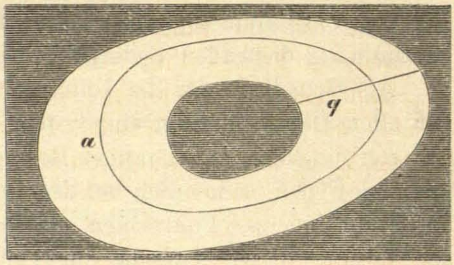
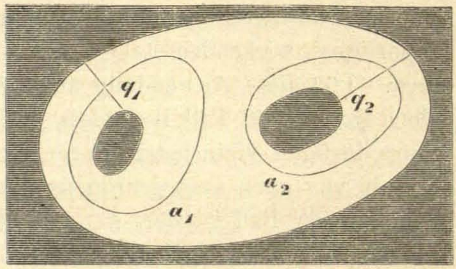
Zweifach zusammenhängende Fläche.

Sie wird durch jeden sie nicht zerstückelnden Querschnitt q in eine einfach zusammenhängende zerschnitten. Mit Zuziehung der Curve a kann in ihr jede geschlossene Curve die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche bilden.

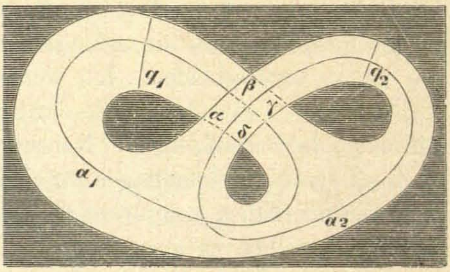


Dreifach zusammenhängende Fläche.

In dieser Fläche kann jede geschlossene Curve mit Zuziehung der Curven a_1 und a_2 die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche bilden. Sie zerfällt durch jeden sie nicht zerstückelnden Querschnitt in eine zweifach zusammenhängende und durch zwei solche Querschnitte, q_1 und q_2, in eine einfach zusammenhängende.



In dem Theile $\alpha\beta\gamma\delta$ der Ebene ist die Fläche doppelt. Der a_1 enthaltende Arm der Fläche ist als unter dem andern fortgehend betrachtet und daher durch punktirte Linien angedeutet.



3. Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Grösse durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.

Wenn in einer Ebene, in welcher die rechtwinkligen Coordinaten eines Punkts x, y sind, der Werth einer Function von $x + yi$ in einer endlichen Linie gegeben ist, so kann diese von dort aus nur auf eine Weise stetig fortgesetzt werden und ist also dadurch völlig bestimmt (Siehe oben S. 82). Sie kann aber auch in dieser Linie nicht willkürlich angenommen werden, wenn sie von ihr aus einer stetigen Fortsetzung in die anstossenden Flächentheile nach beiden Seiten hin fähig sein soll, da sie durch ihren Verlauf in einem noch so kleinen endlichen Theile dieser Linie schon für den übrigen Theil bestimmt ist. Bei dieser Bestimmungsweise einer Function sind also die zu ihrer Bestimmung dienenden Bedingungen nicht von einander unabhängig.

Als Grundlage für die Untersuchung einer Transcendenten ist es vor allen Dingen nöthig, ein System zu ihrer Bestimmung hinreichender von einander unabhängiger Bedingungen aufzustellen. Hierzu kann in vielen Fällen, namentlich bei den Integralen algebraischer Functionen und ihren inversen Functionen, ein Princip dienen, welches Dirichlet zur Lösung dieser Aufgabe für eine der Laplace'schen partiellen Differentialgleichung genügende Function von drei Veränderlichen, — wohl durch einen ähnlichen Gedanken von Gauss veranlasst — in seinen Vorlesungen über die dem umgekehrten Quadrat der Entfernung proportional wirkenden Kräfte seit einer Reihe von Jahren zu geben pflegt. Für diese Anwendung auf die Theorie von Transcendenten ist jedoch gerade ein Fall besonders wichtig, auf welchen dies Princip in seiner dortigen einfachsten Form nicht anwendbar ist, und welcher dort als von ganz untergeordneter Bedeutung unberücksichtigt bleiben kann. Dieser Fall ist der, wenn die Function an gewissen Stellen des Gebiets, wo sie zu bestimmen ist, vorgeschriebene Unstetigkeiten annehmen soll; was so zu verstehen ist, dass sie an jeder solchen Stelle der Bedingung unterworfen ist, unstetig zu werden, wie eine dort gegebene unstetige Function, oder sich nur um eine dort stetige Function von ihr zu unterscheiden. Ich werde hier das Princip in der für die beabsichtigte Anwendung erforderlichen Form darstellen und erlaube mir dabei in Betreff einiger Nebenuntersuchungen auf die in meiner Doctordissertation (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Göttingen 1851) gegebene Darstellung desselben zu verweisen.

Man nehme an, dass eine die (x, y)-Ebene einfach oder mehrfach bedeckende beliebig begrenzte Fläche T und in derselben zwei für jeden ihrer Punkte eindeutig bestimmte reelle Functionen von x, y, die Functionen α und β gegeben seien, und bezeichne das durch die Fläche T ausgedehnte Integral

$$\int\left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right) dT$$

durch $\Omega(\alpha)$, wobei die Functionen α und β beliebige Unstetigkeiten besitzen können, wenn nur das Integral dadurch nicht unendlich wird. Es bleibt dann auch $\Omega(\alpha - \lambda)$ endlich, wenn λ allenthalben stetig ist und endliche Differentialquotienten hat. Wird diese stetige Function λ

der Bedingung unterworfen, nur in einem unendlich kleinen Theile der Fläche T von einer unstetigen Function γ verschieden zu sein, so wird $\Omega(\alpha - \lambda)$ unendlich gross, wenn γ längs einer Linie unstetig ist oder in einem Punkte so unstetig ist, dass

$$\int \left(\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)^2 \right) dT$$

unendlich wird (Meine Inaug. Diss. Art. 17); es bleibt aber $\Omega(\alpha - \lambda)$ endlich, wenn γ nur in einzelnen Punkten und nur so unstetig ist, dass

$$\int \left(\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)^2 \right) dT$$

durch die Fläche T erstreckt endlich bleibt, wie z. B. wenn γ in der Umgebung eines Punktes im Abstande r von demselben $= (-\log r)^\varepsilon$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ist. Zur Abkürzung mögen hier die Functionen, in welche λ unbeschadet der Endlichkeit von $\Omega(\alpha - \lambda)$ übergehen kann, unstetig von der ersten Art, die Functionen, für welche dies nicht möglich ist, unstetig von der zweiten Art genannt werden. Denkt man sich nun in $\Omega(\alpha - \mu)$ für μ alle stetigen oder von der ersten Art unstetigen Functionen gesetzt, welche an der Grenze verschwinden, so erhält dies Integral immer einen endlichen, aber seiner Natur nach nie einen negativen Werth, und es muss daher wenigstens einmal, für $\alpha - \mu = u$, ein Minimumwerth eintreten, so dass Ω für jede Function $\alpha - \mu$, die unendlich wenig von u verschieden ist, grösser als $\Omega(u)$ wird.

Bezeichnet daher σ eine beliebige stetige oder von erster Art unstetige Function des Orts in der Fläche T, die an der Grenze allenthalben gleich 0 ist, und h eine von x, y unabhängige Grösse, so muss $\Omega(u + h\sigma)$ sowohl für ein positives, als für ein negatives hinreichend kleines h grösser als $\Omega(u)$ werden, und daher in der Entwicklung dieses Ausdrucks nach Potenzen von h der Coefficient von h verschwinden. Ist dieser 0, so ist

$$\Omega(u + h\sigma) = \Omega(u) + h^2 \int \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2 \right) dT$$

und folglich Ω immer ein Minimum. Das Minimum tritt nur für eine einzige Function u ein; denn fände auch ein Minimum für $u + \sigma$ statt, so könnte $\Omega(u + \sigma)$ nicht $> \Omega(u)$ sein, weil sonst

$$\Omega(u + h\sigma) < \Omega(u + \sigma)$$

für $h < 1$ würde; also könnte $\Omega(u + \sigma)$ nicht kleiner als die anliegenden Werthe sein. Ist aber $\Omega(u + \sigma) = \Omega(u)$, so muss σ constant, also da es in der Begrenzung 0 ist, überall 0 sein. Es wird daher nur für eine einzige Function u das Integral Ω ein Minimum und die Variation erster Ordnung oder das h proportionale Glied in $\Omega(u+h\sigma)$,

$$2h\int dT\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)=0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass das Integral

$$\int\left(\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\left(\frac{\partial \beta}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right)$$

durch die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche T erstreckt stets $=0$ ist. Zerlegt man nun (nach der vorhergehenden Abhandlung) die Fläche T, wenn sie eine mehrfach zusammenhängende ist, in eine einfach zusammenhängende T', so liefert die Integration durch das Innere von T' von einem festen Anfangspunkte bis zum Punkte (x, y) eine Function von x, y,

$$\nu=\int\left(\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\left(\frac{\partial \beta}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right)+\text{const.},$$

welche in T' überall stetig oder unstetig von der ersten Art ist und sich beim Ueberschreiten der Querschnitte um endliche von einem Knotenpunkte des Schnittnetzes zum andern constante Grössen ändert. Es genügt dann $v=\beta-\nu$ den Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

und folglich ist $u+vi$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial(u+vi)}{\partial y}-i\frac{\partial(u+vi)}{\partial x}=0$$

oder eine Function von $x+yi$.

Man erhält auf diesem Wege den in der erwähnten Abhandlung Art. 18 ausgesprochenen Satz:

Ist in einer zusammenhängenden durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende T' zerlegten Fläche T eine complexe Function $\alpha+\beta i$ von x, y gegeben, für welche

$$\int\left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right)dT$$

durch die ganze Fläche ausgedehnt einen endlichen Werth hat, so kann sie immer und nur auf Eine Art in eine Function von $x+yi$ verwandelt werden durch Subtraction einer Function $\mu+\nu i$ von x, y, welche folgenden Bedingungen genügt:

1) *μ ist am Rande $=0$ oder doch nur in einzelnen Punkten davon verschieden, ν in Einem Punkte beliebig gegeben.*

2) *Die Aenderungen von μ sind in T, von ν in T' nur in einzelnen Punkten und nur so unstetig, dass*

$$\int\left(\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right)dT$$

und

$$\int\left(\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)^2\right)dT,$$

durch die ganze Fläche erstreckt, endlich bleiben, und letztere längs der Querschnitte beiderseits gleich.

Wenn die Function $\alpha+\beta i$, wo ihre Differentialquotienten unendlich werden, unstetig wird, wie eine gegebene dort unstetige Function von $x+yi$, und keine durch eine Abänderung ihres Werthes in einem einzelnen Punkte hebbare Unstetigkeit besitzt, so bleibt $\Omega(\alpha)$ endlich, und es wird $\mu+\nu i$ in T' allenthalben stetig. Denn da eine Function von $x+yi$ gewisse Unstetigkeiten, wie z. B. Unstetigkeiten erster Art, gar nicht annehmen kann (Meine Diss. Art. 12), so muss die Differenz zweier solcher Functionen stetig sein, sobald sie nicht von der zweiten Art unstetig ist.

Nach dem eben bewiesenen Satze lässt sich daher eine Function von $x+yi$ so bestimmen, dass sie im Innern von T, von der Unstetigkeit des imaginären Theils in den Querschnitten abgesehen, gegebene Unstetigkeiten annimmt, und ihr reeller Theil an der Grenze einen dort allenthalben beliebig gegebenen Werth erhält; wenn nur für jeden Punkt, wo ihre Differentialquotienten unendlich werden sollen, die vorgeschriebene Unstetigkeit die einer gegebenen dort unstetigen Function von $x+yi$ ist. Die Bedingung an der Grenze kann man, wie leicht zu sehen, ohne eine wesentliche Aenderung der gemachten Schlüsse durch manche andere ersetzen.

4. Theorie der Abel'schen Functionen.

In der folgenden Abhandlung habe ich die Abel'schen Functionen nach einer Methode behandelt, deren Principien in meiner Inauguraldissertation*) aufgestellt und in einer etwas veränderten Form in den drei vorhergehenden Aufsätzen dargestellt worden sind. Zur Erleichterung der Uebersicht schicke ich eine kurze Inhaltsangabe vorauf.

Die erste Abtheilung enthält die Theorie eines Systems von gleichverzweigten algebraischen Functionen und ihren Integralen, soweit für dieselbe nicht die Betrachtung von ϑ-Reihen massgebend ist, und han-

*) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Göttingen 1851.