3. Zusammensetzung von Kräften (technische Anwendungen des Kräfteparallelogramms und des Kräftedreiecks).

Bringt man an einer leichten Pappscheibe, wie in Abb. 31 gezeichnet, mit Hilfe von Schnüren, die über Rollen geleitet und mit Gewichten belastet sind, drei Kräfte an, so wird es sich zeigen, daß es nicht gelingt, die Scheibe so einzustellen, daß die Kraft 40 ein Stück weit, sagen wir 2 cm, an dem Punkt C, in dem die Richtungen der Kräfte 20 und 30 sich schneiden, vorbeigeht. Der Grund ist klar. Bei der links gezeichneten Stellung haben die Kräfte 20 und 30 kein Drehmoment mit Bezug auf Punkt C, nur die Kraft 40 übt ein Drehmoment $40 \times 2 = 80$ aus. Diesem Drehmoment wird in keiner Weise

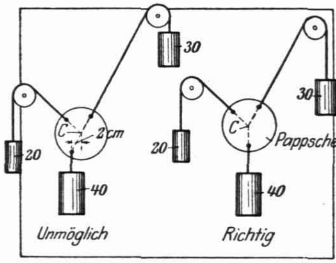

Abb. 31. Zusammenwirken von drei Kräften.

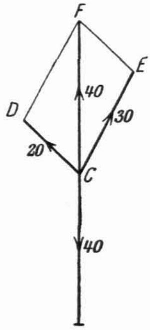

Abb. 32. Parallelogramm der Kräfte.

das Gleichgewicht gehalten, die Scheibe wird also aus dem Gleichgewicht gebracht und gedreht, bis sie von selbst in eine Lage kommt, bei der die Richtungen der drei Kräfte, wie in Abb. 31 rechts gezeichnet, durch einen und denselben Punkt gehen. Drei Kräfte, die auf einen Körper wirken, müssen sich also stets in einem Punkte schneiden.

Daß diese drei Kräfte auch ihrer Größe nach in einem bestimmten Zusammenhang stehen müssen, ist aus der elementaren Physik bekannt. Trägt man die beiden Kräfte 20 und 30 vom Schnittpunkt C aus in ihren Richtungen als Längen von 20 und 30 mm auf und bildet daraus ein Parallelogramm, indem man, wie in Abb. 32, durch die Endpunkte D und E Parallelen zu den Kräften 20 und 30 zieht, so ergibt sich als Diagonale CF des Parallelogramms eine Mittelkraft 40, welche die beiden Seitenkräfte 20 und 30 vollkommen ersetzt. Bringt man bei dem Versuch nach Abb. 31 diese Kraft 40 vom Punkt C aus in senkrechter Richtung nach oben an, während die Kräfte 20 und 30 fortgenommen werden, so zeigt sich in der Tat, daß wieder Gleichgewicht herrscht; die nach oben wirkende Kraft 40 und die nach unten wirkende Kraft gleicher Größe heben sich auf.

Ebenso wie hier die Kräfte 20 und 30 zu einer Mittelkraft zusammengesetzt wurden, können wir auch eine Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegen. Wäre z. B. in Abb. 32 die Kraft $CF = 40$ von vornherein gegeben, und würde gefordert, daß diese Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegt werden soll, die ganz bestimmte Richtungen haben, so würden wir durch den Punkt F die Parallelen zu den Kraftrichtungen ziehen und auf diese Weise die Größe der Kräfte CD und CE bestimmen.

Für die Zusammensetzung von Kräften liefert die folgende Aufgabe ein recht anschauliches Beispiel (vgl. Abb. 33). Von einem Gebäude einer Fabrikanlage zum andern soll eine Förderung eingerichtet werden, und zwar mit Hilfe eines ausgespannten Trag-

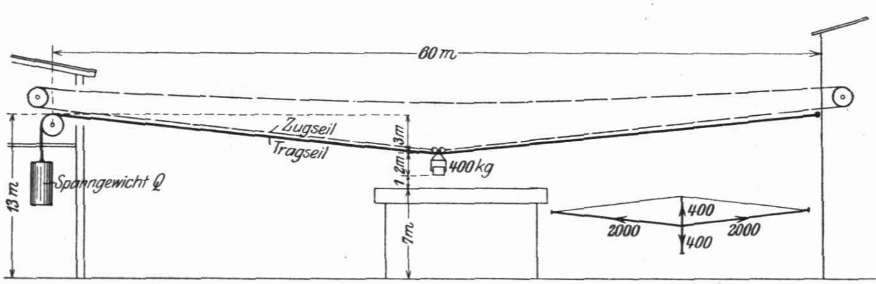

Abb. 33. Skizze zur Berechnung des Tragseil-Spanngewichtes für eine einfache Seilbahn.

seiles, auf dem durch ein zweites dünneres Seil, das „Zugseil“, ein Wagen hin und her gezogen wird. Das Tragseil wird an der Mauer des einen Fabrikgebäudes festgemacht, am anderen Ende über eine Rolle geführt und durch ein Gewicht Q belastet, das dazu dient, das Seil straff zu ziehen. Je schwerer Q ist, um so weniger wird das Seil in der Mitte durchhängen, wenn der Wagen darüber fährt.

Es sei nun angenommen, daß die beiden Enden des ausgespannten Seiles 13 m über dem Erdboden liegen. In der Mitte des Hofes steht ein 7 m hoher Schuppen. Der Wagen selbst, der mit seiner Ladung 400 kg wiegt, ist 2 m hoch, und es wird sicherheitshalber vorgeschrieben, daß er mindestens 1 m über dem Dach des Schuppens bleiben soll. Damit ergibt sich, wie eingeschrieben, daß das Seil um $13 - 7 - 1 - 2 = 3$ m durchhängen darf. Zu berechnen ist, wie schwer das Belastungsgewicht Q sein muß, um zu verhindern, daß der Durchhang größer wird.

Es ist ohne weiteres klar, daß die in den Seilsträngen rechts und links vom Wagen wirkenden Seilspannungen, die schräg nach aufwärts gerichtet sind, zusammen eine Mittelkraft geben müssen, die gleich dem Wagengewicht von 400 kg ist. Da die Neigung der Seile 3:30 oder 1:10 beträgt, so läßt sich das Parallelogramm der Kräfte, wie in Abb. 33 geschehen, ohne weiteres aufzeichnen, indem man die Gegenkraft von 400 kg senkrecht nach oben gerichtet aufträgt — beispielsweise in einer Länge von 40 mm, wobei also 1 mm 10 kg entsprechen würde — und rechts und links vom unteren Ende der Kraft die beiden Seilspannungen parallel zu den Seilrichtungen zieht. Durch den oberen Endpunkt der Kraft werden dann parallele Linien gezogen und so das Parallelogramm gebildet, aus dem sich ergibt, daß die Seilspannung ungefähr 2000 kg sein muß. So schwer ist also das Gewicht Q zu machen.

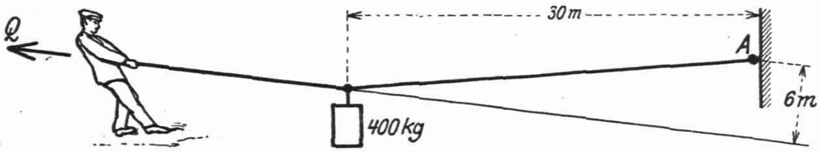

Abb. 34.

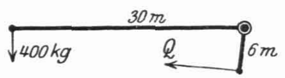

Abb. 35.

Abb. 34 und 35. Umformung eines belasteten Seiles in einen Hebel zum Zwecke der Berechnung der Seilspannung.

Die Benutzung des Kräfteparallelogramms ist übrigens durchaus nicht der einzige Weg und vielleicht auch gar nicht der einfachste, um zu einem Ergebnis zu kommen. Wiederholt war ja schon darauf hingewiesen worden, daß es für die äußeren Kräfte ganz gleichgültig ist, auf welche Weise sie im Innern durch den Körper hindurch übertragen werden. Wir können daher sogar den kühnen Schritt tun, das Seil als einen Hebel aufzufassen, obwohl es biegsam ist und daher seiner Natur nach mit einem körperlichen Hebel gar keine Ähnlichkeit hat. Schneiden wir einmal, wie wir es bei dem Brückenträger in Abb. 26 getan hatten, das Seil durch und denken wir uns an der Schnittstelle einen Mann mit der Kraft Q ziehend, Abb. 34. Wir haben dann einen Hebel mit A als festem Drehpunkt vor uns. So verblüffend es auf den ersten Blick scheinen mag, so entspricht doch der in Abb. 35 skizzierte Hebel für die Zwecke dieser Berechnung vollkommen dem Gebilde nach Abb. 33 und 34. Es liegt also wieder ein sehr kennzeichnendes Beispiel für das willkürliche Umformen der Gegenstände in der Vorstellung für die Zwecke der Rechnung vor. Die Rechnung selbst ist jetzt sehr einfach. Das Gewicht 400 kg dreht links herum mit einem Moment $400 \times 30 = 12\,000$ mkg. Das Moment der Kraft Q (Hebelarm 6 m)

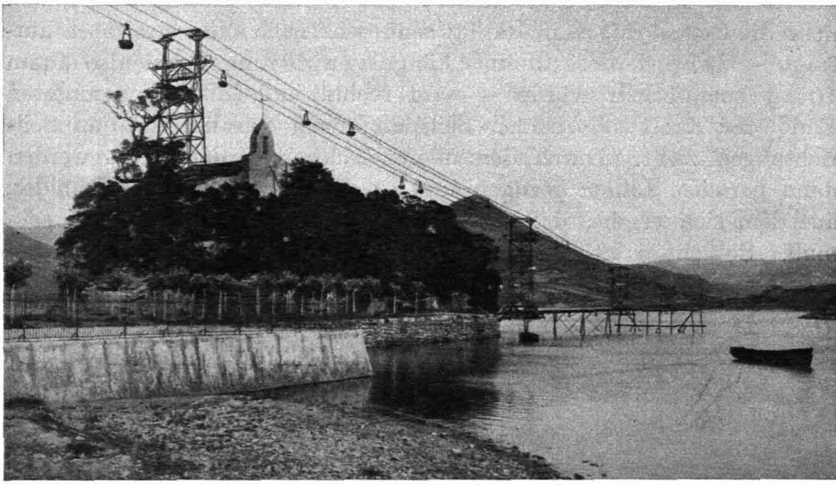

Abb. 36. Drahtseilbahnanlage (Ausführung von Adolf Bleichert & Co., Leipzig).

muß diesem Moment gleich sein, Q ist also $\frac{12\,000}{6} = 2000$ kg, wie ja auch vorher ermittelt wurde.

Bei großen Drahtseilbahnen, Abb. 36, ist die Rechnung grundsätzlich dieselbe, auch wenn eine ganze Anzahl Wagen sich auf einer Strecke zwischen zwei Stützen befinden. Die Spanngewichte der Tragseile müssen meist sehr schwer sein, bis zu 20 000 kg und darüber. Man stellt dann besondere Gewichtskästen her, große eiserne Kessel, und füllt sie mit Eisenstücken, Steinen und dergleichen. Die Art und Weise, wie das Spanngewicht wirkt, ist durch einen Versuch, z. B. am Pantechno[1]), gut zu veranschaulichen. Man kann eine Anzahl kleiner Gewichte in gleichmäßigen Abständen auf das Seil hängen, Abb. 37, und damit eine Drahtseilbahn mit einer größeren Spann-

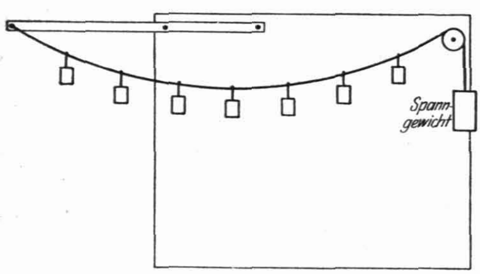

Abb. 37. Versuch zur Darstellung der Abhängigkeit des Durchhanges eines Seiles von der Größe des Spanngewichtes.

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 6.

weite, auf der sich eine Reihe Wagen befinden, richtig darstellen. Macht man das Spanngewicht Q größer oder kleiner, so ändert sich auch jedesmal der Durchhang des Seiles.

Recht einfach ist jetzt auch die Berechnung eines Tragarmes nach Abb. 38 durchzuführen, der aus einem Gebäude herausragt und nach oben hin durch eine schräge Zugstange verspannt ist. Solche Vorrichtungen werden z. B. benutzt, um Lasten daran hochzuwinden. Am äußersten Ende des Trägers hänge eine Last von 5000 kg, und es sollen die Kräfte P_1 und P_2 berechnet werden, die in dem Träger und der Zugstange herrschen. Die beste Vorstellung geben

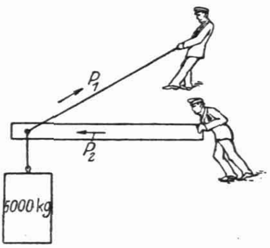

Abb. 39.

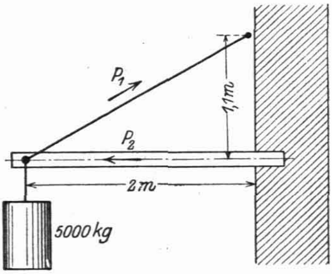

Abb. 38.

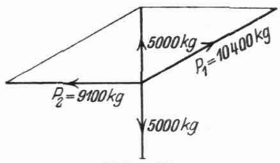

Abb. 40.

Abb. 38 bis 40. Skizzen zur Berechnung einer einfachen Tragkonstruktion mit Hilfe des Parallelogrammes der Kräfte.

wieder die beiden Männer, von denen der eine zieht, der andere drückt, um das Ganze im Gleichgewicht zu halten, Abb. 39. Offenbar müssen diese beiden Männer zusammen eine Kraft hervorbringen, welche die Kraft Q aufzuheben imstande ist, und daraus ergibt sich dann von selbst das in Abb. 40 gezeichnete Kräfteparallelogramm, aus dem P_1 und P_2 sich ohne weiteres herausmessen lassen. Wir können aber auch wieder von der Hebeltheorie ausgehen und dabei zunächst etwa A als Drehpunkt nehmen, Abb. 41. Dann ergibt sich aus den eingeschriebenen Zahlen, daß die Momente 5000×2 und $P_1 \times 0{,}96$ einander gleich sein müssen, daß also $P_1 = \frac{5000 \times 2}{0{,}96} = 10\,400$ kg ist.

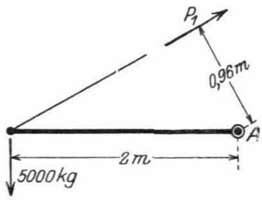

Abb. 41. Tragkonstruktion nach Abb. 38, als Hebel berechnet.

Noch ein letztes Beispiel für diese Art der Berechnung. Für einen Dachträger nach Abb. 42 sollen die Auflagerkräfte bestimmt werden, und zwar wirken auf den Träger erstens das Eigengewicht der Dachkonstruktion einschließlich der Dachdeckung und der Schneelast in Höhe von zusammen 12 000 kg, zweitens ein Winddruck von 7500 kg, der, wie üblich, als unter 10° gegen die Wagerechte geneigt angenommen ist. Wäre der Träger auf beiden Seiten fest mit dem Stützmauerwerk verbunden, wie beim linken Auflager angedeutet, so wäre die Aufgabe überhaupt nicht mit Sicherheit zu lösen. Es würde von Zufälligkeiten abhängen, von einer mehr oder minder genauen Aufstellung, sodann namentlich auch von der Ausdehnung der Trägerkonstruktion durch die Wärme, wie groß und wie gerichtet die Drücke sind, so daß eine sichere Berechnung der Spannungen in dem Stabwerk, die ja von den Auflagerkräften abhängen, nicht möglich wäre. Einen solchen „statisch unbestimmten" Trä-

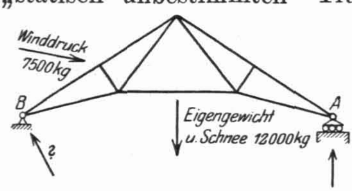

Abb. 42.

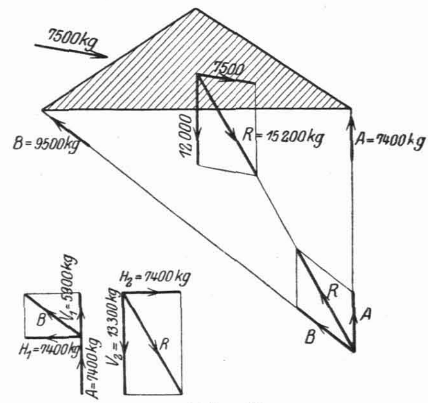

Abb. 43.

Abb. 42 und 43. Skizzen zur Berechnung eines Dachträgers.

ger vermeidet man, wenn es irgend geht; es stehen Mittel zur Verfügung, um den Kräften die Richtung, die sie innehalten sollen, vorzuschreiben. In Abb. 42 ist dazu ein Rollenlager benutzt worden, auf dem das rechte Trägerende ruht. Dieses Rollenlager ist eine Art von kleinem Wagen, auf dem das Auflager des Trägers, wenn die Konstruktion sich zusammenzieht oder ausdehnt, sozusagen hin- und herfährt[1]). Wagerechte oder schief gerichtete Kräfte können zwischen diesem Wagen und seiner Unterlage nicht auftreten, denn wenn eine solche Kraft im Entstehen begriffen wäre, so würde sie sofort den Wagen verschieben. Wir dürfen also, wenn von den verhältnismäßig geringen Reibungswiderständen abgesehen wird, damit rechnen, daß die Kraft an diesem Auflager rein senkrecht wirkt, wie in der Skizze angegeben, und sind nun auch in der Lage, die Auflagergegenkraft *B*, deren Richtung wir vorläufig noch gar nicht kennen und die deshalb in Abb. 42 mit einem Fragezeichen versehen ist, zu bestimmen.

---

[1]) An Brücken und Bahnhofshallen kann man ebenfalls solche Rollenlager beobachten.

Um die Rechnung auf einmal zu erledigen, vereinigen wir zunächst nach Abb. 43 mit Hilfe des Kräfteparallelogrammes die beiden bekannten Kräfte, Eigengewicht und Winddruck, zu einer Mittelkraft R, die eine Größe von 15 200 kg hat und schräg nach abwärts gerichtet ist. Die Form des Körpers, auf den die Kraft wirkt, ist bekanntlich, solange es sich nur um die von außen angreifenden Kräfte handelt, völlig gleichgültig, und der Träger ist daher, um alles störende Beiwerk zu entfernen, in Abb. 43 zunächst als ein einfaches Dreieck gezeichnet, an dem die Mittelkraft R der Größe und Richtung nach, die eine Auflagerkraft A wenigstens der Richtung nach bekannt ist, während wir von der dritten Kraft nur wissen, daß sie durch den Punkt B geht. Und nun erinnere man sich an das, was an Abb. 31 erläutert worden war: drei Kräfte, die auf einen Körper wirken, müssen stets durch einen Punkt gehen, wenn Gleichgewicht vorhanden ist! Das Rechnungsverfahren gestaltet sich auf Grund dieses Gesetzes sehr einfach. Die bekannten Kräfte A und R werden verlängert, bis sie sich schneiden, und nach diesem Punkt ziehen wir vom Auflagerpunkt B aus die Richtung der zweiten Auflagerkraft, die schräg nach oben wirkt. Aus dem Kräfteparallelogramm ergibt sich dann die Größe von A und B, wie in der Abbildung eingeschrieben.

Auch hier lassen sich noch andere Rechnungsverfahren anwenden, vor allem die Drehmomentenrechnung, indem man A oder B als Drehpunkt annimmt. Sodann ist es auch immer gut, nachzuprüfen, ob alle senkrecht gerichteten Kräfte sich gegenseitig aufheben, und ob dies auch bei den wagerecht gerichteten Kräften zutrifft. Bei einem im Gleichgewicht befindlichen System muß das selbstverständlich immer der Fall sein, denn wenn irgendwo eine Kraft übrig bliebe, so würde sich ja das Dach seitlich oder nach oben oder unten verschieben müssen. Wir zerlegen, um die Kontrolle auszuführen, R und B in ihre wagerecht und senkrecht gerichteten Seitenkräfte, wie in den Nebenfiguren zu Abb. 43 angedeutet. Es zeigt sich, daß die wagerechten Kräfte H_1 und H_2 beide 7400 kg betragen, also einander aufheben, und ebenso, daß die senkrecht nach oben gerichteten Kräfte A und V_1 zusammengenommen der nach unten gerichteten Seitenkraft V_2 gleich sind.

Das Beispiel lehrt eine neue Seite der wissenschaftlichen Arbeit des Technikers kennen. Der Theoretiker hat nicht das Gebilde, das er berechnen soll, einfach aus den Händen des entwerfenden Ingenieurs übernommen und es dann seinen Untersuchungsverfahren unterworfen, sondern er hat dem Konstrukteur die Vorschrift gemacht, den Träger so zu bauen, daß er, der Theoretiker, seine Berechnungsverfahren ohne Schwierigkeit anwenden und sicher voraussagen kann, was für Kräfte auftreten werden. Würde diese theoretische Forderung nicht praktisch erfüllt werden, so käme nicht nur eine gewisse Unsicherheit in die Konstruktion hinein, sondern es wäre auch erforderlich, für alle möglichen Fälle vorzusorgen und den Träger stärker zu machen, als er sonst zu sein brauchte, damit unter keinen Umständen eine Überlastung eintritt. Auf dem eingeschlagenen Wege gelangt man also zu der höchsten Ausnutzung des Materials oder, anders ausgedrückt, zu dem geringsten Verbrauch an Baustoffen, zu der vorteilhaftesten, billigsten Bauweise.

4. Technische Anwendungen des Gesetzes von der Erhaltung der Energie.

Berechnung von Schrauben- und Räderwinden.

Zu neuen Gesichtspunkten und Untersuchungsverfahren führt die in Abb. 44 skizzierte Aufgabe: ein Eisenbahnwagen von 15 t Gewicht soll durch ein Seil, das von einer Winde bewegt wird, eine schräge Strecke hinaufgezogen werden, die 100 m lang ist und auf diese Länge gleichmäßig um 12 m steigt. Wie groß muß die Kraft im Seile sein?

Die alte Methode der Kräftezerlegung gibt rasch eine Antwort. Der Körper, der die Steigung hinaufbewegt werden soll, wiegt 15000 kg. Das bedeutet dasselbe, wie wenn der Wagen an sich kein Gewicht hätte, aber statt dessen ein Gewicht von 15000 kg daran hinge, oder als ob, wie in Abb. 45 skizziert, eine lotrecht nach unten gerichtete Kraft von 15000 kg auf den Wagen wirkte. Denken wir uns nun, daß statt der lotrechten Kraft (des Gewichtes) nur solche Kräfte auf den Wagen wirkten, die entweder, wie in Abb. 46 die Kraft N, rechtwinklig zu der schrägen Fahrbahn stehen oder, wie die Kräfte P und Z, parallel dazu gerichtet sind. Dann ist es klar, daß die rechtwinkligen Kräfte nur den Wagen fester auf die Schienen drücken, auf denen er fährt, daß sie ihn aber die Steigung weder herauf- noch herunterziehen können. Die Kraft P dagegen, die parallel zu der schrägen Strecke gerichtet ist, ist bestrebt, den Wagen nach abwärts zu ziehen, und ihr muß der Zug Z im Seil das Gleichgewicht halten.

Die Lösung ergibt sich jetzt von selbst. Wir zerlegen nach der Methode des Kräfteparallelogramms, Abb. 47, die Gewichtskraft von 15000 kg in eine Kraft N, die senkrecht zur schiefen Ebene wirkt und deren Größe für die Aufgabe, die wir jetzt vorhaben, gleichgültig ist, und in eine Kraft P, die parallel zur schiefen Ebene läuft. Wird das Parallelogramm maßstäblich gezeichnet und ausgemessen,