XXI.

Zwei allgemeine Sätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten.

(20. Febr. 1857.)

Bekanntlich lässt sich jede Lösung einer lineären homogenen Differentialgleichung $n$ter Ordnung in n von einander unabhängige particulare Lösungen lineär mit constanten Coefficienten ausdrücken. Sind die Coefficienten der Differentialgleichung rationale Functionen der unabhängigen Veränderlichen x, so wird jeder Zweig der, allgemein zu reden, vielwerthigen Functionen, welche ihr genügen, sich lineär mit constanten Coefficienten in n für jeden Werth von x eindeutig bestimmte Functionen ausdrücken lassen, welche freilich dann längs eines gewissen Liniensystems unstetig sein müssen. Sind die Coefficienten aber algebraische Functionen von x, welche sich rational in x und eine μ-werthige algebraische Function von x ausdrücken lassen, so gehört zu jedem Zweig dieser μ-werthigen Function eine Gruppe von n von einander unabhängigen particularen Lösungen, so dass in diesem Falle jeder Zweig einer Lösung der Differentialgleichung als ein lineärer Ausdruck von höchstens μn eindeutigen Functionen sich darstellen lässt, welcher aber von ihnen immer nur n einer Gruppe angehörige enthalten wird. Aus diesen Vorbemerkungen wird man, da sich jede nicht homogene lineäre Differentialgleichung leicht in eine homogene von der nächst höhern Ordnung verwandeln lässt, ersehen, dass die folgenden Sätze alle lineären Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten umfassen.

Es seien $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Functionen von x, welche für alle complexen Werthe dieser Grösse einändrig und endlich sind, ausser für $a, b, c, \ldots, g$, und welche durch einen Umlauf des x um einen dieser Verzweigungswerthe in lineäre Functionen mit constanten Coefficienten von ihren früheren Werthen übergehen.

Zu ihrer näheren Bestimmung scheide man die Gesammtheit der complexen Werthe in zwei Gebiete durch eine in sich zurücklaufende

Linie, die der Reihe nach durch sämmtliche Verzweigungswerthe $(g, .., c, b, a)$ geht, so dass in jedem dieser Gebiete die Functionen völlig gesondert und stetig verlaufen, und betrachte die Werthe der Functionen in dem auf der positiven Seite dieser Linie liegenden Gebiete als gegeben. Durch einen positiven Umlauf des x um a gehe nun y_1 in $\sum_{i=1}^{i=n} A_i^{(1)} y_i$; y_2 in $\Sigma A_i^{(2)} y_i, \ldots$; y_n in $\Sigma A_i^{(n)} y_i$ über und ähnlich durch einen positiven Umlauf um b y_ν in $\Sigma B_i^{(\nu)} y_i$, etc., durch einen positiven Umlauf um g y_ν in $\Sigma G_i^{(\nu)} y_i$.

Bezeichnet man nun zur Abkürzung das System der n Werthe $(y_1, y_2, .., y_n)$ durch (y) das System der nn Coefficienten

$$\begin{array}{c} A_1^{(1)}\, A_2^{(1)} \ldots A_n^{(1)} \\ A_1^{(2)}\, A_2^{(2)} \ldots A_n^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_1^{(n)}\, A_2^{(n)} \ldots A_n^{(n)} \end{array}$$

durch (A), das System der B durch $(B), \ldots$, der G durch (G), und die aus (y) mittelst des Coefficientensystems (A) gebildeten Werthe $\Sigma A_i^{(1)} y_i, \Sigma A_i^{(2)} y_i, \ldots, \Sigma A_i^{(n)} y_i$ durch $(A)(y_1, y_2, .., y_n) = (A)(y)$, so findet zwischen diesen Coefficientensystemen die Gleichung

$$(1) \qquad (G)(F) \ldots (B)(A) = (0)$$

statt, wenn man durch (0) ein Coefficientensystem bezeichnet, das nichts ändert, oder in welchem die Coefficienten der abwärts nach rechts gehenden Diagonale $= 1$ und alle übrigen $= 0$ sind. In der That, durchläuft x die ganze Grenzlinie so, dass es sich von einem Verzweigungswerth zum folgenden auf der positiven Seite bewegt, dann aber jedesmal um diesen Verzweigungswerth positiv herum, so gehen die Functionen (y) nach und nach in $(G)(y)$, $(G)(F)(y)$, schliesslich in $(G)(F)..(B)(A)(y)$ über. Es hat aber denselben Erfolg, wenn x die negative Seite der Grenzlinie oder die ganze Begrenzung des negativerseits liegenden Gebiets durchläuft, wobei $(y_1, y_2, .., y_n)$ ihre früheren Werthe wieder annehmen müssen, da sie in diesem Gebiet allenthalben einändrig sind.

Ein System von n Functionen, welches die eben angegebenen Eigenschaften hat, werde durch

$$Q\begin{pmatrix} a & b & c & & g & \\ A & B & C & \cdots & G & x \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Man betrachte nun als zu einer Klasse gehörig sämmtliche Systeme, für welche die Verzweigungswerthe und die um sie stattfindenden

Substitutionen gegebene der Gleichung (1) genügende Werthe haben, was, wie sich bald ergeben wird, für unendlich viele Systeme der Fall ist. Nach einem leicht zu beweisenden, von Jacobi vielfach angewandten Satze lässt sich jede Substitution, allgemein zu reden, in drei Substitutionen zerlegen, von denen die letzte die inverse der ersten ist, und in der mittleren die Coefficienten ausser der Diagonale sämmtlich $= 0$ sind, so dass durch sie jede von den Grössen, auf welche sie angewandt wird, nur einen Factor erhält. Es lässt sich also z. B.

$$(A) = (\alpha) \left\{\begin{matrix} \lambda_1, 0 \,.\,.\, 0 \\ 0, \lambda_2 \,.\,.\, 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ 0, \; 0 \,.\,.\, \lambda_n \end{matrix}\right\} (\alpha)^{-1}$$

setzen, wenn $(\alpha)^{-1}$ die inverse Substitution von (α) bezeichnet. Die Grössen λ werden dabei die n Wurzeln einer durch (A) völlig bestimmten Gleichung $n$ten Grades. Für den Fall, dass diese Gleichung gleiche Wurzeln hätte, müsste man der mittleren Substitution eine etwas abgeänderte Form geben; wir wollen aber zur Vereinfachung diesen Fall vorläufig ausschliessen und annehmen, dass er bei der Zerlegung der Substitutionen $(A), (B), \ldots, (G)$ nicht eintritt. Die Substitution (α) kann in

$$(\alpha) \left\{\begin{matrix} l_1, 0, \,.\,.\, 0 \\ 0, l_2, \,.\,.\, 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ 0, \; 0, \,.\,.\, l_n \end{matrix}\right\}$$

durch Hinzufügung einer nur multiplicirenden Substitution verwandelt werden; in dieser Form aber sind, wie die Gleichungen, durch welche sie bestimmt wird, zeigen, alle möglichen Werthe derselben enthalten.

Durch einen positiven Umlauf des x um a gehen die Werthe der Functionen y aus $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ in $(A)(p)$ über. Die Werthe der durch die Substitution $(\alpha)^{-1}$ aus (y) gebildeten Functionen

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (\alpha)^{-1}(y)$$

gehen daher aus $(\alpha)^{-1}(p)$ in

$$(\alpha)^{-1}(A)(p) = \left\{\begin{matrix} \lambda_1, 0, \,.\,.\, 0 \\ 0, \lambda_2, \,.\,.\, 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ 0, \; 0, \,.\,.\, \lambda_n \end{matrix}\right\} (\alpha)^{-1}(p)$$

über, oder $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in $(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \ldots, \lambda_n z_n)$.

Wenn eine Function z durch einen positiven Umlauf des x um a den constanten Factor λ erhält, so kann sie durch Multiplication mit einer Potenz von $(x - a)$ in eine Function verwandelt werden, die in der Umgebung von a einändrig ist. In der That erhält $(x - a)^\mu$ durch einen positiven Umlauf des x um a den Factor $e^{\mu 2\pi i}$; bestimmt man also μ so dass $e^{\mu 2\pi i} = \lambda$, oder setzt man $\mu = \frac{\log \lambda}{2\pi i}$, so wird $z(x-a)^{-\mu}$ eine für $x = a$ einändrige Function. Diese Function lässt sich also nach ganzen Potenzen von $(x-a)$ entwickeln, und z selbst nach Potenzen, die sich von μ um ganze Zahlen unterscheiden.

Demnach sind $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nach Potenzen von $x-a$ entwickelbar, deren Exponenten in der Form

$$\frac{\log \lambda_1}{2\pi i} + m, \ \frac{\log \lambda_2}{2\pi i} + m, \ldots, \frac{\log \lambda_n}{2\pi i} + m$$

enthalten sind, wenn m eine ganze Zahl bedeutet. Wir wollen nun annehmen, dass die Functionen y nirgends unendlich von unendlich grosser Ordnung werden, so dass diese Reihen auf der Seite der fallenden Potenzen abbrechen müssen, und bezeichnen durch $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ die niedrigsten Potenzen in diesen Reihen, so dass

$$z_1(x-a)^{-\mu_1}, \ldots, z_n(x-a)^{-\mu_n}$$

endliche von 0 verschiedene Werthe haben. Offenbar kann die Differenz zweier von den Grössen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ nie eine ganze Zahl sein, da die Werthe der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sämmtlich von einander verschieden sind; dagegen werden die Werthe der entsprechenden Exponenten bei zwei zu derselben Klasse gehörigen Systemen sich nur um ganze Zahlen unterscheiden können, da die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ durch (A) völlig bestimmt sind. Diese Exponenten können dazu dienen, die verschiedenen Functionensysteme derselben Klasse von einander zu unterscheiden, oder doch sie zu gruppiren, und es genügt, wenn sie bekannt sind, statt (A) die Substitution (α) anzugeben, da die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ schon durch sie bestimmt sind: wir werden uns daher zur genaueren Charakteristik des Systems $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ des Ausdrucks

$$Q \left\{ \begin{matrix} a & b & \ldots & g & \\ (\alpha) & (\beta) & \ldots & (\vartheta) & \\ \mu_1 & \nu_1 & \cdots & \varrho_1 & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \mu_n & \nu_n & \cdots & \varrho_n & \end{matrix} \right\}$$

bedienen, in welchem die Grössen der übrigen Verticalreihen für die Verzweigungswerthe $b, \ldots, g$ die analoge Bedeutung haben sollen, wie die der ersten für a. Es liegt dabei auf der Hand, dass jedes System als ein specieller Fall eines andern betrachtet werden kann, in welchem die entsprechenden Exponenten zum Theil oder sämmtlich niedriger sind.

Es ist nun nicht schwer zu beweisen, dass zwischen je $n+1$ Systemen, die derselben Klasse angehören, eine lineare homogene Gleichung mit ganzen Functionen von x als Coefficienten stattfindet. Wir unterscheiden die entsprechenden Grössen in diesen $n+1$ Systemen durch obere Indices. Nehmen wir an, dass zwischen ihnen die n Gleichungen stattfinden:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
a_0 y_1 + a_1 y_1^{(1)} + \cdot\cdot + a_n y_1^{(n)} &= 0\\
a_0 y_2 + a_1 y_2^{(1)} + \cdot\cdot + a_n y_2^{(n)} &= 0\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
a_0 y_n + a_1 y_n^{(1)} + \cdot\cdot + a_n y_n^{(n)} &= 0,
\end{aligned}
$$

so müssen die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ proportional sein den Determinanten der Systeme, welche man erhält, wenn man in dem Systeme der $n(n+1)$ Grössen y der Reihe nach die 1te, 2te, .., $n+1$te Verticalreihe weglässt. Eine solche Determinante $\Sigma \pm y_1^{(1)} y_2^{(2)} \ldots y_n^{(n)}$ erhält durch einen positiven Umlauf des x um a den Factor Det. (A) und kann für $x = a$ nicht unendlich von unendlich grosser Ordnung werden; sie lässt sich also nach um 1 steigenden Potenzen von $x - a$ entwickeln. Um den niedrigsten Exponenten in dieser Entwicklung zu bestimmen kann diese Determinante in die Form gesetzt werden

$$\text{Det.}\,(\alpha)\,\Sigma \pm z_1^{(1)} z_2^{(2)} \ldots z_n^{(n)}.$$

In letzterer Determinante ist das erste Glied

$$z_1^{(1)} z_2^{(2)} \ldots z_n^{(n)} = (x-a)^{\mu_1^{(1)} + \mu_2^{(2)} + \cdot\cdot + \mu_n^{(n)}}$$

multiplicirt in eine Function, die für $x = 0$ einen endlichen und von 0 verschiedenen Werth hat. Der niedrigste Exponent in der Entwicklung dieses Gliedes nach Potenzen von $(x - a)$ ist daher

$$= \mu_1^{(1)} + \mu_2^{(2)} + \cdot\cdot + \mu_n^{(n)}$$

und hieraus erhält man durch Permutation der oberen Indices die niedrigsten Exponenten in den Entwicklungen der übrigen Glieder. Offenbar ist der gesuchte Exponent allgemein zu reden gleich dem kleinsten von diesen Werthen und jedenfalls nicht kleiner. Bezeichnen wir den kleinsten dieser Werthe durch $\overline{\mu}$, den ähnlichen Werth für den zweiten Verzweigungswerth durch $\overline{\nu}, \ldots$, für den letzten durch $\overline{\varrho}$, so ist

$$\Sigma \pm y_1^{(1)} \ldots y_2^{(2)} y_n^{(n)} \ldots (x-a)^{-\overline{\mu}}\,(x-b)^{-\overline{\nu}} \ldots (x-g)^{-\overline{\varrho}}$$

eine Function von x, welche für alle endlichen complexen Werthe eindrig und endlich bleibt und für $x = \infty$ unendlich gross höchstens von der Ordnung $-(\overline{\mu} + \overline{\nu} + \cdot\cdot + \overline{\varrho})$ wird, folglich eine ganze Function höchstens vom Grade $-(\overline{\mu} + \overline{\nu} + \cdot\cdot + \overline{\varrho})$. Diese Grösse muss daher, wenn die Function nicht identisch verschwindet, eine ganze, nicht negative Zahl sein.

Die partiellen Determinanten, welchen die Grössen $a_0, a_1, .., a_n$ proportional sind, verhalten sich demnach wie ganze Functionen, multiplicirt mit Potenzen von $x - a, x - b, .., x - g$, deren Exponenten in den verschiedenen Determinanten sich um ganze Zahlen unterscheiden. Die Grössen $a_0, a_1, .., a_n$ verhalten sich daher selbst wie ganze Functionen und können in den Gleichungen (2) durch diese ersetzt werden, wodurch man den zu beweisenden Satz erhält.

Die Derivirten der Functionen $y_1, y_2, .., y_n$ nach x bilden offenbar ein derselben Klasse angehöriges System, denn die Differentialquotienten der Functionen $(A)(y_1, y_2, .., y_n)$, in welche $(y_1, y_2, .., y_n)$ durch einen positiven Umlauf des x um a übergehen, sind

$$= (A)\left(\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, .., \frac{dy_n}{dx}\right),$$

da die Coefficienten in (A) constant sind. Durch diese Bemerkung erhält man aus dem eben bewiesenen Satz die beiden Corollare:

„*Die Functionen y eines Systems genügen einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung, deren Coefficienten ganze Functionen von x sind.*“

und:

„*Jedes derselben Klasse angehörige System lässt sich in diese Functionen und ihre $n - 1$ ersten Differentialquotienten lineär mit rationalen Coefficienten ausdrücken.*“

Mit Hülfe des letzteren lässt sich ein allgemeiner Ausdruck für sämmtliche Systeme einer Klasse bilden, aus welchen man sofort sehen würde, dass die Anzahl sämmtlicher Systeme, wie oben behauptet, unendlich ist; es soll indess hier nur angewandt werden zur Aufsuchung aller Systeme, in welchen nicht bloss die Substitutionen, sondern auch die Exponenten dieselben sind. Für ein beliebiges System $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ mit denselben Substitutionen und denselben Exponenten wie $y_1, y_2, .., y_n$ hat man nach demselben, wenn man die Derivirten nach Lagrange bezeichnet, n lineäre Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned}
c_0 Y_1 &= b_0 y_1 + b_1 y_1' + \cdots + b_{n-1} y_1^{(n-1)} \\
c_0 Y_2 &= b_0 y_2 + b_1 y_2' + \cdots + b_{n-1} y_2^{(n-1)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_0 Y_n &= b_0 y_n + b_1 y_n' + \cdots + b_{n-1} y_n^{(n-1)}
\end{aligned}$$

wobei die Coefficienten ganze Functionen von x sind. Die Function c_0 hängt nur von den Functionen y ab, und für den Grad der Functionen b ergiebt sich ein endliches Maximum, so dass sie nur eine endliche Anzahl von Coefficienten haben. Damit umgekehrt die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Functionen $Y_1, Y_2, .., Y_n$ die verlangten Eigenschaften haben, müssen diese Coefficienten so beschaffen sein, dass für die Verzweigungswerthe ihre Exponenten nicht niedriger sind als die der Functionen y und dass sie für alle anderen Werthe von x endlich bleiben. Diese Bedingungen liefern für die Coefficienten der Potenzen von x in den Functionen b ein System lineärer homogener Gleichungen. Die Auflösung dieser Gleichungen ergiebt, wenn sie zur Bestimmung der Coefficienten hinreichen, als allgemeinsten Werth der Functionen (Y) den Werth const. (y), wenn dies nicht der Fall ist, aber einen Ausdruck von der Form:

$$Y_1 = ky_1 + k_1 Y_1^{(1)} + \cdots + k_m Y_1^{(m)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_n = ky_n + k_1 Y_n^{(1)} + \cdots + k_m Y_n^{(m)}$$

mit den willkürlichen Constanten $k, k_1, \ldots, k_m$. Von diesen willkürlichen Constanten kann man eine nach der andern als Function der übrigen so bestimmen, dass das Anfangsglied in der Entwicklung einer der Functionen $(\alpha)^{-1}(Y), (\beta)^{-1}(Y), \ldots, (\vartheta)^{-1}(Y)$ Null wird, wodurch die Exponentensumme jedesmal wenigstens um eine Einheit erhöht wird, so dass schliesslich die Exponentensumme wenigstens um m erhöht und die Anzahl der willkürlichen Constanten um ebenso viel vermindert ist. Auf diese Weise kann man aus jedem Systeme von n Functionen ein anderes mit höheren Exponenten ableiten, welches durch die Substitutionen und die Exponenten in seiner Charakteristik bis auf einen allen Functionen gemeinschaftlichen constanten Factor völlig bestimmt ist. Es werde nun auch dieser Factor dadurch bestimmt, dass man den Coefficienten der niedrigsten Potenz von $x - a$ in der Entwicklung der ersten von den Functionen $(\alpha)^{-1}(y)$ gleich 1 setzt, so dass die Functionen y eindeutig bestimmt sind.*)

Man hat dann nur nöthig scharf aufzufassen, wie sich der Verlauf dieser Functionen mit der Lage eines der Verzweigungswerthe, z. B. a ändert, um zu dem Satz zu gelangen, dass die Grössen y ein ähnliches System von Functionen wie von x auch von a bilden mit den Verzweigungswerthen $b, c, d, \ldots, g, x$ und Substitutionen die aus $(A), (B), \ldots, (F)$ zusammengesetzt sind. Für den Fall, dass es unmöglich ist, die Functionen mit a so zu än-

*) Bis hierher reicht ein vollständig ausgearbeitetes Manuscript Riemann's. Da wo die kleingedruckten Worte beginnen, steht am Rande die Bemerkung „von hier an nicht richtig". Ich glaubte aber trotzdem nicht, diese Stelle ganz unterdrücken zu dürfen, weil sie doch die Keime zu einer Weiterentwicklung der darin angedeuteten wichtigen Theorie enthält. — Auf einigen Blättern, welche Entwürfe zu der vorstehenden Abhandlung enthalten, finden sich die Grundzüge zu einer Weiterführung der vorstehenden Untersuchungen, die ich im Nachfolgenden in möglichst unveränderter Form mittheile. W.

dern, dass sämmtliche Substitutionen constant bleiben, — weil die Anzahl der in ihnen enthaltenen willkürlichen Constanten geringer ist als die Anzahl der hierfür zu erfüllenden Bedingungen —, kann man das System als einen besonderen Fall eines Systems mit niedrigeren Exponenten betrachten, in welchem für diese speciellen Werthe von $a, b, \ldots, g$ die Coefficienten einiger Anfangsglieder in den Reihen für $(\alpha)^{-1}(y), (\beta)^{-1}(y), \ldots, (\vartheta)^{-1}(y)$ verschwinden.

In Folge dieses Satzes bilden die Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Functionen von p Veränderlichen $a, b, \ldots, g, x$, welche, wenn sämmtliche veränderliche Grössen wieder ihre früheren Werthe annehmen, entweder die früheren Werthe wieder erhalten, oder in lineäre Ausdrücke ihrer früheren Werthe übergehen, mit einem constanten Coefficientensystem, das aus den $p-2$ beliebig gegebenen Systemen $(A), (B), (C), \ldots, (F)$ irgendwie zusammengesetzt ist.

Auf eine weitere Untersuchung dieser Functionen von mehreren Veränderlichen und der Hülfsmittel, welche der letzte Satz für die Integration lineärer Differentialgleichungen bietet, muss ich für jetzt verzichten und bemerke nur noch, dass ein Integral einer algebraischen Function als ein specieller Fall der hier behandelten Functionen betrachtet werden kann, und dass man durch Anwendung dieser Principien auf ein solches Integral auf Functionen geführt wird, welche die allgemeinen ϑ-Reihen mit beliebigen Periodicitätsmoduln darstellen.

Bestimmung der Form der Differentialgleichung.

Es wird die nächste Aufgabe der auf diese Principien zu gründenden Theorie der lineären Differentialgleichungen sein, die einfachsten Systeme jeder Klasse aufzusuchen, und zu diesen Ende zunächst die Form der Differentialgleichung näher zu bestimmen. Verstehen wir unter den obigen Functionen $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ jetzt, wie Lagrange, die successiven Derivirten der Function y so werden die Gleichungen (2) die Differentialgleichung, welcher sie genügen, darstellen. Der Grad der ganzen Functionen, welche für die Coefficienten gesetzt werden können, bestimmt sich folgendermassen: durch jede Differentiation nach x werden sämmtliche Exponenten der Charakteristik, vorausgesetzt dass keiner eine ganze Zahl ist, um die Einheit erniedrigt. Es bleibt daher:

$$\sum \pm (y_1 y_2^{(1)} \ldots y_n^{(n-1)})(x-a)^{-\bar{\mu}}(x-b)^{-\bar{\nu}} \ldots (x-g)^{-\bar{\varrho}} = X_0$$

allenthalben endlich und einändrig, wenn man

$$\bar{\mu} = \Sigma_i \mu_i - \frac{n \,.\, n-1}{2}; \quad \bar{\nu} = \Sigma_i \nu_i - \frac{n \,.\, n-1}{2}; \ldots; \bar{\varrho} = \Sigma_i \varrho_i - \frac{n \,.\, n-1}{2}$$

setzt. Für $x = \infty$ wird, da die Functionen y endlich und einändrig bleiben, $\Sigma \pm y_1 y_2^{(1)} \ldots y_n^{(n-1)}$ unendlich klein von der Ordnung: $n \,.\, (n-1)$. Der Grad der ganzen Function X_0 ist daher

$$r = (m-2)\frac{n \,.\, n-1}{2} - s$$

wenn m die Anzahl der Verzweigungswerthe und s die Summe der Exponenten in der Charakteristik bezeichnet.

Wenn in dem System der $n \,.\, n+1$ Grössen y statt der letzten Verticalreihe die $n+1-t$te weggelassen wird, so muss die aus ihnen gebildete Determinante allgemein zu reden mit um t höheren Potenzen von $x-a$, $x-b$, ..., $x-g$ multiplicirt werden und wird dadurch eine ganze Function vom Grade $r+(m-1)t$ [nur für $t=n$ ist dieser Grad $r+(m-2)n$].

Die Differentialgleichung lässt sich daher, wenn man das Product $(x-a)(x-b)\ldots(x-g)$ durch ω bezeichnet in die Form:

$$X_n y + \omega X_{n-1} y' + \cdots \omega^n X_0 y^{(n)} = 0$$

setzen, so dass die Grössen X_t ganze rationale Functionen vom Grade $r+(m-1)t$ sind. [X_n vom Grade $r+(m-2)n$].

Man untersuche jetzt, welchen Bedingungen die Coefficienten dieser Functionen genügen müssen, damit nur für die Werthe $a, b, \ldots, g$ eine Verzweigung eintritt und die Unstetigkeitsexponenten für sie die gegebenen Werthe haben. Eine Verzweigung findet so lange und nur so lange nicht statt, als sich alle Lösungen der Differentialgleichung nach ganzen Potenzen der Aenderung von x entwickeln lassen, oder so lange die Entwicklung von y nach dem Mac-Laurin'schen Satz n willkürliche Constanten enthält. Dies ist immer der Fall, wenn a_n von 0 verschieden ist. Man hat daher nur den Fall $a_n = 0$ zu untersuchen. Setzt man die Differentialgleichung in die Form:

$$b_0 y + b_1 (x-a) y' + b_2 (x-a)^2 y'' + \cdots + b_n (x-a)^n y^{(n)} = 0$$

so müssen, damit um $x=a$ die Function y den vorgeschriebenen Charakter hat, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sämmtlich Wurzeln der Gleichung

$$b_0 + b_1 \mu + \cdots + b_n \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1) = 0$$

sein. Dieses liefert n Bedingungen für die Functionen X und erfordert überdies, da alle Grössen μ endlich und unter einander ungleich sind, dass b_n für $x=a$ nicht 0 sei. Aehnliches gilt für die übrigen Wurzeln $b, c, \ldots, g$ von $\omega = 0$. Es kann sonach $X_0 = 0$ mit $\omega = 0$ keine Wurzel gemeinschaftlich haben.

Ist nun (für eine Wurzel von $X_0 = 0$) $a_n = 0$, a_{n-1} aber von 0 verschieden, so können (für diese) $y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ willkürlich angenommen werden, dann aber ist $y^{(n-1)}$ durch die Differentialgleichung

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

bestimmt, so dass $n-1$ willkürliche Constanten in den $n-1$ ersten Gliedern der Mac-Laurin'schen Reihe auftreten, die letzte Constante aber frühestens im $n+1$ten. Man nehme an, dass sie zuerst im $n+h$ten erscheine.

Eliminirt man dann aber in der $h$ten Derivirten der Differentialgleichung:

$$a_n y^{(n+h)} + (h a_n' + a_{n-1}) y^{(n+h-1)} + \cdots = 0$$

die Grössen $y^{(n+h-2)}, \ldots, y^{(n-1)}$ mittelst der vorhergehenden Derivirten und der Differentialgleichung selbst, so müssen die Coefficienten von $y^{(n+h-1)}, y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \ldots, y$ sämmtlich verschwinden, da diese Grössen von einander unabhängig sind. Man erhält also

$$h a_n' + a_{n-1} = 0,$$

also a_n' von 0 verschieden und ausserdem noch $n - 1$ Gleichungen, und es ergeben sich n Bedingungsgleichungen für die Coefficienten der Functionen X.

Man setze nun zweitens voraus, dass a_n und a_{n-1} gleichzeitig verschwinden, a_{n-2} aber endlich bleibt, so dass die $n-2$ ersten Glieder der Mac-Laurin'sche Reihe $n-2$ willkürliche Constanten enthalten, und nehme an, dass die folgende im $n+h-1$ten, die letzte im $n+h'-1$ten zuerst auftrete. Alsdann ergeben sich, damit $y^{(n+h-2)}$ und $y^{(n+h'-2)}$ von den Werthen der niedrigeren Differentialquotienten unabhängig werden, die Gleichungen:

$$a_n' = 0, \quad \frac{h \,.\, h-1}{2} a_n'' + h a_{n-1}' + a_{n-2} = 0,$$
$$\frac{h' \,.\, h'-1}{2} a_n'' + h' a_{n-1}' + a_{n-2} = 0,$$

also a_n'' und a_{n-1}' von Null verschieden, und ausserdem $2n-3$ Gleichungen. Es werden also zwei Linearfactoren von $a_n = 0$ und man erhält $2n$ Bedingungen für die Functionen X.

Auf ähnliche Art findet man für den Fall wenn a_n, a_{n-1}, a_{n-2} gleichzeitig verschwinden, a_{n-3} aber endlich bleibt, und die drei letzten willkürlichen Constanten zuerst im $n+h-2$ten, $n+h'-2$ten, $n+h''-2$ten Gliede auftreten, die Bedingungen:

$$a_n' = 0, \quad a_n'' = 0, \quad a_{n-1}' = 0,$$
$$\frac{h \,.\, h-1 \,.\, h-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a_n''' + \frac{h \,.\, h-1}{1 \,.\, 2} a_{n-1}'' + h a_{n-2}' + a_{n-3} = 0$$

für h, h', h'' und ausserdem noch $3n-6$ Gleichungen, so dass a_n drei und nur drei gleiche Wurzeln hat, und $3n$ Bedingungen erfüllt werden müssen. Durch Verallgemeinerung dieser Schlüsse ergiebt sich offenbar, dass jeder Linearfactor von X_0 n Bedingungen zwischen den Functionen X zur Folge hat.*)

*) Ueber das Verhalten der Differentialgleichung für unendliche Werthe von x findet sich im Riemann'schen Manuscript nichts; die Abzählung der Constanten ist nur angedeutet; das Folgende ist daher so gut als möglich vom Herausgeber

Für unendlich grosse Werthe von x sind die Functionen y endlich und stetig vorausgesetzt; um die hieraus fliessenden Bedingungen zu erhalten, transformire man die Differentialgleichung durch Einführung einer neuen Variablen $\frac{1}{\xi}$ für x. Dadurch erhält man:

$$(-1)^t y^{(t)} = \xi^{2t}\frac{d^t y}{d\xi^t} + (t-1)t\xi^{2t-1}\frac{d^{t-1}y}{d\xi^{t-1}}$$
$$+ (t-1)(t-2)\frac{t(t-1)}{1\,.\,2}\xi^{2t-2}\frac{d^{t-2}y}{d\xi^{t-2}} + \cdots$$

und die Differentialgleichung erhält die Form:

$$a_n\xi^{2n}\frac{d^n y}{d\xi^n} + (n-1\,.\,n\,.\,a_n\xi^{2n-1} - a_{n-1}\xi^{2n-2})\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}} +$$
$$+ (n-1\,.\,n-2\,.\,\frac{n\,.\,n-1}{2}a_n\xi^{2n-2} - (n-2)\frac{n-1}{1}a_{n-1}\xi^{2n-3} + a_{n-2}\xi^{2n-4})\frac{d^{n-2}y}{d\xi^{n-2}}$$
$$+ \cdot\cdot + a_0 y = 0\,.$$

Nun ist a_n vom Grade $r+mn$, a_t vom Grade $r+mn-n+t$, a_0 vom Grade $r+mn-2n$ in x. Wenn man also die vorstehende Gleichung mit $\xi^{r+mn-2n}$ multiplicirt, so bleiben der erste und der letzte Coefficient für $\xi = 0$ endlich und dieselbe erhält die Form:

$$\alpha_n\frac{d^n y}{d\xi^n} + \frac{\alpha_{n-1}}{\xi}\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}}{\xi^2}\frac{d^{n-2}y}{d\xi^{n-2}} + \cdot\cdot + \frac{\alpha_1}{\xi^{n-1}}\frac{dy}{d\xi} + \alpha_0 y = 0,$$

worin $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0$ Functionen sind, welche für $\xi = 0$ endlich bleiben. Nun lässt sich aber, wenigstens unter der Voraussetzung dass X_0 nur ungleiche Factoren, und die oben mit h bezeichnete ganze Zahl den Werth 1 hat, nachweisen, dass α_{n-1} durch ξ theilbar ist. Dies ist bewiesen, wenn man gezeigt hat, dass in dem Ausdruck

$$(n-1)\,na_n - x\,a_{n-1}$$

sich die $(r+mn)$te Potenz von x forthebt. Zu diesem Zweck zerlege man die echt gebrochene Function $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{X_1}{\omega X_0}$ in Partialbrüche:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{X_1}{\omega X_0} = \sum\frac{A}{x-a} + \sum\frac{\mathrm{A}}{x-\alpha}$$

worin sich die erste Summe auf alle Wurzeln $a, b, \ldots$ der Gleichung $\omega = 0$, die zweite auf alle Wurzeln $\alpha, \beta, \ldots$ von $X_0 = 0$ erstreckt. Nun muss in Folge der oben für den Punkt a aufgestellten Bedingungsgleichung für $x = a$

---

ergänzt. Ich bemerke noch, dass man etwas einfacher und allgemeiner zum Ziel gelangt, wenn man von vorn herein einen der gegebenen Verzweigungswerthe ins Unendliche verlegt. W.

$$\frac{a_{n-1}(x-a)}{a_n} = \frac{n.n-1}{2} - \Sigma\mu$$

sein, woraus sich für A der Werth $A = \frac{n.n-1}{2} - \Sigma\mu$ ergiebt. Ebenso folgt aus der für den Punkt α gültigen Bedingung:

$$a_n' + a_{n-1} = 0 : \mathrm{A} = -1,$$

woraus man erhält:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum \frac{\frac{n.n-1}{2} - \Sigma\mu}{x-a} - \sum \frac{1}{x-\alpha}.$$

Lässt man nun in $\frac{x a_{n-1}}{a_n}$ x unendlich werden, so ergiebt sich, wenn man die Coefficienten der höchsten Potenzen von x in a_n und a_{n-1} durch A_n, A_{n-1} bezeichnet:

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} = m.\frac{n.n-1}{2} - s - r = n(n-1)$$

womit der Nachweis der obigen Behauptung geführt ist.

Damit also für unendliche Werthe von x die Functionen y endlich und stetig bleiben, müssen wir noch die Bedingungen stellen, dass α_{n-2} durch $\xi^2, .., \alpha_1$ durch ξ^{n-1} theilbar seien, deren Zahl $\frac{n.n-1}{2} - 1$ beträgt.

Hiernach müssen die Coefficienten der Functionen X im Ganzen $(m+r)\,n + \frac{n.n-1}{2} - 1$ Bedingungen erfüllen. Die Anzahl dieser Coefficienten beträgt, wenn man, was freisteht, einen derselben $= 1$ annimmt:

$$\sum_{t=0}^{t=n} (r + (m-2)\,t + 1) + \frac{n.n-1}{2} - 1$$

$$= (r+1)(n+1) + (m-2)\frac{n.n+1}{2} + \frac{n.n-1}{2} - 1.$$

Es bleiben also, wenn man für r seinen Werth setzt,

$$(m-2)\,n^2 - s - n.(m-1) + 1$$

von ihnen willkürlich. Nun involviren die Functionen y, als Integrale einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung $n.n$ Integrationsconstanten. Von diesen kann, da ein gemeinschaftlicher constanter Factor aller Functionen y unbestimmt bleiben muss, eine $= 1$ gesetzt werden, so dass im Ganzen in dem Functionensystem (y) $(m-1)\,n(n-1) - s$ willkürliche Constanten bleiben, die Verzweigungswerthe und die Unstetigkeitsexponenten, die als gegeben betrachtet werden, nicht mitgerechnet.

Um nun die Frage zu entscheiden, in wie weit das Functionensystem (y) durch die in seiner Charakteristik enthaltenen Grössen bestimmt ist, müssen wir die Anzahl der dadurch gestellten Bedingungen bestimmen und diese mit der Anzahl der verfügbaren Constanten vergleichen. Diese Bedingungen bestehen, nachdem die Verzweigungspunkte und die Unstetigkeitsexponenten gegeben sind, nur noch darin, dass um die Verzweigungspunkte herum die gegebenen Substitutionen (α), (β), ..., (ϑ) stattfinden. Jede dieser Substitutionen enthält aber, da man in jeder Horizontalreihe Einen Coefficienten beliebig wählen kann, $n.n-1$ unbestimmte Coefficienten, zwischen denen in Folge der Relation (1) n^2 Bedingungsgleichungen bestehen. Von diesen letzteren ist Eine eine identische Folge der Annahme, dass s eine ganze Zahl sei, (vgl. die Abhandlung „Beiträge zur Theorie etc.“ Art. 3. S. 67) und demnach haben die in dem Functionensystem (y) enthaltenen Constanten $m.n.(n-1)-n+1$ Bedingungen zu befriedigen. Diese Zahl darf also nicht grösser sein als $(m-1).n.(n-1)-s$, woraus sich ergiebt, dass s im Allgemeinen nicht grösser sein darf als $n-1$. Für den Fall $s=n-1$ ist die Anzahl der Bedingungsgleichungen ebenso gross als die Anzahl der verfügbaren Constanten.
