



Start-Programm „Konkrete Mathematik: Fraktale, Dynamik und Punktverteilung“

START-Projekt „Konkrete Mathematik“ *START-Project „Concrete Mathematics“*

Seit 1.10.1998 besteht am Institut für Mathematik das START-Projekt Y96-MAT mit dem Titel „Konkrete Mathematik: Fraktale, Ziffernentwicklungen und Punktverteilungen“. Das Projekt hat sich zum Ziel gesetzt Konstruktionen und Ergebnisse aus verschiedensten Bereichen der Mathematik „konkret“ und explizit zu machen. Diese Zielsetzung soll besonders in den Bereichen der Diffusion auf Fraktalen, der Ziffernentwicklungen und der Punktverteilungen auf der Sphäre verfolgt werden.

Das START-Projekt „Konkrete Mathematik“ beschäftigt sich mit Themenbereichen der reinen Mathematik, die in der letzten Zeit neue Anwendungen erhalten haben:

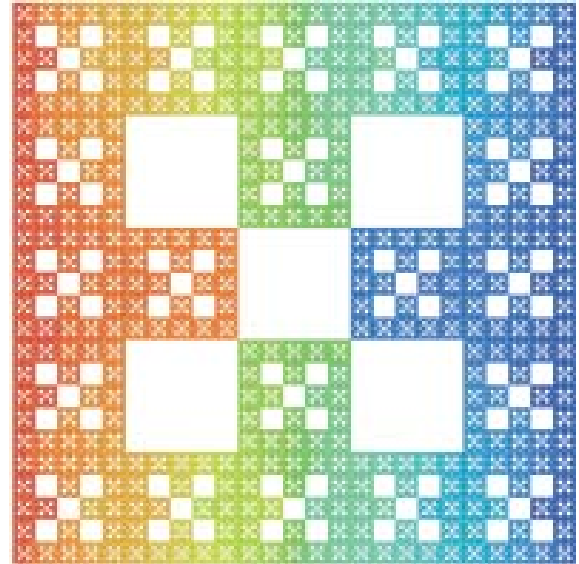
- Diffusion auf Fraktalen: ausgehend von der klassischen Fragestellung nach der Wärmeleitung wurden seit den 1980-er Jahren Modelle für die Wärmeausbreitung in porösen Medien untersucht. Als Modell für poröse Medien wurden die damals zu großer Popularität gelangten Fraktale verwendet. Es stellte sich weiters heraus, dass das mathematische Modell für die Diffusion auf Fraktalen auch zur Beschreibung der Ausbreitung von Erdöl in porösen Gesteinsschichten und zur Modellierung von Kolloiden verwendet werden kann. Im Rahmen des START-Projekts wird vor allem die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Diffusion genau analysiert. Hier wurden bereits einige Phänomene, die numerisch schon bekannt waren, mathematisch exakt nachgewiesen und genauer beschrieben.

- Ziffernentwicklungen haben vielfältige Anwendungen innerhalb und außerhalb der Mathematik. So verwenden etwa viele der gängigen Konstruktionen von gut verteilten Punktfolgen, die bei der numerischen Berechnung von Integralen zur Anwendung kommen, verschiedene Ziffernentwicklungen. Ebenso haben Entwicklungen natürlicher Zahlen in der Kryptografie zunehmend an Bedeutung gewonnen, um einerseits die dabei verwendeten komplizierten Verschlüsselungsverfahren in möglichst kurzer Zeit ausführen zu können, und andererseits mögliche Attacken auf das Kryptosystem schwierig zu machen. Darüber hinaus haben Ziffernentwicklungen natürlich sowohl für die Repräsentierung von Daten im Computer als auch innermathematische Anwendungen. Im Rahmen des Projekts werden einerseits diverse dynamische Systeme, die über nicht-klassische Entwicklungen definiert sind, andererseits auch kryptografische Anwendungen untersucht.

- Punktverteilungen: die numerische Berechnung von Flächeninhalten und Integralen wird mit Hilfe von „gut verteilten“ Punktfolgen ausgeführt. Im Falle von hochdimensionalen Würfeln, die zum Beispiel in der Finanzmathematik als Integrationsbereiche auftreten, gibt es bereits eine Fülle von Konstruktionen, die den jeweiligen Fragestellungen angepasst sind. Im Rahmen des Projektes sollen zahlentheoretische und potenzialtheoretische Methoden zur Konstruktion von Punktverteilungen auf der Kugel gefunden werden. Erste Erfolge wurden hier schon mit Punktverteilungen minimaler Energie erzielt.

Moderne Wissenschaft wird zumeist in internationalen Kooperationen betrieben. Davon ist natürlich auch die Mathematik nicht ausgenommen. Das START-Projekt hat daher ein intensives Gästeprogramm initiiert, das zu vielfältigen fruchtbringenden Synergien geführt hat. Die Ergebnisse wurden auf diversen internationalen Tagungen dem Fachpublikum vorgestellt. Darüber hinaus ist es ein Anliegen des Projekts die Fragestellungen, Methoden und Resultate auch einer breiten Öffentlichkeit vorzustellen. Dazu wurden beispielsweise im vergangenen Jahr folgende Aktivitäten entfaltet:

- das Team des START-Projekts hat im Rahmen der Science-Week mit einer Präsentation im Foyer einer Bank versucht auf die Anwend-



barkeit mathematischer Forschung besonders im Bankenbereich aufmerksam zu machen. Hierbei wurden besonders mathematische Methoden der Datenverschlüsselung sowie Modelle aus der Finanzmathematik präsentiert.

- im Rahmen der Fachtagung „Fractals in Graz 2001“ waren etwa 80 Forscher aus aller Welt in Graz, um neueste Ergebnisse in der Theorie und Anwendung fraktaler Strukturen auszutauschen.
- im Rahmen dieser Tagung wurde auch von Prof. Heinz-Otto Peitgen ein populärwissenschaftlicher Vortrag mit dem Titel „Ordnung im Chaos - Chaos in der Ordnung“ gehalten, der etwa 150 Zuhörer in die Aula der TU brachte.

Gerade die Popularisierung der Wissenschaft ist ein wichtiges Ziel für die Zukunft, dem gerade in der Mathematik bisher wohl zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Die ab nun jährlich stattfindende Science-Week und gelegentliche populärwissenschaftliche Vorträge sollen in Zukunft den Kontakt mit einer breiteren Öffentlichkeit ermöglichen.

The START-Project Y96-MAT is concerned with questions from pure mathematics which have gained new applications in various areas recently:

- *diffusion on fractals: from the very beginning fractals have been used to model porous media. Consequently, diffusion and mass transport in porous media is modelled by diffusion on fractals. Physicists have found mathematical models of this type to be important devices in understanding the structure of polymers, colloids, and oil bearing rocks. The current program has gained several results on the exact speed of this diffusion.*

- *digital expansions: Digital constructions present a vast number of concrete examples for dynamical systems, well-distributed sequences and fractal phenomena. Furthermore, digital sequences and substitution automata occur in quite surprising contexts, such as mathematical physics, but also unexpectedly in number theoretic questions, which have no obvious relation to digital functions.*

- *point distributions: „well-distributed“ point sets are commonly used for numerical integration and area-measurement. For the case of high-dimensional cubes a lot of mainly number theoretic constructions for such point sets are known and applied for instance in financial mathematics. The project intends to use number theoretic as well as potential theoretic methods to construct well-distributed point sets on the sphere.*