XXIV.

Ueber das Potential eines Ringes.

Um die Wirkung eines beliebigen Körpers, dessen Theile eine Anziehung oder Abstossung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ausüben, für jeden Punkt ausserhalb dieses Körpers zu bestimmen, hat man bekanntlich eine Function V der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z dieses Punktes zu suchen, welche den Namen des Potentials oder der Potentialfunction der wirkenden Massen führt und deren Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ den Componenten der beschleunigenden Kraft im Punkte x, y, z gleich oder entgegengesetzt sind, je nachdem die Masseneinheit eine gleiche um die Längeneinheit entfernte Masse mit der Einheit der Kraft anzieht oder abstösst. Zur Bestimmung dieser Function, welche der Bedingung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

genügen muss, ist es hinreichend, wenn in jedem Punkte der Oberfläche des Körpers noch eine Bedingung gegeben ist, und es bietet sich die Aufgabe häufig in der Form dar, dass nicht die Vertheilung der Massen im Körper, sondern gewisse Bedingungen, denen ihre Wirkung in der Oberfläche genügen soll, gegeben sind, z. B. dass V einer willkürlich gegebenen Function gleich werden soll, also in jedem Punkte der Oberfläche die ihr parallele Componente gegeben ist, oder dass in jedem Punkte in Einer gegebenen Richtung die Componente einen gegebenen Werth erhalten soll. Das Verfahren um diese Aufgabe zu lösen besteht bekanntlich darin, dass man aus particularen Lösungen der Differentialgleichung (1)

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

einen allgemeinen Ausdruck

$$a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \cdots + a_n Q_n + \ldots = R$$

mit den willkürlichen Constanten a_1, a_2, ..., a_n, ... zusammensetzt, welcher ebenfalls der Differentialgleichung (1) genügt, und dann diese

Constanten so bestimmt, dass die Grenzbedingungen erfüllt werden. Die Ausdrücke R convergiren im Allgemeinen nur für gewisse Werthe der Coordinaten x, y, z, so dass für jeden bestimmten Ausdruck der ganze unendliche Raum durch eine Fläche s in zwei Theile zerfällt, in deren einem dieser Ausdruck convergirt, während er in dem andern allgemein zu reden (d. h. von einzelnen Punkten und Linien abgesehen) divergirt. So z. B. wird der Ausdruck

$$\sum a_n e^{z\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} \cos \alpha_n x \cos \beta_n y$$

für eine bestimmte auf der z-Axe senkrechte Ebene zu convergiren aufhören. Führt man statt x, y, z Polarcoordinaten ein und entwickelt V nach Potenzen des Radiusvectors, wo dann bekanntlich die Coefficienten der $n$ten Potenz sich aus den Kugelfunctionen $n$ter Ordnung multiplicirt mit willkürlichen Constanten zusammensetzen, so erhält man eine Reihe, welche für eine bestimmte Kugelfläche, die den Pol zum Mittelpunkt hat, zu convergiren aufhört. Es ist nun beachtenswerth, dass einer bestimmten Form der Entwicklung R schon eine bestimmte Schaar von Grenzflächen der Convergenz entspricht (im ersteren Falle eine Schaar paralleler Ebenen, im zweiten eine Schaar concentrischer Kugelflächen), während es von den Werthen der Coefficienten abhängt, für welche Fläche dieser Schaar die Divergenz eintritt.

Offenbar muss nun der Ausdruck R für das ganze Gebiet, wo die Function V bestimmt werden soll, convergiren, weil man nur dann diesen Ausdruck in die Grenzbedingungen einsetzen kann um die willkürlichen Constanten in ihm zu bestimmen. Andererseits aber lässt sich leicht zeigen, dass ein Ausdruck, welcher der Differentialgleichung (1) genügt, nur da wo er zu convergiren aufhört, eine willkürlich gegebene Function darstellen kann. Folglich muss die Form des Ausdrucks R so bestimmt werden, dass die Oberfläche des Körpers eine der ihm angehörenden Grenzflächen der Convergenz ist.

Es soll zunächst für einen Ring mit kreisförmigem Querschnitte diese Aufgabe gelöst werden, was für manche physikalische Untersuchungen nicht unerwünscht sein dürfte.

1.

Legt man die z-Axe in die Axe des Ringes und den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt des Ringes, so erhält die Gleichung der Ringoberfläche die Form

$$(\sqrt{x^2 + y^2} \pm a)^2 + z^2 = c^2.$$

Ich suche zunächst statt x, y, z solche Variabeln einzuführen, dass eine derselben in der Oberfläche des Ringes einen constanten Werth erhält und zugleich die Differentialgleichung (1) eine möglichst einfache Form behält.

Führt man in der (x, y)-Ebene Polarcoordinaten ein, indem man

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

setzt, so wird die Differentialgleichung (1)

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial V}{r\partial r} + \frac{\partial^2 V}{rr\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

die Grenzgleichung von φ unabhängig, nemlich

$$(r+a)^2 + z^2 = c^2$$

und

$$(r-a)^2 + z^2 = c^2,$$

also in der (r, z)-Ebene die Grenze durch zwei mit dem Radius c um die Punkte $(-a, 0)$ und $(a, 0)$ beschriebenen Kreise gebildet.

Ich führe nun statt r und z zwei neue Veränderliche ϱ und ψ ein, indem ich für $r + zi$ eine Function einer complexen Grösse $\varrho e^{\psi i}$ setze,

$$r + zi = f(\varrho e^{\psi i})$$

und die Grösse $\varrho e^{\psi i}$ als Function von $r + zi$ so bestimme, dass ihr Modul ϱ in jedem der beiden Grenzkreise einen constanten Werth erhält und sie ausserhalb der beiden Kreise allenthalben stetig und endlich bleibt.

Diesen Bedingungen wird genügt, wenn man

$$r + zi = \frac{\beta + \gamma\varrho e^{\psi i}}{1 + \varrho e^{\psi i}}$$

und

$$\beta = -\gamma = \sqrt{aa - cc}$$

setzt; denn es wird dann

$$a + r + zi = \frac{(a+\beta) + (a+\gamma)\varrho e^{\psi i}}{1 + \varrho e^{\psi i}}$$

$$(a+r+zi)(a+r-zi) = \frac{\frac{a+\beta}{(a+\gamma)\varrho} + e^{\psi i}}{1 + \varrho e^{\psi i}} \cdot \frac{\frac{a+\beta}{(a+\gamma)\varrho} + e^{-\psi i}}{1 + \varrho e^{-\psi i}} (a+\gamma)^2\varrho^2.$$

Diese Grösse wird von ψ unabhängig, wenn

$$\frac{a+\beta}{(a+\gamma)\varrho} = \varrho,$$

und zwar

$$= (a+\gamma)^2\varrho^2 = (a+\beta)(a+\gamma).$$

Ebenso wird die Grösse

$$(-a + r + zi)(-a + r - zi)$$

von ψ unabhängig und zwar

$$=(-a+\beta)(-a+\gamma),$$

wenn

$$\varrho\varrho=\frac{-a+\beta}{-a+\gamma}.$$

Es entsprechen also den Werthen

$$\varrho\varrho=\frac{a+\beta}{a+\gamma},\quad \varrho\varrho=\frac{-a+\beta}{-a+\gamma},$$

zwei um die Punkte $(-a, 0)$, $(a, 0)$ mit den Radien

$$\sqrt{(a+\beta)(a+\gamma)},\ \sqrt{(-a+\beta)(-a+\gamma)}$$

beschriebene Kreise. Sollen beide Radien $=c$ werden, so muss

$$(a+\beta)(a+\gamma)-(-a+\beta)(-a+\gamma)=2a(\beta+\gamma)=0,$$

also $\gamma=-\beta$, $aa-\beta\beta=cc$, also $\beta=\sqrt{aa-cc}$ sein.

2.

Die Umformung der Differentialgleichung (I) kann dadurch erleichtert werden, dass man $V=r^\mu U$ setzt, wodurch

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\partial V}{r\partial r}&=r^\mu\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+2\mu r^{\mu-1}\frac{\partial U}{\partial r}+\mu(\mu-1)r^{\mu-2}U\\&\quad+r^{\mu-1}\frac{\partial U}{\partial r}+\mu r^{\mu-2}U\\&=r^\mu\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+(2\mu+1)r^{\mu-1}\frac{\partial U}{\partial r}+\mu\mu r^{\mu-2}U,\end{aligned}$$

und μ so annimmt, dass das zweite Glied wegfällt, also $\mu=-\frac{1}{2}$. Die Differentialgleichung (I) wird dann

$$rr\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\tfrac{1}{4}U=0.$$

Bezeichnet man nun der Kürze wegen die complexen Grössen $r+zi$ durch y und $\varrho e^{\psi i}$ durch η und die conjugirten Grössen durch y' und η', so erhält man

$$r=\frac{y+y'}{2},\quad zi=\frac{y-y'}{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{\partial U}{\partial z}i\right),\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial y'}=\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)$$

folglich

$$rr\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)=(y+y')^2\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial y'};$$

ferner

$$y=\beta\frac{1-\eta}{1+\eta},\quad y'=\beta\frac{1-\eta'}{1+\eta'},\quad y+y'=2\beta\frac{1-\eta\eta'}{(1+\eta)(1+\eta')};$$

$$y=\beta\left(-1+\frac{2}{1+\eta}\right),\quad dy=-2\beta\frac{d\eta}{(1+\eta)^2},\quad dy'=-2\beta\frac{d\eta'}{(1+\eta')^2};$$

$$(y+y')^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial y'} = (1-\eta\eta')^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \eta'} = \frac{(1-\eta\eta')^2}{\eta\eta'} \frac{\partial^2 U}{\partial \log\eta \, \partial \log\eta'}$$

oder (da $\eta\eta' = \varrho^2$, $\log\eta = \log\varrho + \psi i$, $\log\eta' = \log\varrho - \psi i$)

$$= \frac{(1-\varrho^2)^2}{\varrho^2} \tfrac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \log\varrho^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \right).$$

Die partielle Differentialgleichung wird also

$$\left(\frac{\varrho - \frac{1}{\varrho}}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \log\varrho^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \tfrac{1}{4} U = 0.$$

3.

Es ist jetzt leicht, U in eine Reihe von particulären Integralen dieser Differentialgleichung zu entwickeln, welche gleichzeitig für alle Werthe von φ und ψ convergirt oder divergirt. Zu dem Ende hat man nur diesen particulären Integralen die Form zu geben

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} m\psi \; \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} n\varphi,$$

multiplicirt in eine Function P von ϱ, welche der Differentialgleichung

$$\text{(II)} \qquad \left(\frac{\varrho - \frac{1}{\varrho}}{2} \right)^2 \left(\frac{d^2 P}{d \log\varrho^2} - mmP \right) - (nn - \tfrac{1}{4}) P = 0$$

genügt. Die Bestimmung der willkürlichen Constanten ergiebt sich dann durch die Fourier'sche Reihe.

Setzt man

$$\frac{\varrho - \frac{1}{\varrho}}{2} = t,$$

so wird

$$\frac{dP}{d \log\varrho} = \frac{dP}{dt} \frac{\varrho + \frac{1}{\varrho}}{2},$$

$$\frac{d^2 P}{d \log\varrho^2} = \left(\frac{\varrho + \frac{1}{\varrho}}{2} \right)^2 \frac{d^2 P}{dt^2} + \frac{\varrho - \frac{1}{\varrho}}{2} \frac{dP}{dt} = (tt+1) \frac{d^2 P}{dt^2} + t \frac{dP}{dt}$$

und die Differentialgleichung (II) geht über in

$$tt(tt+1) \frac{d^2 P}{dt^2} + t^3 \frac{dP}{dt} - (mmtt + nn - \tfrac{1}{4}) P = 0.$$

Diese Differentialgleichung enthält nur Glieder von zwei verschiedenen Dimensionen in Bezug auf t und lässt sich folglich nach dem seit Euler bekannten Verfahren durch hypergeometrische Reihen integriren. Die Lösung lässt sich auf sehr mannigfaltige Art durch andere hypergeometrische Reihen ausdrücken, nemlich durch solche, deren viertes Element den Werth oder den reciproken Werth folgender neun Grössen hat,

$$-\left(\frac{\varrho-\frac{1}{\varrho}}{2}\right)^2,\ \left(\frac{\varrho+\frac{1}{\varrho}}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1-\varrho\varrho}{1+\varrho\varrho}\right)^2;\ \varrho\varrho,\ 1-\varrho\varrho,\ 1-\frac{1}{\varrho\varrho};$$

$$\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\right)^2,\ -\frac{(1-\varrho)^2}{4\varrho},\ \frac{(1+\varrho)^2}{4\varrho},$$

und zwar giebt es nach jeder dieser achtzehn Grössen vier verschiedene Entwicklungen, welche der Differentialgleichung genügen, von denen indess je zwei dieselbe particulare Lösung darstellen. Im Allgemeinen wird man nach der kleinsten dieser Grössen entwickeln. Entwickelt man nach einer solchen, welche für $\varrho = 1$ verschwindet, so zeigt sich, dass von den beiden particulären Lösungen die eine für $\varrho = 1$ unendlich wird. Da V endlich bleiben soll, so muss in dem Werth von P der Coefficient dieser particulären Lösung verschwinden und P der für $\varrho = 1$ endlich bleibenden proportional sein. Von den verschiedenen Ausdrücken derselben will ich Einen anzuführen mich begnügen und durch $P^{n,m}$ bezeichnen, nemlich

$$P^{n,m} = (1-\varrho\varrho)^{n+\frac{1}{2}}\varrho^{\pm m}F(n\pm m+\tfrac{1}{2},\ n+\tfrac{1}{2},\ 2n+1,\ 1-\varrho\varrho).$$

Da sich in den Werthen der $P^{n,m}$ die ersten drei Elemente der hypergeometrischen Reihen nur durch ganze Zahlen unterscheiden, so lassen sich alle $P^{n,m}$ lineär in zwei derselben $P^{0,0}$, $P^{0,1}$ ausdrücken (Comm. Gott. rec. Vol. II*)), welche ganze elliptische Integrale erster und zweiter Gattung sind**) und vielleicht am bequemsten nach dem Princip des arithmetisch-geometrischen Mittels, d. h. durch wiederholte Transformationen zweiter Ordnung, gefunden werden.

---

*) Gauss' Werke Bd. III. S. 131. W.

**) Sämmtliche $P^{n,m}$ lassen sich durch ganze elliptische Integrale im weitern Sinne ausdrücken.