XXVI.

Beispiele von Flächen kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung.*)

I.

Es soll die Fläche vom kleinsten Inhalt bestimmt werden, welche begrenzt ist von drei Geraden, die sich in zwei Punkten schneiden, so dass die Fläche zwei Ecken in ihrer Begrenzung und einen ins Unendliche verlaufenden Sector besitzt.

Die Winkel, welche die drei geraden Linien mit einander bilden, seien $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$. Auf der Kugel wird die gesuchte Fläche abgebildet durch ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ sind, so dass $\alpha + \beta + \gamma > 1$ ist.

Es mögen mit a, b, c die Punkte bezeichnet werden, welche in der Ebene der complexen Variablen t den beiden Ecken und dem ins Unendliche verlaufenden Sector entsprechen. (Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt, Art. 13. S. 296.) Dann hat man:

$$u = \int \frac{\text{const.}\, dt}{(t-c)\sqrt{(t-a)(t-b)}}$$

oder

$$u = \text{const.} \log \frac{\sqrt{\frac{t-a}{c-a}} - \sqrt{\frac{t-b}{c-b}}}{\sqrt{\frac{t-a}{c-a}} + \sqrt{\frac{t-b}{c-b}}}.$$

Nimmt man, was freisteht, $a = 0$, $b = \infty$, $c = 1$ an, so folgt hieraus:

$$du = \text{const.} \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}; \quad u = \text{const.} \log \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$$

---

*) Für das erste dieser Beispiele findet sich auf einem einzelnen Blatt in Riemann's Nachlass das Resultat kurz aber vollständig angegeben. Bezüglich des zweiten liegt nur eine Bemerkung vor, in der nicht mehr als die Möglichkeit der Lösung ausgesprochen ist. Für die Ausführung ist daher der Herausgeber verantwortlich. Einige besondere Fälle des letzteren Problems sind von H. A. Schwarz behandelt. (Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Berlin 1871.)

und die letztere Constante hat den Werth $\sqrt{\frac{\gamma C}{2\pi}}$, wenn C den kürzesten Abstand der beiden einander nicht schneidenden Linien bedeutet.

Setzt man nun nach Art. 14. der genannten Abhandlung (S. 298)

$$k_1 = \sqrt{\frac{du}{d\eta}}, \quad k_2 = \eta\sqrt{\frac{du}{d\eta}}$$

so sind diese Functionen in allen Punkten der t-Ebene, ausser $0, \infty, 1$ endlich und einändrig, und wenn man das Verhalten dieser Functionen in der Umgebung der singulären Punkte nach der an erwähnter Stelle (S. 299) angegebenen Methode untersucht, so erkennt man, dass k_1, k_2 zwei Zweige der Function

$$P\begin{Bmatrix} \frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{4}-\frac{\beta}{2} & -\frac{\gamma}{2} \\ & & & t \\ \frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{4}+\frac{\beta}{2} & +\frac{\gamma}{2} \end{Bmatrix}$$

sind, und für η hat man den Quotienten zweier Zweige dieser Function zu setzen.

II.

Die gesuchte Fläche vom kleinsten Inhalt sei begrenzt von zwei in parallelen Ebenen gelegenen geradlinigen Polygonen ohne einspringende Ecken und mit je einem Umlauf. In diesem Falle wird die Fläche zweifach zusammenhängend sein, und kann erst durch einen Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden.

Die Abbildung der Minimalfläche auf der Kugel wird begrenzt sein durch zwei Systeme von Bögen grösster Kreise, deren Ebenen senkrecht stehen auf den Ebenen der Grenzpolygone, und welche demnach in zwei diametral entgegengesetzten Punkten der Kugelfläche zusammenlaufen. Jeder dieser beiden Punkte entspricht den sämmtlichen Ecken der beiden Grenzpolygone. An jeder Polygonseite findet sich Ein Umkehrpunkt der Normale, welcher dem Endpunkt des betreffenden Kreisbogens entspricht. Das Bild der Minimalfläche wird also die Kugelfläche vollständig und einfach bedecken.

Projiciren wir die Kugelfläche auf ihre Tangentialebene in einem der Punkte in welchem die Begrenzungsbögen zusammenlaufen, so erhalten wir als Bild der Minimalfläche ein Flächenstück H, welches die Ebene der complexen Variablen η völlig ausfüllt, und begrenzt ist einerseits durch ein System geradliniger Strecken, welche sternförmig vom Nullpunkt auslaufen, bis zu gewissen Punkten $C_1, C_2, \ldots, C_n$, andrerseits von einem System ähnlicher Strecken, welche von gewissen anderen Punkten $C'_1, C'_2, \ldots, C'_m$ nach dem unendlichen fernen Punkt verlaufen, und deren Verlängerungen daher im 0-Punkt zusammentreffen (wenn n und m die Anzahlen der Ecken der beiden gegebenen Polygone bedeuten).

Diese zweifach zusammenhängende Fläche soll nun in der Ebene einer complexen Variablen t auf eine die obere Halbebene doppelt bedeckende Fläche T_1 abgebildet werden, so dass den beiden Begrenzungen die reellen Werthe von t entsprechen. Diese Fläche muss, damit sie zweifach zusammenhängend sei, zwei Verzweigungspunkte enthalten. Fügen wir zur Fläche T_1 ihr Spiegelbild in Bezug auf die reelle Axe hinzu, so erhalten wir eine die ganze t-Ebene doppelt bedeckende Fläche T deren vier Verzweigungspunkte conjugirt imaginären Werthen von t entsprechen. Durch Einführung einer neuen Variablen t' an Stelle von t, die mit t durch eine in Bezug auf beide Variable quadratische Gleichung zusammenhängt, lässt sich erreichen, dass die Verzweigungspunkte den Werthen $t' = \pm i, \pm \frac{i}{k}$ entsprechen, worin k reell und < 1 ist, und dass ausserdem einem beliebigen reellen Werth von t ein gegebener reeller Werth von t' in einem der beiden Blätter entspricht.

Wir haben also t als Function der complexen Variablen η so zu bestimmen, dass sie in jedem Punkt der Fläche H einen bestimmten, stetig mit dem Ort veränderlichen, Werth hat, in den beiden Begrenzungen von H reell ist, und in je einem Punkt der beiden Begrenzungslinien unendlich von der ersten Ordnung wird. Setzen wir diese Function über die Begrenzung hinaus dadurch stetig fort, dass wir derselben an symmetrisch zu beiden Seiten einer jeden Begrenzungsstrecke gelegenen Punkten conjugirt imaginäre Werthe ertheilen, so hat, wie man leicht erkennt, die Function $\frac{d \log \eta}{dt}$ für conjugirt imaginäre Werthe von t selbst conjugirt imaginäre Werthe. Sie ist also in der ganzen Fläche T einwerthig und, einzelne Punkte ausgenommen, stetig, muss mithin eine rationale Function von t und

$$\varDelta(t) = \sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}$$

sein.

Bezeichnen wir die reellen Werthe von t, welche den Punkten $C_1, C_2, \ldots, C_n, C'_1, C'_2, \ldots, C'_m$ entsprechen, mit $c_1, c_2, \ldots, c_n, c'_1, c'_2, \ldots, c'_m$, die gleichfalls reellen Werthe, welche den mit dem Nullpunkte, bezw. unendlich fernen Punkte zusammenfallenden Ecken der Fläche H entsprechen, mit $b_1, b_2, \ldots, b_n, b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$, so muss $\frac{d \log \eta}{dt}$ unendlich klein in der ersten Ordnung werden für

$$t = c_1, c_2, \ldots, c_n, c'_1, c'_2, \ldots, c'_m,$$

unendlich gross in der ersten Ordnung für

$$t = b_1, b_2, .., b_n, .., b'_1, b'_2, .., b'_m$$

und in den Verzweigungspunkten

$$t = \pm i, \pm \frac{i}{k}.$$

Wir können demnach setzen:

$$\frac{d \log \eta}{dt} = \frac{\varphi(t, \Delta(t))}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}},$$

worin φ eine rationale Function von t und $\Delta(t)$ bedeutet, welche unendlich klein wird in den Punkten c, c', unendlich gross in den Punkten b, b', und welche dadurch bis auf einen constanten reellen Factor bestimmt ist. Damit übrigens eine solche Function φ existire, muss eine Bedingungsgleichung zwischen den Punkten c, c', b, b' bestehen, vermöge deren einer dieser Punkte durch die übrigen bestimmt ist. (Theorie der Abel'schen Functionen Art. 8. S. 107.) Ueberdies kann nach dem oben Bemerkten von den Punkten c, c', b, b' einer beliebig angenommen werden. Die zu $\log \eta$ hinzutretende additive Constante ist bestimmt, wenn der zu einem der Punkte c gehörige Werth von η, η_0, gegeben ist, wonach sich ergiebt:

$$\log \eta - \log \eta_0 = \int\limits_c^t \frac{\varphi(t, \Delta(t))\, dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}.$$

In diesem Ausdruck bleiben, nachdem η_0 und c festgesetzt sind, noch $2n + 2m$ unbestimmte Constanten, nemlich $2n + 2m - 2$ von den Werthen c, c', b, b', der Modul k und ein reeller constanter Factor in φ.

Für diese Constanten ergeben sich zunächst zwei Bedingungen, welche besagen, dass der reelle Theil des Integrals

$$\int \frac{\varphi(t, \Delta(t))\, dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}$$

über eine geschlossene, beide Verzweigungspunkte i, $\frac{i}{k}$ einschliessende Linie verschwinden soll und dass der imaginäre Theil desselben Integrals den Werth $2\pi i$ haben soll. Für die $2n + 2m - 2$ übrig bleibenden Constanten erhält man eine ebenso grosse Zahl von Bedingungen aus der Forderung, dass den Punkten c, c' die gegebenen Punkte C, C' in der η-Ebene entsprechen sollen.

Wir denken uns nun die x-Axe senkrecht gegen die Ebenen der beiden Grenzpolygone gelegt, und untersuchen die Abbildung der Minimalfläche in der Ebene der complexen Variablen X, nachdem dieselbe durch einen von einer Begrenzung zur andern gelegten Schnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt ist. Der reelle Theil von X ist dann in den beiden Begrenzungen und in jedem zu denselben parallelen Schnitt der Fläche constant. Der imaginäre Theil wächst, während man auf einem solchen Schnitt herumgeht, beständig, und zwar im Ganzen um eine constante Grösse. Daraus folgt, dass das Bild unserer Fläche in der X-Ebene von einem Parallelogramm begrenzt ist, welches die Ebene einfach bedeckt, von dem zwei Seiten, welche der Begrenzung der Fläche entsprechen, der imaginären Axe parallel sind. Die beiden andern Seiten, die den Rändern des Querschnitts entsprechen, können zwar krummlinig sein, kommen aber durch eine Verschiebung parallel der imaginären Axe mit einander zur Deckung.

Dieses Parallelogramm muss sich auf die obere Hälfte T_1 der Fläche T so abbilden lassen, dass die beiden der imaginären Axe parallelen Seiten desselben den beiden Rändern von T_1, die beiden anderen Seiten den beiden Ufern eines Querschnitts von T_1 entsprechen. Eine solche Abbildung wird daher vermittelt durch die Function

$$X = iC\int \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}} + C'$$

worin die Constante C reell ist, C' beliebig angenommen werden kann, wenn über die Lage des Anfangspunkts auf der x-Axe verfügt wird. Ist h der senkrechte Abstand der beiden parallelen Grenzebenen, so ergiebt sich:

$$h = 4C\int_0^i \frac{i\,dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}$$

wodurch die Constante C bestimmt ist.

Hiernach ist die Aufgabe, abgesehen von der Bestimmung der Constanten, gelöst, denn man hat nach den Formeln S. 292

$$Y = \frac{1}{2}\int dX\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)$$

$$Z = -\frac{i}{2}\int dX\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)$$

wodurch die Coordinaten x, y, z der Minimalfläche als Functionen zweier unabhängiger Variablen dargestellt sind.

Für die in η vorkommenden Constanten ergeben sich noch zwei Bedingungen, welche besagen, dass die reellen Theile der Integrale, durch welche Y und Z ausgedrückt sind, über eine den Nullpunkt einschliessende geschlossene Curve in der η-Ebene erstreckt, den Werth 0 haben müssen.

Nimmt man h und die Richtungen der begrenzenden Geraden als gegeben an, so hängen unsere Ausdrücke, abgesehen von den additiven Constanten in X, Y, Z, von $n+m-2$ unbestimmten Constanten ab, für welche man die Entfernungen der Punkte C, C' vom Nullpunkt in der η-Ebene annehmen kann, zwischen denen nach dem soeben Bemerkten zwei Relationen bestehen müssen. Ebenso gross ist aber auch die Anzahl der Constanten, welche die gegenseitige Lage der Grenzpolygone bestimmen. Man kann nemlich, indem man zwei Polygonseiten zur Fixirung des Coordinaten-Anfangspunkts festhält, jeder der $n+m-2$ übrigen noch eine Parallelverschiebung in ihrer Ebene ertheilen.

Einfachere Gestalten nehmen die Resultate an, wenn wir gewisse Symmetrieen in den Verhältnissen der begrenzenden Vielecke voraussetzen. Es möge im Folgenden der Fall betrachtet werden, dass die beiden Vielecke regulär seien und die beiden Endflächen einer gerade abgestumpften geraden Pyramide mit regulär-vieleckiger Basis bilden.

Die Umkehrpunkte der Normalen liegen in diesem Fall sämmtlich in den Mittelpunkten der begrenzenden Geraden, und fallen daher paarweise in dieselbe durch die Axe der Pyramide gehende Ebene.

Legen wir die y-Axe senkrecht gegen eine der begrenzenden Geraden, so wird in der η-Ebene ein Punkt C und ein Punkt C' in der reellen Axe liegen, auf welcher sie die Abstände η_0, η_0' vom Nullpunkt haben mögen. Die Punkte C, bezw. C' liegen auf zwei concentrischen Kreisen, auf welchen sie die Ecken je eines regulären Polygons bilden, und zwar so, dass immer ein Punkt C und ein Punkt C' auf demselben Radius-Vector liegt.

Da nun in der Begrenzung der Fläche T ein Punkt beliebig angenommen werden kann, so mag festgesetzt sein, dass dem auf der reellen Axe gelegenen Punkt C der Punkt $t=0$ in einem der beiden Blätter von T entspreche. Es folgt dann aus der Symmetrie, dass das zwischen C und C' liegende Stück der reellen Axe in der η-Ebene in der Fläche T einer Linie entspricht, welche vom Punkte $t=0$ im ersten Blatt nach dem Verzweigungspunkt $t=i$, und von da zurück zum Punkte $t=0$ im zweiten Blatt längs der imaginären Axe verläuft. Demnach hat die Function $\varphi(t, \Delta(t))$ für rein imaginäre Werthe von t selbst rein imaginäre Werthe, und dem Punkte C' entspricht der Werth $t=0$ im zweiten Blatt.

Nun wird die Fläche H durch die Substitution $\eta\eta' = \eta_0\eta_0'$ auf eine mit H congruente Fläche H' abgebildet in der Weise dass die Punkte C in die Punkte C' übergehen und umgekehrt (nur in vertauschter Ordnung).

Hieraus ergiebt sich, dass den beiden in der Fläche H gelegenen Punkten η und $\eta' = \frac{\eta_0 \eta_0'}{\eta}$ über einander liegende Punkte in beiden Blättern der Fläche T entsprechen. Und da $d \log \eta + d \log \eta' = 0$ ist, so muss $\varphi(t, \varDelta(t))$ in übereinander liegenden Punkten beider Blätter denselben Werth haben, ist also rational in t ausdrückbar und hat zufolge der oben gemachten Bemerkung die Form $t\psi(t^2)$, wenn ψ eine rationale Function bedeutet.

Dies veranlasst uns, die Fläche T auf eine Fläche S abzubilden durch die Substitution:

$$\frac{1 + t^2}{1 + k^2 t^2} = s^2$$

wonach der oberen Hälfte der Fläche T ein die s-Ebene einfach bedeckendes Blatt entspricht, welches längs der reellen Axe zwischen den Punkten $s = 1$ und $s = \frac{1}{k}$ und zwischen den Punkten $s = -1$, $s = -\frac{1}{k}$ aufgeschlitzt ist. Die Ränder dieser beiden Schlitze entsprechen den Grenzen der Fläche H. Für X ergiebt sich hiernach der Ausdruck

$$X = \frac{h}{4K} \int \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}}$$

wenn

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}}$$

ist, während sich η als algebraische Function von s darstellen lässt.

Für eine Begrenzung durch Quadrate findet man

$$\eta = c \sqrt{\frac{(1 - ms)(1 - m's)}{(1 + ms)(1 + m's)}}$$

den Ecken des Quadrats in der einen Begrenzung entsprechen die Punkte $s = \frac{1}{m}$, $s = \frac{1}{m'}$ an beiden Rändern des Schlitzes, den Umkehrpunkten der Normalen die Punkte $s = 1$, $s = \frac{1}{k}$ und ein an beiden Rändern des Schlitzes gelegener Punkt $s = \frac{1}{n}$, der aus der Gleichung $\frac{d \log \eta}{ds} = 0$ zu bestimmen ist, und man hat:

$$1 > m > n > m' > k.\ ^{*)}$$

---

*) Es lässt sich die vorstehende Betrachtung auf viele Fälle ausdehnen, in denen die beiden Polygone nicht regulär sind. So behält der obige Ausdruck für η seine Gültigkeit für die Begrenzung durch zwei Rechtecke, deren Mittelpunkte

Für die Begrenzung durch gleichseitige Dreiecke ergiebt sich:

$$\eta = c\left(\frac{1-ms}{1+ms}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1-ks}{1+ks}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Um für diesen letzteren Fall die Möglichkeit der Constantenbestimmung zu untersuchen setze man zunächst $s = \pm 1$, wodurch sich ergiebt:

$$\eta_0 = c\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{\frac{1}{3}}; \quad \eta_0' = c\left(\frac{1+m}{1-m}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{1}{3}}$$

also:

$$c = \sqrt{\eta_0\eta_0'}, \quad \sqrt{\frac{\eta_0}{\eta_0'}} = \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{\frac{1}{3}}$$

und für den besonderen Fall, dass beide Dreiecke congruent sind

$$\eta_0\eta_0' = 1, \quad c = 1.$$

Den Ecken des Dreiecks in der einen Begrenzung entsprechen die Punkte $s = \frac{1}{m}$ an beiden Rändern des Schlitzes und der Punkt $\frac{1}{k}$, so dass $k < m < 1$ sein muss. Der erste Umkehrpunkt der Normalen findet statt für $s = 1$, die beiden andern entsprechen einem Punkte $s = \frac{1}{n}$ an beiden Rändern des Schlitzes, so dass

$$k < n < m$$

sein muss. Für n erhält man zunächst aus der Gleichung $\frac{d\log\eta}{ds} = 0$ die Bestimmung:

$$n^2 = \frac{km(m+2k)}{2m+k},$$

woraus für jedes Werthsystem von k, m, welches der Bedingung

$$0 < k < m < 1$$

genügt, ein Werth von n hervorgeht, welcher zwischen k und m liegt.

Man erhält aber zwischen m, n, k noch eine zweite Gleichung, welche ausdrückt, dass für $s = \frac{1}{n}$ $\eta^3 = \eta_0^3$ werden soll. Diese Gleichung ist:

$$\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2\frac{1-k}{1+k} = \left(\frac{n-m}{n+m}\right)^2\frac{n-k}{n+k}$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen n eliminirt, so erhält man folgende Relation zwischen k und m:

$$k\left(\frac{1+m^2+2mk}{k(1+m^2)+2m}\right)^2 = m\left(\frac{2k+m}{k+2m}\right)^3,$$

aus welcher k durch m zu bestimmen ist.

---

in einer zu ihrer Ebene senkrechten Linie liegen, vorausgesetzt dass der Modul von $\eta\eta'$ für die Umkehrpunkte der Normalen denselben Werth hat. Dies findet z. B. statt wenn beide Rechtecke congruent sind.

Für $k=0$ ist die linke Seite dieser Gleichung Null, die rechte $\frac{m}{8}$, für $k=m$ ist der Unterschied zwischen linker und rechter Seite

$$\frac{(1-m^2)^3}{m(3+m^2)^2}$$

also positiv für $m<1$. Es existirt daher zu jedem Werth von m der kleiner als 1 ist, eine ungerade Anzahl von Werthen von $k<m$. Da sich nun ferner leicht ergiebt dass die Function

$$\log k \frac{(1+m^2+2mk)^2\,(k+2m)^3}{(k(1+m^2)+2m)^2\,(2k+m)^3}$$

zwischen $k=0$ und $k=m$ nur Ein Maximum hat, so folgt, dass für jedes $m<1$ Ein und nur Ein unseren Bedingungen genügender Werth von k gefunden werden kann, und darnach ergiebt sich auch nur Ein zugehöriger Werth von n. Für die beiden Grenzen $m=0$ und $m=1$ erhält man $k=n=m$.

Für die Functionen X, Y, Z finden sich hiernach, wenn man über die additiven Constanten verfügt, die Ausdrücke:

$$X=\frac{h}{4K}\int_1^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)\,(1-k^2s^2)}}$$

$$Y=\frac{h}{8K}\int_1^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)\,(1-k^2s^2)}}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)$$

$$Z=-\frac{ih}{8K}\int_1^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)\,(1-k^2s^2)}}\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right).$$

Die beiden noch übrigen Constanten, m und $\sqrt{\eta_0\eta_0'}$ bestimmt man aus den gegebenen Längen der Dreieckseiten. Bezeichnen wir diese mit a und b, so ergiebt sich:

$$a=\frac{ih}{2K}\int_1^{\frac{1}{m}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)\,(1-k^2s^2)}}\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)$$

$$b=\frac{ih}{2K}\int_1^{\frac{1}{m}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)\,(1-k^2s^2)}}\left(\frac{\eta}{\eta_0\eta_0'}+\frac{\eta_0\eta_0'}{\eta}\right).$$

In dem besonderen Fall $a=b$ ist $\eta_0\eta_0'=1$ und es bleibt zur Bestimmung der Constanten m die eine transcendente Gleichung

$$\frac{a}{h}=\frac{i}{2K}\int_1^{\frac{1}{m}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)\,(1-k^2s^2)}}\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right).$$

Lässt man in dem Ausdruck zur Rechten m von 0 bis 1 gehen, so behält derselbe positive Werthe, wird aber an beiden Grenzen unendlich gross. Er muss also für einen zwischenliegenden Werth von m ein Minimum haben. Daraus folgt, dass es für das Verhältniss $\frac{a}{h}$ eine untere Grenze giebt, jenseits der die Aufgabe keine Lösung mehr hat, während für jeden Werth von $\frac{a}{h}$, der über dieser Grenze liegt, zwei Werthe von m, also zwei Lösungen der Aufgabe existiren. Es ist anzunehmen, dass nur der kleinere der beiden Werthe von m einem wirklichen Minimum des Flächeninhalts entspricht.