XXX.

Zur Theorie der Abel'schen Functionen für den Fall $p = 3$.

Es sei $(e_1, e_2, .., e_p)$ ein Grössensystem, welches die Eigenschaft hat, dass

$$\vartheta(e_1, e_2, .., e_p) = 0$$

ist. Nach Art. 23. der Abhandlung über die Theorie der Abel'schen Functionen (S. 127) lässt sich unter dieser Voraussetzung die Congruenz befriedigen

$$(e_1, e_2, .., e_p) \equiv \left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv \left(-\sum_p^{2p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_p^{2p-2} \alpha_p^{(\nu)}\right)$$

durch gewisse Punkte $\eta_1, \eta_2, .., \eta_{2p-2}$, welche durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind. Sind daher u_μ und u'_μ die Werthe, welche die Integrale erster Gattung u_μ für zwei unbestimmte Werthsysteme s, z und s_1, z_1 annehmen, so verschwindet die Function

$$\vartheta(u_1 - u'_1 - e_1, \ldots, u_p - u'_p - e_p)$$

als Function von s, z betrachtet für $(s, z) = (s_1, z_1)$ und in den $p-1$ Punkten $\eta_1, \eta_2, .., \eta_{p-1}$, als Function von s_1, z_1 betrachtet für $(s_1, z_1) = (s, z)$ und in den Punkten $\eta_p, .., \eta_{2p-2}$. Ist also $(f_1, f_2, .., f_p)$ ein Grössensystem von denselben Eigenschaften wie $(e_1, e_2, .., e_p)$ so wird die Function

$$(1) \qquad \frac{\vartheta(u_1 - u'_1 - e_1, ..)\ \vartheta(u_1 - u'_1 + e_1, ..)}{\vartheta(u_1 - u'_1 - f_1, ..)\ \vartheta(u_1 - u'_1 + f_1, ..)},$$

die sowohl in Bezug auf s, z als in Bezug auf s_1, z_1 rational ist, in je einem durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften Punktsystem unendlich gross und unendlich klein von der ersten Ordnung werden, und wird daher darstellbar sein in der Form

$$(2) \qquad \frac{\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s, z)\ \sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)}{\sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s, z)\ \sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)},$$

worin die Coefficienten b, c von s, z und s_1, z_1 unabhängig sind.

Wenn nun die Grössensysteme e, f die Eigenschaft haben, dass

$$(3)\qquad \begin{aligned}(e_1, e_2, \ldots, e_p) &\equiv (-e_1, -e_2, \ldots, -e_p)\\ (f_1, f_2, \ldots, f_p) &\equiv (-f_1, -f_2, \ldots, -f_p)\end{aligned}$$

ist, so fallen die Punkte, in denen die Function (1) oder (2) Null resp. unendlich wird, paarweise zusammen und wir erhalten eine Function, welche nur in $p - 1$ Punkten unendlich gross und unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Hiernach ist die Function

$$\sqrt{\frac{\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s, z) \quad \sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)}{\sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s, z) \quad \sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)}}$$

wie die Fläche T' verzweigt und nimmt beim Ueberschreiten der Querschnitte Factoren an, welche $= \pm 1$ sind. Die auf diese Weise bestimmten Functionen

$$\sqrt{\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s, z)}$$

welche in $p - 1$ Punkten unendlich klein in der ersten Ordnung werden, heissen Abel'sche Functionen. Sie entstehen aus den Functionen φ durch paarweises Zusammenfallen der 0-Punkte und Wurzelziehen. Die Anzahl dieser Functionen ist im Allgemeinen eine endliche.

Es verlangt nemlich die Congruenz (3), dass die Grössensysteme e, f von der Form seien

$$\left(\varepsilon_1' \frac{\pi i}{2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 a_{1,1} + \cdots + \tfrac{1}{2}\varepsilon_p a_{p,1}, \ \ldots, \ \varepsilon_p' \frac{\pi i}{2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 a_{1,p} + \cdots + \tfrac{1}{2}\varepsilon_p a_{p,p}\right)$$

worin die ε, ε' ganze Zahlen bedeuten, welche auf ihre kleinsten Reste (modulo 2) reducirt werden können. Die Bedingung $\vartheta(e_1, e_2 \ldots, e_p) = 0$ wird durch ein solches Grössensystem im Allgemeinen nur erfüllt wenn

$$(4)\qquad \varepsilon_1 \varepsilon_1' + \varepsilon_2 \varepsilon_2' + \cdots + \varepsilon_p \varepsilon_p' \equiv 1 \pmod{2}$$

ist. Solche Zahlensysteme ε, ε' existiren aber $2^{p-1}(2^p - 1)$, und so gross ist daher auch im Allgemeinen die Zahl der Abel'schen Functionen. Der Zahlencomplex

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \ldots, & \varepsilon_p\\ \varepsilon_1', & \varepsilon_2', & \ldots, & \varepsilon_p'\end{pmatrix}$$

heisst die Charakteristik der Function

$$\sqrt{\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s, z)}$$

und wird mit

$$\left(\sqrt{\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s, z)}\right)$$

bezeichnet. Man nennt die Charakteristik ungerade, wenn die Congruenz (4) erfüllt ist, sonst gerade. Die Anzahl der geraden Charakteristiken beträgt $2^{p-1}(2^p + 1)$ und diesen entsprechen im Allgemeinen keine Abel'schen Functionen.

Unter der Summe zweier Charakteristiken versteht man die Charakteristik, welche durch Addition entsprechender Elemente entsteht, wonach die Elemente immer auf 0 oder 1 reducirt werden können. Summe und Differenz zweier Charakteristiken sind daher identisch.

Es soll nun zunächst die Gleichung $F(s, z) = 0$ durch Einführung neuer Variablen in eine symmetrische Form gebracht werden. Ist $p \overline{>} 3$, so existiren mindestens drei von einander linear unabhängige Functionen φ, und man kann daher die Gleichung $F(s, z) = 0$ umformen durch Einführung der Variablen

$$\xi = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}; \quad \eta = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$$

(falls zwischen diesen keine identische Gleichung besteht, was im Allgemeinen nicht der Fall ist).

Genügen die Functionen φ_1, φ_2, φ_3 nicht besonderen Bedingungen, so gehören zu jedem Werth von ξ $2p - 2$ Werthe von η und umgekehrt, da jede der beiden Functionen

$$\varphi_1 - \xi\varphi_3, \quad \varphi_2 - \eta\varphi_3$$

für ein constantes ξ, resp. η in $2p - 2$ Punkten verschwindet. Die resultirende Gleichung $F(\xi, \eta) = 0$ ist also in Bezug auf jede der Variablen vom Grade $2p - 2$. Da ausserdem dieser Grad erhalten bleiben muss, wenn für ξ, η irgend eine lineare Substitution gemacht wird, so kann in dieser Gleichung kein Glied in Bezug auf ξ, η zusammengenommen die $(2p - 2)$te Dimension übersteigen. Die übrigen Functionen φ werden, durch ξ, η ausgedrückt, in Functionen übergehen, in denen kein Glied die $(2p - 5)$te Dimension überschreiten kann, wie man daraus erkennt dass $\int \frac{\varphi}{\frac{\partial F}{\partial \xi}} d\eta$ endlich bleiben muss für unendliche Werthe von ξ und η.

Die Anzahl der Constanten, die in einer solchen Function $(2p - 5)$ten Grades vorkommen, ist $= (p - 2)(2p - 3)$. Bestimmt man r von ihnen so, dass die Functionen φ für die r Werthepaare (γ, δ) wo $\frac{\partial F}{\partial \xi}$, $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ zugleich verschwinden, ebenfalls 0 werden, so müssen p Constanten übrig bleiben, da es p linear unabhängige Integrale erster Gattung giebt. Es ist demnach

$$(p-2)(2p-3) = p + r$$

und folglich:

$$r = 2(p-1)(p-3).$$

Zu demselben Ergebniss gelangt man auf folgendem Wege: Die Function $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ wird in $(2p-2)(2p-3)$ Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung, und diese Zahl ist $= \mathrm{w} + 2r$, wenn w die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte ist. Andrerseits ist (Theorie der Abel'schen Functionen Art. 7.)

$$\mathrm{w} = 2(n + p - 1), \quad n = 2p - 2$$

$$\mathrm{w} = 2(3p - 3)$$

mithin:

$$r = (p-1)(2p-3) - \tfrac{1}{2}\mathrm{w} = 2(p-1)(p-3).$$

Werden nun sämmtliche Functionen φ durch ξ, η ausgedrückt, so müssen die beiden Gleichungen:

$$\xi = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}; \quad \eta = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$$

identisch werden, also:

$$\varphi_1 = \xi \varphi_3; \quad \varphi_2 = \eta \varphi_3.$$

Es muss mithin eine Function φ_3 geben, die in Bezug auf ξ, η nur von der $(2p-6)$ten Dimension ist. Diese Function φ wird also für $(2p-2)(2p-6) = 2r$ der Gleichung $F = 0$ genügende Werthepaare von ξ, η verschwinden und wird demnach nur in den r Punktpaaren (γ, δ) gleich Null werden können.

Endlich geht durch Einführung der neuen Variablen $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$ und Multiplication mit z^{2p-2} die Gleichung $F = 0$ in eine homogene Gleichung vom Grade $2p-2$ für die drei Veränderlichen x, y, z über:

$$\overset{2p-2}{F}(x, y, z) = 0.$$

Für den Fall $p = 3$ ist die Gleichung $F(\xi, \eta) = 0$ oder $F(x, y, z) = 0$ vom vierten Grad; es ist $r = 0$ und die Function φ_3 reducirt sich auf eine Constante. Keine der Functionen φ kann den ersten Grad übersteigen und der allgemeine Ausdruck dieser Functionen ist

$$\varphi = c\xi + c'\eta + c'',$$

oder, wo es nur auf die Verhältnisse solcher Functionen ankommt,

$$\varphi = cx + c'y + c''z,$$

worin c, c', c'' Constanten sind. Jede Function φ wird in vier Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung und es giebt 28 solcher Functionen, deren Nullpunkte paarweise zusammenfallen. Die Quadratwurzeln aus diesen sind die Abel'schen Functionen und wir haben zu untersuchen, wie sich die Charakteristiken diesen 28 Functionen zuordnen.

Führen wir als Variable x, y, z drei solche Functionen φ ein, welche zweimal unendlich klein in der zweiten Ordnung werden, so dass $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ Abel'sche Functionen sind, so hat die daraus hervorgehende Gleichung $F(x, y, z) = 0$ die Eigenschaft, in ein vollständiges Quadrat überzugehen, wenn x oder y oder $z = 0$ gesetzt werden. Es sei daher

$$\begin{aligned} \text{für } x = 0 &: F = (y - \alpha z)^2 (y - \alpha' z)^2 \\ \text{für } y = 0 &: F = (z - \beta x)^2 (z - \beta' x)^2 \\ \text{für } z = 0 &: F = (x - \gamma y)^2 (x - \gamma' y)^2. \end{aligned}$$

Sind nun a, b, c die Coefficienten von x^4, y^4, z^4 in $F(x, y, z)$, so ist:

$$\alpha\alpha' = \pm\sqrt{\frac{c}{b}}, \quad \beta\beta' = \pm\sqrt{\frac{a}{c}}, \quad \gamma\gamma' = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$$

und folglich:

(5) $$\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma' = \pm 1.$$

Kennt man daher die Grössen α, α', β, β', γ, γ', so kann man alle Glieder der Function $F(x, y, z)$ bilden, welche nicht das Product xyz enthalten, und F enthält ausserdem nur noch ein Glied $xyzt$, worin t eine lineare homogene Function von x, y, z ist.

Wenn nun in der Gleichung (5) das obere Zeichen gilt, so kann man den ersteren Theil von F immer darstellen als das Quadrat einer homogenen Function zweiten Grades von x, y, z. Denn setzen wir

$$f = a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{2,3}yz + 2a_{3,1}zx + 2a_{1,2}xy,$$

so ergeben sich zur Bestimmung der Coefficienten $a_{i,k}$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' &= \frac{a_{3,3}}{a_{2,2}}, & \alpha + \alpha' &= -2\frac{a_{2,3}}{a_{2,2}}, \\ \beta\beta' &= \frac{a_{1,1}}{a_{3,3}}, & \beta + \beta' &= -2\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}, \\ \gamma\gamma' &= \frac{a_{2,2}}{a_{1,1}}, & \gamma + \gamma' &= -2\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}, \end{aligned}$$

welche immer befriedigt werden können, wenn $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma' = 1$ ist. Unter dieser Voraussetzung geht also $F = 0$ über in

(6) $$f^2 - xyzt = 0.$$

Setzt man $t = 0$, so erhält man aus $f^2 = 0$ wieder zwei Paare einander gleicher Wurzeln und demnach ist auch $\sqrt{t}$ eine Abel'sche Function und zwar eine solche, dass $\sqrt{xyzt}$ eine rationale Function von x, y, z ist.

Sind daher $(a)(b)(c)(d)$ die Charakteristiken von $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$, $\sqrt{t}$, so muss

$$(a + b + c + d) = \binom{0\,0\,0}{0\,0\,0}$$

oder

$$(d) = (a + b + c)$$

sein. Es muss also die Summe der Charakteristiken der drei Functionen $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ eine ungerade Charakteristik sein.

Ist umgekehrt diese Voraussetzung erfüllt, und ist $\sqrt{t}$ diejenige Abel'sche Function, die zu der Charakteristik $(a + b + c)$ gehörte, so ist $\sqrt{xyzt}$ eine Function, die beim Ueberschreiten der Querschnitte sich stetig ändert und mithin rational durch x, y, z darstellbar ist, diese Function kann aber den zweiten Grad nicht übersteigen, und daher ergiebt sich auch immer unter dieser Voraussetzung eine Gleichung von der Form (6). Diese Gleichung kann nicht identisch sein, wenn $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$, $\sqrt{t}$ verschiedene Abel'sche Functionen sind.

Da es 28 Abel'sche Functionen giebt, so kann die Gleichung $F = 0$ auf mehrere Arten in die Form (6) gebracht werden. Wir wollen zunächst untersuchen, ob das Paar Abel'scher Functionen $\sqrt{z}$, $\sqrt{t}$ durch ein anderes Paar $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ ersetzt werden kann.

Es möge also $F = 0$ durch Einführung von x, y, p, q in die Form gebracht werden:

$$\psi^2 - xypq = 0,$$

dann muss, wenn ein constanter Factor passend bestimmt wird, die identische Gleichung bestehen:

$$f^2 - xyzt = \psi^2 - xypq$$

oder:

$$(f - \psi)(f + \psi) = xy(zt - pq).$$

Es muss demnach $f - \psi$ oder $f + \psi$ durch xy theilbar sein und kann sich, da beide vom zweiten Grade sind, nur um einen constanten Factor davon unterscheiden. Sei demnach

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} \psi - f &= \alpha xy, \\ \alpha(\psi + f) &= -zt + pq, \end{aligned}$$

woraus:

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} \psi &= \alpha xy + f, \\ 2\alpha f + \alpha^2 xy + zt &= pq. \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser letzteren Gleichung muss also in zwei lineare Factoren zerfallen; denken wir uns diese Function entwickelt in der Form

$$a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{2,3}yz + 2a_{3,1}zx + 2a_{1,2}xy,$$

so sind die Coefficienten $a_{i,k}$ Functionen zweiten Grades von α; da aber die Determinante

$$\sum \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}$$

verschwinden muss, so erhält man eine Gleichung 6ten Grades für α, von der leicht einzusehen ist, dass sie die Wurzeln $\alpha = 0$ und $\alpha = \infty$ hat, entsprechend den beiden Zerlegungen zt und xy.

Es bleibt also eine Gleichung vierten Grades übrig, deren Wurzeln vier Functionenpaare p, q liefern, welche die verlangte Eigenschaft haben.

Aus der zweiten Gleichung (8) folgt noch mit Hülfe von (6)

$$pqzt = z^2t^2 + 2\alpha f zt + \alpha^2 f^2 = (zt + \alpha f)^2,$$

so dass man die gewünschte Form der Gleichung $F = 0$ auch durch die Functionen p, q, z, t herstellen kann. Gehen wir demnach von zwei beliebigen Abel'schen Functionen $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ aus, so erhalten wir 6 Paare solcher Functionen:

$$\sqrt{xy},\ \sqrt{zt},\ \sqrt{p_1q_1},\ \sqrt{p_2q_2},\ \sqrt{p_3q_3},\ \sqrt{p_4q_4},$$

welche die Eigenschaft haben, dass durch je zwei derselben die Gleichung $F = 0$ auf die Form gebracht wird:

$$f^2 - xyzt = 0.$$

Diese 6 Functionen müssen beim Ueberschreiten der Querschnitte dieselben Factoren annehmen, da sonst nicht das Product von zweien derselben rational sein könnte. Solche 6 Producte von je zwei Abel'schen Functionen nennen wir zu einer Gruppe gehörig. Da die Factorensysteme an den Querschnitten für Producte von Abel'schen Functionen durch die Summen der Charakteristiken bestimmt sind, so folgt, dass die Charakteristiken aller Paare einer Gruppe dieselbe Summe ergeben müssen, welche die Gruppencharakteristik heisst.

Aus den Gleichungen (8) und (6) ergiebt sich noch

$$2f = \frac{pq - zt}{\alpha} - \alpha xy = 2\sqrt{xy}\,\sqrt{zt},$$

woraus:

$$pq = \alpha^2 xy + 2\alpha\sqrt{xy}\sqrt{zt} + zt$$

oder:

$$\sqrt{pq} = \sqrt{zt} + \alpha\sqrt{xy}, \tag{9}$$

woraus man den Schluss zieht, dass jedes Product einer Gruppe linear durch zwei Producte derselben Gruppe ausgedrückt werden kann.

Ordnet man sämmtliche 28 Abel'sche Functionen zu Paaren, so erhält man $\frac{28\,.\,27}{2} = 6\,.\,63$ Paare, welche zu 6 und 6 in 63 Gruppen zerfallen. Jede der von $\binom{000}{000}$ verschiedenen 63 Charakteristiken kann Gruppencharakteristik sein.

Um die Charakteristiken der 6 Paare einer Gruppe zu erhalten, hat man daher die betreffende Gruppencharakteristik auf 6 Arten in zwei ungerade Charakteristiken zu zerlegen. Als Beispiel hierfür diene die Gruppe mit der Gruppencharakteristik $\binom{001}{000}$:

$$\binom{001}{000} = \binom{101}{100} + \binom{100}{100} = \binom{011}{010} + \binom{010}{010} = \binom{111}{100} + \binom{110}{100}$$
$$= \binom{111}{010} + \binom{110}{010} = \binom{011}{110} + \binom{010}{110} = \binom{101}{110} + \binom{100}{110}.$$

Wenn drei Paare Abel'scher Functionen bekannt sind, so erhält man die übrigen Paare derselben Gruppe durch Auflösung einer cubischen Gleichung, und man kann mit ihrer Hülfe sämmtliche übrigen Abel'schen Functionen mit ihren Charakteristiken bestimmen.

Um dies durchzuführen, nehmen wir an, es seien $\sqrt{x\xi}$, $\sqrt{y\eta}$, $\sqrt{z\zeta}$ drei Paare einer Gruppe, so dass ξ, η, ζ als lineare homogene Functionen von x, y, z gegeben sind.

Durch passende Bestimmung constanter Factoren kann die Gleichung (9) in der Form angenommen werden:

(10) $$\sqrt{x\xi} + \sqrt{y\eta} + \sqrt{z\zeta} = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$z\zeta = x\xi + y\eta + 2\sqrt{x\xi y\eta}$$

oder

(11) $$4x\xi y\eta = (z\zeta - x\xi - y\eta)^2,$$

so dass

(12) $$f = z\zeta - x\xi - y\eta$$

wird.

Um alle in die Gruppe $\sqrt{x\xi}$, $\sqrt{y\eta}$ gehörigen Paare zu finden hat man nach dem Obigen eine biquadratische Gleichung zu lösen, von der aber eine Wurzel, dem Paare $\sqrt{z\zeta}$ entsprechend, bereits bekannt ist. Die Rechnung wird daher symmetrischer, wenn man zunächst die Paare der Gruppe $\sqrt{x\eta}$, in welche auch das Paar $\sqrt{y\xi}$ gehört, aufsucht.

Ist $\sqrt{pq}$ ein weiteres unbekanntes Paar dieser Gruppe, so hat man neben der Gleichung (11) eine mit ihr identische:

(13) $$4y\xi pq = \varphi^2,$$

wenn (nach 8)

$$\varphi = f + 2\lambda y\xi,$$

worin λ eine noch unbekannte Constante bedeutet. Hieraus erhält man mittelst (11) und (12)

$$\varphi^2 = 4\lambda y\xi\left(x\xi + y\eta - z\zeta + \frac{x\eta}{\lambda} + \lambda y\xi\right),$$

und demnach ist (von dem Factor λ abgesehen)

$$pq = x\xi + y\eta - z\zeta + \frac{x\eta}{\lambda} + \lambda y\xi$$

$$= \left(\xi + \frac{\eta}{\lambda}\right)(x + \lambda y) - z\zeta;$$

für $x + \lambda y = 0$ und $z = 0$ muss eine der beiden Functionen p, q, etwa p verschwinden, woraus, wenn μ einen weiteren unbekannten Coefficienten bedeutet, folgt:

(14) $$p = x + \lambda y + \mu z,$$

$$pq = p\left(\xi + \frac{\eta}{\lambda}\right) - \mu z\left(\xi + \frac{\eta}{\lambda} + \frac{\zeta}{\mu}\right),$$

und hieraus weiter, da p und z nicht identisch sind,

(15) $$\xi + \frac{\eta}{\lambda} + \frac{\zeta}{\mu} = -a^2 p,$$

also mit Hülfe von (13):

$$ax + a\lambda y + a\mu z + \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{\lambda a} + \frac{\zeta}{\mu a} = 0,$$

oder indem man λa, μa durch b, c ersetzt:

(16) $$ax + by + cz + \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + \frac{\zeta}{c} = 0,$$

wonach man, da es auf einen constanten Factor bei p und q nicht ankommt, erhält:

$$p = ax + by + cz = -\left(\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + \frac{\zeta}{c}\right),$$

$$q = \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + cz = -\left(ax + by + \frac{\zeta}{c}\right).$$

Da es vier Paare p, q giebt, so müssen sich vier Systeme a, b, c bestimmen lassen.

Um hierzu zu gelangen berücksichtige man, dass zwischen den 6 Functionen x, y, z, ξ, η, ζ drei homogene lineare Gleichungen bestehen, die wir durch $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ bezeichnen. Wir leiten hieraus mit den unbestimmten Coefficienten l_1, l_2, l_3 eine lineare Combination her:

$$l_1u_1 + l_2u_2 + l_3u_3 = \alpha x + \beta y + \gamma z + \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta = 0$$

worin α, β, γ, α', β', γ' lineare homogene Ausdrücke in l_1, l_2, l_3 sind. Diese Relation wird die Form (16) haben, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma',$$

woraus man vier Werthsysteme für die Verhältnisse $l_1 : l_2 : l_3$ erhält.

Man gelangt am elegantesten zum Ziel, wenn man sich die Functionen ξ, η, ζ durch drei Gleichungen von der Form gegeben denkt:

$$
(17) \qquad
\begin{aligned}
x + y + z + \xi + \eta + \zeta &= 0, \\
\alpha x + \beta y + \gamma z + \frac{\xi}{\alpha} + \frac{\eta}{\beta} + \frac{\zeta}{\gamma} &= 0, \\
\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \frac{\xi}{\alpha'} + \frac{\eta}{\beta'} + \frac{\zeta}{\gamma'} &= 0.
\end{aligned}
$$

Dass die Coefficienten in den ersten dieser Gleichungen die Werthe 1 haben, kann man durch Hinzufügung constanter Factoren zu x, y, z, ξ, η, ζ bewirken, wobei zugleich die Gleichung (10) ihre Form nicht ändert.

Aus den Gleichungen (17) muss als identische Folge eine vierte von der gleichen Form sich ergeben:

$$
(18) \qquad \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \frac{\xi}{\alpha''} + \frac{\eta}{\beta''} + \frac{\zeta}{\gamma''} = 0.
$$

Um also α'', β'', γ'' zu erhalten, hat man die Coefficienten λ, λ', λ'' aus folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$
(19) \qquad
\begin{aligned}
\lambda''\alpha'' &= \lambda'\alpha' + \lambda\alpha + 1, & \frac{\lambda''}{\alpha''} &= \frac{\lambda'}{\alpha'} + \frac{\lambda}{\alpha} + 1, \\
\lambda''\beta'' &= \lambda'\beta' + \lambda\beta + 1, & \frac{\lambda''}{\beta''} &= \frac{\lambda'}{\beta'} + \frac{\lambda}{\beta} + 1, \\
\lambda''\gamma'' &= \lambda'\gamma' + \lambda\gamma + 1, & \frac{\lambda''}{\gamma''} &= \frac{\lambda'}{\gamma'} + \frac{\lambda}{\gamma} + 1.
\end{aligned}
$$

Durch Multiplication zweier entsprechender von diesen Gleichungen ergiebt sich

$$
(20) \qquad
\begin{aligned}
\lambda''^2 &= \lambda'^2 + \lambda^2 + \lambda\lambda'\left(\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\alpha'}{\alpha}\right) + \lambda\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \lambda'\left(\alpha' + \frac{1}{\alpha'}\right) + 1, \\
\lambda''^2 &= \lambda'^2 + \lambda^2 + \lambda\lambda'\left(\frac{\beta}{\beta'} + \frac{\beta'}{\beta}\right) + \lambda\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) + \lambda'\left(\beta' + \frac{1}{\beta'}\right) + 1, \\
\lambda''^2 &= \lambda'^2 + \lambda^2 + \lambda\lambda'\left(\frac{\gamma}{\gamma'} + \frac{\gamma'}{\gamma}\right) + \lambda\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) + \lambda'\left(\gamma' + \frac{1}{\gamma'}\right) + 1.
\end{aligned}
$$

Eliminirt man aus je zweien derselben λ'', so ergeben sich für $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda'}$ die folgenden beiden linearen Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1}{\lambda'}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - \beta - \frac{1}{\beta}\right) &+ \frac{1}{\lambda}\left(\alpha' + \frac{1}{\alpha'} - \beta' - \frac{1}{\beta'}\right) \\
&+ \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha'} - \frac{\beta'}{\beta} - \frac{\beta}{\beta'}\right), \\
0 = \frac{1}{\lambda'}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - \gamma - \frac{1}{\gamma}\right) &+ \frac{1}{\lambda}\left(\alpha' + \frac{1}{\alpha'} - \gamma' - \frac{1}{\gamma'}\right) \\
&+ \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha'} - \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma'}\right),
\end{aligned}
$$

woraus λ, λ' eindeutig berechnet werden können.

Aus einer der Gleichungen (20) erhält man λ'' abgesehen vom Vorzeichen und aus (19) endlich α'', β'', γ'' ebenfalls bis auf das allen gemeinschaftliche Vorzeichen, welches der Natur der Sache nach unbestimmt bleibt.*)

Hat man auf diese Weise α'', β'', γ'', so erhält man in der Gruppe $\sqrt{x\eta}$, $\sqrt{y\xi}$ die folgenden vier Paare Abel'scher Functionen:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{x+y+z}, & \sqrt{\xi+\eta+z} \\
\sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma z}, & \sqrt{\frac{\xi}{\alpha}+\frac{\eta}{\beta}+\gamma z} \\
\sqrt{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z}, & \sqrt{\frac{\xi}{\alpha'}+\frac{\eta}{\beta'}+\gamma' z} \\
\sqrt{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z}, & \sqrt{\frac{\xi}{\alpha''}+\frac{\eta}{\beta''}+\gamma'' z}.
\end{array}$$

Auf die gleiche Weise ergeben sich in der Gruppe $\sqrt{x\zeta}$, $\sqrt{z\xi}$ die Paare:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{x+y+z}, & \sqrt{\xi+y+\zeta} \\
\sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma z}, & \sqrt{\frac{\xi}{\alpha}+\beta y+\frac{\zeta}{\gamma}} \\
\sqrt{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z}, & \sqrt{\frac{\xi}{\alpha'}+\beta' y+\frac{\zeta}{\gamma'}} \\
\sqrt{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z}, & \sqrt{\frac{\xi}{\alpha''}+\beta'' y+\frac{\zeta}{\gamma''}}
\end{array}$$

und in der Gruppe $\sqrt{y\zeta}$, $\sqrt{z\eta}$ die Paare:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{x+y+z}, & \sqrt{x+\eta+\zeta} \\
\sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma z}, & \sqrt{\alpha x+\frac{\eta}{\beta}+\frac{\zeta}{\gamma}} \\
\sqrt{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z}, & \sqrt{\alpha' x+\frac{\eta}{\beta'}+\frac{\zeta}{\gamma'}} \\
\sqrt{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z}, & \sqrt{\alpha'' x+\frac{\eta}{\beta''}+\frac{\zeta}{\gamma''}},
\end{array}$$

*) Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} = (\alpha, \beta, \gamma), \qquad \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{\alpha}, & \beta, & \gamma \\ \frac{1}{\alpha'}, & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\alpha}, \beta, \gamma\right) \text{ etc.}$$

so kann man α'', β'', γ'' aus den Gleichungen

$$\alpha\alpha'\alpha'' \,.\, \beta\beta'\beta'' = (\alpha, \beta, \gamma)\left(\alpha, \beta, \frac{1}{\gamma}\right) : \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \gamma\right)\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$\alpha\alpha'\alpha'' : \beta\beta'\beta'' = \left(\alpha, \frac{1}{\beta}, \gamma\right)\left(\alpha, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right) : \left(\frac{1}{\alpha}, \beta, \gamma\right)\left(\frac{1}{\alpha}, \beta, \frac{1}{\gamma}\right)$$

und den analogen Gleichungen bestimmen.

so dass ausser den gegebenen 6 Abel'schen Functionen 16 weitere bestimmt sind. Um die Charakteristiken derselben zu erhalten hat man nur zu beachten, dass die drei hier betrachteten Gruppen vier Abel'sche Functionen gemeinschaftlich enthalten. Bildet man also die entsprechenden Gruppen der Charakteristiken, so müssen diese vier Charakteristiken gemeinschaftlich haben und diese hat man den Functionen

$$\sqrt{x+y+z},\ \sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma z},\ \sqrt{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z},\ \sqrt{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z}$$

in einer beliebigen Weise zuzuordnen. Die Charakteristiken der übrigen Abel'schen Functionen sind dadurch vollständig bestimmt, weil sie mit diesen in den drei Gruppen in derselben Weise gepaart auftreten müssen, wie die entsprechenden Abel'schen Functionen. Diese Charakteristiken lassen sich in folgender Weise symmetrisch darstellen.

Es seien die Charakteristiken der Gruppen $\sqrt{y\zeta}$, $\sqrt{z\xi}$, $\sqrt{x\eta}$ resp. mit (p), (q), (r) bezeichnet, ferner mit (d), (e), (f), (g) die Charakteristiken der vier Functionen

$$\sqrt{x+y+z},\ \sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma z},\ \sqrt{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z},\ \sqrt{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z}$$

und mit $(n+p)$ die von $\sqrt{x}$. Hiernach erhält man folgende Ausdrücke für die Charakteristiken:

$$(\sqrt{x}) = (n+p),\qquad (\sqrt{y}) = (n+q),\qquad (\sqrt{z}) = (n+r)$$
$$(\sqrt{\xi}) = (n+q+r),\ (\sqrt{\eta}) = (n+r+p),\ (\sqrt{\zeta}) = (n+p+q)$$

$$(21)\quad \begin{aligned}
&(\sqrt{x+y+z}) = (d), && (\sqrt{x+\eta+\zeta}) = (p+d),\\
&(\sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma z}) = (e), && \left(\sqrt{\alpha x+\tfrac{\eta}{\beta}+\tfrac{\zeta}{\gamma}}\right) = (p+e),\\
&(\sqrt{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z}) = (f), && \left(\sqrt{\alpha' x+\tfrac{\eta}{\beta'}+\tfrac{\zeta}{\gamma'}}\right) = (p+f)\\
&(\sqrt{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z}) = (g), && \left(\sqrt{\alpha'' x+\tfrac{\eta}{\beta''}+\tfrac{\zeta}{\gamma''}}\right) = (p+g),\\[2ex]
&(\sqrt{\xi+y+\zeta}) = (q+d), && (\sqrt{\xi+\eta+z}) = (r+d),\\
&\left(\sqrt{\tfrac{\xi}{\alpha}+\beta y+\tfrac{\zeta}{\gamma}}\right) = (q+e), && \left(\sqrt{\tfrac{\xi}{\alpha}+\tfrac{\eta}{\beta}+\gamma z}\right) = (r+e),\\
&\left(\sqrt{\tfrac{\xi}{\alpha'}+\beta' y+\tfrac{\zeta}{\gamma'}}\right) = (q+f), && \left(\sqrt{\tfrac{\xi}{\alpha'}+\tfrac{\eta}{\beta'}+\gamma' z}\right) = (r+f),\\
&\left(\sqrt{\tfrac{\xi}{\alpha''}+\beta'' y+\tfrac{\zeta}{\gamma''}}\right) = (q+g), && \left(\sqrt{\tfrac{\xi}{\alpha''}+\tfrac{\eta}{\beta''}+\gamma'' z}\right) = (r+g).
\end{aligned}$$

Nehmen wir beispielsweise an:

$$(\sqrt{x}) = \binom{101}{100}, \quad (\sqrt{y}) = \binom{111}{100}, \quad (\sqrt{z}) = \binom{101}{110}$$
$$(\sqrt{\xi}) = \binom{100}{100}, \quad (\sqrt{\eta}) = \binom{110}{100}, \quad (\sqrt{\zeta}) = \binom{100}{110}$$

was statthaft ist, weil hiernach $\sqrt{x\xi}$, $\sqrt{y\eta}$, $\sqrt{z\zeta}$ in dieselbe Gruppe $\binom{001}{000}$ gehören, so folgt:

$$(p) = \binom{011}{010}, \quad (q) = \binom{001}{010}, \quad (r) = \binom{011}{000}, \quad (n) = \binom{110}{110}.$$

Die vollständigen Gruppen (p), (q) sind:

$$\binom{011}{010} = \binom{100}{110} + \binom{111}{100} = \binom{101}{110} + \binom{110}{100} = \binom{010}{011} + \binom{001}{001}$$
$$= \binom{110}{011} + \binom{101}{001} = \binom{111}{111} + \binom{100}{101} = \binom{010}{111} + \binom{001}{101}$$
$$\binom{001}{010} = \binom{100}{110} + \binom{101}{100} = \binom{101}{110} + \binom{100}{100} = \binom{010}{011} + \binom{011}{001}$$
$$= \binom{110}{011} + \binom{111}{001} = \binom{111}{111} + \binom{110}{101} = \binom{010}{111} + \binom{011}{101}$$

woraus man erhält:

$$(d) = \binom{010}{011}, \quad (e) = \binom{110}{011}, \quad (f) = \binom{111}{111}, \quad (g) = \binom{010}{111},$$

und die Charakteristiken der in (21) zusammengestellten Functionen sind, in der gleichen Reihenfolge geschrieben:

$$\binom{101}{100}, \binom{111}{100}, \binom{101}{110},$$
$$\binom{100}{100}, \binom{110}{100}, \binom{100}{110},$$
$$\binom{010}{011}, \binom{001}{001}, \binom{011}{001}, \binom{001}{011},$$
$$\binom{110}{011}, \binom{101}{001}, \binom{111}{001}, \binom{101}{011},$$
$$\binom{111}{111}, \binom{100}{101}, \binom{110}{101}, \binom{100}{111},$$
$$\binom{010}{111}, \binom{001}{101}, \binom{011}{101}, \binom{001}{111}.$$

Es gilt nun von drei Abel'schen Functionen einer Gruppe, von denen keine zwei einem Paare angehören, der Satz, dass die Summe ihrer Charakteristiken immer eine gerade Charakteristik ist; denn betrachten wir z. B. die drei Functionen $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ und drücken ξ, η, ζ linear durch x, y, z aus, so kann die Gleichung (10) in der Form angenommen werden:

$\sqrt{x(ax + by + cz)} + \sqrt{y(a'x + b'y + c'z)} + \sqrt{z(a''x + b''y + c''z)} = 0.$

Setzen wir hierin der Reihe nach $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, so erhalten wir für die Producte der Wurzeln der quadratischen Gleichungen, die sich für das Verhältniss der beiden andern Variablen ergeben, die Werthe:

$$-\frac{c''}{b'}, \quad -\frac{a}{c''}, \quad -\frac{b'}{a}$$

deren Product $= -1$ ist. Dies aber ist nach S. 460, 461 das Kriterium dafür, dass die Summe der Charakteristiken der Functionen $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ eine gerade Charakteristik sei.

Gestützt auf diesen Satz kann man beweisen, dass die 16 Abel'schen Functionen, die wir oben bestimmt haben, verschieden sind von den 12 in der Gruppe $\sqrt{x\xi}$ vorkommenden Functionen. Denn ist $\sqrt{pq}$ ein in die Gruppe $\sqrt{x\xi}$ gehöriges Paar, so sind die Charakteristiken

$$(\sqrt{x}) + (\sqrt{\xi}) + (\sqrt{p}), \quad (\sqrt{y}) + (\sqrt{\eta}) + (\sqrt{p}), \quad (\sqrt{z}) + (\sqrt{\zeta}) + (\sqrt{p})$$

ungerade und es kann nach dem soeben bewiesenen Satze $\sqrt{p}$ in keiner der drei Gruppen

$$(\sqrt{x\eta}) = (\sqrt{y\xi}), \quad (\sqrt{x\zeta}) = (\sqrt{z\xi}), \quad (\sqrt{y\zeta}) = (\sqrt{z\eta})$$

vorkommen.

Die 16 oben bestimmten Functionen liefern daher alle Abel'schen Functionen, die nicht in der Gruppe $\sqrt{x\xi}$ enthalten sind, und wenn wir die noch fehlenden 6 Functionen dieser Gruppe aufsuchen, so sind damit sämmtliche 28 Abel'sche Functionen bestimmt.

Um diese zu erhalten setzen wir

$$t = x + y + z, \quad u = \xi + \eta + z,$$

und gehen aus von der Gleichung:

(22) $$\sqrt{tu} = \sqrt{x\eta} + \sqrt{y\xi},$$

welche sich leicht aus (10) und (17) ergiebt. Wir setzen die Functionen

$$t, \; x, \; y, \; u, \; \eta, \; \xi$$

an Stelle von

$$x, \; y, \; z, \; \xi, \; \eta, \; \zeta$$

in der vorigen Betrachtung, und erhalten zunächst zwischen diesen Variablen die Gleichung:

(23) $$t - x - y - u + \eta + \xi = 0,$$

neben welcher noch drei andere bestehen müssen von der Form

(24) $$at + bx + cy + a'u + b'\eta + c'\xi = 0$$

mit der Bedingung

$$aa' = bb' = cc'.$$

An Stelle der Gruppen $(p + q + r)$, (p), (q) (r) treten jetzt die folgenden:

$$(25)\quad \begin{aligned} &(\sqrt{tu}) = (\sqrt{x\eta}) = (\sqrt{y\xi}) = (r),\\ &(\sqrt{x\xi}) = (\sqrt{y\eta}) = (\sqrt{z\zeta}) = (p + q + r),\\ &(\sqrt{t\xi}) = (\sqrt{uy}) \qquad\quad = (n + d + q + r),\\ &(\sqrt{t\eta}) = (\sqrt{ux}) \qquad\quad = (n + d + p + r).\end{aligned}$$

In der ersten dieser Gruppen, in (r), kommen folgende Paare von Charakteristiken vor:

$$\begin{aligned}(r) &= (n + p) + (n + r + p) = (n + q) + (n + r + q)\\ &= (d) + (r + d) = (e) + (r + e) = (f) + (r + f) = (g) + (r + g),\end{aligned}$$

und aus der Gleichung (23) erhalten wir folgende Abel'sche Functionen:

$$\sqrt{t - x - y} = \sqrt{z},\quad \sqrt{t + \eta + \xi} = \sqrt{-\zeta},$$
$$\sqrt{-u - x + \xi} = \sqrt{\xi + y + \zeta},\quad \sqrt{-u + \eta - y} = \sqrt{x + \eta + \zeta}$$

deren Charakteristiken sind:

$$(n + r),\ (n + p + q),\ (q + d),\ (p + d),$$

die sich in folgender Weise in die drei letzten Gruppen (25) vertheilen:

$$\begin{aligned}(p + q + r) &= (n + r) + (n + p + q),\\ (n + d + q + r) &= (n + r) + (q + d),\\ (n + d + p + r) &= (n + r) + (p + d).\end{aligned}$$

Die Charakteristiken der noch nicht bestimmten Abel'schen Functionen müssen nun, wie oben bewiesen, in der Gruppe $(p + q + r)$ enthalten sein. Bezeichnen wir daher diese Charakteristiken mit (k_1), (k_1'), (k_1''), (k_2), (k_2'), (k_2''), so muss sich ergeben:

$$(p + q + r) = (k_1 + k_2) = (k_1' + k_2') = (k_1'' + k_2'')$$

und diese Charakteristiken kommen nicht in der Gruppe (r) vor.

Die Vergleichung der Gruppen (25) mit den Gruppen $(p + q + r)$, (p), (q), (r) lehrt nun aber, dass in denselben sämmtliche ungerade Charakteristiken überhaupt vorkommen müssen, und ferner dass die drei noch übrigen Paare der Gruppen $(p + q + r)$, $(n + d + q + r)$, $(n + d + p + r)$ je eine Charakteristik gemein haben müssen.

Nun kommt die Charakteristik $(q + e)$ weder in der Gruppe (r) noch in $(p + q + r)$ vor, und daraus folgt, dass man (k_1) so auswählen kann, dass entweder

$$(k_1 + q + e) = (n + d + q + r)$$

oder

$$(k_1 + q + e) = (n + d + p + r).$$

Aus ersterer Annahme würde folgen:

$$(k_1) = (n + r + d + e).$$

Dies aber ist nicht möglich, denn wir haben in der Gruppe (p) die Paare:

$$(n+r),\ (n+r+p)$$
$$(d),\ (d+p)$$
$$(e),\ (e+p)$$

und daher ist nach dem oben (S. 468, 469) bewiesenen Satz

$$(n+r+d+e)$$

gerade. Demnach ergiebt sich

$$(k_1) = (n+d+e+p+q+r),$$

und hieraus:

$$k_2 = (n+d+e).$$

Ebenso schliesst man:

$$(k_1') = (n+d+f+p+q+r),\quad (k_2') = (n+d+f),$$
$$(k_1'') = (n+d+g+p+q+r),\quad (k_2'') = (n+d+g),$$

und es enthält die Gruppe $(n+d+p+r)$ die Paare:

$$(k_1), (q+e);\quad (k_1'), (q+f);\quad (k_1''), (q+g),$$

woraus für die Gruppe $(n+d+q+r)$ die Paare folgen:

$$(k_1), (p+e);\quad (k_1'), (p+f);\quad (k_1''), (p+g).$$

Nach den Resultaten der früheren Betrachtung ergeben sich aus einer Gleichung von der Form (24) die vier Abel'schen Functionen:

$$\sqrt{at+bx+cy} = \sqrt{-(a'u+b'\eta+c'\xi)},$$
$$\sqrt{a'u+bx+cy} = \sqrt{-(at+b'\eta+c'\xi)},$$
$$\sqrt{at+b'\eta+cy} = \sqrt{-(a'u+bx+c'\xi)},$$
$$\sqrt{at+bx+c'\xi} = \sqrt{-(a'u+b'\eta+cy)},$$

deren Charakteristiken resp. sind:

$$(k_1),\ (k_2),\ (p+e),\ (q+e)$$

und unsere Aufgabe ist daher gelöst, wenn es gelungen ist, die Coefficienten a, b, c, a', b', c' zu bestimmen.

Nun ist aber die Function, deren Charakteristik $(p+e)$ ist, oben bereits bestimmt; sie ist:

$$\sqrt{\alpha x + \frac{\eta}{\beta} + \frac{\xi}{\gamma}}$$

und wenn wir

$$v = \alpha x + \frac{\eta}{\beta} + \frac{\xi}{\gamma} = -\left(\frac{\xi}{\alpha} + \beta y + \gamma z\right)$$

setzen, so können wir die Coefficienten a, b, c, a', b', c' dadurch bestimmen, dass wir v in folgender zweifachen Form darstellen:

$$v = at + b'\eta + cy = -a'u - bx - c'\xi.$$

Dies erreichen wir auf folgende Weise: mittelst

$$u = \xi + \eta + z = -x - y - \zeta$$

eliminiren wir aus den beiden Ausdrücken von v die Variablen z und ζ, wodurch sich ergiebt:

$$v + \frac{u}{\gamma} = x\left(\alpha - \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{\eta}{\beta} - \frac{y}{\gamma}$$

$$v + \gamma u = -\xi\left(\frac{1}{\alpha} - \gamma\right) + \gamma\eta - \beta y.$$

Indem man hieraus η und y eliminirt, folgt:

$$v = u\frac{\beta - \gamma}{1 - \beta\gamma} + x\frac{\beta(1 - \alpha\gamma)}{1 - \beta\gamma} - \frac{\xi}{\alpha}\frac{1 - \alpha\gamma}{1 - \beta\gamma}$$

und auf die gleiche Weise:

$$v = t\frac{1 - \alpha\gamma}{\alpha - \gamma} + \frac{\eta}{\beta}\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} - y\frac{\alpha(\beta - \gamma)}{\alpha - \gamma}$$

woraus sich ergiebt:

$$a = \frac{1 - \alpha\gamma}{\alpha - \gamma}, \qquad a' = -\frac{\beta - \gamma}{1 - \beta\gamma},$$

$$b = -\frac{\beta(1 - \alpha\gamma)}{1 - \beta\gamma}, \qquad b' = \frac{1}{\beta}\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma},$$

$$c = -\frac{\alpha(\beta - \gamma)}{\alpha - \gamma}, \qquad c' = \frac{1}{\alpha}\frac{1 - \alpha\gamma}{1 - \beta\gamma}.$$

Hiernach lassen sich die beiden Abel'schen Functionen

$$\sqrt{at + bx + cy}, \qquad \sqrt{a'u + bx + cy}$$

bilden. Ersetzt man darin t und u durch ihre Ausdrücke in x, y, z, ξ, η, ζ, so ergeben sich nach Unterdrückung constanter Factoren für die Function, die zur Charakteristik (k_1) gehört, die beiden Ausdrücke:

$$\sqrt{\frac{x}{1 - \beta\gamma} + \frac{y}{1 - \gamma\alpha} + \frac{z}{1 - \alpha\beta}}, \qquad \sqrt{\frac{\xi}{\alpha(\gamma - \beta)} + \frac{\eta}{\beta(\gamma - \alpha)} + \frac{z}{1 - \alpha\beta}},$$

und für die zur Charakteristik (k_2) gehörige Function:

$$\sqrt{\frac{\xi}{\alpha(1 - \beta\gamma)} + \frac{\eta}{\beta(1 - \gamma\alpha)} + \frac{\zeta}{\gamma(1 - \alpha\beta)}}, \qquad \sqrt{\frac{x}{\gamma - \beta} + \frac{y}{\gamma - \alpha} + \frac{\zeta}{\gamma(1 - \alpha\beta)}}.$$

Die zu den Charakteristiken (k_1'), (k_2'); (k_1''), (k_2'') gehörigen Functionen ergeben sich hieraus sofort dadurch, dass man α, β, γ durch α', β', γ' resp. α'', β'', γ'' ersetzt, womit sämmtliche Abel'sche Functionen nebst ihren Charakteristiken bestimmt sind. Die Charakteristiken (k_1), (k_2), (k_1'), (k_2'), (k_1''), (k_2'') würden sich bei dem oben gewählten Beispiel folgendermaassen gestalten:

$$(k_1) = \begin{pmatrix} 011 \\ 110 \end{pmatrix}, \quad (k_1') = \begin{pmatrix} 010 \\ 010 \end{pmatrix}, \quad (k_1'') = \begin{pmatrix} 111 \\ 010 \end{pmatrix}$$

$$(k_2) = \begin{pmatrix} 010 \\ 110 \end{pmatrix}, \quad (k_2') = \begin{pmatrix} 011 \\ 010 \end{pmatrix}, \quad (k_2'') = \begin{pmatrix} 110 \\ 010 \end{pmatrix}.$$

Da nun, wie oben gezeigt, α'', β'', γ'' durch α, β, γ, α', β', γ' ausgedrückt werden können, so sind hiernach sämmtliche Abel'sche Functionen mit allen ihren algebraischen Beziehungen ausgedrückt durch $3p - 3 = 6$ Constanten, welche man als die Moduln der Classe für den Fall $p = 3$ ansehen kann.
