XXIII.

Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita.*)

I.

Avendo una frazione continua infinita della forma

$$a+\cfrac{b_1 x}{1+\cfrac{b_2 x}{1+\cfrac{b_3 x}{1+\cdots}}}$$

che per valori di x abbastanza piccoli converge e rappressenta la funzione $f(x)$, si vede facilmente, che la ridotta m^{esima} è uguale al quoziente $\frac{p_m}{q_m}$ di due funzioni intere p_m e q_m, i cui gradi sono ambedue n, se $m = 2n+1$, e n e $n-1$, se $m = 2n$. La differenza tra la ridotta e la funzione $f(x)$, se x è infinitesimo, è infinitesima dell' ordine m^{esimo}. Ma affinchè questo avvenga, debbono essere sodisfatte tante condizioni, quante sono le quantità arbitrarie contenute nella funzione fratta uguale alla ridotta.

Dunque la ridotta m^{esima} può determinarsi mediante la condizione di coincidere nei primi m termini dello svolgimento secondo le potenze di x colla funzione da svolgere e mediante i gradi del numeratore e del denominatore, che sono per $m = 2n+1$ ambedue n e n e $n-1$ per $m = 2n$.

II.

Questo modo di determinare la ridotta conduce immediatamente all' espressione della ridotta, quando si tratta di svolgere il quoziente delle serie ipergeometriche

$$P^{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & x\end{pmatrix} = P \text{ e } P^{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha & \beta+1 & \gamma & \\ \alpha'-1 & \beta' & \gamma', & x\end{pmatrix} = Q,$$

---

*) Die Bearbeitung dieses Fragments, dessen Entstehung in den October 1863 fällt, rührt von H. A. Schwarz in Göttingen her.

ove si faccia uso delle proprietà caratteristiche esposte nella memoria [Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen].

Infatti, poichè per x infinitesimo $\frac{P}{Q} - \frac{p_m}{q_m}$ divieni infinitesimo dell'ordine m e Qq_m dell'ordine α, l'espressione $q_m P - p_m Q$ diviene infinitesima dell'ordine $m + \alpha$, e si dimostra facilmente, che questa espressione ha tutte le proprietà caratteristiche di una funzione sviluppabile in serie ipergeometrica in modo che si abbia

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
&q_{2n+1} P - p_{2n+1} Q \\
&= P\begin{pmatrix} \alpha+2n+1 & \beta-n & \gamma \\ \alpha'-1 & \beta'-n & \gamma' \end{pmatrix}, x\Big) = x^n P\begin{pmatrix} \alpha+n+1 & \beta & \gamma \\ \alpha'-n-1 & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}, x\Big) = x^n P_{n+1} \\
&q_{2n} P - p_{2n} Q = P\begin{pmatrix} \alpha+2n & \beta+1-n & \gamma \\ \alpha'-n & \beta'-n & \gamma' \end{pmatrix}, x\Big) = x^n Q_n
\end{aligned}
$$

dove P_n, Q_n denotano ciò che divengono P, Q, quando si mutano α, α' in $\alpha + n$, $\alpha' - n$. Ora, se facciamo variare continuamente x e le funzioni di x, in modo che l'indice del valore complesso x percorra un giro intorno l'indice di 1, q_m, p_m riprendono gli stessi valori, mentre P, Q, P_n, Q_n si convertono in altri rami di queste funzioni.

Dunque: se designiamo con P', Q', P'_n, Q'_n altri rami corrispondenti di queste funzioni, abbiamo anche

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
q_{2n+1} P' - p_{2n+1} Q' &= x^n P'_{n+1} \\
q_{2n} P' - p_{2n} Q' &= x^n Q'_n .
\end{aligned}
$$

Dalle equazioni (1) e (2) s'ottiene:

$$
\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{PP'_{n+1} - P'P_{n+1}}{QP'_{n+1} - Q'P_{n+1}}, \quad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{PQ'_n - P'Q_n}{QQ'_n - Q'Q_n}.
$$

Dunque, per trovare per quali valori di x, $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ e $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ convergano verso $\frac{P}{Q}$, basta ricercare quando $\frac{P_n}{P'_n}$ e $\frac{Q_n}{Q'_n}$ col crescere indefinito di x convergano verso zero.

[III.]

A questo scopo conviene introdurre l'espressioni di P_n e Q_n per integrali definiti. Ponendo

$$
\begin{aligned}
[-\alpha' - \beta' - \gamma' &= a \\
-\alpha' - \beta - \gamma &= b \\
-\alpha - \beta' - \gamma &= c]
\end{aligned}
$$

può esprimersi

$$P_n \text{ per } \left[x^{a+n}(1-x)^{\gamma}\int_0^1 s^{a+n}(1-s)^{b+n}(1-xs)^{c-n}ds\right]$$

e

$$Q_n \text{ per } \left[x^{a+n}(1-x)^{\gamma}\int_0^1 s^{a+1+n}(1-s)^{b+n}(1-xs)^{c-n}ds\right].$$

Per avere il valore generale delle funzioni P_n, Q_n bisognerebbe moltiplicare gli integrali per fattori costanti, ma possiamo sostituire nelle equazioni (1) gli integrali comprendendo i fattori costanti nelle funzioni intere p_m, q_m. Quanto ai valori delle funzioni sotto il segno integrale, è indifferente qualunque valore si prenda, purchè si prendano per s^a, $(1-s)^b$, $(1-xs)^c$ gli stessi valori in ogni integrale.

[Nun bleiben die Ausdrücke für $\frac{p_m}{q_m}$ auch unverändert, wenn für P', Q', P'_n, Q'_n dieselben linearen Verbindungen dieser Grössen und der Grössen $P, Q, P_n, Q_n : AP + BP', AQ + BQ', AP_n + BP'_n, AQ_n + BQ'_n$, gesetzt werden, wo A und B zwei Constanten bezeichnen, von welchen B nicht gleich Null ist. Solche correspondirende Functionen ergeben sich, wenn die obigen Integrale anstatt von 0 bis 1 von irgend einem der vier Werthe 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞ zu irgend einem dieser vier Werthe und zwar alle auf demselben Wege erstreckt werden.]

Dunque si possono prendere per P'_n, Q'_n gli stessi integrali estesi da uno ad uno intorno di $\frac{1}{x}$.

Gli integrali [durch welche der letzten Annahme zufolge P_n, Q_n, P'_n, Q'_n ausgedrückt sind, ändern bei einer continuirlichen Variation des Weges der Integration zwischen den angegeben Grenzen ihren Werth nicht] purchè il cammino d'integrazione non oltrepassi l'indice di $\frac{1}{x}$, e possiamo disporre del cammino dell' integrazione in modo che si possa più facilmente trovare il limite verso il quale converge il valore dell' integrale col crescere di n.

A questo scopo $\frac{s(1-s)}{1-xs}\cdots$

[Hier bricht der Text ab. Es lassen sich aber aus einigen Handzeichnungen und Formeln die Schlüsse, deren Riemann sich bedient hat, etwa in folgender Weise herstellen.

Man setze:]

$$\frac{s(1-s)}{1-xs} = e^{f(s)}$$

[und betrachte in der Ebene der complexen Grösse s die Curven, längs denen der Modul von $e^{f(s)}$ einen constanten Werth hat. Für sehr kleine Werthe dieses Moduls umgeben diese Curven die Punkte 0 und 1 nahezu wie concentrische Kreise mit kleinen Radien. Für sehr grosse Werthe des Moduls umgeben diese Curven den Punkt $s = \frac{1}{x}$ und den Punkt $s = \infty$. In beiden Fällen bestehen die Curven also aus zwei getrennten Theilen. Lässt man den Modul von kleinen Werthen an wachsen, so werden die getrennten Theile, welche die Punkte 0 und 1 umgeben und demselben Werthe des Moduls entsprechen, einander immer näher rücken, bis sie nur eine Curve bilden, welche einen Doppelpunkt hat. Für diesen Doppelpunkt muss $f'(s)$ gleich Null sein. Eine ähnliche Betrachtung findet statt, wenn man den erwähnten Modul von sehr grossen Werthen an abnehmen lässt.

Es ergeben sich folgende Gleichungen:]

$$f(s) = \log(1-s) - \log\left(\frac{1}{s} - x\right),$$

$$f'(s) = -\frac{1}{1-s} + \frac{1}{\frac{1}{s} - x}\,\frac{1}{ss} = \frac{1-2s+xs^2}{s(1-s)(1-xs)}.$$

[Für $f'(s) = 0$ ist also]

$$1-2s+xs^2 = 0,\; s(1-xs) = 1-s,\; 1-2s+s^2 = (1-x)s^2 = (1-s)^2$$

$$\frac{1}{s} - 1 = \sqrt{1-x} = 1 - xs$$

$$\frac{1-s}{1-xs} = s.$$

[Es werde nun mit $\sqrt{1-x}$ derjenige Werth der Quadratwurzel bezeichnet, dessen reeller Bestandtheil p o s i t i v ist, wobei der Fall, dass x reell und $\geqq 1$ ist, von der Betrachtung ausgeschlossen wird. Ferner mögen σ, σ' die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$1-2s+xs^2 = 0,$$

$$\sigma = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}, \quad \sigma' = \frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$$

bezeichnen, so dass der Modul von σ k l e i n e r ist als der Modul von σ'.

Dann ist

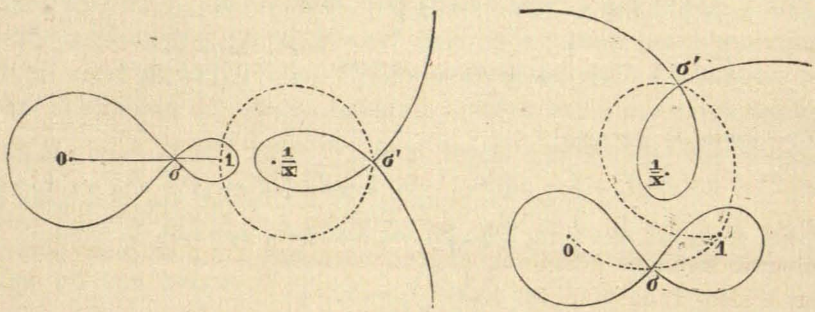
$$e^{f(\sigma)} = \sigma^2 = \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2, \quad e^{f(\sigma')} = \sigma'^2 = \left(\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}\right)^2.$$

Man denke sich nun den Punkt $s = 0$ mit dem Punkte $s = 1$ so durch eine Linie verbunden, dass dieselbe den Punkt $s = \sigma$ enthält und dass bei dem Fortschreiten auf dieser Linie der Modul von $e^{f(s)}$ auf dem Wege von $s = 0$ bis $s = \sigma$ beständig im Zunehmen, auf dem

Wege von $s = \sigma$ bis $s = 1$ aber beständig im Abnehmen begriffen ist. Eine solche Linie kann als Integrationsweg für die von $s = 0$ bis $s = 1$ zu erstreckenden Integrale dienen, durch welche die Functionen P_n, Q_n ausgedrückt werden.

Für diejenigen Integrale hingegen, welche an die Stelle der Functionen P'_n, Q'_n gesetzt werden, kann ein Integrationsweg dienen, welcher vom Punkte $s = 1$ zunächst nach dem Punkte $s = \sigma'$ führt, von dort nach dem Punkte $s = 1$ zurückführt und hierbei den Punkt $s = \frac{1}{x}$ umschliesst. Dieser Integrationsweg kann so gewählt werden, dass der Modul von $e^{f(s)}$ sein Maximum auf dieser Linie nur im Punkte $s = \sigma'$ erreicht.

In den nachstehenden Figuren, zu denen sich Entwürfe von Riemann's Hand vorgefunden haben, sind die Integrationswege durch punktirte Linien angedeutet.



Es handelt sich nun darum, einen Ausdruck zu finden, welcher den Werth des Integrals

$$\int_0^1 s^{a+n}(1-s)^{b+n}(1-xs)^{c-n}\,ds$$

für unendlich grosse Werthe von n asymptotisch darstellt.

Man setze

$$s^a(1-s)^b(1-xs)^c = \varphi(s),$$

so ist zu berechnen $\int_0^1 e^{nf(s)}\varphi(s)\,ds$ für $n = \infty$.

Diejenigen Theile des Integrationsweges, welche nicht in der Nähe des singulären Werthes $s = \sigma$ liegen, ergeben zu dem Werthe des Integrales einen Beitrag, welcher für unendlich grosse Werthe von n nicht allein unendlich klein wird, sondern auch — weil der reelle Bestandtheil von $n\big(f(\sigma) - f(s)\big)$ unter den angegebenen Voraussetzungen über jedes Mass hinaus wächst — unendlich klein wird im Verhältniss zu dem Theile des Integrals, welches sich auf einen in der Nähe des Werthes $s = \sigma$ liegenden Theil des Integrationsweges bezieht. Aus diesem Grunde genügt es zur Auffindung eines für $\lim n = \infty$ geltenden asymptotischen Ausdruckes für das erwähnte Integral, die Summation auf einen in der Nähe des Werthes $s = \sigma$ liegenden Theil des Integrationsweges zu beschränken. Man setze daher, mit h eine Grösse bezeichnend, deren Modul nur kleine Werthe annehmen soll:]

$$s = \sigma + h$$

$$f(s) = f(\sigma) + \tfrac{1}{2} f''(\sigma) h^2 + (h^3)$$

$$nf(s) = nf(\sigma) + n \frac{f''(\sigma)}{2} h^2 + n(h^3)$$

$$-n \frac{f''(\sigma)}{2} h^2 = z^2$$

$$dh = \frac{dz}{\sqrt{-n \frac{f''(\sigma)}{2}}}$$

$$e^{nf(s)} = e^{nf(\sigma)} e^{-z^2 + \left(\frac{z^3}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$e^{nf(s)} \varphi(s) ds = e^{nf(\sigma)} \varphi\left(\sigma + \frac{z}{\sqrt{-n \frac{f''(\sigma)}{2}}}\right) e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{-n \frac{f''(\sigma)}{2}}}.$$

[Wird nun der in der Nähe des Punktes $s = \sigma$ liegende Theil des Integrationsweges geradlinig angenommen und zwar so, dass der von den beiden Tangenten der Curve

$$\operatorname{mod} e^{f(s)} = \operatorname{mod} e^{f(\sigma)}$$

im Punkte $s = \sigma$ gebildete rechte Winkel durch denselben halbirt wird, so convergiren für $\lim n = \infty$ die Grenzen der auf die Variable z sich beziehenden Integration beziehlich gegen die Werthe $-\infty$ und $+\infty$, und es ist daher der Beitrag, den die in der Nähe des Werthes $s = \sigma$ liegenden Elemente des betrachteten Integrales für sehr grosse Werthe von n zu dem Werthe des Integrals ergeben, asymptotisch gleich

$$\frac{e^{nf(\sigma)} \varphi(\sigma)}{\sqrt{-n \frac{f''(\sigma)}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{-\frac{f''(\sigma)}{2}}} \frac{e^{nf(\sigma)}}{\sqrt{n}} \varphi(\sigma)$$

Nun ist

$$e^{nf(\sigma)} = \sigma^{2n} = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - x}}\right)^{2n}$$

$$-\frac{f''(\sigma)}{2} = \frac{1}{\sigma(1 - \sigma)} = \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{1 - x}}$$

$$\varphi(\sigma) = \sigma^{a+b} (1 - x)^{\frac{b+c}{2}}.$$

Es ist demnach der asymptotische Werth von $\int_0^1 e^{nf(s)}\varphi(s)\,ds$ gleich

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n+a+b+1}(1-x)^{\frac{b+c}{2}+\frac{1}{4}}.$$

Durch analoge Schlüsse wird der asymptotische Werth von $\int_1^1 e^{nf(s)}\varphi(s)ds$ als

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}\right)^{2n+a+b+1}(1-x)^{\frac{b+c}{2}+\frac{1}{4}}$$

gefunden.

Unter den angegebenen Voraussetzungen ergiebt sich also für den Quotienten $P_n : P'_n$ der asymptotische Werth:]

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n+a+b+1}.$$

[Für alle Werthe von x, mit Ausnahme derjenigen, welche reell und grösser als 1 sind, sowie mit Ausnahme des Werthes $x = 1$, convergirt daher der Quotient $P_n : P'_n$ mit unendlich zunehmendem n gegen Null.

Dasselbe gilt, wenn a in $a+1$ verwandelt wird, von dem Quotienten $Q_n : Q'_n$.

Hiermit ist bewiesen, dass die Näherungswerthe des Kettenbruches von der in I angegebenen Form, in welchen der Quotient

$$\frac{P^{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}}{P^{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha & \beta+1 & \gamma & \\ \alpha'-1 & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}}$$

entwickelt werden kann, für alle Werthe von x, welche nicht reell und $\geqq 1$ sind, mit wachsendem Index gegen den Werth dieses Quotienten convergiren.]