XXIX.

Convergenz der p-fach unendlichen Theta-Reihe.*)

Es kann die Untersuchung der Convergenz einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern immer reducirt werden auf die Untersuchung eines bestimmten Integrals nach folgendem Satz:

Es sei

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

eine Reihe mit positiven abnehmenden Gliedern, ferner $f(x)$ eine mit wachsendem x abnehmende Function, so ist:

$$f(\alpha) > \int_\alpha^{\alpha+1} f(x)dx > f(\alpha+1)$$

und mithin:

$$f(0) + f(1) + \cdots + f(n) > \int_0^{n+1} f(x)dx > f(1) + f(2) + \cdots + f(n+1).$$

Die Reihe

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots$$

convergirt und divergirt daher gleichzeitig mit dem Integral

$$\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Ist nun $f(n)$ positiv und $a_n < f(n)$, so wird die Reihe:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

ebenfalls convergiren, sobald jenes Integral convergirt. Daraus folgt der Satz:

Ist $a_n < f(x)$, sobald $n \geqq x$ ist, so convergirt die Reihe Σa_n, sobald das Integral $\int_0^\infty f(x)dx$ convergirt.

---

*) Diese und die folgende Abhandlung sind einer Vorlesung entnommen, welche Riemann in den Jahren 1861 u. 1862 gehalten hat. Der Bearbeitung liegt ein von G. Roch geführtes Heft zu Grunde.

Setzt man nun $x = \varphi(y)$, $f(x) = f(\varphi(y)) = F(y)$, so erhält man

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int F(y)\,\varphi'(y)dy.$$

Wenn nun die beiden Variablen x, y gleichzeitig ab- und zunehmen (und zwar bis unendlich) so wird nach den gemachten Voraussetzungen mit wachsendem y $F(y)$ abnehmen, $\varphi(y)$ wachsen. Darnach gehen die oben gefundenen Bedingungen der Convergenz in folgende über:

Die Reihe Σa_n convergirt, wenn für $n \geqq \varphi(y)$ $a_n < F(y)$, oder, was dasselbe ist, wenn für $a_n \geqq F(y)$ $n < \varphi(y)$ ist und das Integral

$$\int_b^\infty F(y)\,\varphi'(y)\,dy$$

convergirt.

Ist nun $a_n > F(y)$, so sind es auch $a_1, a_2, .., a_{n-1}$. Ist also $a_{n+1} < F(y)$, so ist n die Anzahl der Reihenglieder, welche grösser als $F(y)$ sind. Daher lässt sich der Satz auch so ausdrücken:

Sind $F(y)$, $\varphi(y)$ zwei Functionen, von denen die erste mit wachsendem y abnimmt, die zweite (ins Unendliche) zunimmt, und ist die Anzahl der Glieder einer Reihe mit positiven Gliedern, die gleich oder grösser als $F(y)$ sind, kleiner als $\varphi(y)$, so convergirt die Reihe, wenn das Integral $\int_b^\infty F(y)\,\varphi'(y)\,dy$ convergirt.

Es sollen nun solche Functionen für die p-fach unendliche ϑ-Reihe

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}_m\right)^p e^{\sum_1^p{}_\iota \sum_1^p{}_{\iota'} a_{\iota,\iota'} m_\iota m_{\iota'} + 2\sum_1^p{}_\iota m_\iota v_\iota}$$

aufgesucht werden, in der wir, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, zunächst voraussetzen können die Grössen $a_{\iota,\iota'}$ und v_ι seien reell.

Das allgemeine Glied dieser Reihe:

$$e^{\sum_1^p{}_\iota \sum_1^p{}_{\iota'} a_{\iota,\iota'} m_\iota m_{\iota'} + 2\sum_1^p{}_\iota m_\iota v_\iota}$$

ist grösser als e^{-h^2} wenn

$$-\sum_1^p{}_\iota \sum_1^p{}_{\iota'} a_{\iota,\iota'} m_\iota m_{\iota'} - 2\sum_1^p{}_\iota m_\iota v_\iota < h^2.$$

Für unsern Zweck kommt es also darauf an, festzustellen, wie viele Combinationen der ganzen Zahlen $m_1, m_2, .., m_p$ dieser Ungleichung genügen.

Zu dem Ende betrachten wir zunächst das mehrfache bestimmte Integral

$$A = \int\int \dots \int dx_1\, dx_2 \,..\, dx_p$$

dessen Begrenzung gegeben ist durch die Ungleichung

$$-\sum_1^p{}_\iota \sum_1^p{}_{\iota'} a_{\iota,\iota'}\, x_\iota x_{\iota'} < 1.$$

Das Integral wird immer, und nur dann einen endlichen Werth haben, wenn die homogene Function zweiten Grades

$$-\sum_1^p{}_\iota \sum_1^p{}_{\iota'} a_{\iota,\iota'}\, x_\iota\, x_{\iota'}$$

in eine Summe von p positiven Quadraten zerlegt werden kann. Denn ist

$$-\sum \sum a_{\iota,\iota'}\, x_\iota x_{\iota'} = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_p^2$$

so ist die Begrenzung des Integrals bestimmt durch die Ungleichung

$$t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_p^2 < 1$$

und das Integral A wird:

$$A = \int\int \dots \int \left(\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \dots \frac{\partial x_p}{\partial t_p} \right) dt_1\, dt_2 \dots dt_p.$$

Die Functionaldeterminante ist eine endliche Constante und von den Variablen t kann keine absolut grösser als 1 werden.

Wären andrerseits die t^2 nicht alle positiv, oder würden einige in der transformirten Form fehlen, so würden im Integral A auch unendliche Werthe von t vorkommen und somit A selbst unendlich werden.

Dieses Ergebniss wird in Nichts geändert, wenn wir statt der oben angenommenen Begrenzung des Integrals A die folgende nehmen:

$$-\sum_\iota \sum_{\iota'} a_{\iota,\iota'}\, x_\iota x_{\iota'} - 2 \sum_\iota \alpha_\iota x_\iota < 1,$$

wenn die α_ι beliebige reelle Grössen sind. Betrachten wir nun die Ungleichung

$$-\sum_\iota \sum_{\iota'} a_{\iota,\iota'}\, m_\iota m_{\iota'} - 2 \sum_\iota v_\iota m_\iota < h^2,$$

oder, indem wir $\frac{m_\iota}{h} = x_\iota$ setzen,

$$-\sum_\iota \sum_{\iota'} a_{\iota,\iota'}\, x_\iota x_{\iota'} - 2 \sum_\iota \frac{v_\iota}{h} x_\iota < 1,$$

so folgt zunächst, dass für jedes endliche h nur eine endliche Anzahl von Combinationen der ganzen Zahlen $m_1, m_2, .., m_p$ dieser Ungleichung genügen, denn die x_ι müssen alle innerhalb gewisser endlicher Grenzen bleiben, und innerhalb solcher Grenzen giebt es nur eine endliche Anzahl rationaler Zahlen mit gegebenem Nenner h.

Es sei also $\mathfrak{Z}_h$ die Anzahl der zulässigen Combinationen der Zahlen m.

Betrachtet man nun die über alle diese Combinationen erstreckte Summe

$$\sum_{m_1, m_2, .., m_p} \int\limits_{\frac{m_1}{h}}^{\frac{m_1+1}{h}} dx_1 \int\limits_{\frac{m_2}{h}}^{\frac{m_2+1}{h}} dx_2 \cdots \int\limits_{\frac{m_p}{h}}^{\frac{m_p+1}{h}} dx_p = \frac{\mathfrak{Z}_h}{h^p},$$

so ist dieselbe für jedes endliche h endlich und nähert sich mit unendlich wachsendem h der Grenze A, von der wir nachgewiesen haben, dass sie gleichfalls endlich ist, falls die Function $-\sum_\iota \sum_{\iota'} a_{\iota,\iota'} x_\iota x_{\iota'}$ durch p positive Quadrate darstellbar ist. Setzt man diese Summe daher gleich $A + k$, so ist k eine endliche Grösse, die mit unendlich wachsendem h gegen 0 convergirt. Es ist also

$$\mathfrak{Z}_h = (A + k)h^p,$$

und dies ist die Anzahl n der Glieder der Theta-Reihe, welche $> e^{-h^2}$ sind. Es ist sonach

$$n < (A + K)h^p,$$

worin K eine Constante ist, der man, wenn man nur das h, von dem man ausgeht, gross genug annimmt, einen beliebig kleinen Werth ertheilen kann. Die Functionen $F(y)$, $\varphi(y)$ können also folgendermassen angenommen werden

$$F(y) = e^{-y^2}, \quad \varphi(y) = (A + K)y^p$$

und da das Integral

$$\int\limits_b^\infty e^{-y^2}(A + K)py^{p-1}dy$$

convergirt, so gilt das gleiche von der ϑ-Reihe unter der angegebenen Voraussetzung. Hieraus schliesst man: Die p-fach unendliche Theta-Reihe convergirt für alle Werthe der Variablen $v_1, v_2, .., v_p$, falls der reelle Theil der quadratischen Form im Exponenten wesentlich negativ ist.