Partielle Differentialgleichungen – Eine Herausforderung für die moderne Operatortheorie

Partial Differential Equations – A Challenge for Modern Operator Theory

Jussi Behrndt, Jonathan Rohleder

Die mathematische Beschreibung von natur- und ingenieurwissenschaftlichen Vorgängen führt in der Regel zu Gleichungen, in denen Funktionen mehrerer Variablen und deren Ableitungen auftreten. Populäre Beispiele für solche partiellen Differentialgleichungen sind etwa die Schrödinger-Gleichung aus der Quantenmechanik oder die Navier-Stokes-Gleichungen aus der Strömungsdynamik. Da oft nur stark vereinfachte Modellprobleme exakt gelöst werden können, sind qualitative analytische Untersuchungen und numerische Näherungsverfahren für die Praxis unabdingbar. Die moderne Operatortheorie setzt an dieser Schnittstelle mit abstrakten Methoden aus der reinen Mathematik an.

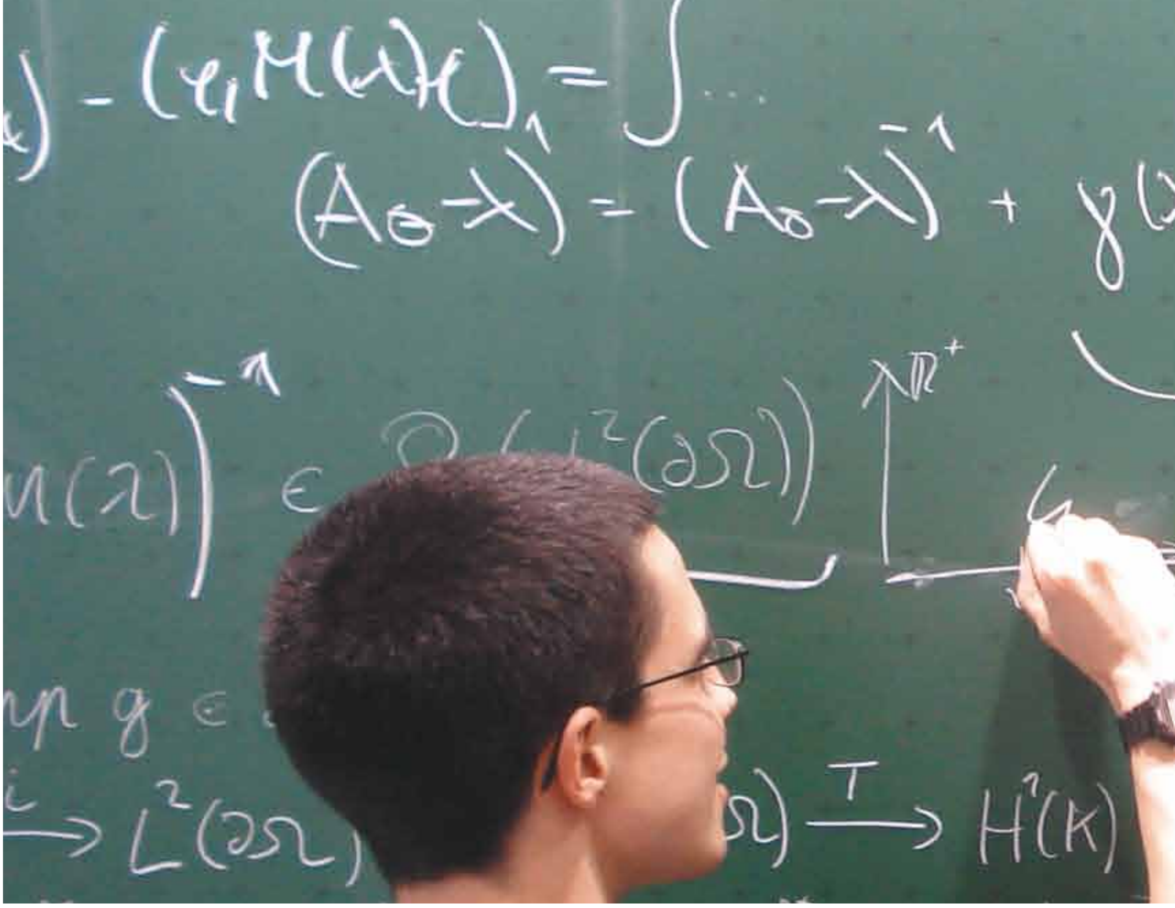
In der analytischen Behandlung von Differentialgleichungen und den zugehörigen Rand- und Anfangswertproblemen stehen die Fragen nach der Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität von Lösungen im Vordergrund. Obwohl also für die zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichungen keine expliziten Lösungen angegeben werden können, versucht man, strukturelle Aussagen zum Lösungsverhalten zu gewinnen. Funktionalanalytische und operatortheoretische Methoden sind hierbei sehr hilfreich und eröffnen den passenden abstrakten Rahmen für weitergehende Untersuchungen. Beispielsweise ist der Begriff des Spektrums in der Operatortheorie eng verknüpft mit den Spektrallinien von Atomen: Die Eigenwerte und verallgemeinerten Eigenwerte des Schrödinger-Operators beschreiben die möglichen Energiezustände des zugehörigen quantenmechanischen Systems. So lassen sich auch die konzentrischen Bahnen im klassischen Bohr'schen Modell des Wasserstoffatoms gerade als diskrete Energieeigenwerte des entsprechenden Schrödinger-Operators interpretieren.

The mathematical description of processes in natural and engineering sciences typically leads to equations in which functions of several variables and their derivatives appear. Popular examples of such partial differential equations are the Schrödinger equation from quantum mechanics or the Navier-Stokes equations from fluid mechanics. Since in general only very simple model problems are explicitly solvable, qualitative analytic investigations and numerical approximation methods are of great importance in practice. This is where modern operator theory provides the appropriate tools from pure mathematics.

In the analysis of differential equations and the associated boundary and initial value problems, the questions usually focus on existence, uniqueness and stability of solutions. Even though the underlying partial differential equation cannot be solved explicitly, attempts are made to obtain structural properties of the solutions. Functional analytic and operator theoretical methods turn out to be useful here and provide a suitable abstract mathematical framework for further investigations. For example, the notion of the spectrum in operator theory is closely connected to spectral lines of atoms: the eigenvalues and generalized eigenvalues of Schrödinger operators describe the possible energy states of the corresponding quantum mechanical system. Also, the concentric orbits in Bohr's classical model of the hydrogen atom can be interpreted as the discrete eigenvalues of the corresponding Schrödinger operator.
One of the main interests of the research group Differential Equations is the spectral theory of partial differential operators. In order to interpret the spectrum under consideration as possible energy states of a quantum mechanical system, the so-called property of selfadjointness of the present problem has to be ensured. Typically this

Jussi Behrndt ist Leiter der Arbeitsgruppe Differentialgleichungen am Institut für Numerische Mathematik. Seine Forschungsinteressen umfassen Spektral- und Störungstheorie, gewöhnliche und partielle Differentialoperatoren, nichtlineare Randwertaufgaben und inverse Probleme.

Jussi Behrndt is head of the group Differential Equations at the Institute of Computational Mathematics. His research interests cover spectral and perturbation theory, ordinary and partial differential operators, nonlinear boundary value problems and inverse problems.



Jonathan Rohleder ist Universitätsassistent in der Arbeitsgruppe Differentialgleichungen. Sein Forschungsgebiet ist die Spektraltheorie von elliptischen Differentialoperatoren.

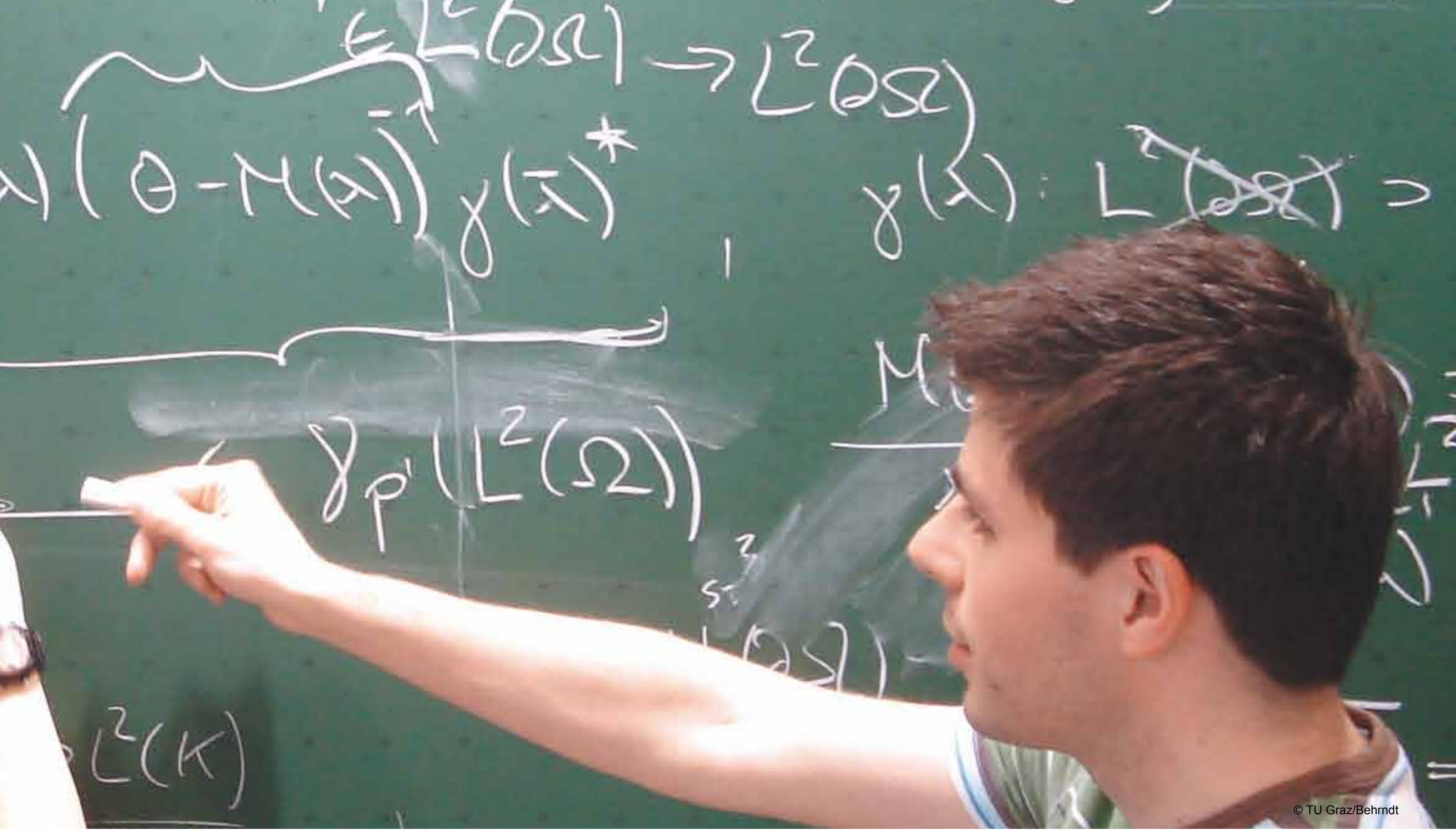
Jonathan Rohleder is research assistant in the group Differential Equations.His field of research is spectral theory of elliptic differential operators.

Einer der Forschungsschwerpunkte in der Arbeitsgruppe Differentialgleichungen ist die Spektraltheorie von partiellen Differentialoperatoren. Um das zu analysierende Spektrum physikalisch sinnvoll als mögliche Energiezustände eines quantenmechanischen Systems interpretieren zu können, ist es besonders wichtig, zuerst die sogenannte Selbstadjungiertheit des betrachteten Problems sicherzustellen. Dies geschieht in der Regel durch eine sinnvolle Wahl von Randbedingungen an das System und kann bei komplizierten Aufgabenstellungen zu einem ausgesprochen anspruchsvollen mathematischen Problem werden. Selbst bei einem einfachen Laplace- oder Schrödinger-Operator auf einem beschränkten Gebiet im zwei- oder dreidimensionalen Raum existiert noch keine adäquate vollständige Beschreibung aller selbstadjungierten Randbedingungen. Die Forscherinnen und Forscher in der Arbeitsgruppe Differentialgleichungen setzen gemeinsam mit ihren internationalen Kooperationspartnern zur Lösung solcher grundlegenden Fragestellungen innovative Techniken und neue Konzepte aus der abstrakten Erweiterungstheorie ein.

Ein weiterer Forschungsschwerpunkt der Arbeitsgruppe ist die analytische Untersuchung verschiedener Klassen von inversen Problemen. Es werden insbesondere verallgemeinerte Varianten des sogenannten Calderón'schen Problems studiert, welches in der elektrischen Impedanztomo-

is done by fixing suitable boundary conditions on the system. However, in complicated settings this may lead to a highly nontrivial mathematical problem. Even for simple Laplace or Schrödinger operators on a bounded domain in two or three space dimensions, a suitable complete description of all selfadjoint boundary conditions does not exist. To solve such fundamental problems, the researchers in the group Differential Equations and their international collaborators apply innovative techniques and new concepts from abstract extension theory.

Another topic which is a central research area of the present group is the analytic investigation of different classes of inverse problems. In particular, generalized variants of the so-called Calderón problem from electrical impedance tomography are studied. The inverse problem in Calderón's classical problem is to determine and reconstruct the conductivity coefficient of an isotropic body by applying a voltage and measuring the corresponding flux on its surface. Under additional regularity assumptions on the surface and the conductivity coefficient, it can be shown that this coefficient is uniquely determined and can be reconstructed by the measured data. The classical Calderón problem was solved about 20 years ago. In the generalized case, where instead of an isotropic body an anisotropic body is considered, fundamental problems arise. The conductivity coefficients are not uniquely determined by voltage



grafie eine wichtige Rolle spielt. Die inverse Aufgabe im klassischen Calderón'schen Problem besteht darin, durch das Anlegen einer Spannung und Messung des resultierenden Stromes an der Oberfläche eines isotropen Körpers den (ortsabhängigen) Leitfähigkeitskoeffizienten zu rekonstruieren. Unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen an die Oberfläche und den zu ermittelnden Koeffizienten ist dieser eindeutig durch die Messdaten bestimmt und kann rekonstruiert werden. Das klassische Calderón'sche Problem ist bereits vor 20 Jahren gelöst worden. Für den verallgemeinerten Fall, in dem anstelle eines isotropen Körpers ein anisotroper Körper zugrunde liegt, treten fundamentale Schwierigkeiten auf: Die Leitfähigkeitskoeffizienten sind durch die Messdaten nicht mehr eindeutig bestimmt, d. h., das inverse Problem ist in mathematischer Sprechweise schlecht gestellt. In der Arbeitsgruppe für Differentialgleichungen wird versucht, solche schlecht gestellten inversen Probleme mithilfe von modernen operatortheoretischen Methoden zu kontrollieren. Es konnte beispielsweise gezeigt werden, dass im verallgemeinerten Calderón'schen Problem der zugrunde liegende partielle Differentialoperator bis auf unitäre Äquivalenz aus den Messdaten rekonstruiert werden kann. Besonders bemerkenswert ist, dass hierzu sogar Messdaten auf beliebig kleinen Teilmengen der Oberfläche mit positivem Inhalt ausreichen.

and current measurements on the surface: in mathematical terms, this is a so-called ill-posed inverse problem. Such ill-posed inverse problems are tackled using modern methods from operator theory in the research group Differential Equations. For example, it was proved recently that in the generalized Calderón problem the underlying partial differential operator is determined uniquely up to unitary equivalence and that it can be reconstructed from the boundary measurements. It is a remarkable fact that even measurements on an arbitrarily small subset of the surface with positive volume are sufficient for the uniqueness and reconstruction results to remain valid.

Abb. 1: Forschungsalltag: Mitglieder der Arbeitsgruppe Differentialgleichungen bei der Diskussion neuer Resultate.

Fig. 1: Everday research work: Members of the group Differential Equations are discussing recent results.