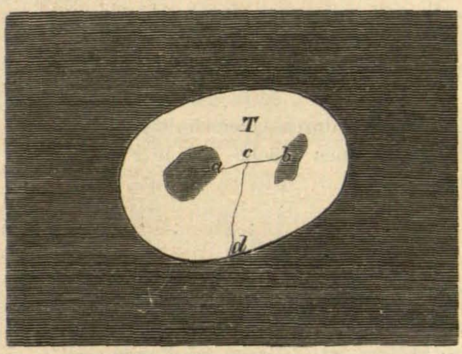
Anmerkungen.

(1) (zu Seite 3.) In Riemann's Papieren findet sich der folgende an diese Stelle gehörige Zusatz:

„Unter dem Ausdruck: die Grösse w ändert sich stetig mit z zwischen den Grenzen $z = a$ und $z = b$ verstehen wir: in diesem Intervall entspricht jeder unendlich kleinen Aenderung von z eine unendlich kleine Aenderung von w oder, greiflicher ausgedrückt: für eine beliebig gegebene Grösse ε lässt sich stets die Grösse α so annehmen, dass innerhalb eines Intervalls für z, welches kleiner als α ist, der Unterschied zweier Werthe von w nie grösser als ε ist. Die Stetigkeit einer Function führt hiernach, auch wenn dies nicht besonders hervorgehoben ist, ihre beständige Endlichkeit mit sich.“

(2) (zu Seite 18.) Zur Erläuterung dieser im Ausdruck etwas dunkeln Stelle kann folgendes Beispiel dienen:



In der beistehenden Figur ist T eine dreifach zusammenhängende Fläche. (ab) sei der erste Querschnitt q_1, (cd) der zweite q_2. Man hat hier drei verschiedene constante Werthdifferenzen der Function

$$Z = \int_{0_0}^{0} \left(Y \frac{\partial x}{\partial s} - X \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

zu unterscheiden. Diese seien: an der Strecke (ac): A, an der Strecke (cb): B, an der Strecke (cd) : C. Durchläuft man also zuerst (cd), so kann hier C irgend einen Werth haben. Durchläuft man hierauf (bc), so kann hier B einen andern beliebigen Werth haben. An (ac) ist aber hiernach die constante Werthdifferenz A der Function Z völlig bestimmt, nämlich (wenn die Vorzeichen passend bestimmt werden) $A = B + C$. Auf ähnliche Weise schliesst man allgemein, dass, so oft beim Rückwärtsdurchlaufen des Querschnittsystems ein schon durchlaufener Querschnitt einmündet, die Aenderung, welche die constante Werthdifferenz der Function dadurch erfährt, vollkommen bestimmt ist.

(3) (zu Seite 33.) Die folgenden Bemerkungen sind fast wörtlich den in Riemann's handschriftlichen Nachlass gefundenen Entwürfen zu Art. 17. entnommen und dienen theils zur Erläuterung, theils zur Ergänzung der Untersuchung.

Von den Werthen P_1 und P_2 kann auch einer überall $= 0$ genommen werden, wenn nur T' eine endliche Breite behält, wodurch unser Beweis auf den Fall anwendbar wird, wo die Unstetigkeit längs eines Theils der Begrenzung einträte, oder durch Abänderung von γ längs einer Linie im Innern entstanden wäre. Für m ist deshalb nicht geradezu der kleinste Werth von $(\gamma_1 - \gamma_2)^2$ in dem angegebenen Intervall von p_1 und p_2 gesetzt, damit der Beweis auch auf den Fall anwendbar ist, wo γ unendlich viele Maxima und Minima, also z. B. in der Nähe der Unstetigkeitslinie den Werth $\sin \frac{1}{p}$, hätte.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass L über alle Grenzen wächst, wenn

λ sich einer Function γ unbegrenzt nähert, die in einem Punkt O' so unstetig wird, dass in einem Theil einer mit dem Radius ϱ um O' beschriebenen Kreislinie $\varrho\frac{\partial\gamma}{\partial x}$, $\varrho\frac{\partial\gamma}{\partial y}$ für ein unendlich kleines ϱ sich einer endlichen Grenze nähern oder unendlich werden.

Es lässt sich in diesem Fall ein Werth R von ϱ so annehmen, dass unterhalb desselben

$$\varrho^2\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2\right]d\varphi$$

nicht 0 wird. Bezeichnen wir den kleinsten Werth dieser Grösse in diesem Intervall durch a, so wird der Beitrag eines zwischen $\varrho = R$ und $\varrho = r$ (wo $r < R$) enthaltenen Kreisrings zu L

$$\int_r^R d\varrho\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2\right]\varrho\,d\varphi > \int_r^R\frac{a}{\varrho}\,d\varrho > a\,(\log R-\log r)$$

und folglich, wenn man $r = Re^{-\frac{C}{a}}$ annimmt $> C$. Wählt man also zur Begrenzung von T' einen Kreis, wo $\varrho < Re^{-\frac{C}{a}}$, so wird der aus dem übrigen T stammende Theil von L und folglich L selbst, wie auch λ im Innern des Kreises angenommen werden möge, $> C$.

(Diese Untersuchung bezieht sich zwar zunächst auf einen Punkt, der kein Windungspunkt und kein Begrenzungspunkt ist, erleidet aber eine wesentliche Aenderung nur für einen Begrenzungspunkt, wo die Fläche eine Spitze, d. h. ihre Begrenzung einen Rückkehrpunkt hat. Die Bestimmung eines Grades der Unstetigkeit, welchen λ nicht erreichen kann, beruht indess auch hier auf denselben Principien und wir begnügen uns daher mit der Andeutung dieses Falles.)

Es liefert also, wenn der Flächentheil, wo λ und γ verschieden sind, unendlich klein wird, im Fall einer Unstetigkeitslinie T' selbst, im Fall eines Unstetigkeitspunktes der übrige Theil von T einen unendlichen Beitrag zu L, und unsere Behauptung ist daher, wenn die Unstetigkeit den hier vorausgesetzten Grad erreicht, gerechtfertigt. Ihre Gültigkeit in diesem Umfang genügt für uns und in der That wird sie für leichtere Unstetigkeiten unrichtig, wie z. B. wenn γ in der Entfernung ϱ des Punktes O vom Unstetigkeitspunkt $=\left(\log\frac{1}{\varrho}\right)^\mu$ und $\mu < \frac{1}{2}$ ist. Wir geben daher dem ersten Theil des Satzes im Art. 16. folgende Beschränkung: Das Integral Ω hat, $\omega = \alpha + \lambda$ gesetzt, entweder für eine der Functionen λ ein Minimum, oder λ nimmt, während Ω sich einem kleinsten Grenzwerth nähert doch nur in einzelnen Punkten eine Unstetigkeit an, bei welcher die Ordnung von $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial y}$, wenn sie unendlich werden, die Einheit nicht erreicht.

Eine Unstetigkeit der Function ω, die durch Abänderung eines Werthes in einem Punkt hebbar ist, muss z. B. eintreten, wenn in der Fläche irgendwo ein Stich, also ein einzelner Begrenzungspunkt, wo $\lambda = 0$ sein müsste, angenommen würde.