XX.

Neue Theorie des Rückstandes in electrischen Bindungsapparaten.*)

1.

Vorbemerkung.

Herrn Professor Kohlrausch ist es gelungen, die Bildung des Rückstandes in electrischen Bindungsapparaten scharfen Messungen zu unterwerfen und darauf eine den Beobachtungen genügende Theorie dieser Erscheinung zu gründen, welche in Poggendorff's Annalen**) veröffentlicht worden ist. Die Genauigkeit dieser Messungen reizte mich, ein aus andern Gründen wahrscheinliches Gesetz für die Bewegungen der Electricität an denselben zu prüfen; in der Form, welche ihm für diesen Zweck gegeben wurde, ist es auf die Bewegungen der Electricität in allen ponderabeln Körpern anwendbar, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die in Betracht kommenden ponderabeln Körper gegen einander ruhen und keine merklichen thermischen und magnetischen (oder voltainductorischen) Wirkungen und Einflüsse stattfinden. Behuf unbeschränkter Anwendbarkeit bedarf es noch einer Umarbeitung und Ergänzung, mit welcher ich mich an einem andern Orte beschäftigen werde.

Im folgenden Aufsatze, welcher einem Schreiben an Herrn Professor Kohlrausch entnommen ist, ist diese neue Theorie des electrischen Rückstandes indess nicht selbstständig, sondern im Anschlusse an Seine Theorie entwickelt worden; ich war bestrebt, jene Theorie, nicht geradeswegs die Erscheinungen auf sie zurückzuführen. Ich habe daher die von Herrn Professor Kohlrausch in seiner Abhandlung gebrauchten

---

*) Die hier mitgetheilte Abhandlung stammt aus dem Jahre 1854; ihre Veröffentlichung unterblieb wahrscheinlich, weil der Verfasser nicht gern auf eine ihm angerathene Abänderung derselben eingehen wollte.

**) Bd. 91. pag. 56.

Begriffe: electrisches Moment der isolirenden Wand, Spannung, Gesammtladung, disponible Ladung, Rückstand, überall durch die hier zu Grunde gelegten Begriffe ausgedrückt und auch sonst in mancher Hinsicht die dortige Betrachtungsweise berücksichtigt.

2.

Das der Rechnung zu Grunde gelegte Gesetz.

Es bezeichne t die Zeit, x, y, z rechtwinklige Coordinaten, ϱ die Dichtigkeit der Spannungselectricität zur Zeit t im Punkte (x, y, z), u den 4πten Theil des (Gauss'schen) Potentials aller wirkenden electrischen Massen im Punkte (x, y, z) zur Zeit t, also die Grösse

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}},$$

wenn $\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'$ die Spannungselectricität des Elements $dx'\,dy'\,dz'$ zur Zeit t bedeutet. Man hat dann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\varrho.$$

Die hier anzuwendenden Gesetze für die Bewegungen der Electricität im Innern eines homogenen ponderabeln Körpers unter den erwähnten Umständen sind nun folgende:

I. Die electromotorische Kraft im Punkte (x, y, z) zur Zeit t setzt sich zusammen aus zwei Bestandtheilen, aus einem dem Coulomb'schen Gesetz gemässen, dessen Componenten proportional

$$-\frac{\partial u}{\partial x},\quad -\frac{\partial u}{\partial y},\quad -\frac{\partial u}{\partial z}$$

sind, und einem andern, dessen Componenten proportional sind

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial x},\quad -\frac{\partial \varrho}{\partial y},\quad -\frac{\partial \varrho}{\partial z},$$

so dass ihre Componenten gleichgesetzt werden können

$$-\frac{\partial u}{\partial x}-\beta\beta\frac{\partial \varrho}{\partial x},\quad -\frac{\partial u}{\partial y}-\beta\beta\frac{\partial \varrho}{\partial y},\quad -\frac{\partial u}{\partial z}-\beta\beta\frac{\partial \varrho}{\partial z},$$

wo $\beta\beta$ nur von der Natur des ponderabeln Körpers abhängt.

II. Die Stromintensität ist der electromotorischen Kraft proportional, also

$$-\frac{\partial u}{\partial x}-\beta\beta\frac{\partial \varrho}{\partial x}=\alpha\xi,\quad -\frac{\partial u}{\partial y}-\beta\beta\frac{\partial \varrho}{\partial y}=\alpha\eta,\quad -\frac{\partial u}{\partial z}-\beta\beta\frac{\partial \varrho}{\partial z}=\alpha\zeta,$$

wenn α eine von der Natur des ponderabeln Körpers abhängige Constante und ξ, η, ζ die Componenten der Stromintensität sind.

Mit Zuziehung der phoronomischen Gleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

erhält man daher für u die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\varrho$$

und

$$\alpha \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho - \beta\beta \left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2}\right) = 0\,*)$$

oder, wenn man die Länge β und die Zeit α zur Einheit nimmt,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho - \left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Dies giebt für u eine partielle Differentialgleichung, welche in Bezug auf t vom ersten, in Bezug auf die Raumcoordinaten vom vierten Grade ist, und um von einem bestimmten Zeitpunkte an u allenthalben im Innern des ponderabeln Körpers zu bestimmen, werden ausser dieser Gleichung noch eine Bedingung in jedem Punkte desselben für die Anfangszeit und für die Folge in jedem Oberflächenpunkte zwei Bedingungen erforderlich sein.

---

*) Hienach sind die Gleichungen für das Gleichgewicht (in einem electrisirten isolirten Leiter)

$$-\frac{\partial u}{\partial x} - \beta\beta \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} - \beta\beta \frac{\partial \varrho}{\partial y} = 0, \quad -\frac{\partial u}{\partial z} - \beta\beta \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0,$$

oder

$$u - \beta\beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \text{const.},$$

für die Stromausgleichung oder das bewegliche Gleichgewicht im Schliessungsbogen constanter Ketten

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

oder

$$\varrho - \beta\beta \left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Wenn die Länge β gegen die Dimensionen des Körpers sehr klein ist, so nimmt u — const. im ersteren Falle, und ϱ im zweiten von der Oberfläche ab sehr schnell ab und ist im Innern allenthalben sehr klein, und zwar ändern sich die Grössen mit dem Abstande p von der Oberfläche, so lange deren Krümmungshalbmesser gegen β sehr gross bleibt, nahe wie $e^{-\frac{p}{\beta}}$. Dieser Fall wird bei den metallischen Leitern angenomen werden müssen.

3.

Plausible Auffassung dieses Gesetzes.

Das Bewegungsgesetz der Electricität ist unter voriger Nummer durch Begriffe, welche jetzt in der Lehre von der Electricität gebräuchlich sind, ausgedrückt worden. Diese Auffassung desselben ist jedoch einer Umarbeitung fähig, durch welche, wie es scheint, ein etwas treueres und vollständigeres Bild des wirklichen Zusammenhangs gewonnen wird.

Statt eine Ursache anzunehmen, welche im Punkte (x, y, z) die positive Electricität in den Richtungen der drei Axen mit den Kräften

$$-\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial x},\quad -\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial y},\quad -\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial z}$$

und die negative mit den entgegengesetzten treibt, kann man auch eine Ursache annehmen, welche im Punkte (x, y, z) die positive Electricität mit der Intensität $\beta\beta\varrho$ zu vermindern und die negative zu vermehren strebt, und diese Ursache kann man in einem Widerstreben des Ponderabile gegen das Enthalten von Spannungselectricität oder den electrischen Zustand suchen.

Ebenso kann man auch die electromotorische Kraft, deren Componenten

$$-\frac{\partial u}{\partial x},\quad -\frac{\partial u}{\partial y},\quad -\frac{\partial u}{\partial z}$$

sind, durch eine Ursache von der Intensität u im Punkte (x, y, z) ersetzen, welche die Dichtigkeit der Electricität gleichen Zeichens zu vermindern und die der entgegengesetzten zu vermehren strebt.

Es ist aber dann, um der Grösse ϱ eine reelle Bedeutung zu geben, nicht nöthig zweierlei Electricitäten anzunehmen und $\varrho\, dx\, dy\, dz$ als den Ueberschuss der positiven Electricität des Elements $dx\, dy\, dz$ über die negative zu betrachten, sondern man kann im Wesentlichen zu der Franklin'schen Auffassung der electrischen Erscheinungen zurückkehren, am einfachsten wohl durch folgende Annahme:

Das Ponderabile, welches Sitz der Electricität ist, erfüllt den Raum stetig*) und mit gleichmässiger electrischer Capacität, welche seinem Leitungswiderstande umgekehrt proportional ist, und von welcher die Dichtigkeit der wirklich in ihm enthaltenen Electricität immer nur um einen unmerklich kleinen Bruchtheil abweicht. Bei überschüssiger oder fehlender Electricität (positiver oder negativer Spannungselectricität) geräth das Ponderabile in einen positiv oder negativ electrischen Zustand, vermöge dessen es die Dichtigkeit der in ihm enthaltenen Electricität zu vermindern oder zu vermehren strebt und zwar mit einem Drucke, welcher gleich ist der Dichtigkeit seiner Spannungselectricität, ϱ, multiplicirt in einen von der Natur des Ponderabile abhängigen Factor (seine antelectrische Kraft). Ihrerseits geräth bei auftretender Spannungselectricität

*) Auf einem andern Blatt findet sich hierzu folgende Bemerkung: Insofern dies Ponderabile (Kupfer, Glas) als Sitz der Electricität betrachtet und ihm eine bestimmte electrische Capacität und ein bestimmter Leitungswiderstand beigelegt wird, muss als von ihm eingenommener Raum der ganze Raum, in welchem sich die specifische Eigenthümlichkeit desselben geltend macht, nicht etwa der Ort von Kupfer- oder Glasmoleculen angesehen werden.

die Electricität in einen Zustand, Spannung, vermöge dessen sie ihre Dichtigkeit zu vermindern (oder bei negativer Spannung zu vermehren) strebt und dessen Grösse u in jedem Augenblicke abhängt von sämmtlichen Massen Spannungselectricität nach der Formel

$$u = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varrho' \, dx' \, dy' \, dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

oder auch vermittelst des Gesetzes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\varrho$$

und der Bedingung, dass u in unendlicher Entfernung von Spannungselectricität unendlich klein bleibt. Die Electricität bewegt sich gegen die ponderabeln Körper mit einer Geschwindigkeit, welche in jedem Augenblicke der aus diesen Ursachen hervorgehenden electromotorischen Kraft gleich ist.

Uebrigens müssen diese Bewegungsgesetze der Electricität, wenn deren Verhältniss zu Wärme und Magnetismus in Rechnung gezogen werden soll, vorbemerktermassen selbst noch abgeändert und umgeformt werden, und dann wird eine veränderte Auffassung dieser Erscheinungen nöthig.*)

4.

Behandlung des Problems der Rückstandsbildung. Ausdruck der zu bestimmenden Grössen durch das Potential.

Indem ich mich nun zur Untersuchung der Rückstandsbildung wende, beschäftige ich mich zunächst damit, die zu bestimmenden Grössen durch das Potential, oder vielmehr, was die Rechnung vereinfacht, durch die ihm proportionale Function u auszudrücken. Zu grösserer Bequemlichkeit für die an abstracte Grössenbetrachtung minder gewöhnten Physiker habe ich das Potential als das Mass einer Ursache, Spannung, betrachtet, welche die Dichtigkeit der Electricität im Punkte (x, y, z) zu vermindern strebt, und diese im Punkte $(x, y, z) = u$, also die Componenten der durch sie bewirkten electromotorischen Kraft

$$= -\frac{\partial u}{\partial x}, \ -\frac{\partial u}{\partial y}, \ -\frac{\partial u}{\partial z}$$

gesetzt. Man muss dann als Spannungseinheit die im Innern einer Kugel vom Radius 1 durch auf der Oberfläche vertheilte Electricität von der Dichtigkeit 1 entstehende Spannung annehmen oder als Einheit der electromotorischen Kräfte die von der Masse 4π in der Ent-

*) Dieser ganze Artikel ist im Manuscript durchgestrichen, wahrscheinlich nur aus dem Grunde, weil der Verfasser durch die Eigenthümlichkeit der hier vorgetragenen Auffassung, welche auf das Innigste mit seinen naturphilosophischen Principien zusammenhängt, bei den Physikern damals Anstoss zu erregen befürchtete.

fernungseinheit erzeugte. Zur Vereinfachung der Rechnung ist ferner als Zeiteinheit α, als Längeneinheit β eingeführt worden; macht man die Einheit der electromotorischen Kräfte auf die hier angenommene Weise von der electrischen Masseneinheit abhängig, so sind α und $\beta\beta$ die Maasse für den Leitungswiderstand $\left(=\frac{\text{electromotorische Kraft}}{\text{Stromintensität}}\right)$ und die antelectrische Kraft $\left(=\frac{\text{Druck des Ponderabile}}{\text{Dichtigkeit der Spannungselectricität}}\right)$ des ponderabeln Sitzes.

Zur Discussion der vorliegenden Beobachtungen genügt die Lösung der Aufgabe: die Aenderungen der Spannungselectricität im Innern einer überall gleich dicken homogenen Wand zu bestimmen, wenn die Oberflächen mit vollkommenen Leitern belegt sind, gleiche Mengen entgegengesetzter Electricität empfangen und keine electromotorische Kraft besitzen (keine Contactwirkung in ihnen stattfindet), und ihre Dimensionen gegen die Dicke der Wand als unendlich gross betrachtet werden dürfen (d. h. der Einfluss des Randes und der Krümmung vernachlässigt werden darf).

Legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte der Wand, die x-Axe auf ihre Oberflächen senkrecht und bezeichnet ihre halbe Dicke durch a, so wird der Ausdruck für die Wand $a > x > -a$, u eine blosse Function von x und

$$\varrho = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

folglich

$$\int_{x'}^{x''} \varrho\, \partial x = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x''}.$$

Die zwischen zwei Werthen von x über der Flächeneinheit enthaltene Electricitätsmenge ist also, geometrisch ausgedrückt, gleich der Differenz zwischen den Tangenten der Neigungen der Spannungscurve, d. h. der Curve, deren Ordinate für die Abscisse x gleich u ist; diese Curve ist gerade, wo keine Spannungselectricität vorhanden ist, nach oben (oder für Orte mit grösseren Ordinaten) convex, wo positive, nach unten, wo negative stetig vertheilt ist, und gebrochen für einen Werth von x, bei welchem eine endliche Menge angehäuft ist.

Die durch eine Ladung erzeugte oder durch eine Entladung vernichtete Spannung wird daher stets dargestellt durch eine Curve von der Form A, d. h. ist sie in den Belegungen u_a, u_{-a} und folglich in der Mitte

$$\frac{u_a + u_{-a}}{2} = u_0,$$

so ist sie im Innern

$$= u_0 + \frac{x}{a}(u_a - u_0).$$

Durch das Eindringen der Electricität in's Innere erhält die Spannungscurve die Form B. Für die Flächeneinheit ist die Gesammtmenge der geschiedenen Electricitäten gleich der Tangente ihrer Neigung in der Mitte

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0,$$

das electrische Moment

$$\int_{-a}^{+a} \varrho x \,\partial x = u_a - u_{-a} - a\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_a + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-a}\right) = u_a - u_{-a},$$

also gleich der Spannungsdifferenz der Oberflächen.

Durch eine Entladung wird die Spannung in den Belegungen aufgehoben. Die vernichtete Spannung ist daher in den Belegungen $= u_a,\ u_{-a},$ im Innern

$$= u_0 + \frac{x}{a}(u_a - u_0),$$

die disponible Ladung für die Flächeneinheit

$$= \frac{1}{a}(u_a - u_0),$$

die bleibende Spannung im Innern

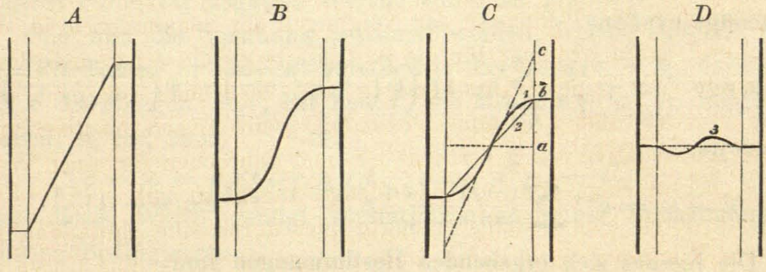
$$= u - u_0 - \frac{x}{a}(u_a - u_0),$$

und für die Flächeneinheit der verborgene Rückstand

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - \frac{1}{a}(u_a - u_0),$$

die der Oberfläche $(x = a)$ durch die Entladung mitgetheilte Electricitätsmenge

$$= -\frac{1}{a}(u_a - u_0).$$



1) Spannungscurve der Gesammtladung

2) " der disponiblen Ladung

3) " des Rückstandes.

Gesammtladung: $= ac$, disponible Ladung: ab, Rückstand: $= bc$.

5.

Lösung der Aufgabe im einfachsten Falle, wo kein Ab- und Zufluss durch die Oberflächen stattfindet.

Nach dieser Uebersicht und geometrischen Darstellung der gesuchten Grössen gehe ich zu ihrer Bestimmung durch Rechnung nach dem angegebenen Gesetze über. Ich behandle zunächst den Fall, wo anfangs im Innern keine freie Electricität vorhanden ist, und den Oberflächen auf der Flächeneinheit die Masseneinheit mitgetheilt wird, später aber kein Ab- und Zufluss durch die Oberflächen stattfindet.

Die Bedingungen zur Bestimmung von u sind:

$$\begin{array}{ll} \text{für } t>0,\ a>x>-a & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\varrho,\ \frac{\partial\varrho}{\partial t}+\varrho-\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}=0 \\ t=0,\ a>x>-a & \frac{\partial u}{\partial x}=1 \\ t>0,\ x=\pm a & \frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varrho}{\partial x}=0 \end{array}$$

welche letzteren ausdrücken, dass in den Oberflächen sowohl die Electricitätsmengen, als der Durchfluss, und folglich die electromotorische Kraft $=0$ sein soll.

Diesen Bedingungen genügen zwei Ausdrücke, der eine für kleine, der andere für grosse Werthe von t brauchbar.

Setzt man zur Abkürzung

$$\int_\lambda^\infty e^{-\lambda\lambda}\,d\lambda=\varphi(\lambda)$$

und

$$\int_\lambda^\infty \varphi(\lambda)\,d\lambda=\tfrac{1}{2}e^{-\lambda\lambda}-\lambda\varphi(\lambda)=\psi(\lambda),$$

so genügt erstens

$$u-u_0=e^{-t}\left[x+\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\sum_{1,\infty}^{n}(-1)^n\left(\psi\left(\frac{a(2n-1)-x}{2\sqrt{t}}\right)-\psi\left(\frac{a(2n-1)+x}{2\sqrt{t}}\right)\right)\right]$$

zweitens

$$u-u_0=e^{-t}\sum\frac{(-1)^{n-1}\,2a}{\pi\pi(n-\frac{1}{2})^2}\,e^{-(n-\frac{1}{2})^2\frac{\pi\pi}{aa}t}\sin(n-\tfrac{1}{2})\frac{x\pi}{a}.$$

Die hieraus sich ergebenden Bestimmungen sind:
für die Vertheilung der Electricität*)

*) Vergl. Jacobi Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. §§. 61, 63.

$$\varrho = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} \sum (-1)^{n-1} \left(e^{-\frac{(a(2n-1)-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(a(2n-1)+x)^2}{4t}} \right)$$

$$= \frac{2e^{-t}}{a} \sum (-1)^{n-1} e^{-(n-\frac{1}{2})^2 \frac{\pi\pi}{aa} t} \sin (n-\tfrac{1}{2}) \frac{x\pi}{a},$$

für die Gesammtladung

$$Q_t^* = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = e^{-t} \left(1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum (-1)^n \varphi\left(\frac{(n-\frac{1}{2})a}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

$$= e^{-t} \sum \frac{(-1)^{n-1} 2}{(n-\frac{1}{2})\pi} e^{-(n-\frac{1}{2})^2 \frac{\pi\pi}{aa} t},$$

für die disponible Ladung

$$L_t^* = \frac{u_a - u_{-a}}{2a} = e^{-t} \left\{ 1 - \frac{2\sqrt{t}}{a\sqrt{\pi}} \left(1 + 4 \sum (-1)^n \psi\left(\frac{an}{\sqrt{t}}\right)\right)\right\}$$

$$= e^{-t} \sum \frac{2}{\pi\pi (n-\frac{1}{2})^2} e^{-(n-\frac{1}{2})^2 \frac{\pi\pi}{aa} t}$$

für den Rückstand

$$r_t^* = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - \frac{u_a - u_{-a}}{2a}$$

$$= \frac{2\sqrt{t}e^{-t}}{a\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + 4 \sum (-1)^n \left(\psi\left(\frac{an}{\sqrt{t}}\right) + \frac{a}{2\sqrt{t}} \varphi\left(\frac{(n-\frac{1}{2})a}{\sqrt{t}}\right)\right)\right\}$$

$$= e^{-t} \sum \frac{2}{\pi (n-\frac{1}{2})} \left((-1)^{n-1} - \frac{1}{\pi (n-\frac{1}{2})} \right) e^{-(n-\frac{1}{2})^2 \frac{\pi\pi}{aa} t}.$$

6.

Zurückführung der allgemeinen Aufgabe auf diesen einfachsten Fall.

Um auf diesen einfachsten Fall den Fall zurückzuführen, wo Ab- und Zufluss durch die Oberflächen stattfindet, bezeichne $\chi(t)$ den Ausdruck für die Spannungsdifferenz $u - u_0$ zur Zeit t in diesem einfachsten Falle; für negative Werthe von t sei $\chi(t) = 0$.

Soll nun die Spannung bestimmt werden, welche entsteht, wenn den Oberflächen ($x = \pm a$) zur Zeit 0 die Mengen $\pm \mu$, darauf zur Zeit t' die Mengen $\pm \mu'$, zur Zeit t'' die Mengen $\pm \mu''$, ... mitgetheilt werden, so hat man

$$u - u_0 = \mu\chi(t) + \mu'\chi(t - t') + \mu''\chi(t - t'') + \cdots;$$

denn dieser Werth genügt sämmtlichen zu seiner Bestimmung gegebenen Bedingungen.

Findet ein stetiger Ab- und Zufluss von Electricität statt, so wird

$$u - u_0 = \int_0^t \chi(t - \tau) \frac{d\mu}{d\tau} d\tau,$$

wenn $\pm\frac{d\mu}{d\tau}d\tau$ die im Zeitelement $d\tau$ durch die Oberfläche $(x = \pm a)$ nach Innen strömende Electricitätsmenge bezeichnet.

Beide Ausdrücke kann man zusammenfassen in dem Ausdruck

$$u - u_0 = \int_0^t \chi(t-\tau)d\mu,$$

wenn man durch $\pm d\mu$ die im Zeitelement $d\tau$ auf der Oberfläche $(x = \pm a)$ hinzukommende Electricitätsmenge bezeichnet, wo diese dann einen endlichen Werth hat oder $d\tau$ proportional ist, je nachdem eine plötzliche Ladung oder Entladung, oder ein stetiger Ab- oder Zufluss stattfindet.

Aus diesem Ausdrucke für die Spannung folgt

$$Q_t = \int_0^t Q^*_{t-\tau}\,d\mu, \quad L_t = \int_0^t L^*_{t-\tau}\,d\mu, \quad r_t = \int_0^t r^*_{t-\tau}\,d\mu.$$

In diesen Formeln sind die Zeiten in Theilen von α, die Längen in Theilen von β ausgedrückt; um bekannte Maasse einzuführen, hat man nur a und x durch $\frac{a}{\beta}$, $\frac{x}{\beta}$; t und τ durch $\frac{t}{\alpha}$, $\frac{\tau}{\alpha}$ zu ersetzen.

7.

Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen.

Um nun die erhaltenen Formeln mit dem wirklichen Verlaufe der Rückstandsbildung zu vergleichen, wie er durch die in Poggendorff's Annalen veröffentlichten Messungen des Herrn Professor Kohlrausch mit so grosser Genauigkeit festgestellt worden ist, geht man wohl am zweckmässigsten von der Thatsache aus, dass die Ladungscurve einer Parabel nahe kommt mit allmählich abnehmendem Parameter, d. h. dass die Grösse $\frac{L_0 - L_t}{\sqrt{t}}$ langsam abnimmt.

Zufolge der für L_t abgeleiteten Formel ist $L_0 - L_t$ für sehr kleine Werthe von t proportional $\sqrt{t}$ und zwar

$$\frac{L_0 - L_t}{\sqrt{t}} = L_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\beta\beta}{aa\alpha}}.$$

Zufolge der Messungen muss man annehmen, dass diese Proportionalität näherungsweise noch während der Beobachtungen stattfindet.

Man wird daher die Zeit $\frac{aa}{\beta\beta}\alpha$ in roher Annäherung aus den Beobachtungen bestimmen können, und dann ist in der That

$$\frac{L_0^* - e^{\frac{t}{\alpha}} L_t^*}{\sqrt{t}} =$$

$$L_0^* \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\beta\beta}{aa\alpha}}\left(1 - 4\psi\left(\sqrt{\frac{aa\alpha}{\beta\beta t}}\right) + 4\psi\left(2\sqrt{\frac{aa\alpha}{\beta\beta t}}\right) - 4\psi\left(3\sqrt{\frac{aa\alpha}{\beta\beta t}}\right) + \cdots\right)$$

eine Function, welche mit wachsendem t langsam abnimmt. Nichtsdestoweniger würde $\frac{L_0 - L_t}{\sqrt{t}}$ mit wachsendem t zunehmen, wenn man $\frac{1}{\alpha}$ einen merklichen Werth beilegte. Dasselbe scheint sich auch zu ergeben, wenn man einen beträchtlichen Verlust durch die Luft annimmt, wenigstens wenn man dafür das Coulomb'sche Gesetz zu Grunde legt.

Man wird daher für die erste Bearbeitung der Beobachtungen die Zeit α (d. h. den Leitungswiderstand des Glases für die dem Coulomb'schen Gesetz gemässen electromotorischen Kräfte) unendlich gross annehmen, den Verlust durch die Luft vernachlässigen und sich zunächst darauf beschränken müssen, zu untersuchen, in wie weit sich durch gehörige Bestimmung von $\frac{aa}{\beta\beta}\alpha$ den Beobachtungen genügen lässt.

Sobald man sich überzeugt hat, dass die Voraussetzungen der Rechnung näherungsweise richtig sind, ist eine schärfere Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen verlorene Arbeit, wenn man nicht die Gelegenheit hat, die Quellen der Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung an der Hand der Erfahrung aufzusuchen, um die wegen der Abweichungen von den Voraussetzungen der Rechnung nöthigen Correctionen anzubringen. Da mir nun zu einem experimentellen Studium des Gegenstandes die Mittel fehlen, so musste ich von einer weiteren Verfolgung desselben vorläufig abstehen.

8.

Verhältniss dieses Problems zur Electrometrie und zur Theorie verwandter Erscheinungen.

Die Grösse $\frac{\beta\beta}{aa\alpha}$, bei der Flasche b etwa $\frac{1}{2000}$, giebt den Quotienten $\frac{\text{antelectrische Kraft}}{\text{Leitungswiderstand}}$ des Glases der Flasche in absolutem Mass, wenn als Längeneinheit die Flaschendicke, als Zeiteinheit die Secunde angenommen wird. Für diese Bestimmung ist es gleichgültig, wie man die Einheit der electromotorischen Kräfte von der Einheit der electrischen Massen abhängig macht; die Constanten α und $\beta\beta$ würden aber den Leitungswiderstand und die antelectrische Kraft in einem andern Masse als dem Weber'schen geben, wo die Einheit der electromotorischen Kräfte durch die dem Ampère'schen Gesetz gemässen Wirkungen der Masseneinheit festgesetzt wird.

Zur Vergleichung des hier untersuchten Falles mit den Erscheinungen an guten Leitern kann die Betrachtung des Beharrungszustandes bei constant erhaltener Spannungsdifferenz der Oberflächen (oder constantem Zufluss) dienen. Für diesen ist

die Dichtigkeit im Innern: $\varrho = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x - e^{-x}$,

die Spannung: $u = u_0 - e^x + e^{-x} + x(e^a + e^{-a})$,

die Spannungsdifferenz der Oberflächen:

$$u_a - u_{-a} = 2\left(a(e^a + e^{-a}) - (e^a - e^{-a})\right),$$

die Gesammtladung: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = e^a + e^{-a} - 2$,

der Rückstand: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - \frac{u_a - u_{-a}}{2a} = \frac{e^a - e^{-a}}{a} - 2$,

die in der Zeiteinheit durchfliessende Menge:

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial x}\right) = -(e^a + e^{-a}),$$

oder gleich proportionalen Grössen, wobei zur Vereinfachung, wie oben, als Zeiteinheit α, als Längeneinheit β, als Spannungseinheit die Spannung im Innern einer Kugel vom Radius 1 bei auf der Oberfläche vertheilter Electricität von der Dichtigkeit 1 angenommen ist.

Besonders wichtig scheint mir die Prüfung des vermutheten Gesetzes und eventualiter die Bestimmung der Constanten α und β bei den Gasen zu sein. Die Beobachtungen von Riess*) und Kohlrausch**), nach welchen für den Electricitätsverlust an die Luft in einem geschlossenen Raume das Gesetz Coulomb's nicht gilt, können vielleicht als Ausgangspunkt für diese Untersuchung dienen und es wäre für dieselben wohl zunächst ein System von Messungen über den Electricitätsverlust im Innern eines einigermassen regelmässigen geschlossenen Raumes zu wünschen.

---

*) Pogg. Ann. Bd. 71. pag. 359.
**) Pogg. Ann. Bd. 72. pag. 374.