In Fig. 136 bezeichnet du die gegebene lichte Weite des steigenden Bogens, au die Steigung und da die steigende Linie. Die Aufgabe geht nun dahin, in dem schiefwinkligen Parallelogramm $adef$, dessen Höhe durch die vorgeschriebene lichte Höhe des steigenden Bogens gegeben ist, eine Kurve zu konstruiren, zu welcher die eine Seite des Parallelogramms eine Sehne, die drei anderen aber Tangenten sind. Zu dem Ende mache man $ec = ed$, ziehe cs normal auf ef, nehme in dieser Linie den Punkt n beliebig an und beschreibe aus demselben mit nc den Kreis $bcqsvw$. Durch den Punkt a ziehe man ferner die Sehne vq senkrecht auf au, mache $al = av$, so wie $ag = aw$ und ah gleich der Differenz cs weniger ql. Hierauf verlängere man au so weit, bis diese Linie in r die Kreisperipherie schneidet, ziehe $ri \parallel hg$, mache $am = ai$ und ziehe die gerade Linie nmb, so ist m der Mittelpunkt des Bogens ab, n der des Bogens bc und der Durchschnittspunkt o der Linien du und cs der Mittelpunkt des Bogens cd.

Fig. 137 zeigt die Konstruktion eines steigenden Bogens, welcher aus vier verschiedenen Punkten m, n, o, p konstruirt ist. Hierbei ist vorausgesetzt worden, dass die Steigung $au = \frac{1}{2}\, du$ sei, wenn du die lichte Weite des Bogens bezeichnet. Die vier Mittelpunkte m, n, o, p zu erhalten, mache man $up = \frac{1}{4}\, au$ und konstruire das Rechteck $ampu$. Sodann beschreibe man über pm einen Halbkreis und konstruire in demselben das halbe reguläre Sechseck $ponm$, so sind die Eckpunkte desselben die vier Mittelpunkte, aus denen die Korblinie konstruirt werden kann. Die Konstruktion der Korblinie beginnt nun damit, dass man die Linien po, on und nm beliebig verlängert, aus dem Punkte p mit pd den Kreisbogen de beschreibt, aus o mit oe den Bogen ec, aus n mit nc den Bogen cb und endlich aus m mit mb den Kreisbogen ba beschreibt.

Wir hatten hier vorausgesetzt, dass $au = \frac{1}{2}\, du$ sei, indem dies bei grossen massiven Freitreppen häufig der Fall ist. Wenn nun aber das Verhältniss von au zu du anders ist, so mache man die Länge $pu = \frac{1}{2}\, du - \frac{3}{4}\, au$ und konstruire alsdann wie oben.

Einen steigenden Bogen, nach Art der Korblinie aus zwei Mittelpunkten beschrieben, zeigt Fig. 138. Die Linie cf bezeichnet die lichte Weite des steigenden Bogens, fa die Steigung desselben und die Punkte m und n die Mittelpunkte der Kreisbogen ab und bc. Die hier gegebene Konstruktion des steigenden Bogens setzt aber voraus, dass es verstattet sei, die lichte Höhe des Bogens in der Art festzustellen, dass $ad = \frac{1}{2}\, ac$ werde; denn die Punkte m und n werden erhalten, wenn man $ad = \frac{1}{2}\, ac$ macht und das schiefwinklige Parallelogramm $adec$ bildet; wenn man sodann die Linie de in b halbirt, bn normal auf de konstruirt und $am \parallel fc$ zieht, so ist der Durchnittspunkt m der Linien bn und am der Mittelpunkt des Bogenstücks ab und der Durchschnittspunkt n der Linien bn und cf der Mittelpunkt vom Bogen bc.

Soll die Richtungslinie eines steigenden Bogens eine Ellipse sein und ist od Fig. 139 die lichte Weite, oa die Steigung, da die steigende Linie und $adqp$ das schiefwinklige Parallelogramm, dessen Höhe durch die lichte Höhe des steigenden Bogens gegeben ist, so lautet die Aufgabe: eine Ellipse zu konstruiren, zu welcher die Seiten dq, pq und pa Tangenten sind. Oder von einer Ellipse sind zwei konjugirte Durchmesser der Grösse und Lage nach gegeben, man sucht die beiden Hauptachsen. Die steigende Linie da ist der eine Durchmesser und die Linie mc parallel dq gedacht ist die Hälfte des zugehörigen anderen Durchmessers der Ellipse.

Diese Aufgabe zu lösen, ziehe man cg normal auf da mache ihre Verlängerung ch gleich dm. Man verbinde sodann die Punkte m und h durch eine gerade Linie, halbire diese in k, ziehe kl senkrecht auf mh und aus ihrem Durchschnittspunkte l mit der Linie qp beschreibe man einen Halbkreis, welcher lm zum Radius hat. Die Punkte f und u, in welchen die Linie qp von diesem Halbkreise geschnitten wird, verbinde man mit h durch gerade Linien, beschreibe aus h als Mittelpunkt, mit der Länge hc als Radius, den Kreisbogen rs, ziehe die geraden Linien mf und mu, so sind diese letzteren in m normal auf einander und geben die Richtungen der beiden Hauptachsen der Ellipse. Endlich ziehe man die Linien sb und re parallel mit hm, so sind ihre Durchschnittspunkte b und e mit den Linien mf und mu zwei Punkte der Ellipse und es ist mb die halbe grosse Achse und me die halbe kleine Achse.

Die Richtigkeit der Konstruktion zu beweisen, ziehe man st und bv parallel mit qf, so ist die Fig. $bstv$ ein Parallelogramm. Denn es ist zufolge der Konstruktion

$$1)\quad mv : mc = mb : mf,$$

$$2)\quad ht : hc = hs : hf,$$

$$3)\quad mb : mf = hs : hf,$$

folglich

$$4)\quad mv : mc = ht : hc,$$

und deshalb ist tv parallel mit hm.

Es war aber sb ebenfalls parallel mit hm und st parallel mit bv, folglich ist $bstv$ ein Parallelogramm, in welchem $ts = vb$ ist.

Es ist ferner

$$ts^2 = hs^2 - ht^2 = hc^2 - ht^2 = ma^2 - ht^2$$

und aus der Proportion 4)

$$\text{ist } ht = \frac{mv \,.\, hc}{mc} = \frac{mv \,.\, ma}{mc};$$

$$\text{daher } ts^2 = ma^2 - \frac{mv^2 \,.\, ma^2}{mc^2}.$$

Bezeichnet man nun die Länge bv mit y und mv mit x,

so ist
$$y^2 = \frac{ma^2}{mc^2}\,(mc^2 - x^2),$$

welches die Gleichung der Ellipse ist.

Wenn dg Fig. 140 die lichte Weite eines steigenden Bogens bezeichnet, ga dessen Steigung und da die steigende Linie desselben, so erhält man auch dadurch den elliptischen Bogen, dass man über dg einen Halbkreis dtg beschreibt, in beliebigen Punkten b, f, w Normalen auf dg konstruirt und auf diesen $cn = be$, $mh = fo$ und $zr = wy$ macht. Die Punkte n, h und r sind alsdann Punkte der Richtungslinie des steigenden Bogens. In derselben Weise findet man die Punkte i, k, l, p, q, s und v.

Nach der Konstruktion des steigenden Bogens, welche Fig. 140 enthält, wurde die lichte Höhe des Bogens bedingt durch die lichte Weite desselben, weil $al = xt = \frac{1}{2}\, dg$ gemacht wurde. Sehr oft ist aber die lichte Höhe des Bogens gegeben, indem Umstände obwalten, durch welche diese Höhe bedingt wird. In diesem Falle konstruirt man den steigenden Bogen nach Fig. 141 wie folgt:

Man halbire die steigende Linie da in c, ziehe nach lothrechter Richtung die Linie cb und mache dieselbe so lang, als die lichte Höhe des steigenden Bogens es erfordert. Sodann beschreibe man aus dem Punkte c^2 mit cb den Kreisbogen $d^2 b^2$, theile die Linie $d^2 c^2$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und konstruire in den erhaltenen Theilpunkten die Linien $e^2 f^2$, $g^2 h^2$, $i^2 k^2$ normal auf $c^2 d^2$. Hierauf theile man die Längen cd und ac in eben so viel gleiche Theile als $c^2 d^2$ getheilt wurde, konstruire in den Theilpunkten gerade Linien, welche auf $c^2 d$ normal stehen und mache dieselben beziehlich gleich lang mit den gleich benannten Ordinaten des Kreisquadranten $c^2 d^2 b^2$; die Endpunkte dieser Linien bestimmen die Form des steigenden Bogens.

§. 57.

Grundregeln für den Fugenschnitt der Tonnengewölbe.

1. Die Lagerfugen sind Ebenen, welche durch die Achse des Gewölbes gehen, die Gewölbleibung demnach in Mantellinien schneiden; die Leibungskanten der Lagerbrettungen sind also Mantellinien der cylindrischen Gewölbleibung. Projicirt man das Gewölbe auf eine zur Achse $o'o'$ (Fig. 121 Taf. VII) senkrechte Ebene, so stellt sich $o'o'$ auf letzterer stets als Punkt O (Fig. 120) dar, die Lagerfugenebenen zeigen sich hier in ihren Spuren, d. h. als gerade Linien, welche senkrecht auf der Leibung des Normalschnittes stehen, bei kreisförmigem Schnitt also stets nach dem Mittelpunkt gerichtet sind. Es ist deshalb auch leicht einzusehen, dass der Aufriss (Fig. 120) bezüglich der Lagerfugenanordnung für alle im Grundriss (Fig. 121) gegebenen Fälle passt; der Aufriss ist derselbe, ob der Bogen eine gerade Mauer A', eine schiefe Mauer B', eine cylindrische Mauer $C'D'$ durchdringt. Fig. 130 zeigt in A, B, C, D eine perspektivische Ansicht dieser verschiedenen Fälle.

2. Die Stossfugen. Bei Bögen, welche in sehr dicken Mauern angebracht sind, wo die Bogensteine nicht durch die ganze Dicke der Mauer durchgehen können, oder bei Gewölben sind Stossfugen erforderlich. Die Stossfugen sind Ebenen, welche auf der Achse des Bogens oder Gewölbes senkrecht stehen, also Theile eines Normalschnittes

3. Schneidet die Leibung des Bogens oder die Gewölbstirne das Mauerhaupt der Art, dass hier scharfe Kanten entstehen, so ist eine Abfasung der Kante erforderlich.

4. Ist der Rücken des Gewölbes nicht sichtbar, so kann die Rückenfläche der Steine ganz rauh bleiben oder braucht wenigstens nur oberflächlich bearbeitet zu werden.

Bei kleineren Gewölben kann der Rücken vdw (Fig. 122) koncentrisch mit der Leibung ceb gemacht worden, so dass die Gewölbdicke durchweg gleich ist. Für grössere Gewölbe lässt man aber die Gewölbdicke dem grösseren Drucke entsprechend nach dem Widerlager hin zunehmen.

Nach Perronet ist, wenn man mit w die Spannweite und mit h die Dicke des Gewölbes im Scheitel bezeichnet, bei Gewölben, welche über 20 m Spannweite haben,

$$h = \frac{w}{24}$$

bei Spannweiten unter 20 m

$$h = \frac{5}{144} \cdot w + 0{,}3\,\mathrm{m}$$

Die Widerlagerstärke beträgt bei gedrückten Bögen $\frac{1}{2}$—$\frac{1}{3}$ der Spannweite, bei halbkreisförmigen $\frac{1}{3}$—$\frac{1}{4}$, bei überhöhten $\frac{1}{4}$—$\frac{1}{5}$ der Spannweite. Doch gelten diese Regeln nur für Brückengewölbe.

Die Stärke der Widerlager und die Gewölbdicke ist bekanntlich abhängig von der Belastung, von der Höhe der Widerlager u. s. w. und ist in besonderen Fällen durch Rechnung zu bestimmen; dies ist jedoch Sache der Statik, wir begnügen uns hier mit dieser Andeutung.

Nehmen wir die Scheitelstärke des Gewölbes (Fig. 124) als bekannt an, so kann man $oz = \frac{ao}{2}$ machen und den Rücken als Kreisbogen gestalten, der seinen Mittelpunkt in z hat.

Eine andere Regel für die Gestaltung des Rückens ist folgende: Man verlängere die Lagerfugen bis zum Mittelpunkt O, ziehe eine horizontale Linie gn so, dass $gh = \frac{ay}{2}$ wird und mache $cd = hi$, $ef = ik$, $pq = kl$ u. s. f., so sind $d, f, q, s \ldots$ Punkte der Rückenlinie.

Aehnlich kann man verfahren, wenn der Normalschnitt ein Spitzbogen ist. (Fig. 129.) Man ziehe $bi \perp ao$ und zwar so, dass zugleich $bc = \frac{av}{2}$; dann ist cd die mittlere Dicke des neben dem Schlussstein liegenden Bogensteines u. s. f., woraus sich die Rückenlinie vw ergibt. Oder man mache $oz = \frac{oa}{2}$ und beschreibe aus dem Mittelpunkte z mit zv den Bogen vw.

Ebenso kann man auch bei elliptischen Grundbögen (Fig. 126) die Rückenlinie zeichnen, wenn man den Krümmungsmittelpunkt o für den Scheitelpunkt e ermittelt, $oz = \frac{oe}{2}$ macht und mit dem Radius vz den Bogen vw beschreibt.

5. Verbindung des Gewölbes mit dem Widerlager.

Wird ein Gewölbe (Fig. 123*a* Taf. VII) ganz unabhängig von der auf dem Widerlager $abcd$ stehenden Mauer $cegf$ ausgeführt, so muss dasselbe jedenfalls bei ehi auf $\frac{1}{2}$—$\frac{2}{3}$ der Höhe hintermauert werden, um die Deformation der Gewölblinie zu verhüten.

Gewöhnlich aber tritt bei Werksteinkonstruktionen das Gewölbe mit der Mauer in der Weise in Verbindung, wie dies Fig. 123, 125 und 128 zeigen, wobei allerdings durch die verlängerten Bogenlagerfugen (wie bei ab Fig. 125) die horizontalen Lagerfugen verkürzt und für eine bei w (Fig. 128) aufzurichtende Mauer die Basis bedenklich verschmälert wird. Es ist daher besser, in diesem Falle die Bogenlagerfugen an dieser Stelle nur ganz kurz zu machen (wie in Fig. 124 und 129), um breitere horizontale Lager zu erhalten, so dass die Bogenlagerfuge gleichsam nur eine Abstumpfung der scharfen Kante ist, die an der Leibung entstehen würde, wenn man die horizontalen Lager bis zur Bogenleibung durchführen würde, was übrigens auch unbedenklich an den untersten Lagern geschehen kann, so lange eben der an der Leibungskante liegende Flächenwinkel des Gewölbsteins nicht zu spitz wird.

6. Verbindung des Gewölbes mit einer Stirnmauer.

Schliesst das Gewölbe mit einer Stirnmauer ab und öffnet sich gegen diese mit dem Grundbogen (Fig. 125*A*), so sind die Gewölbsteine mit den Mauerschichten der ganzen Höhe nach so in Verbindung zu bringen, wie dies oben in Nr. 5 betreffs der Widerlagsmauern beschrieben wurde.

7. Verbindung eines Mauerbogens mit den Mauerschichten.

Fig. 7. a.

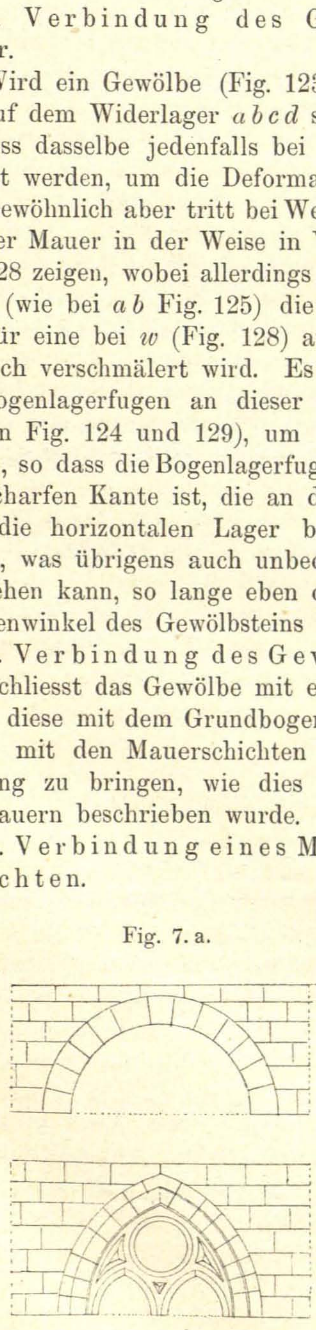
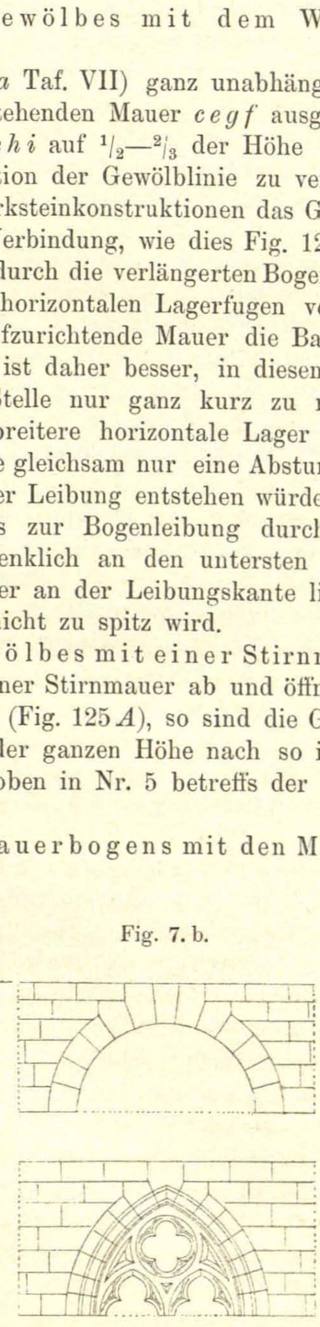


Fig. 7. b.



a. Der Rücken der Gewölbsteine kann koncentrisch mit der Leibung bearbeitet werden, so dass der Bogen in einer mit der Leibung koncentrischen Fuge an das Quadermauerwerk sich anschliesst. Diese Art des Fugenschnittes, die in der Antike und im Mittelalter fast ausschliesslich angewendet wurde, hat jedoch den Nachtheil, dass namentlich gegen den Scheitel des Bogens zu die anschliessenden Quader sehr spitze Flächenwinkel erhalten (s. Fig. 7 *a*).

b. Es ist daher zweckmässig, wenigstens die Bogensteine am Scheitel mit den Quaderschichten in Verband zu bringen (s. Fig. 7 *b*).

c. In der modernen Baukunst werden gewöhnlich sämmtliche Bogensteine mit den Quaderschichten in Verband gebracht und zwar in einer der in Fig. 131, 132, 133, 135 Taf. VIII angegebenen Weise.

Würde man in Fig. 127 Taf. VII die Fuge ac bis zum oberen Lager durchführen, so würde der Bogenstein bei b eine ziemlich scharfe Kante erhalten. Dieser Uebelstand ist durch den senkrechten Schnitt ab vermieden, allein der anstossende Gewölbstein erhält dadurch eine weniger zweckmässige Form.

8. Hakensteine. Würde man die Stossfuge tp (Fig. 135) nach uv verlegen, so würde der Bogenstein $pqrst$ die Form $vqrstu$ erhalten, d. h. zu einem sogenannten Hakenstein werden. Dieselben sind jedoch, wenn irgend möglich, zu vermeiden; jedenfalls darf der Haken $tuvq$ nicht zu lang gemacht werden (im Max. $tu = \frac{1}{2} uv$), da auf den dem Bogen angehörigen Theil des Steines andere Kräfte einwirken, als auf den Haken, d. h. auf den in die Mauerschicht einbindenden Theil und daher der Stein der Gefahr des Zerbrechens ausgesetzt ist.

§. 58.

Auf Taf. IX sind sechs verschiedene Formen des cylindrischen Bogens, welcher in einer Mauer angebracht ist und diese entweder in normaler oder in schiefer Richtung durchdringt, verzeichnet. Fig. 142 zeigt die Ansicht des Bogens; sie gilt für die sechs verschiedenen Grundrisse. Die in den Grundrissen ausgezogenen geraden Linien stellen die Projektionen der Leibungskanten vor, die punktirten Linien aber die Projektionen der Rückenkanten. Jeder Grundriss stellt sonach eine Ansicht des Gewölbebogens von unten dar. Fig. 144, der Grundriss eines Bogens, welcher in normaler Richtung durch die Mauer hindurchgeht und gerader Bogen genannt wird, bedarf keiner weiteren Beschreibung, indem alle Konstruktionen aus der Figur deutlich hervorgehen. Fig. 145, der Durchschnitt dieses Bogens nach der Linie $f'y'$ des Grundrisses genommen, wird auch keiner weiteren Erörterung bedürfen. Was aber die in Fig. 143 dargestellte Abwickelung dieses Bogens anbetrifft, so verfährt man, um diese zu erhalten, in folgender Art:

Man mache die gerade Linie (a) (L) gleich der Länge des Halbkreises $a''f''L''$ und konstruire über dieser Linie ein Rechteck, dessen Höhe (a) (r) $= a'r'$, gleich der Länge des geraden Bogens ist, so stellt dies Rechteck die abgewickelte Leibungsfläche des Bogens vor.

Die Lagerfugen auszutragen, theile man die gerade Linie $(a)(L)$ nach der Anzahl der Gewölbsteine, hier in neun gleiche Theile, errichte in den Theilpunkten Normalen, welche bis zur gegenüberliegenden Seite des Rechtecks verlängert werden, so stellen diese die inneren Fugen des Gewölbebogens vor. Ist nun etwa (L) (V) gleich $\frac{1}{9}$ von (L) (a), so mache man (V) (W) gleich V'' W'' Fig. 142 und konstruire mit den Linien (W) (V) und (V) (M) das Rechteck (V) (W) (N) (M): dies Rechteck stellt dann die ausgetragene Lagerbrettung des Anfängers vor. In eben derselben Art werden die übrigen Brettungen ausgetragen.

Fig. 146 zeigt den Anfänger dieses Bogens in isometrischer Projektion gezeichnet. Diese Figur zu erhalten, ziehe man die Horizontale BH und in der schiefen Projektion normal auf ihr die Linie AB. Alsdann mache man BL gleich f^0L'' Fig. 142, LH gleich $L''H''$, beschreibe aus dem Punkte B den Kreisbogen LV und konstruire über LH das Haupt $LHIWV$ nach der Fig. $L''H''I''V''W''$ Fig. 142. Hierauf ziehe man aus den Punkten I, W, V und L gerade Linien parallel der Linie BA und mache jede derselben gleich der Länge $f'y'$ Fig. 144. Eben so lang mache man die Linie AB, beschreibe aus dem Punkte A den Kreisbogen MR und verbinde die Punkte M, N und E durch gerade Linien. Fig. 147 stellt den Stein zur Seite des Schlusssteins vor. Die Konstruktion dieser Figur beginnt damit, das Haupt $\mu\pi\varphi o g$ so zu zeichnen, wie die Fig. 142 dasselbe zeigt. Zu dem Ende mache man Winkel $LB\pi$ Fig. 147 gleich dem Winkel $L''f^0\pi''$ Fig. 142, Winkel πBo gleich Winkel $\pi''f^0o''$ und konstruire aus B mit f^0f'', dem Radius des Gewölbebogens, den Kreisbogen μg. Sodann werde go gleich $g''o''$, $\mu\pi$ gleich $\mu''\pi''$ gemacht, aus dem Punkte o die Linie $o\varphi$ parallel BL und aus dem Punkte π die Linie $\pi\varphi$ normal auf $o\varphi$ gezogen.

Nachdem in dieser Weise das Haupt konstruirt worden ist, ziehe man die Linie BA normal auf BL in der schiefen Projektion und zwar nach unten, um die untere Ansicht des Steins zu erhalten. Ziehe ferner parallel mit AB die Linien $\mu\varrho$, gz und $o\alpha$, mache jede derselben, so wie auch AB gleich lang mit $f'y'$