III. Naturphilosophie.

1. Molecularmechanik.

Die freie Bewegung eines Systems materieller Punkte $m_1, m_2 \ldots$ mit den rechtwinkligen Coordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ... auf welche parallel den drei Axen die Kräfte X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; ... wirken geschieht den Gleichungen gemäss:

$$(1) \qquad m_\iota \frac{d^2 x_\iota}{dt^2} = X_\iota, \quad m_\iota \frac{d^2 y_\iota}{dt^2} = Y_\iota, \quad m_\iota \frac{d^2 z_\iota}{dt^2} = Z_\iota.$$

Dies Gesetz kann auch so ausgesprochen werden: die Beschleunigungen bestimmen sich so, dass

$$\sum m_\iota \left(\left(\frac{d^2 x_\iota}{dt^2} - \frac{X_\iota}{m_\iota} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y_\iota}{dt^2} - \frac{Y_\iota}{m_\iota} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z_\iota}{dt^2} - \frac{Z_\iota}{m_\iota} \right)^2 \right)$$

ein Minimum wird; denn diese Function der Beschleunigungen nimmt ihren kleinsten Werth 0 an, wenn die Beschleunigungen sämmtlich den Gleichungen (1) gemäss bestimmt werden, d. h. die Grössen $\frac{d^2 x_\iota}{dt^2} - \frac{X_\iota}{m_\iota} \cdots$ sämmtlich $= 0$ sind, und sie nimmt auch nur dann einen Minimumwerth an; denn wäre eine dieser Grössen, z. B. $\frac{d^2 x_\iota}{dt^2} - \frac{X_\iota}{m_\iota}$ nicht gleich Null, so könnte man $\frac{d^2 x_\iota}{dt^2}$ immer stetig so ändern, dass der absolute Werth dieser Grösse und folglich ihr Quadrat abnähme. Die Function würde also dann kleiner werden, wenn man zugleich alle übrigen Beschleunigungen ungeändert liesse.

Diese Function der Beschleunigungen unterscheidet sich von

$$\sum m_\iota \left(\left(\frac{d^2 x_\iota}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y_\iota}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z_\iota}{dt^2} \right) \right)$$

$$-2 \sum \left(X_\iota \frac{d^2 x_\iota}{dt^2} + Y_\iota \frac{d^2 y_\iota}{dt^2} + Z_\iota \frac{d^2 z_\iota}{dt^2} \right)$$

nur um eine Constante, d. h. eine von den Beschleunigungen unabhängige Grösse.

Wenn die Kräfte nur von Anziehungen und Abstossungen zwischen den Punkten herrühren, welche Functionen der Entfernung sind, und der ιte Punkt und der ι'te Punkt sich in der Entfernung r mit der Kraft $f_{\iota,\iota'}(r)$ abstossen oder mit der Kraft $-f_{\iota,\iota'}(r)$ anziehen, lassen sich bekanntlich die Componenten der Kräfte ausdrücken durch die partiellen Derivirten einer Function von den Coordinaten sämmtlicher Punkte

$$P = \sum_{\iota,\iota'} F_{\iota,\iota'}(r_{\iota,\iota'})$$

worin $F_{\iota,\iota'}(r)$ eine Function bedeutet, deren Derivirte $f_{\iota,\iota'}(r)$, und für ι und ι' je zwei verschiedene Indices zu setzen sind.

Substituirt man diese Werthe der Componenten

$$X_\iota = \frac{\partial P}{\partial x_\iota}, \quad Y_\iota = \frac{\partial P}{\partial y_\iota}, \quad Z_\iota = \frac{\partial P}{\partial z_\iota}$$

in obiger Function der Beschleunigungen und multiplicirt dieselbe mit $\frac{dt^2}{4}$, wodurch die Lage ihrer Maxima und Minima nicht geändert wird, so erhält man einen Ausdruck, der sich von

$$\tfrac{1}{4}\sum m_\iota\left(\left(d\frac{dx_\iota}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{dy_\iota}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{dz_\iota}{dt}\right)^2\right) - P_{(t+dt)}$$

nur um eine von den Beschleunigungen unabhängige Grösse unterscheidet. Wenn die Lage und die Geschwindigkeiten der Punkte zur Zeit t gegeben sind, so bestimmt sich diese Lage zur Zeit $t + dt$ so, dass diese Grösse möglichst klein wird. Es findet demnach ein Streben statt, diese Grösse möglichst klein zu machen.

Dieses Gesetz kann man nun aus Actionen erklären, welche die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks möglichst klein zu machen streben, wenn man annimmt, dass einander widerstreitende Bestrebungen sich so ausgleichen, dass die Summe der Grössen, welche die einzelnen Actionen möglichst klein zu erhalten streben, ein Minimum wird.

Nimmt man an, dass die Massen der Punkte $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sich verhalten wie die ganzen Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_n$, so dass $m_\iota = k_\iota \mu$, so besteht der Ausdruck, welcher möglichst klein wird, aus der Summe der Grössen

$$\frac{\mu}{4}\left(\left(d\frac{dx_\iota}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{dy_\iota}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{dz_\iota}{dt}\right)^2\right)$$

für sämmtliche Massentheilchen μ und der Grösse P_{t+dt}. Wenn man also mit Gauss die Grösse

$$\left(d\frac{dx_\iota}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{dy_\iota}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{dz_\iota}{dt}\right)^2$$

als Maass der Abweichung des Bewegungszustandes der Masse μ zur Zeit $t + dt$ von ihrem Bewegungszustand zur Zeit t betrachtet, so ergiebt die Zerlegung der Gesammtaction in Bezug auf jede Masse eine Action, welche die Abweichung ihres Bewegungszustandes zur Zeit $t + dt$ von ihrem Bewegungszustande zur Zeit t möglichst klein zu machen strebt, oder ein Streben ihres Bewegungszustandes, sich zu erhalten, und ausserdem eine Action, welche die Grösse $-P$ möglichst klein zu erhalten strebt.

Diese letztere Action lässt sich zerlegen in Bestrebungen, die einzelnen Glieder der Summe $\sum\limits_{\iota,\iota'} F_{\iota,\iota'}(r_{\iota,\iota'})$ möglichst klein zu erhalten, d. h. in Anziehungen und Abstossungen zwischen je zwei Punkten, und dies würde zu der gewöhnlichen Erklärung der Bewegungsgesetze aus dem Gesetz der Trägheit und Anziehungen und Abstossungen zurückführen; sie lässt sich aber bei allen uns bekannten Naturkräften auch auf Kräfte, welche zwischen benachbarten Raumelementen thätig sind, zurückführen, wie im folgenden Artikel an der Gravitation erläutert werden soll.

---

2. Gravitation und Licht.

Die Newton'sche Erklärung der Fallbewegungen und der Bewegungen der Himmelskörper besteht in der Annahme folgender Ursachen:

1. Es existirt ein unendlicher Raum mit den Eigenschaften, welche die Geometrie ihm beilegt, und ponderable Körper, welche in ihm ihren Ort nur stetig verändern.

2. In jedem ponderablen Punkte existirt in jedem Augenblicke eine nach Grösse und Richtung bestimmte Ursache, vermöge der er eine bestimmte Bewegung hat (Materie in bestimmtem Bewegungszustande). Das Maass dieser Ursache ist die Geschwindigkeit.*)

Die hier zu erklärenden Erscheinungen führen noch nicht auf die Annahme verschiedener Massen der ponderablen Körper.

3. In jedem Punkt des Raumes existirt in jedem Augenblicke eine nach Grösse und Richtung bestimmte Ursache (beschleunigende Kraft), welche jedem dort befindlichen ponderablen Punkte eine be-

*) Jeder materielle Körper würde, wenn er sich im Raum allein befände, entweder seinen Ort in demselben nicht verändern oder mit unveränderlicher Geschwindigkeit in gerader Linie durch denselben sich bewegen.

Dieses Bewegungsgesetz kann nicht aus dem Princip des zureichenden Grundes erklärt werden. Dass der Körper seine Bewegung fortsetzt, muss eine Ursache haben, welche nur in dem inneren Zustand der Materie gesucht werden kann.

stimmte, und zwar allen dieselbe Bewegung mittheilt, die sich mit der Bewegung, die er schon hat, geometrisch zusammensetzt.

4. In jedem ponderablen Punkt existirt eine der Grösse nach bestimmte Ursache (absolute Schwerkraft), vermöge welcher in jedem Punkte des Raumes eine dem Quadrat der Entfernung von diesem ponderablen Punkte umgekehrt und seiner Schwerkraft direct proportionale beschleunigende Kraft stattfindet, die sich mit allen andern dort stattfindenden beschleunigenden Kräften geometrisch zusammensetzt.*)

Die nach Grösse und Richtung bestimmte Ursache (beschleunigende Schwerkraft), welche nach 3. in jedem Punkte des Raumes stattfindet, suche ich in der Bewegungsform eines durch den ganzen unendlichen Raum stetig verbreiteten Stoffes, und zwar nehme ich an, dass die Richtung der Bewegung der Richtung der aus ihr zu erklärenden Kraft gleich, und ihre Geschwindigkeit der Grösse der Kraft proportional sei. Dieser Stoff kann also vorgestellt werden als ein physischer Raum, dessen Punkte sich in dem geometrischen bewegen.

Nach dieser Annahme müssen alle von ponderablen Körpern durch den leeren Raum auf ponderable Körper ausgeübte Wirkungen durch diesen Stoff fortgepflanzt werden. Es müssen also auch die Bewegungsformen, in denen das Licht und die Wärme besteht, welche die Himmelskörper einander zusenden, Bewegungsformen dieses Stoffes sein. Diese beiden Erscheinungen, Gravitation und Lichtbewegung durch den leeren Raum, aber sind die einzigen, welche bloss aus Bewegungen dieses Stoffes erklärt werden müssten.

Ich nehme nun an, dass die wirkliche Bewegung des Stoffes im leeren Raum zusammengesetzt ist aus der Bewegung, welche zur Erklärung der Gravitation, und aus der, welche zur Erklärung des Lichtes angenommen werden muss.

Die weitere Entwicklung dieser Hypothese zerfällt in zwei Theile, insofern aufzusuchen sind

1. Die Gesetze der Stoffbewegungen, welche zur Erklärung der Erscheinungen angenommen werden müssen.

2. Die Ursachen, aus welchen diese Bewegungen erklärt werden können.

Das erste Geschäft ist ein mathematisches, das zweite ein meta-

---

*) Derselbe ponderable Punkt würde an zwei verschiedenen Orten Bewegungsänderungen erleiden, deren Richtung mit der Richtung der Kräfte zusammenfällt, und deren Grössen sich verhalten wie die Kräfte.

Die Kraft, dividirt durch die Bewegungsänderung giebt daher bei demselben ponderablen Punkt stets denselben Quotienten. Dieser Quotient ist bei verschiedenen ponderablen Punkten verschieden und heisst ihre Masse.

physisches. In Bezug auf letzteres bemerke ich im Voraus, dass als Ziel desselben nicht die Erklärung aus Ursachen, welche die Entfernung zweier Stoffpunkte zu verändern streben, zu betrachten sein wird. Diese Erklärungsmethode durch Anziehungs- und Abstossungskräfte verdankt ihre allgemeine Anwendung in der Physik nicht einer unmittelbaren Evidenz (besonderen Vernunftgemässheit), noch, von Electricität und Schwere abgesehen, ihrer besonderen Leichtigkeit, sondern vielmehr dem Umstande, dass das Newton'sche Anziehungsgesetz gegen die Meinung des Entdeckers so lange für ein nicht weiter zu erklärendes gegolten hat.*)

I. Gesetze der Stoffbewegung, welche nach unserer Annahme die Gravitations- und Lichterscheinungen verursacht.

Indem ich die Lage eines Raumpunktes durch rechtwinklige Coordinaten x_1, x_2, x_3 ausdrücke, bezeichne ich die dort parallel denselben zur Zeit t stattfindenden Geschwindigkeitscomponenten der Bewegung, welche die Gravitationserscheinungen verursacht, durch u_1, u_2, u_3, der Bewegung, welche die Lichterscheinungen verursacht, durch w_1, w_2, w_3, der wirklichen Bewegung durch v_1, v_2, v_3, so dass $v = u + w$. Wie sich aus den Bewegungsgesetzen selbst ergeben wird, behält der Stoff, wenn er in Einem Zeitpunkte überall gleich dicht ist, stets allenthalben dieselbe Dichtigkeit, ich werde diese daher zur Zeit t überall $= 1$ annehmen.

a. Bewegung, welche nur Gravitationserscheinungen verursacht.

Die Schwerkraft ist in jedem Punkte durch die Potentialfunction V bestimmt, deren partielle Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}$ die Componenten der Schwerkraft sind, und dieses V ist wieder bestimmt durch folgende Bedingungen (abgesehen von einer hinzufügbaren Constanten):

1. $dx_1\, dx_2\, dx_3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right)$ ist ausserhalb der anziehenden Körper $= 0$ und hat für jedes ponderable Körperelement einen unveränderlichen Werth. Dieser ist das Product aus -4π in die absolute Grösse der Anziehungskraft, welche nach der Attractionstheorie

*) Newton says: „That gravity should be innate, inherent, and essential to matter, so that one body may act upon another at a distance through a vacuum, without the mediation of anything else, by and through which their action and force may be conveyed from one to another, is to me so great an absurdity, that I believe no man who has in philosophical matters a competent faculty of thinking can ever fall into it." See the third letter to Bentley.

demselben beigelegt werden muss, und durch dm bezeichnet werden soll.

2. Wenn alle anziehenden Körper sich innerhalb eines endlichen Raumes befinden, sind in unendlicher Entfernung r von einem Punkt dieses Raumes $r\frac{\partial V}{\partial x_1}$, $r\frac{\partial V}{\partial x_2}$, $r\frac{\partial V}{\partial x_3}$ unendlich klein.

Nach unserer Hypothese ist nun $\frac{\partial V}{\partial x} = u$ und folglich

$$dV = u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3.$$

Dieses schliesst die Bedingungen ein:

$$(1)\qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0,\quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0,\quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0,$$

$$(2)\qquad \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_1\,dx_2\,dx_3 = -\,4\pi dm,$$

$$(3)\qquad ru_1 = 0,\quad ru_2 = 0,\quad ru_3 = 0,\quad \text{für } r = \infty.$$

Umgekehrt sind auch die Grössen u, wenn sie diesen Bedingungen genügen, den Componenten der Schwerkraft gleich. Denn die Bedingungen (1) enthalten die Möglichkeit einer Function U, von welcher das Differential $dU = u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3$ und also die Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x} = u$, und die übrigen ergeben dann $U = V +$ const.*)

---

*) Diese Function U ist also durch die Erfahrung (aus den relativen Bewegungen) mittelst der allgemeinen Bewegungsgesetze gegeben, aber nur abgesehen von einer linearen Function der Coordinaten, weil wir nur relative Bewegungen beobachten können.

Die Bestimmung dieser Function gründet sich auf folgenden mathematischen Satz: Eine Function V des Ortes ist innerhalb eines endlichen Raumes bestimmt (abgesehen von einer Constanten), wenn sie nicht längs einer Fläche unstetig sein soll und für alle Elemente desselben $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right) dx_1\,dx_2\,dx_3$, an der Grenze entweder V oder deren Differentialquotient für eine Ortsänderung nach Innen senkrecht auf die Begrenzung gegeben ist. Wobei zu bemerken:

1. Wird dieser Differentialquotient im Begrenzungselement ds durch $\frac{\partial V}{\partial p}$ bezeichnet, so muss in letzterem Falle $\int\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx_1\,dx_2\,dx_3$ durch den ganzen Raum $= -\int\frac{\partial V}{\partial p}\,ds$ durch dessen Begrenzung sein; übrigens aber können in beiden Fällen sämmtliche Bestimmungsstücke willkürlich angenommen werden und sind daher zur Bestimmung nothwendig.

2. Für ein Raumelement, wo $\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ unendlich gross wird, ist das Product beider durch $-\int\frac{\partial V}{\partial p}\,ds$ in Bezug auf die Begrenzung dieses Elements zu ersetzen.

b. Bewegung, welche nur Lichterscheinungen verursacht.

Die Bewegung, welche im leeren Raum zur Erklärung der Lichterscheinungen angenommen werden muss, kann betrachtet werden (zufolge eines Theorems) als zusammengesezt aus ebenen Wellen, d. h. aus solchen Bewegungen, wo längs jeder Ebene einer Schaar paralleler Ebenen (Wellenebenen) die Bewegungsform constant ist. Jedes dieser Wellensysteme besteht dann (der Erfahrung nach) aus Bewegungen parallel der Wellenebene, die sich mit einer für alle Bewegungsformen (Arten des Lichts) gleichen constanten Geschwindigkeit c senkrecht zur Wellenebene fortpflanzen.

Sind für ein solches Wellensystem ξ_1, ξ_2, ξ_3 rechtwinklige Coordinaten eines Raumpunktes, die erste senkrecht, die andern parallel zur Wellenebene, ω_1, ω_2, ω_3 die ihnen parallelen Geschwindigkeitscomponenten in diesem Punkte zur Zeit t, so hat man:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \xi_3} = 0.$$

Der Erfahrung nach ist erstlich:

$$\omega_1 = 0,$$

zweitens ist die Bewegung zusammengesetzt aus einer nach der positiven und einer nach der negativen Seite der Wellenebene mit der Geschwindigkeit c fortschreitenden Bewegung. Sind ω' die Geschwindigkeitscomponenten der ersteren, ω'' die der letzteren, so bleiben die ω' ungeändert, wenn t um dt und ξ_1 um $c\,dt$ wächst, die ω'', wenn t um dt und ξ_1 um $-c\,dt$ wächst, und man hat $\omega = \omega' + \omega''$. Hieraus folgt:

$$\left(\frac{\partial \omega'}{\partial t} + c\frac{\partial \omega'}{\partial \xi_1}\right) dt = 0, \quad \left(\frac{\partial \omega''}{\partial t} - c\frac{\partial \omega''}{\partial \xi_1}\right) dt = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \omega'}{\partial t^2} = -c\frac{\partial^2 \omega'}{\partial \xi_1 \partial t} = cc\frac{\partial^2 \omega'}{\partial \xi_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \omega''}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 \omega''}{\partial \xi_1 \partial t} = cc\frac{\partial^2 \omega''}{\partial \xi_1^2}$$

also

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = cc\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_1^2}.$$

Diese Gleichungen geben folgende symmetrische:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = cc\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_3^2}\right)$$

---

3. Wenn nur innerhalb eines endlichen Raumes $\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ einen von 0 verschiedenen Werth hat, so kann die Grenzbedingung dadurch ersetzt werden, dass in unendlicher Entfernung R von einem Punkte dieses Raumes $R\frac{\partial V}{\partial x}$ unendlich klein sein soll.

welche, ausgedrückt durch das ursprüngliche Coordinatensystem, in Gleichungen von derselben Form übergehen, d. h. in

$$(1) \qquad \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = cc\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2}\right).$$

Diese Gleichungen gelten für jede den Punkt (x_1, x_2, x_3) zur Zeit t durchschreitende ebene Welle und folglich auch für die aus allen zusammengesetzte Bewegung.

c. Bewegung, welche beiderlei Erscheinungen verursacht.

Aus den gefundenen Bedingungen für u und w fliessen folgende Bedingungen für v oder Gesetze der Stoffbewegung im leeren Raume:

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{aligned} &\left(\partial_t^2 - cc\,(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) = 0 \\ &\left(\partial_t^2 - cc\,(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right)\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = 0 \\ &\left(\partial_t^2 - cc\,(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) = 0 \end{aligned}$$

wie sich leicht ergiebt, wenn man die Operationen ausführt.

Diese Gleichungen zeigen, dass die Bewegung eines Stoffpunktes nur abhängt von den Bewegungen in den angrenzenden Raum- und Zeittheilen, und ihre (vollständigen) Ursachen in den Einwirkungen der Umgebung gesucht werden können.

Die Gleichung (I) beweist unsere frühere Behauptung, dass bei der Stoffbewegung die Dichtigkeit ungeändert bleibe; denn

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt,$$

welches zufolge dieser Gleichung $= 0$ ist, drückt die in das Raumelement $dx_1\, dx_2\, dx_3$ im Zeitelement dt einströmende Stoffmenge aus, und die in ihm enthaltene Stoffmenge bleibt daher constant.

Die Bedingungen (II) sind identisch mit der Bedingung, dass:

$$\left(\partial_t^2 - cc\,(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right)(v_1\, dx_1 + v_2\, dx_2 + v_3\, dx_3)$$

gleich einem vollständigen Differential dW sei. Nun ist:

$$\left(\partial_t^2 - cc\,(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right)(w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 dx_3) = 0$$

und folglich

$$dW = \left(\partial_t^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right)(u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3)$$
$$= \left(\partial_t^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right) dV$$

oder, da $(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\, dV = 0$,

$$= d\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\,.$$

. . . .

d. Gemeinschaftlicher Ausdruck für die Gesetze der Stoffbewegung und der Einwirkung der Schwerkraft auf die Bewegung der ponderablen Körper.

Die Gesetze dieser Erscheinungen lassen sich zusammenfassen in der Bedingung, dass die Variation des Integrals

$$\tfrac{1}{2}\int\left[\sum\left(\frac{\partial\eta_\iota}{\partial t}\right)^2 - cc\left[\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial x_3}-\frac{\partial\eta_3}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta_3}{\partial x_1}-\frac{\partial\eta_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2}-\frac{\partial\eta_2}{\partial x_1}\right)^2\right]dx_1\,dx_2\,dx_3\right.$$
$$\left.+\int V\left(\sum\frac{\partial^2\eta_\iota}{\partial x_\iota\,\partial t}dx_1\,dx_2\,dx_3 + 4\pi\,dm\right)dt + 2\pi\int dm\sum\left(\frac{\partial x_\iota}{\partial t}\right)^2 dt\right.$$

unter geeigneten Grenzbedingungen 0 werde.

In diesem Ausdrucke sind die beiden ersten Integrale über den ganzen geometrischen Raum, die letzteren über alle ponderablen Körperelemente auszudehnen, die Coordinaten jedes ponderablen Körperelements aber als Functionen der Zeit, und $\eta_1, \eta_2, \eta_3, V$ als Functionen von x_1, x_2, x_3 und t so zu bestimmen, dass eine den Grenzbedingungen genügende Variation derselben nur eine Variation zweiter Ordnung des Integrals hervorbringt.

Alsdann sind die Grössen $\frac{\partial\eta}{\partial t}\,(=v)$ gleich den Geschwindigkeitscomponenten der Stoffbewegung, und V gleich dem Potential zur Zeit t im Punkte (x_1, x_2, x_3).

---

3. Neue mathematische Principien der Naturphilosophie.*)

Obgleich die Ueberschrift dieses Aufsatzes bei den meisten Lesern schwerlich ein günstiges Vorurtheil erwecken wird, so schien sie mir doch die Tendenz desselben am besten auszudrücken. Sein Zweck ist, jenseits der von Galiläi und Newton gelegten Grundlagen der Astronomie und Physik ins Innere der Natur zu dringen. Für die Astronomie kann diese Speculation freilich unmittelbar keinen praktischen Nutzen haben, aber ich hoffe, dass dieser Umstand auch in den Augen der Leser dieses Blattes dem Interesse keinen Eintrag thun wird. . . . .

---

*) Gefunden am 1. März 1853.

Der Grund der allgemeinen Bewegungsgesetze für Ponderabilien, welche sich im Eingange zu Newton's Principien zusammengestellt finden, liegt in dem inneren Zustande derselben. Versuchen wir aus unserer eigenen inneren Wahrnehmung nach der Analogie auf denselben zu schliessen. Es treten in uns fortwährend neue Vorstellungsmassen auf, welche sehr rasch aus unserm Bewusstsein wieder verschwinden. Wir beobachten eine stetige Thätigkeit unserer Seele. Jedem Act derselben liegt etwas Bleibendes zu Grunde, welches sich bei besonderen Anlässen (durch die Erinnerung) als solches kundgiebt, ohne einen dauernden Einfluss auf die Erscheinungen auszuüben. Es tritt also fortwährend (mit jedem Denkact) etwas Bleibendes in unsere Seele ein, welches aber auf die Erscheinungswelt keinen dauernden Einfluss ausübt. Jedem Act unserer Seele liegt also etwas Bleibendes zu Grunde, welches mit diesem Act in unsere Seele eintritt, aber in demselben Augenblick aus der Erscheinungswelt völlig verschwindet.

Von dieser Thatsache geleitet, mache ich die Hypothese, dass der Weltraum mit einem Stoff erfüllt ist, welcher fortwährend in die ponderablen Atome strömt und dort aus der Erscheinungswelt (Körperwelt) verschwindet.

Beide Hypothesen lassen sich durch die Eine ersetzen, dass in allen ponderablen Atomen beständig Stoff aus der Körperwelt in die Geisteswelt eintritt. Die Ursache, wesshalb der Stoff dort verschwindet, ist zu suchen in der unmittelbar vorher dort gebildeten Geistessubstanz, und die ponderablen Körper sind hiernach der Ort, wo die Geisteswelt in die Körperwelt eingreift.*)

Die Wirkung der allgemeinen Gravitation, welche nun zunächst aus dieser Hypothese erklärt werden soll, ist bekanntlich in jedem Theil des Raumes völlig bestimmt, wenn die Potentialfunction P sämmtlicher ponderablen Massen für diesen Theil des Raumes gegeben ist, oder was dasselbe ist, eine solche Function P des Ortes, dass die im Innern einer geschlossenen Fläche S enthaltenen ponderablen Massen $\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial P}{\partial p}dS$ sind.

Nimmt man nun an, dass der raumerfüllende Stoff eine incompressible homogene Flüssigkeit ohne Trägheit sei, und dass in jedes ponderable Atom in gleichen Zeiten stets gleiche, seiner Masse pro-

*) In jedes ponderable Atom tritt in jedem Augenblick eine bestimmte, der Gravitationskraft proportionale Stoffmenge ein und verschwindet dort.

Es ist die Consequenz der auf Herbart'schem Boden stehenden Psychologie, dass nicht der Seele, sondern jeder einzelnen in uns gebildeten Vorstellung Substantialität zukomme.

portionale Mengen einströmen, so wird offenbar der Druck, den das ponderable Atom erfährt, (der Geschwindigkeit der Stoffbewegung an dem Orte des Atoms proportional sein?)

Es kann also die Wirkung der allgemeinen Gravitation auf ein ponderables Atom durch den Druck des raumerfüllenden Stoffes in der unmittelbaren Umgebung desselben ausgedrückt und von demselben abhängig gedacht werden.

Aus unserer Hypothese folgt nothwendig, dass der raumerfüllende Stoff die Schwingungen fortpflanzen muss, welche wir als Licht und Wärme wahrnehmen.

Betrachten wir einen einfach polarisirten Strahl, bezeichnen durch x die Entfernung eines unbestimmten Punktes desselben von einen festen Anfangspunkte, durch y dessen Elongation zur Zeit t, so muss, weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen im von Ponderabilien freien Raum unter allen Umständen sehr nahe constant (gleich α) ist, die Gleichung:

$$y = f(x + \alpha t) + \varphi(x - \alpha t)$$

wenigstens sehr nahe erfüllt werden.

Wäre sie streng erfüllt, so müsste

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha\alpha \int^t \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d\tau$$

sein; offenbar kann aber unserer Erfahrung auch durch die Gleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha\alpha \int^t \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, \varphi(t - \tau)\, d\tau$$

genügt werden, wenn auch $\varphi(t - \tau)$ nicht für alle positiven Werthe von $t - \tau$ gleich 1 ist (mit wachsendem $t - \tau$ ins Unendliche abnimmt), wofern es nur für einen hinreichend grossen Zeitraum sehr wenig von 1 verschieden bleibt. . . . .

Man drücke die Lage der Stoffpunkte zu einer bestimmten Zeit t durch ein rechtwinkliges Coordinatensystem aus, und es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punktes O x, y, z. Aehnlicher Weise seien, ebenfalls in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem die Coordinaten des Punktes O' x', y', z'. Es sind dann x', y', z' Functionen von x, y, z und $ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$ wird gleich einem homogenen Ausdruck zweiten Grades von dx, dy, dz. Nach einem bekannten Theorem lassen sich nun die linearen Ausdrücke von dx, dy, dz

$$\alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz = ds_1$$
$$\alpha_2 dx + \beta_2 dy + \gamma_2 dz = ds_2$$
$$\alpha_3 dx + \beta_3 dy + \gamma_3 dz = ds_3$$

stets und nur auf Eine Weise so bestimmen, dass

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = G_1^2 ds_1^2 + G_2^2 ds_2^2 + G_3^2 ds_3^2$$

wird, während

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2.$$

Die Grössen $G_1 - 1$, $G_2 - 1$, $G_3 - 1$ heissen dann die Hauptdilatationen des Stofftheilchens in O beim Uebergange von der ersteren Form zur letzteren; ich bezeichne sie durch λ_1, λ_2, λ_3.

Ich nehme nun an, dass aus der Verschiedenheit der früheren Formen des Stofftheilchens von seiner Form zur Zeit t eine Kraft resultirt, welche diese zu verändern strebt, dass der Einfluss einer früheren Form (caeteris paribus) desto geringer wird, je länger vor t sie stattfand, und zwar so dass von einer gewissen Grenze an alle früheren vernachlässigt werden können. Ich nehme ferner an, dass diejenigen Zustände, welche noch einen merklichen Einfluss äussern, so wenig von demjenigen zur Zeit t verschieden sind, dass die Dilatationen als unendlich klein betrachtet werden können. Die Kräfte, welche λ_1, λ_2, λ_3 zu verkleinern streben, können dann als lineare Functionen von λ_1, λ_2, λ_3 angesehen werden; und zwar erhält man wegen der Homogeneität des Aethers für das Gesammtmoment dieser Kräfte (die Kraft, welche λ_1 zu verkleinern strebt, muss eine Function von λ_1, λ_2, λ_3 sein, welche unverändert bleibt, wenn man λ_2 mit λ_3 vertauscht, und die übrigen Kräfte müssen aus ihr hervorgehen, wenn λ_2 mit λ_1, λ_3 mit λ_1 vertauscht wird) folgenden Ausdruck:

$$\delta\lambda_1(a\lambda_1 + b\lambda_2 + b\lambda_3) + \delta\lambda_2(b\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3) + \delta\lambda_3(b\lambda_1 + b\lambda_2 + a\lambda_3)$$

oder mit etwas veränderter Bedeutung der Constanten

$$\begin{aligned}\delta\lambda_1\big(a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + b\lambda_1\big) &+ \delta\lambda_2\big(a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + b\lambda_2\big)\\ &+ \delta\lambda_3\big(a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + b\lambda_3\big)\\ = \tfrac{1}{2}\,\delta\big(a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 &+ b(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\big).\end{aligned}$$

Man kann nun das Kraftmoment, welches die Form des unendlich kleinen Stofftheilchens in O zu verändern strebt, als resultirend betrachten aus Kräften, welche die Länge der in O endenden Linienelemente zu verändern streben. Man gelangt dann zu folgendem Wirkungsgesetz: Bezeichnet dV das Volumen eines unendlich kleinen Stofftheilchens in O zur Zeit t, dV' das Volumen desselben Stofftheilchens zur Zeit t', so wird die aus der Verschiedenheit beider Stoffzustände herrührende Kraft, welche ds zu verlängern strebt, durch

$$a\frac{dV - dV'}{dV} + b\frac{ds - ds'}{ds}$$

ausgedrückt.

Der erste Theil dieses Ausdrucks rührt von der Kraft her, mit welcher ein Stofftheilchen einer Volumänderung ohne Formänderung, der zweite von der Kraft, mit welcher ein physisches Linienelement einer Längenänderung widerstrebt.

Es ist nun kein Grund vorhanden, anzunehmen, dass die Wirkungen beider Ursachen nach demselben Gesetz mit der Zeit sich änderten; fassen wir also die Wirkungen sämmtlicher früheren Formen eines Stofftheilchens auf die Aenderung des Linienelements ds zur Zeit t zusammen, so wird der Werth von $\frac{\delta ds}{dt}$, welchen sie zu bewirken streben,

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{dV' - dV}{dV} \psi(t - t')\delta t' + \int_{-\infty}^{t} \frac{ds' - ds}{ds} \varphi(t - t')\delta t'.$$

Wie müssen nun die Functionen ψ und φ beschaffen sein, damit Gravitation, Licht und strahlende Wärme durch den Raumstoff vermittelt werde?

Die Wirkungen ponderabler Materie auf ponderable Materie sind:

1) Anziehungs- und Abstossungskräfte umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung.
2) Licht und strahlende Wärme.

Beide Classen von Erscheinungen lassen sich erklären, wenn man annimmt, dass den ganzen unendlichen Raum ein gleichartiger Stoff erfüllt, und jedes Stofftheilchen unmittelbar nur auf seine Umgebung einwirkt.

Das mathematische Gesetz, nach welchem dies geschieht, kann zerfällt gedacht werden

1) in den Widerstand, mit welchem ein Stofftheilchen einer Volumänderung, und
2) in den Widerstand, mit welchem ein physisches Linienelement einer Längenänderung widerstrebt.

Auf dem ersten Theil beruht die Gravitation und die electrostatische Anziehung und Abstossung, auf dem zweiten die Fortpflanzung des Lichts und der Wärme und die electrodynamische oder magnetische Anziehung und Abstossung.
