ZWEITES KAPITEL.

Von den Gewölben.

§. 50.

Ein Gewölbe ist eine Baukonstruktionsform in Stein, welche den Zweck hat, einen Raum zu überdecken, also eine Decke zu bilden; es ist ein aus einer kleineren oder grösseren Anzahl einzelner Glieder bestehendes Ganzes, welche sich vermöge ihrer eigenthümlichen Form gegenseitig stützen und in ihrer Lage erhalten. Diese Glieder heissen Gewölbsteine. Ein Gewölbe von geringer Tiefe (wenn es etwa nur durch eine Mauer hindurchreicht) nennt man Mauerbogen. Die Mauern oder Pfeiler, welche ein Gewölbe oder einen Bogen stützen, nennt man Widerlager, Kämpfer. Die ersten Steine eines Gewölbes oder Bogens, welche auf dem Widerlager ruhen, heissen Anfänger; ihr unteres Lager ist die Kämpferfuge oder Gewölbesohle, der höchste Punkt oder die am höchsten liegende Linie im Gewölbe ist der Scheitelpunkt oder die Scheitellinie. Die im Scheitel des Gewölbes liegenden Gewölbsteine nennt man Schlusssteine. Die innere Fläche des Gewölbes oder Bogens heisst Leibung (Laibung), die äussere Begrenzungsfläche Gewölbrücken.

§. 51.

Mit Rücksicht auf die Form der Leibungsfläche unterscheidet man:

1. cylindrische Gewölbe, Tonnengewölbe;
2. kegelförmige Gewölbe, Trompen;
3. sphärische Gewölbe, Kuppelgewölbe;
4. konoidische Gewölbe;
5. sphäroidische Gewölbe;
6. ebene Gewölbe, scheitrechte Gewölbe.

Dies sind die sogenannten einfachen Wölbungen, die zusammengesetzten Gewölbe sind: die Gewölbdurchdringungen, das Kreuzgewölbe, die Hängekuppel, das Kreuzgewölbe mit Rippen.

Von den Tonnengewölben und den (cylindrischen) Mauerbögen.

§. 52.

Tonnengewölbe nennt man jedes Gewölbe, dessen Leibung eine cylindrische Fläche bildet, die Achse dieser letzteren ist zugleich die Gewölbachse. Diese kann verschiedene Richtungen haben; ist sie horizontal, so heisst das Gewölbe ein gerades, ist sie nicht horizontal, ein steigendes Tonnengewölbe. Durchdringt ein solches Tonnengewölbe eine Mauer oder ein zweites Tonnengewölbe, so entsteht eine gerade, eine schiefe, eine gerad absteigende oder eine schief absteigende Durchdringung, je nachdem die Achse des durchdringenden Gewölbes in einer zur Mauer oder zur Achse des zweiten Tonnengewölbes senkrechten oder schiefen Ebene liegt.

Schneidet man ein Tonnengewölbe durch eine zur Achse senkrechte Ebene, so erhält man dessen Normalschnitt, den man auch den Grundbogen heisst. Der Grundbogen kann die verschiedenartigsten Formen haben; am häufigsten ist der Halbkreis, der Stichbogen und der Spitzbogen, sodann der Korbbogen und die Ellipse, seltener der parabolische, der hyberbolische Bogen und die Kettenlinie.

§. 53.

Konstruktion der Ellipse. 1. Ist gh, Fig. 126 Taf. VII, die grosse und le die kleine Achse der Ellipse, so erhält man die Brennpunkte c und d, wenn man mit der halben grossen Achse gl als Radius einen Kreisbogen beschreibt, dessen Mitelpunkt in e zu nehmen ist, d. h. wenn man $ec = ed = gl$ macht. Irgend einen Punkt a der Peripherie erhält man nun, wenn man z. B. $ca = gm$, $ad = mh$ macht. Die Geraden ca und da heissen Brennstrahlen. Es ist also $ca + ad = gm + mh =$ der grossen Achse, d. h. die beiden nach einem beliebigen Punkt der Ellipse gehenden Brennstrahlen sind zusammen gleich der grossen Achse.

Halbirt man den Winkel, welchen zwei Brennstrahlen ein schliessen, wie cad, so ist die Halbirungslinie fb eine Normale und ab die Fugenrichtung im Punkt a.

Wird die halbe kleine Achse der Ellipse zur Pfeilhöhe genommen, so ist der Grundbogen ein gedrückter; ist die halbe grosse Achse die Pfeilhöhe lh (Fig. 125), so heisst der Grundbogen ein überhöhter. Hier sind c und d die Brennpunkte und die Halbirungslinie fb des Winkels cad ist die Fugenrichtung in a.

2. Fig. 126 a. Es sei cd die grosse, fe die kleine Achse der zu zeichnenden Ellipse. Beschreibe einen Kreis über der kleinen Achse, desgleichen einen Kreis über der grossen Achse, ziehe einen beliebigen Radius mo, welcher die beiden Kreise in n und o schneidet, und mache $nr \parallel cd$ und $or \parallel cf$; der Schnittpunkt r ist ein Punkt der Ellipse.

3. Fig. 126 a. Bezeichne auf einem Papierstreifen oder Lineal 3 Punkte a, b, c in einer solchen Entfernung von einander, dass $ac =$ der halb grossen Achse cm und $ab =$ der halben kleinen Achse me ist; alsdann ist $bc = ac - ab = cm - me =$ der Differenz der beiden Halbachsen. Lege nun den Papierstreifen beliebig schräg über die Achsen, jedoch so, dass der Punkt c auf die Achse ef, der Punkt b auf die Achse cd zu liegen kommt, alsdann ist der 3. Punkt a ein Punkt der Ellipse.

§. 54.

Konstruktion der Parabel, Fig. 126 b. Es sei pe der Durchmesser und fa die Pfeilhöhe einer Parabel, man soll letztere konstruiren. Beschreibe aus a und e als Mittelpunkt zwei Kreuzbogen mit beliebigem Halbmesser; die durch die Kreuzungspunkte gehende Gerade liefert im Schnittpunkt b mit am den Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch die 3 Punkte pae geht. Dieser Kreis schneidet die verlängerte am in d. Macht man nun $ac = aq = \frac{1}{4} fd$ und zieht durch c die Gerade $cd \perp cm$, so ist q der Brennpunkt der Parabel und cd die Direktrix. am ist die Achse qe ein Brennstrahl und a der Scheitel der Parabel. Jeder Punkt, dessen Abstand von cd gleich dem Abstand vom Punkt q ist, ist ein Punkt der Parabel. Für den Punkt e z. B. ist $qe = en$, ebenso $qx = xz$ u. s. f. Ist $xy \parallel cd$, so ist $cy = zx = qx$; zieht man daher eine beliebige Gerade $xy \parallel cd$ und durchschneidet sie durch einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in q liegt und dessen Radius $qx = cy$ ist, so ist x ein Punkt der Parabel.

Halbirt man den Winkel neq, so ist die Halbirungslinie die Tangente im Punkt e der Parabel; die Halbirungslinie eh des Winkels geq ist die Normale im Punkt e, also die Fugenrichtung an dieser Stelle des parabolischen Bogens.

Fig. 134 Taf. VIII zeigt ein Gewölbe mit parabolischem Querschnitt. ad ist die Achse, a der Scheitel und b der Brennpunkt des Parabelbogens ae; von e an ist der Bogen bis zum Gewölbscheitel v geradlinig in der Richtung der Tangente verlängert; zieht man $fg \parallel ad$, so ist die Halbirungslinie nv des Winkels bef Tangente in e; die Halbirungslinie pu des Winkels beg ist die Fugenrichtung in e.

§. 55.

Konstruktion des Korbbogens. 1. Es sei ab (Fig. 126 c) die Spannweite und mn die Pfeilhöhe eines Korbbogens. Zeichne über der Basis ma das gleichseitige Dreieck mad, beschreibe mit dem Radius mn den Bogen nc; die Sehne dieses Bogens nc schneidet ad im Punkt f, ziehe durch f eine Parallele mit md; nun ist h der Mittelpunkt des Bogens nf und g der Mittelpunkt des Bogens af.

2. Es sei ab Fig. 126 d die Spannweite und cd die Pfeilhöhe eines Korbbogens. Zeichne das Rechteck $bcde$ über der halben Grundlinie bc, ziehe die Diagonale db. Die Halbirungslinien der Winkel edb und ebd schneiden sich in f; errichte auf df in der Mitte die Senkrechte mg und ziehe gf, so ist g der Mittelpunkt des Bogens df und h der Mittelpunkt des Bogens fb.

§. 56.

Konstruktion steigender Bögen. Fig. 135 Taf. VIII stellt das Haupt eines steigenden Bogens vor, dessen Richtungslinie eine aus den drei Mittelpunkten m, n und o beschriebene Korblinie ist.

In Fig. 136 bezeichnet du die gegebene lichte Weite des steigenden Bogens, au die Steigung und da die steigende Linie. Die Aufgabe geht nun dahin, in dem schiefwinkligen Parallelogramm $adef$, dessen Höhe durch die vorgeschriebene lichte Höhe des steigenden Bogens gegeben ist, eine Kurve zu konstruiren, zu welcher die eine Seite des Parallelogramms eine Sehne, die drei anderen aber Tangenten sind. Zu dem Ende mache man $ec = ed$, ziehe cs normal auf ef, nehme in dieser Linie den Punkt n beliebig an und beschreibe aus demselben mit nc den Kreis $bcqsvw$. Durch den Punkt a ziehe man ferner die Sehne vq senkrecht auf au, mache $al = av$, so wie $ag = aw$ und ah gleich der Differenz cs weniger ql. Hierauf verlängere man au so weit, bis diese Linie in r die Kreisperipherie schneidet, ziehe $ri \parallel hg$, mache $am = ai$ und ziehe die gerade Linie nmb, so ist m der Mittelpunkt des Bogens ab, n der des Bogens bc und der Durchschnittspunkt o der Linien du und cs der Mittelpunkt des Bogens cd.

Fig. 137 zeigt die Konstruktion eines steigenden Bogens, welcher aus vier verschiedenen Punkten m, n, o, p konstruirt ist. Hierbei ist vorausgesetzt worden, dass die Steigung $au = \frac{1}{2}\, du$ sei, wenn du die lichte Weite des Bogens bezeichnet. Die vier Mittelpunkte m, n, o, p zu erhalten, mache man $up = \frac{1}{4}\, au$ und konstruire das Rechteck $ampu$. Sodann beschreibe man über pm einen Halbkreis und konstruire in demselben das halbe reguläre Sechseck $ponm$, so sind die Eckpunkte desselben die vier Mittelpunkte, aus denen die Korblinie konstruirt werden kann. Die Konstruktion der Korblinie beginnt nun damit, dass man die Linien po, on und nm beliebig verlängert, aus dem Punkte p mit pd den Kreisbogen de beschreibt, aus o mit oe den Bogen ec, aus n mit nc den Bogen cb und endlich aus m mit mb den Kreisbogen ba beschreibt.

Wir hatten hier vorausgesetzt, dass $au = \frac{1}{2}\, du$ sei, indem dies bei grossen massiven Freitreppen häufig der Fall ist. Wenn nun aber das Verhältniss von au zu du anders ist, so mache man die Länge $pu = \frac{1}{2}\, du - \frac{3}{4}\, au$ und konstruire alsdann wie oben.

Einen steigenden Bogen, nach Art der Korblinie aus zwei Mittelpunkten beschrieben, zeigt Fig. 138. Die Linie cf bezeichnet die lichte Weite des steigenden Bogens, fa die Steigung desselben und die Punkte m und n die Mittelpunkte der Kreisbogen ab und bc. Die hier gegebene Konstruktion des steigenden Bogens setzt aber voraus, dass es verstattet sei, die lichte Höhe des Bogens in der Art festzustellen, dass $ad = \frac{1}{2}\, ac$ werde; denn die Punkte m und n werden erhalten, wenn man $ad = \frac{1}{2}\, ac$ macht und das schiefwinklige Parallelogramm $adec$ bildet; wenn man sodann die Linie de in b halbirt, bn normal auf de konstruirt und $am \parallel fc$ zieht, so ist der Durchnittspunkt m der Linien bn und am der Mittelpunkt des Bogenstücks ab und der Durchschnittspunkt n der Linien bn und cf der Mittelpunkt vom Bogen bc.

Soll die Richtungslinie eines steigenden Bogens eine Ellipse sein und ist od Fig. 139 die lichte Weite, oa die Steigung, da die steigende Linie und $adqp$ das schiefwinklige Parallelogramm, dessen Höhe durch die lichte Höhe des steigenden Bogens gegeben ist, so lautet die Aufgabe: eine Ellipse zu konstruiren, zu welcher die Seiten dq, pq und pa Tangenten sind. Oder von einer Ellipse sind zwei konjugirte Durchmesser der Grösse und Lage nach gegeben, man sucht die beiden Hauptachsen. Die steigende Linie da ist der eine Durchmesser und die Linie mc parallel dq gedacht ist die Hälfte des zugehörigen anderen Durchmessers der Ellipse.

Diese Aufgabe zu lösen, ziehe man cg normal auf da mache ihre Verlängerung ch gleich dm. Man verbinde sodann die Punkte m und h durch eine gerade Linie, halbire diese in k, ziehe kl senkrecht auf mh und aus ihrem Durchschnittspunkte l mit der Linie qp beschreibe man einen Halbkreis, welcher lm zum Radius hat. Die Punkte f und u, in welchen die Linie qp von diesem Halbkreise geschnitten wird, verbinde man mit h durch gerade Linien, beschreibe aus h als Mittelpunkt, mit der Länge hc als Radius, den Kreisbogen rs, ziehe die geraden Linien mf und mu, so sind diese letzteren in m normal auf einander und geben die Richtungen der beiden Hauptachsen der Ellipse. Endlich ziehe man die Linien sb und re parallel mit hm, so sind ihre Durchschnittspunkte b und e mit den Linien mf und mu zwei Punkte der Ellipse und es ist mb die halbe grosse Achse und me die halbe kleine Achse.

Die Richtigkeit der Konstruktion zu beweisen, ziehe man st und bv parallel mit qf, so ist die Fig. $bstv$ ein Parallelogramm. Denn es ist zufolge der Konstruktion

$$1)\ mv : mc = mb : mf,$$

$$2)\ ht : hc = hs : hf,$$

$$3)\ mb : mf = hs : hf,$$

folglich $$4)\ mv : mc = ht : hc,$$

und deshalb ist tv parallel mit hm.

Es war aber sb ebenfalls parallel mit hm und st parallel mit bv, folglich ist $bstv$ ein Parallelogramm, in welchem $ts = vb$ ist.

Es ist ferner

$$\begin{aligned} ts^2 &= hs^2 - ht^2 \\ &= hc^2 - ht^2 \\ &= ma^2 - ht^2 \end{aligned}$$

und aus der Proportion 4)

$$\begin{aligned} \text{ist } ht &= \frac{mv \,.\, hc}{mc} \\ &= \frac{mv \,.\, ma}{mc}; \end{aligned}$$

$$\text{daher } ts^2 = ma^2 - \frac{mv^2 \,.\, ma^2}{mc^2}.$$

Bezeichnet man nun die Länge bv mit y und mv mit x,

so ist $$y^2 = \frac{ma^2}{mc^2}\,(mc^2 - x^2),$$

welches die Gleichung der Ellipse ist.

Wenn dg Fig. 140 die lichte Weite eines steigenden Bogens bezeichnet, ga dessen Steigung und da die steigende Linie desselben, so erhält man auch dadurch den elliptischen Bogen, dass man über dg einen Halbkreis dtg beschreibt, in beliebigen Punkten b, f, w Normalen auf dg konstruirt und auf diesen $cn = be$, $mh = fo$ und $zr = wy$ macht. Die Punkte n, h und r sind alsdann Punkte der Richtungslinie des steigenden Bogens. In derselben Weise findet man die Punkte i, k, l, p, q, s und v.

Nach der Konstruktion des steigenden Bogens, welche Fig. 140 enthält, wurde die lichte Höhe des Bogens bedingt durch die lichte Weite desselben, weil $al = xt = \frac{1}{2}\, dg$ gemacht wurde. Sehr oft ist aber die lichte Höhe des Bogens gegeben, indem Umstände obwalten, durch welche diese Höhe bedingt wird. In diesem Falle konstruirt man den steigenden Bogen nach Fig. 141 wie folgt:

Man halbire die steigende Linie da in c, ziehe nach lothrechter Richtung die Linie cb und mache dieselbe so lang, als die lichte Höhe des steigenden Bogens es erfordert. Sodann beschreibe man aus dem Punkte c^2 mit cb den Kreisbogen $d^2 b^2$, theile die Linie $d^2 c^2$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und konstruire in den erhaltenen Theilpunkten die Linien $e^2 f^2$, $g^2 h^2$, $i^2 k^2$ normal auf $c^2 d^2$. Hierauf theile man die Längen cd und ac in eben so viel gleiche Theile als $c^2 d^2$ getheilt wurde, konstruire in den Theilpunkten gerade Linien, welche auf $c^2 d$ normal stehen und mache dieselben beziehlich gleich lang mit den gleich benannten Ordinaten des Kreisquadranten $c^2 d^2 b^2$; die Endpunkte dieser Linien bestimmen die Form des steigenden Bogens.

§. 57.

Grundregeln für den Fugenschnitt der Tonnengewölbe.

1. Die Lagerfugen sind Ebenen, welche durch die Achse des Gewölbes gehen, die Gewölbleibung demnach in Mantellinien schneiden; die Leibungskanten der Lagerbrettungen sind also Mantellinien der cylindrischen Gewölbleibung. Projicirt man das Gewölbe auf eine zur Achse $o'o'$ (Fig. 121 Taf. VII) senkrechte Ebene, so stellt sich $o'o'$ auf letzterer stets als Punkt O (Fig. 120) dar, die Lagerfugenebenen zeigen sich hier in ihren Spuren, d. h. als gerade Linien, welche senkrecht auf der Leibung des Normalschnittes stehen, bei kreisförmigem Schnitt also stets nach dem Mittelpunkt gerichtet sind. Es ist deshalb auch leicht einzusehen, dass der Aufriss (Fig. 120) bezüglich der Lagerfugenanordnung für alle im Grundriss (Fig. 121) gegebenen Fälle passt; der Aufriss ist derselbe, ob der Bogen eine gerade Mauer A', eine schiefe Mauer B', eine cylindrische Mauer $C'D'$ durchdringt. Fig. 130 zeigt in A, B, C, D eine perspektivische Ansicht dieser verschiedenen Fälle.

2. Die Stossfugen. Bei Bögen, welche in sehr dicken Mauern angebracht sind, wo die Bogensteine nicht durch die ganze Dicke der Mauer durchgehen können, oder bei Gewölben sind Stossfugen erforderlich. Die Stossfugen sind Ebenen, welche auf der Achse des Bogens oder Gewölbes senkrecht stehen, also Theile eines Normalschnittes

3. Schneidet die Leibung des Bogens oder die Gewölbstirne das Mauerhaupt der Art, dass hier scharfe Kanten entstehen, so ist eine Abfasung der Kante erforderlich.

4. Ist der Rücken des Gewölbes nicht sichtbar, so kann die Rückenfläche der Steine ganz rauh bleiben oder braucht wenigstens nur oberflächlich bearbeitet zu werden.

Bei kleineren Gewölben kann der Rücken vdw (Fig. 122) koncentrisch mit der Leibung ceb gemacht worden, so dass die Gewölbdicke durchweg gleich ist. Für grössere Gewölbe lässt man aber die Gewölbdicke dem grösseren Drucke entsprechend nach dem Widerlager hin zunehmen.