XIX.

Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation.*)

In dem folgenden Aufsatze ist der Versuch gemacht, ein Verfahren aufzustellen, mittelst dessen man aus einer gegebenen Function einer Veränderlichen eine andere Function derselben Veränderlichen ableiten könne, deren Abhängigkeit von jener ursprünglichen sich durch eine Zahl ausdrücken lässt und die für den Fall, dass diese Zahl eine ganze positive, negative oder null ist, bezüglich mit den Differentialquotienten, Integralen und der ursprünglichen Function übereinstimmt. Die Resultate der Differential- und Integral-Rechnung werden zwar als Grundlage hier vorausgesetzt, aber nicht in der Weise, dass diejenigen derselben, die für alle Differentiale und Integrale, deren Ordnung durch eine ganze Zahl ausgedrückt wird, gelten, auch auf die gebrochenen Ordnungen ausgedehnt würden; sondern sie sollen nur einerseits zur Begründung des oben angedeuteten Verfahrens benutzt werden und andrerseits als Wegweiser dienen dasselbe zu finden.

Zu diesem letzteren Zwecke wollen wir einmal die Reihe der Differentialquotienten etwas näher betrachten. Es ist klar dass man hiebei nicht von der gewöhnlichen Definition derselben ausgehen kann, die sich auf ihr recurrentes Bildungsgesetz gründet, da man ja durch dasselbe unmöglich auf andere Glieder der Reihe, als auf solche, die ganzen Indices entsprechen, gelangen kann; man muss sich also nach einer independenten Bestimmung derselben umsehen. Ein Mittel dazu

*) Diese Abhandlung trägt im Manuscript das Datum 14. Jan. 1847. und stammt also aus Riemanns Studienzeit. Riemann dachte ohne Zweifel nicht an ihre Veröffentlichung, auch stützt sich die Betrachtung auf Grundlagen, deren Haltbarkeit er in späteren Jahren nicht mehr anerkannt haben würde. Immerhin ist die Arbeit für Riemanns Entwicklungsgang charakteristisch, und die Resultate sind bemerkenswerth genug, um die Aufnahme in diese Sammlung zu rechtfertigen.

bietet uns die Entwicklung der Function, welche aus der ursprünglichen durch Vermehrung der Veränderlichen um einen beliebigen Zuwachs entsteht, nach ganzen positiven Potenzen dieses Zuwachses dar. Denn da die bekannte Entwicklung

$$(1) \qquad z_{(z+h)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{1.2..p} \frac{d^p z}{dx^p} h^p$$

(wo $z_{(x+h)}$ das bedeutet, was aus $z_{(x)}$ wird, wenn man darin statt x $x+h$ setzt) für jeden beliebigen Werth von h gültig ist, so müssen die Coefficienten in derselben einen ganz bestimmten Werth haben; man kann dieselben also zur Definition der Differentialquotienten verwenden. Demgemäss stellen wir folgende Definition auf: der $n$te Differentialquotient der Function $z_{(x)}$ ist gleich dem Coefficienten von h^n in der Entwicklung von $z_{(x+h)}$ nach ganzen positiven Potenzen von h, multiplicirt in einen nach x constanten, nur von n abhängigen Factor, nemlich in $1.2....n$. Diese Betrachtungsweise der Differentialquotienten führt sehr leicht zur Feststellung einer allgemeinen Operation, in welcher die Differentiation und Integration enthalten ist und welche wir (da die Bezeichnung und Benennung derselben als die Grenze des Quotienten verschwindender Grössen bei dieser Betrachtungsweise keinen Sinn hat) durch ∂_x^ν bezeichnen und nach dem Vorgange von Lagrange in der Benennung „fonctions dérivées" Ableitung benennen wollen.

Wir verstehen nemlich unter $\partial_x^\nu z$ oder unter dem Ausdruck „νte Ableitung von $z_{(x)}$ nach x" den Coefficienten von h^ν in einer nach Potenzen von h, deren Exponenten um eine ganze Zahl von einander abstehen, rückwärts und vorwärts in's Unendliche fortlaufenden Entwicklung von $z_{(x+h)}$, multiplicirt in einen nach x constanten, nur von ν abhängigen Factor, d. h. wir definiren $\partial_x^\nu z$ durch die Gleichung

$$(2) \qquad z_{(x+h)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} k_\nu \, \partial_x^\nu z \; h^\nu .$$

In dieser Definition muss nun natürlich der von ν allein abhängige Factor k_ν so bestimmt werden, dass für den Fall, dass die Exponenten von h ganze Zahlen sind, die Reihe (2) in die (1) übergeht, weil nur dann die Differentialquotienten wirklich als besondere Fälle in den Ableitungen enthalten sind; sollte dies nicht möglich sein, so wäre diese Definition unserm Zwecke, eine Operation, welche die Differentiation als besonderen Fall in sich schliesst, festzustellen, nicht entsprechend, und wir müssten uns also nach einem anderen Wege, ihn zu erreichen, umsehen.

Bevor wir aber diesen Factor zu bestimmen suchen, wollen wir erst Einiges über die Reihen von der angegebenen Form vorausschicken, da sie, wie man sieht, die Grundlagen dieses ganzen Versuchs einer Theorie der Ableitungen bilden.

Man hat wohl die Behauptung aufgestellt, man könne auf die Reihen im Allgemeinen gar keine sicheren Schlüsse gründen, sondern nur unter der Bedingung, dass man den darin vorkommenden Grössen solche Zahlenwerthe beilege, dass die Reihe convergire, d. h. dass sich ihr (wenigstens genäherter) Werth durch eine wirkliche Ziffernaddition finden lasse. Nun können wir aber, wenn, wie hier immer vorausgesetzt wird, die Coefficienten einem bestimmten Gesetze gehorchen, jeden einzelnen Theil derselben genau angeben; sie ist folglich eine in allen ihren Theilen genau begrenzte, also bestimmte Grösse; und ich sehe darin, dass der Mechanismus der Ziffernaddition nicht ausreicht, diesen ihren bestimmten Werth zu finden, keinen Grund, warum wir nicht die Gesetze, die für die Zahlengrössen als solche erwiesen sind, auf sie anwenden und die Resultate, die wir dadurch erhalten, als richtig ansehen sollten.

Um an einem Beispiele zu zeigen, dass man für eine Reihe von der Form (2) wirklich einen Werth finden kann, wollen wir durch ein Verfahren, das in vielen Fällen für diesen Zweck anwendbar ist, die Function x^μ in eine nach gebrochnen Potenzen von $(x - b)$ fortlaufende Reihe entwickeln, eine Entwicklung, deren wir ohnehin im Lauf der Untersuchung bedürfen.

Die Reihe, die x^μ gleich sein soll und die wir der Kürze wegen durch z bezeichnen, sei

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} c_\alpha (x - b)^\alpha.$$

Wenn $z = x^\mu$, so ist

$$\frac{dz}{dx} = \mu x^{\mu-1},$$

folglich

$$\mu z - x\frac{dz}{dx} = 0;$$

es muss also auch

$$\sum \left[(\mu - \alpha) c_\alpha - b(\alpha + 1) c_{\alpha+1}\right] (x - b)^\alpha = 0$$

sein. Dieser Bedingung ist offenbar Genüge geleistet, sobald

$$(\mu - \alpha) c_\alpha - b(\alpha + 1) c_{\alpha+1} = 0.$$

Nun sind aber a l l e Ausdrücke, welche dieser Differentialgleichung genügen in den verschiedenen Werthen von kx^μ enthalten, es muss also die Reihe z, in der das Gesetz

$$(\mu - \alpha)\, c_\alpha - b\,(\alpha + 1)\, c_{\alpha+1} = 0$$

stattfindet, nothwendig einem derselben gleich sein; um diesen zu finden, machen wir

$$\ldots\ldots c_{\alpha-1}\,(x - b)^{\alpha-1} + c_\alpha\,(x - b)^\alpha = p,$$

$$p' = c_{\alpha+1}\,(x - b)^{\alpha+1} + c_{\alpha+2}\,(x - b)^{\alpha+2}\ldots\ldots,$$

also

$$p + p' = z = kx^\mu;$$

folglich

$$\mu p - x\frac{dp}{dx} = (\mu - \alpha)\, c_\alpha\,(x - b)^\alpha = X,\ \mu p' - x\frac{dp'}{dx} = -X.$$

Diese Differentialgleichungen haben zum allgemeinen Integral

$$-\int Xx^{-\mu-1}\,dx + k_1 = px^{-\mu} = c_\alpha\,(x - b)^\alpha x^{-\mu}$$
$$+ c_{\alpha-1}\,(x - b)^{\alpha-1} x^{-\mu}\ldots\ldots\ldots$$

$$\int Xx^{-\mu-1}\,dx + k_2 = p'x^{-\mu} = c_{\alpha+1}\,(x - b)^{\alpha+1}\,x^{-\mu}$$
$$+ c_{\alpha+2}\,(x - b)^{\alpha+2}\,x^{-\mu}\ldots\ldots\ldots$$

Substituirt man hierin für X seinen Werth und $\frac{b}{y}$ für x, so erhält man

$$px^{-\mu} = c_\alpha\,(\mu - \alpha)\, b^{\alpha-\mu}\int y^{\mu-\alpha-1}\,(1 - y)^\alpha\, dy + k_1$$
$$= c_\alpha b^{\alpha-\mu}(1-y)^\alpha\, y^{\mu-\alpha} + c_{\alpha-1} b^{\alpha-1-\mu}(1-y)^{\alpha-1} y^{\mu-\alpha+1} + \cdots$$

$$p'x^{-\mu} = -\, c_\alpha(\mu - \alpha)\, b^{\alpha-\mu}\int y^{\mu-\alpha-1}\,(1 - y)^\alpha\, dy + k_2$$
$$= c_{\alpha+1}\, b^{\alpha+1-\mu}\,(1 - y)^{\alpha+1}\, y^{\mu-\alpha-1}$$
$$+ c_{\alpha+2}\, b^{\alpha+2-\mu}\,(1 - y)^{\alpha+2}\, y^{\mu-\alpha-2} + \cdots$$

In dem Falle, dass $\mu > \alpha > -1$, verschwinden nun offenbar die Ausdrücke rechts bezüglich für $y = 0$ und $y = 1$, und die beiden Integrale werden ihnen also, das erste von 0 bis y, das zweite von 1 bis y genommen, genau gleich sein, wenn dieselben zwischen diesen Grenzen continuirlich sind. Es könnte scheinen, als ob diese Bedingung verletzt wäre, so bald einige oder alle Glieder einer Reihe in's Positive oder Negative über alle Grenzen hinaus wachsen; daraus würde aber, da sich dieselben gegenseitig aufheben können, nur folgen, dass sich durch eine wirkliche Addition ein bestimmter Werth für die Reihe nicht finden lässt. Da wir nun den Schluss, als ob die Reihe in einem solchen Falle überhaupt keinen bestimmten Werth habe, nach dem Obigen nicht zugeben, so können wir die Continuität oder Discontinuität der Reihen $px^{-\mu}$ und $p'x^{-\mu}$ nur durch die Betrachtung der ihnen gleichen Integrale erfahren.*) Bekanntlich kann nun aber ein Ausdruck nur discontinuirlich werden, wenn sein Differential unendlich wird; der Ausdruck $(1-y)^{\mu-\alpha-1}y^{\alpha}$ hat aber für alle endlichen Werthe von y einen endlichen Werth, wenn die Exponenten $\mu-\alpha-1$ und α positiv sind; die Integrale ändern sich also dann stetig, und aus der Betrachtung der singulären Integrale für $y=1$ und $y=0$ ersieht man, dass dies auch noch stattfindet, so lange beide Exponenten grösser als -1 bleiben. Es ist demnach für den Fall, dass $\mu>\alpha>-1$ und y endlich ist,**)

$$k = zx^{-\mu} = px^{-\mu} + p'x^{-\mu} = (\mu-\alpha)c_\alpha b^{\alpha-\mu}\int\limits_0^1 (1-y)^{\mu-\alpha-1}y^\alpha\,dy$$

$$= c_\alpha b^{\alpha-\mu}\frac{\Pi(\alpha)\Pi(\mu-\alpha)}{\Pi(\mu)}$$

(wo Π das bekannte bestimmte Integral bezeichnet). Dies Resultat gilt, wie bemerkt, nur, wenn $\mu>\alpha>-1$; es lässt sich aber auf alle Werthe von μ und α ausdehnen, wenn man das Π einer negativen Zahl (wie im Lauf dieser Untersuchung immer angenommen werden soll) als durch das Gesetz $\Pi(n)=\frac{1}{n+1}\Pi(n+1)$ aus den positiven abgeleitet definirt. Denn erstens muss es nach dem Gesetz, welches angenommener Massen zwischen den Coefficienten der Reihe stattfindet, für jeden Werth von α gelten, wenn nur einer derselben $\lesseqgtr {\mu \atop -1}$ ist; es ist also, wenn μ positiv ist

$$kx^\mu = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} k\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\alpha)\Pi(\mu-\alpha)}b^{\mu-\alpha}(x-b)^\alpha$$

oder

$$\frac{x^\mu}{\Pi\mu} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty}\frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)}\frac{(x-b)^\alpha}{\Pi(\alpha)};$$

daraus aber erhält man durch $n$malige Differentiation nach x

$$\frac{x^{\mu-n}}{\Pi(\mu-n)} = \sum\frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)}\frac{(x-b)^{\alpha-n}}{\Pi(\alpha-n)},$$

wodurch das Gesetz auch für negative Werthe von μ erwiesen ist.

---

*) Behandelt man die Integrale vor der Substitution von $\frac{b}{y}$ statt x, so werden sie für $x=0$ discontinuirlich. Man erkennt aber auch unter dieser Form leicht, dass die ihnen zugehörigen Constanten für positive und negative Werthe von x dieselben Werthe haben müssen, da der Werth der Integrale bei dem Uebergange des x von $+\infty$ zu $-\infty$ sich stetig ändert.

**) Für den Fall, dass $y=\pm\infty$, also $x=0$, ist der Werth beider Integrale ∞; folglich $k=\infty-\infty$, d. h. beliebig, was offenbar aus der blossen Betrachtung dieses Falles hervorgeht.

Es ist also ganz allgemein.

$$(3)\qquad \frac{x^\mu}{\Pi(\mu)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} \frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)} \frac{(x-b)^\alpha}{\Pi(\alpha)}.$$

Bemerkenswerth ist es, dass man durch diese Formel, eine Reihe für x^μ nicht erhält, wenn μ eine negative ganze Zahl ist, da der Ausdruck links dann 0 wird, worauf wir später zurückkommen werden. Man sieht auch dass es Reihen von dieser Form giebt, die der Null oder einer Constanten, für jeden Werth von x, gleich sind.

Nach dieser Protestation gegen das Verdammungsurtheil, welches man den divergirenden Reihen gesprochen hat, wollen wir jetzt den eingeschlagenen Weg zur Feststellung des Begriffs der Ableitungen weiter verfolgen. Man sieht, dass der Zweck, den wir uns gesetzt haben, dass nemlich die Differentiation als besonderer Fall in der Ableitung enthalten sein soll, erfüllt ist, so bald nur die Function k_ν für alle ganzen positiven Werthe von $\nu = \frac{1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu}$ und für alle ganzen negativen Werthe $= 0$ ist; denn dann geht die Reihe (2) in die Reihe (1) über; dieser Bedingung kann aber offenbar durch unendlich viele verschiedene Functionen von ν genügt werden; man kann ferner durchaus nicht annehmen, dass es nur Eine Entwicklung derselben Function nach denselben Potenzen von h gebe, d. h. dass nur Ein System von Coefficienten einer Reihe von einer bestimmten Form einen bestimmten Werth gebe; man muss vielmehr unendlich viele verschiedene Systeme als möglich voraussetzen; wir haben also, unbeschadet unseres Zweckes, sowohl unter den verschiedenen möglichen Functionen von ν für k_ν als unter verschiedenen möglichen Systemen von Coefficienten die Wahl, und es ist offenbar am zweckmässigsten, diese Wahl womöglich so zu treffen, dass die Ableitungen noch mehreren Gesetzen gehorchen, die bei einer andern Wahl nur für Ableitungen mit ganzen Indices gültig sein würden.

Hierzu dienen folgende Betrachtungen.

Da der Ausdruck $\Sigma k_\nu\, \partial_x^\nu z\, h^\nu$ alle in dieser Form möglichen Entwicklungen $z_{(x+h)}$ umfassen soll, so muss

$$\frac{d \Sigma k_\nu\, \partial_x^\nu z\, h^\nu}{dh} = \Sigma k_\nu\, \nu\, \partial_x^\nu z\, h^{\nu-1}$$

alle in dieser Form möglichen Entwicklungen von $\frac{d\, z_{(x+h)}}{dh}$ umfassen, und ebenso

$$\frac{d\, \Sigma k_\nu\, \partial_x^\nu z\, h^\nu}{dx} = \Sigma k_\nu \frac{d \partial_x^\nu z}{dx} h^\nu$$

alle Entwicklungen dieser Form von $\frac{dz_{(x+h)}}{dx}$. Bekanntlich sind nun $\frac{dz_{(x+h)}}{dh}$ und $\frac{dz_{(x+h)}}{dx}$ identisch; beide Ausdrücke umfassen also genau dieselben Reihen; es müssen also auch $k_{\nu+1}(\nu+1)\partial_x^{\nu+1}z$ und $k_\nu \frac{d\partial_x^\nu z}{dx}$ genau dieselben Werthe haben, d. h. sie sind einander gleich; setzt man nun $k_{\nu+1}(\nu+1) = k_\nu$, was der obigen Hauptbedingung offenbar nicht widerspricht, da für ganze Werthe von ν vermöge derselben dies Gesetz stattfinden muss, so erreicht man dadurch, dass auch für die Ableitungen mit gebrochenen Indices

$$\partial_x^{\nu+1}z = \frac{d\partial_x^\nu z}{dx}$$

ist und folglich allgemein, wenn n eine ganze Zahl ist,

$$(4) \qquad \partial_x^{\nu+n}z = \frac{d^n\partial_x^\nu z}{dx^n}.$$

Aus dem angenommenen Gesetze für k_ν folgt, dass

$$\Pi(\nu)k_\nu = \Pi(\nu+1)k_{(\nu+1)}$$

ist, es hat also die Function $\Pi(\nu)k_\nu$, die wir durch l_ν bezeichnen wollen, für alle Werthe von ν, die um ganze Zahlen von einander abstehen, stets denselben Werth. Wir können daher für die zweckmässigste Wahl der Function l_ν nicht mehr aus der Betrachtung einer einzelnen Entwicklungsform, sondern nur aus der Combination verschiedener Schlüsse ziehen; demgemäss wollen wir versuchen, ob wir sie so wählen können, dass $\partial_x^\nu\partial_x^\mu z = \partial_x^{\nu+\mu}z$ ist.

Lässt man zu diesem Zwecke x in der Formel (2) noch einmal wachsen, und bezeichnet man diesen Zuwachs durch k, so ist

$$(\alpha)\,..\,z_{(x+h+k)} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} l_\mu l_\nu \partial_x^\mu\partial_x^\nu z \frac{k^\mu}{\Pi(\mu)}\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$$

und dieser Ausdruck bezeichnet alle nach denselben Potenzen von h und k möglichen Entwicklungen von $z_{(x+h+k)}$. Es ist aber auch

$$(\beta)\,..\,z_{(x+h+k)} = \sum_{\mu+\nu=-\infty}^{\mu+\nu=\infty} l_{(\mu+\nu)}\partial_x^{\mu+\nu}z\frac{(h+k)^{\mu+\nu}}{\Pi(\mu+\nu)}$$

$$= \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} l_{(\mu+\nu)}\partial_x^{\mu+\nu}z\frac{h^\nu k^\mu}{\Pi(\nu)\Pi(\mu)} \text{ [vermöge (3)].}$$

Nun bezeichnet der letzte Ausdruck (β) zwar nicht alle möglichen Entwicklungen dieser Form von $z_{(x+h+k)}$, da die Gleichung (3) nur Eine Entwicklung von $\frac{(h+k)^{\mu+\nu}}{\Pi(\mu+\nu)}$ giebt, ohne dass dies die einzig mögliche zu sein brauchte; es müssen aber alle in ihm enthaltenen Entwicklungen auch in (α) enthalten sein; stellt man also für die Function l das Gesetz $l_{(\mu+\nu)} = l_\mu l_\nu$ auf; so werden alle Werthe von $\partial_x^{\mu+\nu} z$ auch Werthe von $\partial_x^\mu \partial_x^\nu z$ sein, obgleich der letzte Ausdruck auch noch andere Werthe haben kann.

Es ist also

$$(5) \qquad \partial_x^\mu \partial_x^\nu z = \partial_x^{\mu+\nu} z$$

unter der ausgesprochenen Beschränkung.

Aus $l_{(\mu+\nu)} = l_{(\mu)} l_{(\nu)}$ folgt aber

$$l_{(\mu+\nu+\pi)} = l_{(\mu+\nu)} l_\pi = l_\mu l_\nu l_\pi$$

und allgemein, dass das Product der l verschiedener Zahlen gleich ist dem l ihrer Summe, oder wenn man die einzelnen Factoren einander gleich setzt $l_{(m\nu)} = l_{(\nu)}^m$, so oft m eine ganze Zahl ist; bezeichnet man nun $\frac{m\nu}{n}$ durch π, so ist

$$l_{(m\nu)} = l_{(n\pi)} = l_\nu^m = l_\pi^n \quad \text{oder } l_{\left(\frac{m}{n}\nu\right)} = l_\nu^{\frac{m}{n}}.$$

Das Gesetz $l_{(\mu\nu)} = l_\nu^\mu$ ist also für alle rationalen Werthe von μ, und folglich (nach dem bekannten Gesetz der Interpolation) allgemein gültig. Da nun für ganze Werthe von ν $l_\nu = 1$ sein muss, so ist $l_\nu = 1^\nu$.

Sollen demnach die Gesetze (4) und (5) für die Ableitungen im Allgemeinen gelten, und die Differentiation in der Ableitung als besonderer Fall enthalten sein, so müssen wir die Ableitungen unter denjenigen Functionen von x wählen, die der Gleichung

$$z_{(x+h)} = \sum \frac{1^\nu h^\nu}{\Pi(\nu)} \partial_x^\nu z = \sum \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} \partial_x^\nu z$$

genügen. Diese Wahl wird am zweckmässigsten auf diejenigen unter ihnen fallen, welche am geschmeidigsten für die Rechnung sind; versucht man aber die Entwicklung einiger Functionen von $x+h$ in Reihen, die nach gebrochenen Potenzen von h fortlaufen, so wird man sehen, dass am leichtesten und einfachsten Entwicklungen in solche Reihen sind, in denen der Coefficient von $\frac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ das Differential des Coefficienten von $\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ ist: wir wollen also obige Begrenzung der Ableitungen dahin beschränken, dass das Zeichen $\partial_x^\nu z$ den Coefficienten von $\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ nicht in allen möglichen Entwicklungen von $z_{(x+h)}$ bezeichnen soll, sondern nur in solchen, in denen der Coefficient von $\frac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ das Differential des Coefficienten von $\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ ist. *)

Hieraus folgt zunächst, dass Ein Werth von $\partial_x^\nu z$ nur einer Entwicklung angehören kann; denn gesetzt, ein Werth von $\partial_x^\nu z$, p_ν, gehörte zwei Entwicklungen, a und b, an, so müssten diese beiden Entwicklungen in allen folgenden Gliedern übereinstimmen, da diese durch Differentiation aus p_ν entstehen. Bezeichnen wir nun die vorhergehenden Glieder in a durch $p_{\nu-1}$, $p_{\nu-2}\ldots$, in b durch $q_{\nu-1}, q_{\nu-2}\ldots$, so müssen $p_{\nu-1}$ und $q_{\nu-1}$ beide zum Differential p_ν haben; sie können also nur um eine Constante verschieden sein, d. h.

$$q_{\nu-1} = p_{\nu-1} + K_1,$$

ebenso muss

$$q_{\nu-2} = p_{\nu-2} + K_1 x + K_2,\quad q_{\nu-3} = p_{\nu-3} + K_1\frac{x^2}{\Pi(2)} + K_2 x + K_3$$

sein. Die Entwicklung b ist also

$$= a + \sum_{m=\infty}^{m=1} K_m \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{\Pi(n)}\,\frac{h^{\nu-n-m}}{\Pi(\nu-n-m)} = a + \sum_{m=\infty}^{m=1} K_m \frac{(x+h)^{\nu-m}}{\Pi(\nu-m)};$$

nun soll aber für alle Werthe von $(x+h)$ $a = b$ sein, was bekanntlich nur stattfinden kann, wenn alle Constanten null sind; dann aber sind beide Entwicklungen identisch.

Ist p_ν ein Werth von $\partial_x^\nu z$, so ist $p_\nu + K\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$ (wo n positiv und ganz und K eine endliche Constante ist) ebenfalls ein Werth desselben; denn die Reihe

$$\sum\left(p_\nu + K\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}\right)\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} = \sum p_\nu\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} + K\frac{(x+h)^{-n}}{\Pi(-n)}$$
$$= \sum p_\nu \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} = z_{(x+h)},$$

und es findet in ihr das Gesetz statt,

$$\frac{d\left(p_\nu + K\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(\nu-n)}\right)}{dx} = p_{\nu+1} + K\frac{x^{-\nu-n-1}}{\Pi(-\nu-1-n)}.$$

---

*) Aus (4) folgt zwar, dass wenn $\sum \partial_x^\nu z\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ eine Entwicklung von $z_{(x+h)}$ ist, $\sum\frac{d\partial_x^\nu z}{dx}\,\frac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ ebenfalls eine Entwicklung von $z_{(x+h)}$ ist, aber nicht dass diese beiden Entwicklungen identisch sind. Durch die gemachte Annahme erreicht man auch, dass die Ableitungen mit ganzen negativen Indices, die nach dem Bisherigen noch gar keinen Sinn hatten, mit den Integralen zusammenfallen, wie weiter unten bewiesen werden wird.

Den Inbegriff aller Werthe von $\partial_x^\nu z$, die sich durch Addition von Ausdrücken von der Form $K \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$ aus einander ableiten lassen, wollen wir ein System von Werthen nennen; es sind also alle Werthe von $\partial_x^\nu z$, die demselben Systeme angehören, in dem Ausdruck

$$(6) \qquad p_\nu + \sum_{n=\infty}^{n=1} K_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)},$$

enthalten (wo K_n endliche Constanten bedeuten).

Wir wollen nun einen Werth von $\partial_x^\nu z$ zu bestimmen suchen. Bekanntlich ist

$$z_{(x)} = z_{(k)} + \left(\frac{dz}{dx}\right)_{(k)} (x-k) + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_{(k)} \frac{(x-k)^2}{1 \cdot 2} \cdots,$$

sobald $z_{(x)}$ zwischen den Grenzen x und k continuirlich ist, setzt man hierin $x+h$ für k und entwickelt die Glieder der Reihe mittels (3) nach Potenzen von h, so erhält man

$$z_{(x)} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty} \frac{h^\mu}{\Pi(\mu)} \left(z_{(k)} \frac{(x-k)^{-\mu}}{\Pi(-\mu)} + \left(\frac{dz}{dx}\right)_{(k)} \frac{(x-k)^{-\mu+1}}{\Pi(-\mu+1)} + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_{(k)} \frac{(x-k)^{-\mu+2}}{\Pi(-\mu+2)} \cdots \right)$$

und in dieser Reihe ist der Coefficient von $\frac{h^\mu}{\Pi(\mu)}$ das Differential des Coefficienten von $\frac{h^{\mu-1}}{\Pi(\mu-1)}$; er ist folglich ein Werth von $\partial_x^\mu z$, den wir durch p_μ bezeichnen wollen. Differentiirt man nach k, so erhält man

$$\frac{dp_\mu}{dk} = -z_k \frac{(x-k)^{-\mu-1}}{\Pi(-\mu-1)}, \text{ folglich } p_\mu = \int -z_{(k)} \frac{(x-k)^{-\mu-1}}{\Pi(-\mu-1)} dk.$$

Nun verschwinden alle Glieder der obigen Reihe für $k = x$; das Integral wird also von k bis x genommen $= p_\mu$ sein, wenn es zwischen den Grenzen continuirlich ist; dies ist aber, da z zwischen den Grenzen x und k continuirlich sein soll und $-\mu - 1 > -1$, offenbar der Fall und es ist also

$$(7) \qquad \int_x^k - z_{(k)} \frac{(x-k)^{-\mu-1}}{\Pi(-\mu-1)} dk = \frac{1}{\Pi(-\mu-1)} \int_k^x (x-t)^{-\mu-1} z_{(t)}\, dt$$

ein Werth von $\partial_x^\mu z$, sobald z zwischen den Grenzen x und k continuirlich und μ negativ ist. Der derselben Entwicklung angehörige Werth von

$$\partial_x^{\mu-n} z = \frac{1}{\Pi(-\mu+n-1)} \int_k^x (x-t)^{-\mu+n-1} z_{(t)}\, dt.$$

Man sieht leicht, dass, je nachdem man dem k verschiedene Werthe giebt, verschiedene Entwicklungen von $z_{(x+h)}$ daraus hervorgehen, aber alle diese Entwicklungen gehören demselben Systeme an. Denn aus dem Werth

$$\frac{1}{\Pi(-\mu-1)}\int_k^x (x-t)^{-\mu-1} z_{(t)}\, dt$$

geht offenbar

$$\frac{1}{\Pi(-\mu-1)}\int_{k_1}^x (x-t)^{-\mu-1} z_{(t)}\, dt$$

hervor durch Addition von

$$\frac{1}{\Pi(-\mu-1)}\int_{k_1}^k (x-t)^{-\mu-1} z_{(t)}\, dt = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{-\mu-1-n}}{\Pi(-\mu-1-n)}\int_{k_1}^k \frac{(-t)^n}{\Pi(n)} z_{(t)}\, dt;$$

da nun z zwischen x und k_1 und also auch zwischen k und k_1 continuirlich ist; so sind alle jene Integrale endliche und zwar nach x constante Grössen. Man wird demnach durch das angewandte Verfahren stets auf dasselbe System von Werthen gelangen; beschränken wir also den Begriff der Ableitungen auf dies System von Werthen, so haben wir die Bestimmung derselben auf bekannte Werthe zurückgeführt und werden mittels dieser Definition die Eigenschaften derselben und ihre Werthe für bestimmte Functionen ableiten können.

Es ist demnach

$$1.\qquad \partial_x^\nu z = \int_k^x (x-t)^{-\nu-1} z_{(t)}\, dt + \sum_{n=\infty}^{n=1} K_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-n-\nu)},$$

wenn K_n endliche willkürliche Constanten sind,*) ν negativ, und z zwischen den Grenzen x und k continuirlich ist; für einen Werth von ν aber der $\gtreqless 0$ ist, bezeichnet $\partial_x^\nu z$ dasjenige, was aus $\partial_x^{\nu-m} z$ (wo $m > \nu$) durch $m$malige Differentiation nach x hervorgeht,**) ein Werth, welcher stets auch der Gleichung

---

*) Alle diese willkürlichen Functionen wollen wir durch φ_ν bezeichnen; wir machen zugleich darauf aufmerksam, dass (wenn n positiv und ganz) jede Function φ_ν auch eine Function $\varphi_{\nu-n}$ ist.

**) Die Definition

$$\partial_x^\nu z = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{d^n z_{(x)}}{dx^n}\right)_k \frac{(x-k)^{\nu-n}}{\Pi(n-\nu)} + \varphi_\nu,$$

welche mit der gegebenen identisch ist, würde zwar für alle Werthe von ν gelten; wir haben ihr aber die gewählte ihrer grösseren Geschmeidigkeit wegen vorgezogen.

$$2. \qquad z_{(x+h)} = \sum_{n=\infty}^{n=1} \frac{h^{\nu-n}}{\Pi(\nu-n)} \int^{(n)} \partial_x^{\nu} z \, dx^n + \frac{h^{\nu}}{\Pi(n)} \partial_x^{\nu} z + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{h^{\nu+n}}{\Pi(\nu+n)} \frac{d^n \partial_x^{\nu} z}{dx^n}$$

genügen muss.*) Hieraus folgt

$$3. \qquad \partial_x^{-m} z = \int_k^{x\,(m)} z_{(t)} \, dt^m + \sum_{n=m}^{n=1} K_n \frac{x^{-n+m}}{\Pi(-n+m)}$$

und

$$4. \qquad \partial_x^0 z = z$$

$$5. \qquad \partial_x^m z = \frac{d^m z}{dx^m}$$

ferner

$$6. \qquad \partial_x^{\mu} \partial_x^{\nu} z = \partial_x^{\nu+\mu} z + \varphi_{\mu}.$$

Jeder Werth von $\partial_x^{\nu+\mu} z$ ist also auch ein Werth von $\partial_x^{\mu} \partial_x^{\nu} z$.

Das Umgekehrte findet aber nur statt, wenn μ eine ganze positive oder ν eine ganze negative Zahl ist. In diesem Falle sind also beide Ausdrücke identisch. Aus der Definition folgt noch (wenn c eine Constante bedeutet)

$$7. \qquad \partial_x^{\nu}(p+q) = \partial_x^{\nu} p + \partial_x^{\nu} q$$

$$8. \qquad \partial_x^{\nu}(cp) = c\,\partial_x^{\nu} p$$

$$9. \qquad \partial_{x+c}^{\nu} z = \partial_x^{\nu} z$$

$$10. \qquad \partial_{cx}^{\nu} z = \partial_x^{\nu} z \, c^{-\nu}.$$

Zwei Werthe von $\partial_x^{\nu} z$ und $\partial_x^{\mu} z$, in denen die Constanten K, K_1, etc. sämmtlich einander gleich sind, sollen correspondirende Werthe heissen. Alle derselben Entwicklung von $z_{(x+h)}$ angehörigen Werthe sind correspondirende.

Wir wollen nun zu der Bestimmung der Ableitungen bestimmter Functionen von x übergehen. Dabei kann es natürlich nur darauf ankommen, einen Werth Einer Ableitung zu finden, da sich aus diesem ihr allgemeiner Werth durch Addition der Function φ sofort ergiebt, und zwar wird dieser Werth, wenn die Umformung des Ausdrucks 1. überhaupt etwas nützen soll, ein einfacherer, als dieser Ausdruck, also eine explicite Function von x in endlicher Form sein

*) Ob die obige Formel 1. alle Werthe enthält die dieser Gleichung genügen, hängt offenbar davon ab, ob die Functionen φ_{ν} die einzigen sind, welche, statt $\partial_x^{\nu} z$ substituirt, die Reihe 2. zu Null machen. Nun lässt sich zwar ohne Schwierigkeit zeigen, dass keine algebraische Function von x, die nicht in φ_{ν} enthalten ist dies leistet; ob aber überhaupt keine Function dieser Bedingung genügt, darüber konnte ich bis jetzt zu keinem Resultat gelangen.

müssen. Diese Umformung wird also im Allgemeinen darin bestehen, dass man das x aus dem Integralzeichen herauszuschaffen sucht.

Betrachten wir nun zuerst die Function x^μ.

Ist μ positiv, so ist x^μ für alle Werthe von x continuirlich; es wird also

$$\frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int_0^x (x-t)^{-\nu-1}\, t^\mu\, dt$$

immer ein Werth von $\partial_x^\nu(x^\mu)$ sein; dies Integral ist aber

$$= \frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int_0^1 x^{\mu-\nu}(1-y)^{-\nu-1}\, y^\mu\, dy = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)}\, x^{\mu-\nu}.$$

Da das $m$te Differential hiervon $\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu-m)}\, x^{\mu-\nu-m} = \partial_x^{\nu+m}(x^\mu)$ ist, (4), so ist für jeden Werth von ν

$$\partial_x^\nu(x^\mu) = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)}\, x^{\mu-\nu} + \varphi_\nu.$$

Ist μ negativ, so ist x^μ für $x=0$ discontinuirlich, für alle andern Werthe aber continuirlich; in dem Ausdrucke (1) müssen also x und k stets gleiches Zeichen haben. Nun erhält man aber durch $m$malige partielle Integration

$$\frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int_k^x (x-t)^{-\nu-1}\, t^\mu\, dt$$

$$= \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(-\nu-1-m)\,\Pi(\mu+m)}\int_k^x (x-t)^{-\nu-1-m}\, t^{\mu+m}\, dt + \varphi_\nu,$$

so lange $-\nu-m>0$ ist, wodurch sich also, wenn $-\nu>-\mu$ ist, diejenigen Integrale worin $\mu<-1$ ist, auf solche zurückführen lassen, in denen der Exponent von $t \gtreqless -1$ ist; ist er >-1, so gehört

$$\int_0^k (x-t)^{-\nu-1-m}\, t^{\mu+m}\, dt$$

zu den Functionen φ_ν, und es ist also

$$\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(-\nu-1-m)\,\Pi(\mu+m)}\int_0^x (x-t)^{-\nu-1-m}\, t^{\mu+m}\, dt = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)}\, x^{\mu-\nu}$$

ein Werth von $\partial_x^\nu(x^\mu)$, wenn $-\nu>-\mu$, welches Resultat nach dem Gesetze $\partial_x^{\nu+1} z = \frac{d\partial_x^\nu z}{dx}$ für jedes ν gelten muss.

Ist aber $\mu+m=-1$, so ist

$$\int_k^x (x-t)^{-\nu-1-m} t^{\mu+m} dt = \log x\, x^{\mu-\nu} - \log k\, x^{\mu-\nu} + \int_k^x \frac{(x-t)^{\mu-\nu} - x^{\mu-\nu}}{t} dt$$

$$= \log x\, x^{\mu-\nu} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\mu-\nu} - x^{\mu-\nu}}{t} dt + \varphi_\nu$$

$$= \log x\, x^{\mu-\nu} + x^{\mu-\nu} \int_0^1 \frac{y^{\mu-\nu} - y}{1-y} dt$$

$$= \log x\, x^{\mu-\nu} - (\Psi(\mu-\nu) - \Psi(0))\, x^{\mu-\nu}.$$

Verallgemeinert man auch das hieraus erhaltene Resultat durch Differentiation, so hat man folgende Werthe für $\partial_x^\nu(x^\mu)$,

$$11. \qquad \partial_x^\nu(x^\mu) = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)} x^{\mu-\nu},$$

wenn μ nicht eine negative ganze Zahl ist,

$$12. \quad \partial_x^\nu(x^\mu) = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(-1)} \frac{1}{\Pi(\mu-\nu)} \left[\log x\, x^{\mu-\nu} - (\Psi(\mu-\nu) - \Psi(0))x^{\mu-\nu}\right],$$

wenn μ eine ganze negative Zahl ist.

Es ist zu bemerken, dass aus der Formel 12. die Formel 11. hervorgeht, sobald man nur die Constanten, die für diesen Fall $\frac{\infty}{\infty}$ werden, einer geeigneten Behandlung unterwirft, was auch in dem Fall geschehen muss, wo $(\mu-\nu)$ und μ beide ganze negative Zahlen sind. Man übersieht leicht, dass die aus diesen Formeln für verschiedene Werthe von ν hervorgehenden Werthe correspondirende sind; dies ist auch der Grund warum wir in 12. nicht, wie wir es für den Fall $\mu =$ einer negativen ganzen Zahl konnten, den blos $x^{\mu-\nu}$ enthaltenden Theil in die Function φ_ν einschlossen.

Wendet man ein ähnliches Verfahren auf e^x an, so erhält man

$$13. \quad \partial_x^\nu(e^x) = \int_{-\infty}^x e^t(x-t)^{-\nu-1} dt = \frac{1}{\Pi(-\nu-1)} e^x \int_0^\infty e^{-y} y^{-\nu-1} dy = e^x.$$

Die Ableitungen von $\log x$ ergeben sich durch dieselbe Methode, noch leichter aber und zwar sogleich für alle Werthe von ν aus 6. und 12.

$$14. \quad \partial_x^\nu(\log x) = \partial_x^\nu \partial_x^{-1} x^{-1} = \frac{1}{\Pi(-\nu)} \left(\log x\, x^{-\nu} - [\Psi(-\nu) - \Psi(0)]x^{-\nu}\right).$$

Durch Anwendung der Regeln 7 bis 10 findet man aus 13. und 14. mit der grössten Leichtigkeit auch die Ableitungen von $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ und arc $(\operatorname{tg} = x)$.

Schliesslich bemerken wir noch, dass sich die aufgestellte Theorie mit derselben Sicherheit auch auf den Fall ausdehnen lässt, wo man den in Rede stehenden Grössen imaginäre Werthe beilegt.