

## XXVIII.

### Fragment aus der Analysis Situs.

Zwei Einstrecke werden derselben oder verschiedenen Gruppen zugerechnet, je nachdem das eine stetig in das andere übergehen kann oder nicht.

Je zwei Einstrecke, welche durch dasselbe Punktepaar begrenzt werden, bilden zusammen ein zusammenhängendes unbegrenztes Einstreck und zwar kann dies die ganze Begrenzung eines Zweistrecks bilden oder nicht, je nachdem sie derselben oder verschiedenen Gruppen angehören.

Ein inneres, zusammenhängendes, unbegrenztes Einstreck kann, einmal genommen, entweder zur ganzen Begrenzung eines inneren Zweistrecks ausreichen oder nicht.

---

Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_m$   $m$  innere zusammenhängende unbegrenzte  $n$ -Strecke, welche, einmal genommen, weder einzeln noch in Verbindung ein inneres  $n + 1$ -Streck vollständig begrenzen können, und  $b_1, b_2, \dots, b_m$   $m$  ebenso beschaffene  $n$ -Strecke, deren jedes mit einem oder einigen der  $a$  zusammengenommen ein inneres  $n + 1$ -Streck vollständig begrenzen kann, so kann jedes innere zusammenhängende  $n$ -Streck, welches mit den  $a$  die ganze Begrenzung eines inneren  $n + 1$ -Strecks bilden kann, dies auch mit den  $b$  und umgekehrt.

Bildet irgend ein unbegrenztes inneres  $n$ -Streck mit den  $a$  zusammengenommen die ganze Begrenzung eines inneren  $n + 1$ -Strecks, so können in Folge der Voraussetzungen die  $a$  nach und nach eliminiert und durch die  $b$  ersetzt werden.

Ein  $n$ -Streck  $A$  heisst in ein anderes  $B$  veränderlich, wenn durch  $A$  und durch Stücke von  $B$  ein inneres  $n + 1$ -Streck vollständig begrenzt werden kann.

Wenn im Innern einer stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit mit Hilfe von  $m$  festen, für sich nicht begrenzenden,  $n$ -Strecksstücken jedes unbegrenzte  $n$ -Streck begrenzend ist, so hat diese Mannigfaltigkeit einen  $m + 1$ -fachen Zusammenhang  $n$ ter Dimension.

Eine stetig ausgedehnte zusammenhängende Mannigfaltigkeit heisst einfach zusammenhängend, wenn der Zusammenhang jeder Dimension einfach ist.

Ein Querschnitt einer begrenzten stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit  $A$  heisst jede im Innern derselben verlaufende zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $B$  von weniger Dimensionen, deren Begrenzung ganz in die Begrenzung von  $A$  fällt.

Der Zusammenhang eines  $n$ -Strecks wird durch jeden einfach zusammenhängenden  $n - m$ -streckigen Querschnitt entweder in der  $m$ ten Dimension um 1 erniedrigt oder in der  $m - 1$ ten Dimension um 1 erhöht.

Der Zusammenhang  $\mu$ ter Dimension kann nur geändert werden, indem entweder unbegrenzte nicht begrenzende  $\mu$ -Strecke in begrenzte oder begrenzende in nicht begrenzende verwandelt werden, ersteres in sofern zur Begrenzung eines  $\mu$ -Strecks, letzteres in sofern zur Begrenzung eines  $\mu + 1$ -Strecks neue Theile hinzukommen.

**Abhängigkeit des Zusammenhangs der Begrenzung  $B$  einer stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit  $A$  von dem Zusammenhang derselben.**

Die unbegrenzten innerhalb  $B$  nicht begrenzenden Vielstrecke zerfallen in solche, welche innerhalb  $A$  nicht begrenzen, und solche, welche innerhalb  $A$  begrenzen. Untersuchen wir zunächst, wie der Zusammenhang von  $B$  durch einen einfach zusammenhängenden Querschnitt von  $A$  geändert wird.

$A$  sei von der  $n$ ten, der Querschnitt  $q$  von der  $m$ ten Dimension,  $a$  eine Hülle eines Punktes von  $q$  von der  $n - 1 - m$ ten Dimension, welche  $q$  nicht schneidet,  $p$  die Begrenzung von  $q$ .

Der Zusammenhang von  $A$  wird in der  $n - 1 - m$ ten Dimension um 1 vermehrt, wenn  $a$  innerhalb  $A'$  nicht begrenzt, in der  $n - m$ ten Dimension um 1 vermindert, wenn  $a$  innerhalb  $A'$  begrenzt

$$\begin{aligned}
 A' - A &= \binom{m+1}{+1} \text{ wenn } a \text{ innerhalb } A' \text{ nicht begrenzt } (\alpha) \\
 &= \binom{m}{-1} \text{ wenn } a \text{ innerhalb } A' \text{ begrenzt } (\beta) \\
 &\dots\dots\dots*)
 \end{aligned}$$

\*) Es finden sich im Manuscript hier noch einige Zeichen, deren Bedeutung und Zusammenhang ich nicht entziffern konnte.

	Aenderung	
	von $A$	von $B$
I. $a$ innerhalb $A'$ nicht begrenzend $a$ innerhalb $B'$ nicht begrenzend folglich $p$ innerhalb $B$ begrenzend.	$\begin{pmatrix} m+1 \\ +1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n-m-1 & m \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$
II. $a$ innerhalb $A'$ begrenzend $a$ innerhalb $B'$ nicht begrenzend folglich $p$ innerhalb $B$ begrenzend.	$\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n-m-1 & m \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$
III. $a$ innerhalb $A'$ begrenzend $a$ innerhalb $B'$ begrenzend folglich $p$ innerhalb $B$ nicht begrenzend.	$\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n-m & m-1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Zwei Vielstrecktheile (Raumtheile) heissen zusammenhängend oder einem Stück gehörig, wenn sich von einem inneren Punkt des einen durch das Innere des Vielstreckes (Raumes) eine Linie nach einem inneren Punkt des andern ziehen lässt.

#### Lehrsätze aus der Theoria Situs.

(1.) Ein Vielstreck von weniger als  $n-1$  Dimensionen kann nicht Theile eines  $n$ -Streckes von einander scheiden. Ein zusammenhängendes  $n$ -Streck hat entweder die Eigenschaft, durch jeden  $n-1$ -streckigen Querschnitt in Stücke zu zerfallen oder nicht. Den Inbegriff der ersteren bezeichnen wir durch  $a$ .

Wird ein unter  $a$  gehöriges  $n$ -Streck durch einen  $n-2$ -streckigen Querschnitt in ein anderes verwandelt, so ist dies zusammenhängend und gehört entweder zu  $a$  oder nicht.

Diejenigen  $n$ -Strecke  $a$ , welche durch jeden  $n-2$ -streckigen Querschnitt unter die Nicht- $a$  versetzt werden, bezeichnen wir durch  $a_1$ .

(2.) Wird ein Vielstreck  $A$  durch einen  $\mu$ -streckigen Querschnitt in ein anderes  $A'$  verwandelt, so bildet jeder Querschnitt von mehr als  $\mu+1$  Dimensionen von  $A$  einen Querschnitt von  $A'$  und umgekehrt.

Wird eins der  $n$ -Strecke  $a_1$  durch einen  $n-3$ -streckigen Querschnitt in ein anderes verwandelt, so gehört dies zu den  $a$  (2), kann aber entweder zu den  $a_1$  gehören oder nicht.

Diejenigen unter den  $a_1$ , welche durch jeden  $n-3$ -streckigen Querschnitt unter die Nicht- $a_1$  versetzt werden, bezeichnen wir durch  $a_2$ .

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man zuletzt eine Kategorie  $a_{n-2}$  von  $n$ -Strecken, welche diejenigen der  $a_{n-3}$  umfasst, die durch jeden einstreckigen (linearen) Querschnitt unter die Nicht- $a_{n-3}$  versetzt werden. Diese  $n$ -Strecke  $a_{n-2}$  nennen wir einfach zusammen-

hängend. Die  $n$ -Strecke  $a_\mu$  sind also einfach zusammenhängend, in sofern von Querschnitten von  $n - \mu - 2$  oder weniger Dimensionen abgesehen wird und sollen bis zur  $n - \mu - 2$ ten Dimension einfach zusammenhängend genannt werden.\*)

Ein  $n$ -Streck, welches nicht bis zur  $n - 1$ ten Dimension einfach zusammenhängend ist, kann durch einen  $n - 1$ -streckigen Querschnitt zerlegt werden, ohne in Stücke zu zerfallen. Das entstandene  $n$ -Streck kann, wenn es nicht bis zur  $n - 1$ ten Dimension einfach zusammenhängend ist, durch einen ähnlichen Querschnitt weiter zerlegt werden, und offenbar lässt sich dies Verfahren fortsetzen, so lange man nicht zu einem bis zur  $n - 1$ ten Dimension einfach zusammenhängenden gelangt ist. Die Anzahl der Querschnitte, durch welche eine solche Zerlegung des  $n$ -Strecks in ein bis zur ersten Dimension einfach zusammenhängendes bewerkstelligt wird, kann zwar nach der Wahl derselben verschieden ausfallen, offenbar aber muss sie für eine Gattung von Zerlegungen am kleinsten werden.

---

\*) In Uebereinstimmung mit dem Folgenden sollten wohl die  $n$ -Strecke  $a_\mu$  als zusammenhängend bis zur  $n - \mu - 1$ ten Dimension bezeichnet sein.