text{oder } \eta = \frac{\varrho}{\varrho_{,}} . 360^\circ,$$

wenn man den Radius $e''e_2''$ mit ϱ und $m''e''$ mit $\varrho_{,}$ bezeichnet. Da das Verhältniss $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ bekannt ist, kann der Mittelpunktwinkel η berechnet und aufgetragen werden. Die Fig. $m e c_2 c_3 c_4 \omega$ Fig. 240 sei die Hälfte dieses Kreisausschnitts und eq sei gleich $e''q''$ Fig. 238, also mq der Radius der äusseren Kugelfläche in der Gegend ihres Anlaufs. Wenn man daher mit mq als Radius den Kreisbogen $q\sigma$ beschreibt, so stellt das Ringstück $eq\sigma\omega$ die Hälfte der unteren Lagerfuge vor, welche an der dritten Steinschicht sich befindet. Und wenn man endlich noch dies Ringstück in so viel gleiche Theile theilt, als in der Steinschicht Gewölbsteine vorhanden sind, indem man $ec_2 = c_2c_3 = c_3c_4 = c_4\omega$ macht und nach dem Mittelpunkte m die geraden Linien c_2o_2. c_3o_3 u. s. f. zieht: so ist jeder Theil wie etwa eqo_2c_2 die ausgetragene untere Lagerfuge eines Gewölbsteins der dritten Schicht, wonach die Schablone angefertigt werden kann.

Austragen der Leibung. Gesetzt, man wolle die Leibung der dritten Steinschicht austragen, so ziehe man in Fig. 238 die Sehne $e''n''$, verlängere dieselbe bis f'' und denke den normalen Kegel, welcher durch Umdrehung des rechtwinkligen Dreiecks $e''e_2''f''$ um die Achse $m''f''$ beschrieben wird. Die Linie $e''n''$ beschreibt alsdann einen abgekürzten Kegelmantel, welchen wir zur Hälfte in Fig. 241 nach demselben Princip ausgetragen haben, nach welchem die Austragung der Lagerfugen geschah. Das Ringstück neb_5a_5, welches die Hälfte des ausgetragenen abgekürzten Kegelmantels vorstellt, wird durch die Linien a_2b_2, a_3b_3 und a_4b_4 in vier gleiche Theile getheilt, jeder Theil wie neb_2a_2 stellt daher die Sehnenschablone der Leibung eines Steins der dritten Schicht vor.

§. 85.

Das Austragen der Steine geschieht wie früher angegeben oder auch in folgender Weise:

Die Fig. $vwc\alpha\beta v'w'c\alpha'\beta'$ Fig. 243 stellt einen Stein der unteren Schicht vor, $deqlsghq_,l_,s$, Fig. 244 einen Stein der zweiten Schicht und $\sigma\pi\delta\omega\sigma_,\pi_,\delta_,$ Fig. 245 einen Stein der dritten Schicht.

Die Fig. 243 zu konstruiren, ziehe man

1. durch den Theilpunkt α'' des Halbkreises $a''b''c''$ Fig. 238 die gerade Linie $\alpha''t''$ normal auf $a''c''$ und verlängere dieselbe nach oben bis zum Durchschnittspunkte u'' mit der Linie $v''\beta''$.

2. Konstruire man ein normales Cylinderstück, welches die Fig. $a_2'a_3'a_4'a_5'$ Fig. 239 zur Grundebene und die Linie $v''w''$ Fig. 238 zur Höhe hat.

Zu dem Ende beschreibe man aus dem Punkte m Fig. 242 den Bogen $tt_,$ mit einem Radius $mt_,$, welcher gleich $m'd'$ Fig. 239 ist.

3. Mache man den Bogen $tt_,$ Fig. 242 mit dem Bogen $a_3'a_4'$ Fig. 239 gleich gross, ziehe die Linien tw und $t_,w_,$ nach dem Mittelpunkt m und mache jede gleich lang mit $a_4'a_5'$ Fig. 239.

4. Konstruire man in den Punkten m, t, w, $w_,$ und $t_,$ lothrechte Linien mB, tu, wv, $w_,v_,$ und $t_,u_,$, welche auf den horizontal gedachten Linien mw, und mw normal stehen und mache jede von diesen lothrechten Linien gleich lang mit $v''w''$ Fig. 238.

5. Beschreibe man aus dem Punkte B die Bogen $uu_,$ und $ww_,$ und ziehe die geraden Linien uv und $u_,v_,$; die Fig. $wtuvw_,t_,u_,v_,$ stellt dann das darzustellende normale Cylinderstück vor.

Um nun den einen Stein der unteren Gewölbeschicht vollends zu verzeichnen, konstruire man in Fig. 243 das normale Cylinderstück $wtuvw_,t_,u_,v_,$ noch einmal, mache sodann $tc = t_,c_, = t''c''$ Fig. 238, sowie $u\alpha = u_,\alpha_, = u''\alpha''$ Fig. 238 und $u\beta = u_,\beta_, = u''\beta''$ Fig. 238; konstruire sodann durch die so erhaltenen Punkte entsprechende Bogen $cc_,$, $\beta\beta_,$ und $\alpha\alpha_,$ und zwar den Bogen $cc_,$ aus dem Mittelpunkte m des Bogens $tt_,$, den Bogen $\beta\beta_,$ aus dem Mittelpunkte B des Bogens $uu_,$ und den Bogen $\alpha\alpha_,$ aus einem Punkte der Linie mB, welcher erhalten wird, wenn man die Höhe $t''\alpha''$ Fig. 238 auf mB von m aus abträgt. Endlich ziehe man die geraden Linien $\alpha\beta$ und $\alpha_,\beta_,$, so wie noch die Bogen αc und $\alpha_,c_,$; die so hervorgehende Figur stellt dann einen Stein der unteren Schicht vor. Das ebene Ringstück $\beta vv_,\beta_,$ stellt die obere horizontale Lagerfuge dieses Steins vor, das untere Ringstück $cww_,c_,$ aber das untere Lager, die Ebenen $cwv\beta\alpha$ und $c_,w_,v_,\beta_,\alpha_,$ sind die vertikalen Stossfugen, die Fig. $c\alpha\alpha_,c_,$ ist die innere kugelförmige Wölbungsfläche und $\alpha\beta\beta_,\alpha_,$ die centrale Lagerfuge der unteren Steinschicht.

In ähnlicher Weise wird die Fig. 244, welche einen Stein der zweiten Gewölbeschicht vorstellt, erhalten. Zunächst konstruire man das Rechteck $l''k''i''p''$ Fig. 238 und denke ein normales Cylinderstück, welches das koncentrische Ringstück $H'E'h'e'$ Fig. 239 zur Grundebene und $l''p''$ Fig. 238 zur Höhe hat, dessen Stirnflächen sonach dem Rechteck $l''k''i''p''$ kongruent sind.

Der Mittelpunkt der unteren Grundebene dieses Cylinderstückes ist der Punkt d_2, dessen zweite Projektion in Fig. 238 mit d_2'' bezeichnet worden ist und dessen geometrischer Ort in der Achse des Gewölbes sich befindet.

Der Mittelpunkt der oberen Grundebene des Cylinderstückes befindet sich ebenfalls in der Achse des Gewölbes und zwar in der Entfernung $p''l''$ über dem Mittelpunkte d_2 der unteren Grundebene. Die Fig. $iplkk_,i_,p_,l_,$ Fig. 244 sei dies Cylinderstück, d_2 sei der Mittelpunkt der unteren und A der Mittelpunkt der oberen Grundebene, also $d_2A = i''k''$ Fig. 238. Um nun aus diesem Cylinderstücke die Form des Steins der zweiten Gewölbschicht zu erhalten, mache man die Längen $i_,d$ und id gleich lang mit $i''d''$ Fig. 238 und konstruire aus d_2 den Bogen dg. Ferner mache man $qk = q''k''$ Fig. 238 und beschreibe aus A als Mittelpunkt den Bogen $qq_,$, mache sodann die Längen ke und Ae_2 mit $k''e''$ Fig. 238 gleich lang und beschreibe aus e_2 den Bogen eh, ziehe die geraden Linien eq und $hq_,$, so wie die Bogen de und gh. Endlich mache man $ps = p_,s_, = p''s''$ Fig. 238 und ziehe sr parallel pd, so wie $s_,r_,$ parallel $p_,g$, mache sr und $s_,r_,$ jede gleich lang mit $s''r''$ Fig. 238 und ziehe die Linien rd und rg, die Fig. $lqedrsl_,q_,hgr_,s_,$ stellt alsdann einen fertigen Stein der zweiten Gewölbeschicht vor. Das ebene Ringstück $qll_,q_,$ dieser Figur stellt das obere horizon-