Die Elemente der Mathematik.

Ein Hülfsbuch

für

den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten

von

Dr. Friedrich Reidt,
Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm.

Erster Theil.

Allgemeine Arithmetik und Algebra.

Zweite Auflage.

Berlin,
G. Grote'sche Verlagsbuchhandlung.
1874.

Vorrede.

In der vorliegenden neuen Auflage wird man den ursprünglichen Plan und seine Ausführung in allem Wesentlichen unverändert beibehalten, daneben aber im Einzelnen vielfach das Streben nach Verbesserung, und insbesondere auch die Wünsche geehrter Recensenten nach Kräften berücksichtigt finden. In allen Fällen konnte diese letztere Berücksichtigung freilich nicht stattfinden, schon deßhalb nicht, weil Fälle vorgekommen sind, in denen gerade das, was der Recensent verlangte, ebenso im Buche stand, das Getadelte also gar nicht vorhanden war, sowie weil mehrfach die Forderungen verschiedener Beurtheiler einander direct widersprachen. Auch dürfte es für den Verf. nicht gerathen sein, solchen Ansichten anderer, welche mit seiner eigenen pädagogischen Erfahrung nicht übereinstimmen, nachzugeben, und ohne Noth den Character seines Buches, wenn auch nur in Einzelheiten, zu ändern, nachdem dasselbe in der bisher vorliegenden Form an einer größeren Reihe von Anstalten Eingang gefunden hat.

So habe ich mich z. B. nicht entschließen können, die Beweise von Sätzen, welche zunächst unter einer besonderen Voraussetzung (z. B. ganzer, positiver Exponenten) aufgestellt waren, nachher auch noch für die Erweiterung des betreffenden Begriffs vollständig im Buche auszuführen, und mich auf eine kurze Angabe der diesen Ausführungen zu Grunde liegenden Principien beschränkt. Dadurch, daß der Nachweis der allgemeinen Richtigkeit vom Schüler selbst verlangt wird, ist demselben nach dem Vorausgegangenen und den gegebenen Andeutungen schwerlich zu viel zugemuthet, vielmehr gestaltet sich dadurch dieser Nachweis zu einer der Uebung des Schülers dienenden Aufgabe, und allein durch solche Selbstthätigkeit desselben wird der Character einer „langweiligen" Wiederholung beseitigt werden, der durch die betreffende Ausführlichkeit des Lehrbuchs eher verstärkt als gemildert werden dürfte. Ebenso erschien es mir aus leicht erkennbaren pädagogischen Gründen nicht zweckmäßig, den Begriff der irrationalen Zahl schon bei der Division (dem Messen) einzuführen, obgleich dies wissenschaftlich vielleicht richtiger wäre. — Darüber, ob die Proportionen in's System gehören, läßt sich bekanntlich streiten; jedenfalls ist es für den Gebrauch des Buches ziemlich gleichgültig, ob sie unter der Ueberschrift „Anhang" oder unter einer fortlaufenden Paragraphen-Nummer stehen. Aehnliches gilt von den Kettenbrüchen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wenn übrigens erstere ausgedehnter behandelt sind, als dies gewöhnlich der Fall ist, so glaube ich auch dafür gute Gründe zu haben. Dieselben liegen zunächst in der durch den Gegenstand gebotenen Gelegenheit zur Anwendung sonst selten vorkommender Schlußweisen, wie des Schlusses von n auf $n+1$, sodann in dem Vortheil der Lösung verschiedener schwierigerer Aufgaben durch ein im Wesentlichen gleichmäßiges Verfahren. So dürfte es nicht unstatthaft sein, bei den Logarithmen die wenig erquickliche und viel Zeit erfordernde Behandlung veralteter Methoden zur Berechnung der Tafeln fallen zu lassen und die Lücke bei den Kettenbrüchen auszufüllen, durch welche die Möglichkeit jener Berechnung, und zwar jedes einzelnen Logarithmus auch außer der Reihe, in sehr kurzer Zeit klar gemacht werden kann. Ebenso dürfte es angenehm sein, in Kürze eine Methode zeigen zu können, durch welche es möglich ist, wenn auch mühsam, numerische Gleichungen beliebiger höherer Grade näherungsweise aufzulösen. Selbstverständlich liegt es mir dabei fern, eine Vorschrift geben zu wollen, und einer Beschränkung des Stoffs im einzelnen Fall steht nichts im Wege. — In dem Anhang über Zahlenlehre habe ich absichtlich allgemeinere Sätze über Congruenzen ausgeschlossen und mich an den betreffenden Stellen auf den besonderen Fall der Theilbarkeit beschränkt. Im Unterricht gilt ja ohnedies das Princip, vom Besonderen zum Allgemeinen aufzusteigen, und die Gefahr, zu weit zu gehen, liegt namentlich auf dem genannten Gebiete sehr nahe. Die elegante Kürze allgemeiner Entwickelungen, welche mit einem Schlage viele besondere Fälle umfassen, bewirkt für den Schüler zuweilen mehr Umständlichkeit, als die scheinbare Breite bei Behandlung des Einzelnen.

Eine elementare Einleitung in die Theorie der Determinanten der neuen Auflage beizufügen, schien mir deßhalb noch nicht angezeigt, weil hierbei zugleich die Beigabe eines ausgedehnten Uebungsmaterials schwerlich umgangen werden könnte. Hierdurch würde das vorliegende Heft einen erheblich größeren Umfang erhalten haben, was gegenüber dem Umstand, daß die Einführung der Determinanten in den Schul-Unterricht noch weit davon entfernt ist, eine allgemeine zu sein, nicht ohne Bedenken wäre. Doch behalte ich mir vor, den Gegenstand in einem besonderen Heftchen zu behandeln, welches als Anhang zu dem vorliegenden, wie auch zu anderen Lehrbüchern der Arithmetik dienen kann.

Denjenigen Herren Collegen, welche mich durch ihre schätzenswerthen Bemerkungen über einzelne Stellen des Buches unterstützt haben, sage ich meinen besten Dank.

Hamm, im Januar 1874.

Reidt.

Inhalt des ersten Theiles.

Einleitung.

Die Arithmetik ist die Lehre von den Zahlen und ihren Verbindungen mit einander. Eine Zahl entsteht durch Zählen (Numeriren), d. h. durch wiederholtes Setzen einer Einheit (z. B. ein Pfund, ein Meter, ein Baum), sie ist also eine kurze Bezeichnung für eine bestimmte Menge von Einheiten einer und derselben Art. Man erhält durch das Zählen die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, . . ., welche bis ins Unendliche fortschreitet.

Jede Zahl ist also ursprünglich eine benannte, und die Benennung wird ihr durch die Einheit gegeben. Man kann aber auch von der Benennung absehen, wie z. B. bei der Frage, welche der Zahlen 5 oder 3 die größere sei, wobei es gleichgiltig ist, auf welche Einheit sich beide Zahlen beziehen. Auf diese Art erhält man unbenannte Zahlen.

Außer diesen bestimmten Zahlzeichen bedient sich die Arithmetik noch der Buchstaben, und zwar entweder zur Bezeichnung von solchen Zahlen, deren Werth unbekannt ist (z. B. in der Aufgabe: eine Zahl x, die ich im Sinne habe, beträgt mit 7 zusammen 12; wie heißt die Zahl? woraus sich für x der Werth 5 ergiebt), oder von solchen, deren Werth unbestimmt gelassen werden soll, sodaß es gestattet ist, sich jede beliebige bestimmte Zahl unter einem solchen Buchstaben vorzustellen. Dieser letztere Gebrauch der Buchstaben findet namentlich zum Zwecke kurzer Darstellung allgemeiner Regeln und Gesetze statt, welche für alle Zahlen, abgesehen von ihren speciellen Werthen, Geltung haben.

Rechnen heißt durch Verbindung von zwei oder mehreren Zahlen neue Zahlen ableiten, welche zu jenen in einer vorgeschriebenen Beziehung stehen.

Wird derselbe Buchstabe in einer und derselben Rechnung wiederholt gebraucht, so bezeichnet er jedesmal dieselbe Zahl.

An dieser Stelle muß durch möglichst zahlreiche Beispiele der Gebrauch der Buchstaben als allgemeiner Zahlzeichen erläutert und eingeübt werden, wozu sich die aus dem practischen Rechnen bekannten Regeln eignen. Man verfahre etwa wie folgt:

Es ist $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$; $\frac{5}{11} + \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$; $\frac{13}{17} + \frac{2}{17} = \frac{15}{17}$, u. s. w. Allen diesen Beispielen liegt ein gemeinschaftliches Gesetz (gleichnamige Brüche werden addirt, indem man ihre Zähler addirt und den Nenner beibehält) zu Grunde. Mittelst

Buchstaben kann dieses Gesetz ganz einfach durch die Formel $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$. dargestellt werden, in welcher alle möglichen hierher gehörigen bestimmten Aufgaben enthalten sind. So erhält man die obigen Beispiele, wenn man beziehungsweise für a, b, c die Werthe 2, 3, 7, oder 5, 3, 11, oder 13, 2, 17 einsetzt. In ähnlicher Weise nehme man z. B. die sämmtlichen Regeln der Bruchrechnung durch, indem man die Formeln für dieselbe aufsuchen und die gefundenen, oder auch andere, unmittelbar aufgestellte, wieder in Worten aussprechen läßt.

I. Abschnitt: Die vier Species.

I. Capitel.

Addition und Subtraction.

§ 1. Erklärung.

Eine Zahl b zu einer anderen Zahl a addiren heißt diejenige Zahl c suchen, welche entsteht, wenn man von a Einheiten anfangend, um b Einheiten weiterzählt. Die Aufgabe, b zu a zu addiren, wird durch $a + b$, gelesen „a plus b“, ausgedrückt; a heißt der Augend, b der Addend, $a + b$ die Summe und c der Werth der Summe.

Anmerkung 1: Daß zwei Größen gleiche Werthe haben, wird dadurch ausgedrückt, daß man beide durch das Gleichheitszeichen = verbindet. Es ist also vorher $a + b = c$. Ein derartiger Ausdruck heißt eine Gleichung, und die beiden gleichgesetzten Größen heißen ihre Seiten. (Linke und rechte Seite.)

Man erhält denselben Werth der Summe, wenn man von a Einheiten an um b Einheiten, und wenn man von b Einheiten an um a Einheiten weiter zählt, oder es ist

$$(1) \qquad a + b = b + a.$$

Daher erhalten Augend und Addend den gemeinschaftlichen Namen Summanden (Posten), und man kann nun die Rechnungsart der Addition auch, wie folgt, erklären:

Zwei Zahlen a und b addiren, heißt eine dritte Zahl c suchen, welche soviel Einheiten enthält, als a und b zusammen.

Anmerkung 2: Die practische Ausführung der Addition geschieht nicht durch Weiterzählen mit den einzelnen Einheiten, sondern mittelst der (auswendig gelernten) Resultate aller Summen einziffriger Zahlen („Eins und Eins“). — Man kann nur solche Zahlen addiren, welche sich auf dieselbe Einheit beziehen.

Beispiele: Heis, Sammlung v. Beisp. u. Aufgaben. § 1. Bardey I 2–3, 11; II 8, 14, 18.

§ 2. Erklärung.

Eine Zahl b von einer Zahl c subtrahiren (abziehen), heißt zu dem Werthe c einer Summe und ihrem einen Summanden b den anderen Summanden a suchen. Man schreibt $c - b = a$ (gelesen „c minus b gleich a") und nennt c den Minuend, b den Subtrahend, $c - b$ eine Differenz und a den Werth der Differenz (Rest).

Eine Differenz ist also ein Zeichen für diejenige Zahl, welche zum Subtrahenden addirt, den Minuenden giebt, oder es ist

(2) $$(c - b) + b = c.$$

Anmerkung 1: Der Gebrauch der Klammer in der vorstehenden wie in den späteren Gleichungen, als eines Mittels, um den Inhalt derselben zu der Bedeutung einer einzigen Zahl (des Resultates) zu erheben, ist leicht verständlich.

Anmerkung 2: Die Subtraction ist also die der Addition entgegengesetzte Rechnungsart. Streng genommen giebt es zwei Arten der Subtraction, da entweder der Addend gegeben und der Augend gesucht, oder der Augend gegeben und der Addend gesucht sein kann. Im letzteren Falle wäre die Anzahl der Einheiten gesucht, welche man zu dem Subtrahendus addiren muß, um den Minuend zu erlangen, im ersteren Falle dagegen wäre die Zahl gesucht, welche man erhält, wenn man vom Minuend aus um so viele Einheiten rückwärts zählt, als der Subtrahend besitzt. Beide Subtractionen fallen aber in Folge der Gleichung (1) in eine Rechnungsar zusammen.

Die practische Ausführung der Subtraction geschieht vermittelst der — als bekannt vorausgesetzten — Werthe aller Differenzen ein- bis zweiziffriger Zahlen. („Eins von Eins".)

Minuend und Subtrahend einer Differenz müssen selbstverständlich in denselben Einheiten ausgedrückt sein.

Beispiele: Heis § 2. § 8, Nr. 1 β, 5 β, 11, 13, 18. Bardey I 4—5, 12, 16—18. II 9, 10, 15, 19, 20.

Anmerkung 3: Die unbekannte Größe x aus der Gleichung $x + b = c$ finden, heißt also nichts anderes, als b von c subtrahiren. Aehnlich folgt aus $x - a = b$, daß $x = b + a$, und aus $c - x = b$, daß $x = c - b$ ist. Beispiele.

§ 3.

Der Gegensatz zwischen Addition und Subtraction führt noch zu folgenden **Lehrsätzen:**

Subtrahirt man von einer Summe einen ihrer Summanden, so erhält man den anderen, oder

(3) $$(a + b) - b = a;\ (a + b) - a = b.$$

Beweis: $(a + b) - b$ bedeutet den Summanden, der zu b addirt $a + b$ giebt, d. i. a.

Subtrahirt man eine Differenz von ihrem Minuend, so erhält man den Subtrahend, oder

(4) $$a - (a - b) = b.$$

Beweis: Denn b giebt nach (2), zu $a - b$ addirt, zur Summe a.

Beispiele in Heis § 8. Bardey III 13—18.

§ 4. Addition und Subtraction mit mehr als zwei Zahlen. Klammern.

Sollen mehr als zwei Zahlen durch Addition oder Subtraction verbunden werden, so kann dies nur in der Weise geschehen, daß man zunächst zwei derselben mit einander verbindet, das Resultat dieser Verbindung als einfache Zahl an die Stelle der beiden in ihr vereinigten Zahlen setzt, und in derselben Weise durch Verbindung von je zwei Zahlen zu einer neuen fortfährt, bis man zu dem Gesammtresultat gelangt.

Beispiel: $5 + 7 - 3 - 4 + 11 - 2$. Es ist $5 + 7 = 12$, $12 - 3 = 9$, $9 - 4 = 5$, $5 + 11 = 16$, $16 - 2 = 14$.

Da man aber durch die Verbindung der gegebenen Zahlen in verschiedener Reihenfolge zu verschiedenen Resultaten gelangen kann, so muß die Reihenfolge angegeben werden, in welcher die einzelnen Zahlen zu je zweien mit einander verbunden werden sollen. Dies geschieht durch Klammern.

So ist z. B. $[(12+7)-(3+8)]+(11-2)=[19-11]+9=8+9=17$, dagegen $\{12+[(7-3)+(8+11)]\}-2=\{12+[4+19]\}-2=\{12+23\}-2=35-2=33$.

Beispiele Heis § 6, 1—8. Bardey II 47, n. 1—4.

§ 5. Veränderung der Reihenfolge bei Additionen und Subtractionen ohne Veränderung des Resultates.

Lehrsatz: Sollen mehrere Zahlen nach einander addirt werden, so ist es einerlei, in welcher Reihenfolge dies geschieht, oder

(5) $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$, und umgekehrt:

(6) $a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b$.

Beweis: Die Anzahl der in den Summanden enthaltenen Einheiten, und also auch der Werth ihrer Summe wird durch die Aenderung der Reihenfolge der Summanden nicht verändert.

Anmerkung 1: Man kann die vorstehenden Sätze in abgekürzter Form auch so aussprechen:

Statt eine Zahl zu einer Summe zu addiren, kann man sie zu einem der Summanden addiren.

Statt eine Summe (zu einer Zahl) zu addiren, kann man ihre Summanden nach einander (in beliebiger Reihenfolge) addiren.

Anmerkung 2: Es ist demnach auch

$\{(a+b)+c\}+d=(a+b)+(c+d)=\{a+(b+c)\}+d$, u. s. w.

Lehrsatz: Sollen mehrere Zahlen nach einander subtrahirt werden, so darf man dieselben einzeln in beliebiger Reihenfolge, oder statt dessen auch ihre Summe subtrahiren, und umgekehrt, soll eine Summe von einer Zahl subtrahirt werden, so kann man ihre Summanden einzeln, und zwar in beliebiger Reihenfolge nach einander subtrahiren, d. h.,

$$(7)\quad (a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c),$$

$$(8)\quad a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b.$$

Beweis: Denn es wird dieselbe Anzahl von Einheiten von a subtrahirt, wenn man dieselben nach und nach in beliebiger Reihenfolge und wenn man sie zugleich, d. h. ihre Summe, subtrahirt.

Anmerkung 1: Andere Fassung der Sätze: Statt eine Zahl von einer Differenz zu subtrahiren, kann man sie vom Minuend subtrahiren oder auch zum Subtrahend addiren.

Statt eine Summe zu subtrahiren, kann man ihre Summanden nach einander subtrahiren.

Anmerkung 2:

$$a-(b+c+d)=a-b-c-d=a-c-b-d, \text{ u. s. w.}$$

Lehrsatz: Soll zu einer Zahl eine zweite addirt und dann von der Summe eine dritte subtrahirt werden, so kann man entweder zuerst die dritte subtrahiren und dann die zweite addiren, oder die Differenz der zweiten und dritten zu der ersten addiren, und umgekehrt, soll eine Differenz zu einer Zahl addirt werden, so kann man ihren Minuend zu derselben addiren und dann den Subtrahend (von der Summe) subtrahiren, oder zuerst den Subtrahend subtrahiren und dann den Minuend addiren.

$$(9)\quad (a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c).$$

$$(10)\quad a+(b-c)=(a+b)-c=(a-c)+b.$$

Beweis: Denn die Anzahl der Einheiten, um welche a vergrößert wird, ist in allen Fällen dieselbe, nämlich gleich $b-c$, da diese Anzahl durch die Verschiedenheit der Reihenfolge der Vermehrung oder Verminderung nicht verändert wird.

Anmerkung: Statt eine Zahl von einer Summe zu subtrahiren, kann man sie von einem der Summanden subtrahiren.

Statt eine Differenz zu addiren, kann man den Minuend addiren und den Subtrahend subtrahiren (und zwar in beliebiger Reihenfolge).

Lehrsatz: Soll von einer Zahl zuerst eine zweite subtrahirt und dann zu der Differenz eine dritte addirt werden, so kann man zuerst die dritte addiren und dann von der Summe die zweite subtrahiren, oder man kann die Differenz der zweiten und dritten von der ersten subtrahiren, und umgekehrt, soll eine Differenz von einer Zahl subtrahirt werden, so kann man ihren Minuend von derselben subtrahiren und dann ihren Subtrahend (zu dieser Differenz) addiren, oder zuerst den Subtrahend addiren und dann den Minuend subtrahiren.

(11) $(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c)$.

(12) $a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b$.

Beweis: Die Anzahl der Einheiten, um welche a verkleinert werden soll, kann durch die Reihenfolge, in welcher subtrahirt und addirt wird, nicht verändert werden und ist in allen Fällen gleich $b - c$.

Anmerkung 1: Statt eine Zahl zu einer Differenz zu addiren, kann man sie zum Minuend addiren oder vom Subtrahend subtrahiren.

Statt eine Differenz zu subtrahiren, kann man den Minuend subtrahiren und den Subtrahend addiren (und zwar in beliebiger Reihenfolge).

Anmerkung 2: Der Inhalt der Lehrsätze (5) — (12) läßt sich dahin zusammenfassen, daß a) die Veränderung eines Summanden einer Summe durch Addition oder Subtraction eine gleiche Veränderung der Summe, b) die des Minuenden einer Differenz eine gleiche, die des Subtrahenden dagegen eine entgegengesetzte Veränderung des Werthes der Differenz bewirkt, und daß beim Addiren oder Subtrahiren von Summen oder Differenzen, die Summanden und Minuenden einzeln addirt, bezw. subtrahirt, dagegen die Subtrahenden subtrahirt, bezw. addirt werden können.

Die Beweise der Lehrsätze ergeben sich so unmittelbar aus den Begriffen der Addition und Subtraction, daß dieselben von einer Wiederholung ihres Inhaltes mit anderen Worten nur wenig verschieden erscheinen können. — Andere Beweise von künstlicherer Form liefert der Satz, daß Größen, welche in Folge der Addition einer und derselben andern Größe zu ihnen wieder gleiche Summen geben, selbst gleich sein müssen.

Anmerkung 3: Aus den vorstehenden Entwickelungen folgt ferner: Der Werth einer Summe bleibt unverändert, wenn man den einen Summanden um eine beliebige Zahl vergrößert und den anderen um dieselbe Zahl verkleinert, und der Werth einer Differenz bleibt ungeändert, wenn man ihren Minuenden und ihren Subtrahenden um dieselbe Zahl vergrößert, oder um dieselbe Zahl verkleinert. Es ist also

$$(a + c) + (b - c) = (a - d) + (b + d) = a + b.$$
$$(a + c) - (b + c) = (a - d) - (b - d) = a - b.$$

Anmerkung 4: Sind die Summanden einer Summe einander gleich, so bezeichnet man dieselbe kürzer durch Vorsetzen der bestimmten Zahl, welche die Anzahl der Summanden angiebt, vor einen dieser Summanden, z. B. $a + a = 2a$, $b + b + b = 3b$. Ist der Summand eine unbestimmte Zahl (Buchstabengröße), so heißt jene bestimmte Zahl der Coefficient der ersteren. Die Summe heißt ein Vielfaches des einzelnen Summanden. Man kann diesen letzteren als eine Einheit betrachten, welche so oft gesetzt ist, als der Coefficient angiebt. Verschiedene Vielfache derselben Einheit heißen gleichnamig, z. B. $2a$ und $7a$; verschiedene Vielfache verschiedener Einheiten heißen ungleichnamige Zahlengrößen, z. B. $3a$ und $5b$. Gleichnamige Zahlengrößen werden addirt (subtrahirt), indem man ihre Coefficienten addirt (subtrahirt) und hinter diesen neuen Coefficienten die gemeinschaftliche Einheit setzt. Bei ungleichnamigen Zahlengrößen kann die Addition (Subtraction) nicht ausgeführt, sondern nur angedeutet werden. — Beispiele:

$5a + 7a = 12a$, $8b - 3b = 5b$, $2a + 3b$, $7a - 6b$. — Beweise leicht. Vergl. § 10.

Heis § 7—12. Bardey III 1—12, 19—48, IV 1—15.

§ 6. Null und negative Zahlen.

Werden in einer Differenz $a - b$ für a und b beliebige bestimmte Zahlen gesetzt, so können drei wesentlich verschiedene Fälle eintreten; es kann nämlich a größer als b, oder gleich b, oder kleiner als b sein. Nur in dem ersten Falle ist die Subtraction nach unserer bisherigen Auffassung ausführbar, sodaß man eine Zahl aus der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, . . . erhält.

Ist $a = b$, so werden bei dem Subtrahiren sämmtliche Einheiten des Minuenden wieder weggenommen, es kann also keine Einheit übrig bleiben. Demnach kann man der Differenz $a - a$ den Sinn beilegen, daß in ihr alle Einheiten beseitigt sind, also keine übrig geblieben ist. Wir bezeichnen diese Differenz durch „Null“ (0). Es ist also

$$a - a = b - b = 0. \tag{13}$$

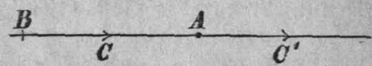
Es folgt aus diesem Begriff der Null sofort

$$\begin{aligned} a + 0 &= 0 + a = a \\ a - 0 &= a \\ 0 + 0 &= 0 - 0 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Dagegen kann von Null keine Zahl subtrahirt werden, oder der Ausdruck $0 - a$ hat (vorläufig) keinen Sinn.

Dasselbe findet statt, wenn in einer Differenz der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, allein man kann auch in diesem Falle der Differenz nicht selten einen Sinn beilegen, wie folgende Beispiele zeigen:

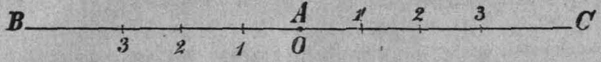
Es mache Jemand a Schritte nach einer bestimmten Richtung und darauf b Schritte nach der entgegengesetzten Richtung, so ist er im Ganzen um $a - b$ Schritte in der ursprünglichen Richtung vorwärts gekommen. Gesetzt er sei durch die a Schritte von dem Orte A nach dem Orte B gelangt, so wird er 1) wenn b kleiner als a ist, durch die b Schritte nach einem zwischen B und A liegenden Orte C gelangen, und es ist



$AC = a - b$. Ist 2) $b = a$, so gelangt er wieder nach A, und es ist $a - b = 0$. Ist aber 3) b größer als a, so kommt er nach einem auf der Verlängerung von BA über A hinaus liegenden Orte C' und ist dann um die Strecke AC' von A entfernt. Er ist also um $b - a$ Schritte noch über A hinaus, nach der entgegengesetzten Richtung gekommen. Es erhält also hier die Differenz $a - b$ den Sinn, daß so viel Schritte, als b mehr beträgt, wie a, in entgegengesetzter Richtung zu nehmen sind.

Denkt man sich überhaupt auf einer Geraden von einem Punkte A aus nach beiden Richtungen AB und AC gleiche Strecken abgetragen und die Entfernungen der einzelnen Theilpunkte von A beziehungsweise durch die Zahlen 1, 2, 3, . . . bezeichnet, so kann man die erstere Richtung die positive und die auf ihr gezählten Zahlen positive Zahlen, die entgegengesetzte die negative und die auf ihr gezählten

Zahlen negative Zahlen nennen. Man kann ferner die ersteren Zahlen von den letzteren dadurch unterscheiden, daß man jenen das Zeichen $+$, diesen das Zeichen



$-$ vorsetzt, welche beide Zeichen jedoch als sogenannte **Vorzeichen** von den entsprechenden **Rechnungszeichen** der Addition und Subtraction wohl unterschieden werden müssen. Die Differenz $a - b$, in welcher b größer als a ist, erhält also hier den Sinn, daß sie eine negative Zahl bedeutet, und zwar gleich $-(b - a)$ ist.

Aehnliches, wie in diesem Beispiel, findet überall statt, wo Größen von entgegengesetzter Art vorkommen (z. B. die Drehung des Schenkels eines Winkels nach rechts und die Drehung nach links, zukünftige und vergangene Zeit, Vermögen und Schulden, Wärme- und Kältegrade, nördliche und südliche geographische Breite, u. dgl. m.).

Es giebt also Zahlen, welche in einem solchen Gegensatz zu einander stehen, daß eine Zahl der einen Art durch Hinzufügung einer solchen der anderen Art verkleinert, durch Hinwegnahme (Subtraction) einer solchen vergrößert wird, und gleich große Zahlen beider Art bei ihrer Vereinigung (Addition) sich gegenseitig aufheben. Solche Zahlen sollen **algebraische** genannt werden, wogegen solche, welche nur die Menge der Einheiten zählen, ohne ihren Gegensatz zu berücksichtigen, **absolute** Zahlen heißen sollen.

Bei algebraischen Zahlen kann man die eine der beiden Arten als die ursprüngliche betrachten, und die ihr angehörigen Zahlen werden **positive** genannt und durch das vorgesetzte Zeichen $+$ als solche kenntlich gemacht. Die Zahlen der entgegengesetzten Art heißen **negative** und erhalten das Vorzeichen $-$.

Bei algebraischen Zahlen setzt sich die nach der einen Richtung ins Unendliche fortlaufende Zahlenreihe auch nach der entgegengesetzten Richtung ins Unendliche fort, nach folgendem Schema:

$$\ldots\, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots$$

Eine Differenz, deren Subtrahend größer ist als der Minuend, hat die Bedeutung einer negativen Zahl, und es ist

$$(15) \qquad a - b = -(b - a).$$

Denn ist $b > a$ und soll die Erklärung der Differenz in § 2 auch für diesen Fall Geltung behalten, so ist $a - b$ diejenige Zahl, welche zu dem größeren Subtrahenden b addirt, den kleineren Minuenden a als Summe giebt; es muß also der Werth von b durch Hinzufügung der Differenz verkleinert werden, also $a - b$ negativ sein, und zwar gleich $-(b - a)$, da $b - a$ Einheiten von b subtrahirt werden müssen, um a zu erhalten. Oder: ist b größer als a, so bleiben, nachdem um a Einheiten zurückgezählt ist, noch $b - a$ Einheiten weiter zurückzuzählen; man gelangt also auf diese Art in die Reihe der negativen Zahlen, und zwar zur Zahl $-(b - a)$.

Aus der vorstehenden Erklärung negativer Zahlen folgt noch, daß die oben erwähnte Differenz $0 - a$ ebenfalls die Bedeutung einer negativen Zahl erhält, d. h.

$$(16) \qquad 0 - a = -a.$$

Anmerkung 1: Die Bezeichnungen $+a$, $-a$ sind durch Abkürzung aus $0+a$, $0-a$ entstanden. — Die Zahl a heißt das Glied der algebraischen Zahl. — Jeder absoluten Zahl kann man das Vorzeichen $+$ geben.

Anmerkung 2: Negative Zahlen haben in allen practischen Fällen nur dann einen Sinn, wenn ein Gegensatz der Zahlen in der erwähnten Weise wirklich existirt.

§ 7. Addition und Subtraction mit algebraischen Zahlen.

Aus der Erklärung der algebraischen Zahlen folgt, daß eine gegebene Zahl durch Addition einer negativen Zahl um die absoluten Einheiten der letzteren verkleinert, durch Subtraction einer solchen dagegen vergrößert wird, während positive Zahlen wie gewöhnliche (absolute) zu behandeln sind. Es ist also

$$\begin{aligned} (17)\qquad M+(+a)&=M+a\\ M+(-a)&=M-a\\ M-(+a)&=M-a\\ M-(-a)&=M+a. \end{aligned}$$

Ferner folgt für die Addition zweier algebraischer Zahlen:

$$\begin{aligned} (19)\qquad (+a)+(+b)&=+(a+b)\\ (+a)+(-b)&=+(a-b)=-(b-a)\\ (-a)+(+b)&=-(a-b)=+(b-a)\\ (-a)+(-b)&=-(a+b), \end{aligned}$$

d. h. haben die Summanden gleiche Vorzeichen, so addirt man ihre Glieder und giebt der Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen; haben die Summanden entgegengesetzte Vorzeichen, so subtrahirt man ihre Glieder und giebt der Differenz das Vorzeichen des Minuenden.

Bei bestimmten Zahlen subtrahirt man die kleinere Zahl von der größeren und giebt der Differenz das Vorzeichen der größeren.

Ferner folgt für die Subtraction algebraischer Größen, daß dieselbe gleichbedeutend ist mit der Addition der entgegengesetzten Größe, oder die Regel:

Um algebraische Zahlen zu subtrahiren, ändere man das Vorzeichen des Subtrahenden und addire dann die Zahlen.

Beispiele: Heis § 26 Nr. 1, 2, 10, $\alpha-\gamma$, 11 — 20, 34 $\alpha-\gamma$, 35 $\alpha-\zeta$. Bardey VA 1—29, B 1—29.

Anmerkung: Die Einführung der Null und der negativen Zahlen geschieht in Folge einer Erweiterung des Begriffs der Differenz in § 2, wonach die dort für absolute Zahlen aufgestellte Erklärung derselben auch für die Fälle gilt, in welchen ihr nicht durch absolute Zahlen Genüge geleistet werden kann. Auch der Begriff der Summe erhält durch die neuen Zahlformen nur eine erweiterte Anwendung und bleibt seinem Wesen nach unverändert.

Es folgt aber hieraus, daß die in § 3 und 5 aufgestellten Lehrsätze, sofern sie nur aus den genannten allgemein geltenden Begriffen der Differenz und der Summe abgeleitet sind, auch für die Fälle Geltung haben, daß in ihnen die Null oder negative Zahlen auftreten.

Es enthalten also die betreffenden Formeln auch die Rechnungsregeln für Null und negative Zahlen als besondere Fälle. So geht z. B. die Formel (12) für $b = c$ über in $a - 0 = (a - b) + b = (a + b) - b$, d. h. $a - 0 = a$; und für $b = 0$ in $a - (-c) = (a - 0) + c = (a + c) - 0$, d. i. $a - (-c) = a + c$.

§ 8. Polynome. — Auflösung der Klammern. Algebraische Summen.

Jede Verbindung von mehreren Zahlen durch Addition oder Subtraction heißt ein **Polynom** (Binom, Trinom).

Man ist übereingekommen, in einem solchen die Klammern, welche die Reihenfolge der Operationen angeben, in dem Falle wegzulassen, daß diese Reihenfolge dieselbe ist, wie die der Zahlen in dem Polynom.

Man schreibt also z. B. statt $\left\{\left[\left((a + b) - c\right) - d\right] + e\right\} - f$, $a + b - c - d + e - f$, und überall, wo die Reihenfolge der Rechnungen nicht durch Klammern bestimmt ist, muß also diejenige genommen werden, in welcher die Zahlen geschrieben sind. — Welche der früheren Gleichungen lassen sich hiernach einfacher schreiben?

Durch Anwendung der Formeln (5) — (12) läßt sich in jedem Polynom die Reihenfolge der Operationen so verändern, daß hiernach die Klammern weggelassen werden können. Man nennt dies das Auflösen der Klammern.

Es sei z. B. $a - \left[(5b + \left\{c - 3a\right\} + 4b) - \left\{6a - (3b + 2c)\right\}\right]$ gegeben, so ergiebt sich hierfür der Reihe nach

aus (12): $a - (5b + \left\{c - 3a\right\} + 4b) + \left\{6a - (3b + 2c)\right\}$,
aus (8): $a - 5b - \left\{c - 3a\right\} - 4b + \left\{6a - (3b + 2c)\right\}$,
aus (12): $a - 5b - c + 3a - 4b + \left\{6a - (3b + 2c)\right\}$,
aus (10): $a - 5b - c + 3a - 4b + 6a - (3b + 2c)$,
aus (8): $a - 5b - c + 3a - 4b + 6a - 3b - 2c$.

Setzt man in einem von Klammern befreiten Polynome jedem einzelnen absoluten Gliede das Vorzeichen + vor, so kann man jede Subtraction in eine Addition der entsprechenden negativen Größe und somit das Polynom in eine **Summe** verwandeln, deren einzelne Summanden nicht mehr absolute, sondern algebraische Zahlen sind. Eine solche Summe heißt **eine algebraische Summe**, im Gegensatz zu einer **arithmetischen**, deren Summanden absolute Zahlen sind.

So geht z. B. das Polynom

$$(\alpha)\ a - \left[(b + c) - \left\{(d - e) + (f - g)\right\}\right]$$

zunächst durch Auflösung der Klammern über in

$$(\beta)\ a - b - c + d - e + f - g.$$

Um dasselbe in eine algebraische Summe zu verwandeln, setzt man dafür zunächst

$$(\gamma)\ (+a) - (+b) - (+c) + (+d) - (+e) + (+f) - (+g),$$

und hierfür nach (17):

$$(\delta)\ (+a) + (-b) + (-c) + (+d) + (-e) + (+f) + (-g).$$

Man ist übereingekommen, bei algebraischen Summen die Additionszeichen und die Klammern für die einzelnen Summanden, sowie das Vorzeichen des ersten Gliedes, falls es $+$ ist, wegzulassen.

Hiernach erhält z. B. die vorstehende algebraische Summe (δ) die Form:

$$(\varepsilon)\ a - b - c + d - e + f - g.$$

In dieser Form unterscheidet sich die algebraische Summe (ε) äußerlich in nichts von dem Polynome (β), aus welchem dieselbe entstand; der innere Unterschied liegt darin, daß die Zeichen $+$, $-$ in der algebraischen Summe als Vorzeichen der einzelnen Größen betrachtet werden, welche letztere sämmtlich zu addiren sind, während sie in dem Polynome Rechnungszeichen sind.

Es folgt aus dem Vorstehenden, daß jedes von seinen Klammern befreite Polynom ohne Weiteres als eine algebraische Summe angesehen werden kann, indem man die Rechnungszeichen als Vorzeichen und die so erhaltenen Zahlen als Summanden einer Summe betrachtet.

Da aber die Summanden einer Summe in beliebiger Reihenfolge addirt werden können, so kann man nunmehr auch den Werth des Polynoms mittelst jeder beliebigen zweckdienlichen Reihenfolge der Summanden der algebraischen Summe berechnen.

Beispiele: Heis § 13, 1—12. Bardey III 49—63, IV.

§ 9. Addition und Subtraction algebraischer Summen.

Aus § 5, Gl. (6) und (8) folgt nun in Verbindung mit § 7 (17):

Eine algebraische Summe wird zu einer Zahl addirt, indem man ihre einzelnen Summanden in beliebiger Reihenfolge und mit unveränderten Vorzeichen zu der Zahl schreibt.

Eine algebraische Summe wird von einer Zahl subtrahirt, indem man ihre einzelnen Summanden in beliebiger Reihenfolge und mit umgekehrten Vorzeichen zu der Zahl schreibt.

Practische Rechnungsregeln: Steht vor einer Klammer $+$, so bleiben beim Auflösen alle Zeichen unverändert; steht vor einer Klammer $-$, so werden alle Zeichen umgekehrt.

Beispiele: Heis § 13, Nr. 13—46. Bardey VA 30—39, B 30—38.

II. Capitel.

Multiplication und Division.

§ 10. Erklärungen.

Eine Summe, deren Summanden einander gleich sind, heißt ein Product und wird kürzer geschrieben, indem man einen der Summanden mit der Anzahl derselben durch das Zeichen $\times$ oder . verbindet, z. B.

$$a + a + a = a \cdot 3,\ a + a + a + a + \ldots = a \cdot b.$$

Der Summand a heißt der Multiplicand, die Anzahl b der Summanden heißt der Multiplicator. Eine Zahl a mit einer anderen b multipliciren heißt eine Summe von b Summanden bilden, deren jeder gleich a ist.

Man liest das Product $a \cdot b$ „a multiplicirt mit b" oder „a mal b". Bei Buchstabenausdrücken kann man da, wo kein Mißverständniß stattfinden kann, das Multiplicationszeichen weglassen, und also z. B. ab schreiben. Ist der Multiplicator eine bestimmte Zahl, der Multiplicandus unbestimmt, wie z. B. in $a \cdot 3$, so pflegt man den ersteren voranzusetzen und also $3a$ zu schreiben. Der Multiplicator (3) heißt dann auch „Coefficient". Vergl. § 5, Anmerk. 3.

Anmerkung: Bei Rechnungen mit benannten Zahlen kann nur der Multiplicand benannt sein. Der Multiplicator ist stets unbenannt.

Schreibt man das Product $a \cdot b$ in der Form des folgenden Schemas:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \ldots & (a \\ + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \ldots & \\ + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \ldots & \\ b) & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\,\vdots\,\vdots & \end{array}$$

so daß in jeder Horizontalreihe a Einheiten stehen, und b solcher Reihen unter einander gestellt sind, so sieht man, daß das Resultat dasselbe wird, wenn man die b Einheiten jeder Verticalreihe vereinigt und diese Zahl a mal nimmt. Es ist also

$$(19) \qquad a \cdot b = b \cdot a,$$

d. h. in einem Product können Multiplicator und Multiplicand vertauscht werden.

Daher erhalten beide auch den gemeinschaftlichen Namen Factoren.

Anmerkung: Bei benannten Zahlen beachte man aber, daß bei der Vertauschung auch die Benennung auf den neuen Multiplicand übertragen werden muß, z. B. 4 Meter . 3 = 3 Meter . 4 = 12 Meter.

Heis § 3. Bardey I 6, 7, 13, 19. II 4—7, 11, 16, 21, 25, 47 n. 5—11.

§ 11.

Eine Zahl a durch eine andere Zahl b dividiren, heißt zu einem Producte a und einem seiner Factoren b den anderen Factor suchen. Das gegebene Product heißt der Dividendus, der gegebene Factor der Divisor. Daß a durch b dividirt werden soll, schreibt man $\frac{a}{b}$ oder $a : b$; man liest diesen Ausdruck „a dividirt durch b", oder „a durch b" (a, $b$tel) und nennt denselben einen Quotienten.

Diese neue Rechnungsart wird Division genannt; dieselbe ist der Multiplication entgegengesetzt.

Anmerkung 1: Es giebt aber zwei Arten von Divisionen, je nachdem der gegebene Factor der Multiplicator oder der Multiplicandus ist.

Aus einem Producte a und seinem Multiplicator b den Multiplicand suchen, heißt diejenige Zahl suchen, welche b mal als Summand gesetzt werden muß, damit die Summe gleich a sei, z. B.

$$\frac{12 \text{ Meter}}{3} = 4 \text{ Meter, denn } 4 \text{ Meter} + 4 \text{ Meter} + 4 \text{ Meter} = 12 \text{ Meter}.$$

Aus einem Producte a und seinem Multiplicandus b den Multiplicator suchen, heißt diejenige Zahl suchen, welche angiebt, wie oft b als Summand gesetzt werden muß, um die Summe a zu erhalten, z. B.

$$\frac{12 \text{ Meter}}{4 \text{ Meter}} = 3.$$

Die erstere Art der Division heißt Theilen, der erhaltene Quotient ein Theil, die zweite Art heißt Messen und der erhaltene Quotient ein Verhältniß.

Bei benannten Zahlen ist im ersten Fall der Divisor unbenannt, der Quotient benannt, im zweiten Fall der Divisor benannt, der Quotient unbenannt.

Anmerkung 2: Wie die Multiplication eine wiederholte Addition derselben Zahl, so ist die Division eine wiederholte Subtraction von einer gegebenen Summe. Bei dem Theilen wird der Subtrahend gesucht, der b mal von a subtrahirt werden kann, bei dem Messen wird die Anzahl der Subtractionen gesucht, und diese letztere Division kann also ausgeführt werden, indem man b von a subtrahirt, von dem Rest wieder b subtrahirt, dies so lange wiederholt, bis kein Rest bleibt, und dann die Anzahl der ausgeführten Subtractionen bestimmt.

Da nach (19) die Factoren eines Productes vertauscht werden können, so fallen beide Divisionen in der Ausführung in eine Rechnungsart zusammen und unterliegen gemeinschaftlichen Gesetzen.

Die Ausführung der Multiplication und Division in der Praxis geschieht übrigens nicht durch wiederholtes Addiren oder Subtrahiren, sondern mittelst der als bekannt vorausgesetzten Werthe der Producte aller einzifferigen Zahlen und der entsprechenden Quotienten. (Ein mal Eins und Eins in Eins.)

Heis § 4. Bardey I 8, 9, 14, 20—23. II 12, 13, 17, 22, 23, 47 n. 12—16.

Anmerkung 3: Ist x eine unbekannte Größe und $\frac{x}{a} = b$, so ist $x = ab$ zufolge der Erklärung der Division. Aehnlich folgt aus $ax = c$, $x = \frac{c}{a}$ und aus $\frac{c}{x} = b$, $x = \frac{c}{b}$. Beispiele.

§ 12.

Die Erklärung des Quotienten in § 11., beziehungsweise der Gegensatz der Multiplication und Division, ist in folgenden Formeln ausgesprochen, deren Richtigkeit sich leicht aus dem Begriffe der Division ergiebt:

$$(20) \qquad \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

$$(21) \qquad \frac{a \cdot b}{b} = a; \frac{a \cdot b}{a} = b.$$

$$(22) \qquad a : \frac{a}{b} = b.$$

Wie lauten dieselben in Worten? Heis § 17. Bardey VII 2, 3.

§ 13. Multiplication und Division mit Summen und Differenzen.

Vorbemerkung: Sollen mehrere Zahlen durch eine oder mehrere der vier Rechnungsoperationen mit einander verbunden werden, so wird wieder die Angabe der Reihenfolge der Verbindungen durch Klammern nöthig. Zur Vermeidung einer allzugroßen Anhäufung der letzteren ist man übereingekommen, die Multiplication und Division überall der Addition und Subtraction vorangehen zu lassen, wofern nicht das Gegentheil durch die Klammern verlangt wird, und im Uebrigen auch hier die Klammern wegzulassen, sobald die durch sie bestimmte Reihenfolge die der einzelnen Zahlen ist.

Man schreibt also z. B. $(a \cdot c) + \left(\frac{b}{d}\right)$ kürzer $a \cdot c + \frac{b}{d}$, statt $(a \cdot b) \cdot c$, $a \cdot b \cdot c$, dagegen $a \cdot (b + c) \cdot d$, u. s. w.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \tag{23}$$

Eine Summe wird multiplicirt, indem man jeden Summanden multiplicirt und die Producte addirt.

Beweis: $(a + b) \cdot c = (a + b) + (a + b) + (a + b) + \ldots.$
$$= a + a + a + \ldots + (b + b + b + \ldots),$$
$$= \quad a \cdot c \qquad + \quad b \cdot c.$$

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c. \tag{24}$$

Uebersetzung in Worte und Beweis ähnlich, wie vorher.

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}, \tag{25}$$

Eine Summe wird dividirt, indem man jeden Summanden dividirt, u. s. w.

$$\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}. \tag{26}$$

In Worten ähnlich, wie bei (25).

Beweis: $\frac{a + b}{c}$ ist die Zahl, welche mit c multiplicirt $a + b$ giebt.

Nach (23) ist $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \cdot c = \frac{a}{c} \cdot c + \frac{b}{c} \cdot c = a + b.$

Aehnlich für (26).

Gebrauch doppelter Vorzeichen, um Formeln, wie (23) und (24) oder (25) und (26) in eine zusammenzufassen:

$$(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c; \ \frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$$

Aus § 10, (19) folgt, daß auch $a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac$ ist.

Umgekehrt ist

$$a \cdot c \pm b \cdot c = (a \pm b) \cdot c, \tag{27}$$

d. h. Producte, die einen gleichen Factor haben, werden addirt (subtrahirt), indem man die nicht gemeinschaftlichen Factoren addirt (subtrahirt) und die Summe (Differenz) mit dem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt.

Beweis umgekehrt, wie bei (23) und (24).

Man nennt dies das Absondern des gemeinschaftlichen Factors.

$$(28) \qquad \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}.$$

In Worten? — Beweis?

Die Formeln (23)—(28) lassen sich durch Wiederholung zu folgenden Sätzen erweitern:

Eine Summe von beliebig vielen Summanden wird multiplicirt, indem man jeden Summanden multiplicirt und die einzelnen Producte addirt.

$$(a + b + c + d + \ldots) \cdot m = am + bm + cm + dm + \ldots$$

Ein Polynom wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man jedes Glied mit derselben multiplicirt und die einzelnen Producte in derselben Reihenfolge, wie vorher die einzelnen Glieder, addirt und subtrahirt.

Ein Polynom wird durch eine Zahl dividirt, indem man jedes Glied durch dieselbe dividirt und die einzelnen Quotienten in derselben Reihenfolge, wie vorher die Glieder, addirt und subtrahirt.

Ein Polynom aus beliebig vielen Producten, die einen gemeinschaftlichen Factor haben, ist gleich dem Product aus diesem letzteren Factor und dem auf entsprechende Weise aus den nicht gemeinschaftlichen Factoren gebildeten Polynom.

Ein Polynom von beliebig vielen Quotienten, welche denselben Divisor haben, ist gleich dem auf entsprechende Weise aus den Dividenden gebildeten Polynom, dividirt durch den gemeinschaftlichen Divisor.

Ferner folgt aus (23) und (24) durch wiederholte Anwendung:

$$(29) \qquad \begin{aligned} (a + b) \cdot (c + d) &= a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d, \\ (a + b) \cdot (c - d) &= a \cdot c + b \cdot c - a \cdot d - b \cdot d, \\ (a - b) \cdot (c + d) &= a \cdot c - b \cdot c + a \cdot d - b \cdot d, \\ (a - b) \cdot (c - d) &= a \cdot c - b \cdot c - a \cdot d + b \cdot d, \end{aligned}$$

d. h. Summen, beziehungsweise Differenzen werden mit einander multiplicirt, indem man jedes Glied des einen Factors mit jedem Gliede des anderen multiplicirt und jedes einzelne Product mit den übrigen durch Addition oder durch Subtraction verbindet, je nachdem seine beiden Factoren dasselbe oder verschiedene Rechnungszeichen vor sich hatten. (Hierbei wird da, wo kein Zeichen vorhergeht, das Zeichen $+$ angenommen.)

Beweis: $(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$, u. s. w.

Erweiterung dieser Regel auf Producte beliebig vieler Summen oder Differenzen.

Erweiterung derselben auf Producte von Polynomen.

Als besondere Fälle merke man

$$(30) \qquad \begin{aligned} (a + b) \cdot (a + b) &= a \cdot a + 2 \cdot a \cdot b + b \cdot b, \\ (a - b) \cdot (a - b) &= a \cdot a - 2 \cdot a \cdot b + b \cdot b, \\ (a + b) \cdot (a - b) &= a \cdot a - b \cdot b. \end{aligned}$$

Heis § 14, 16, 19. Bardey VI, 37—50, 58—110, 128—144. VII 40—47. VIII. X 1—4.

§ 14. Multiplication und Division mit Producten und Quotienten.

$$(31) \qquad (ab)\,c = (ac)\,b = a\,(bc),$$

$$(32) \qquad a\,(bc) = (ab)\,c = (ac)\,b,$$

d. h. ein Product kann mit einer Zahl — oder eine Zahl mit einem Producte — multiplicirt werden, indem man die einzelnen Factoren in beliebiger Reihenfolge mit einander multiplicirt.

Beweis: $(ab) \cdot c = ab + ab + ab + \ldots$ (c mal), oder nach Absonderung des gemeinschaftlichen Factors b,

$(a + a + a + \ldots$ (c mal)$) \cdot b = (ac)\,b$, sowie nach Absonderung des gemeinschaftlichen Factors a,

$$a \cdot (b + b + b + \ldots (c \text{ mal})) = a \cdot (bc),$$

und umgekehrt.

Erweiterung (durch Wiederholung): In einem Product von mehreren Factoren (oder Producten) dürfen die Factoren in beliebiger Reihenfolge multiplicirt werden, z B.

$(ab) \cdot (cd) = (ac) \cdot (bd) = (ad) \cdot (bc) = a \cdot (b \cdot c \cdot d) =$ u. s. w.

Anmerkung 1: In der Regel ordnet man die unbestimmten Factoren alphabetisch, und wenn neben ihnen ein bestimmter Factor vorkommt, so setzt man diesen als Coefficienten voran.

Anmerkung 2: Sind die Factoren eines Productes einander gleich, so schreibt man in der Regel nur einen Factor und schreibt rechts oben an denselben die Anzahl der Factoren, z. B. $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$. Der Ausdruck a^b heißt eine Potenz. Man liest „die b^{te} Potenz von a", oder „a hoch b", statt a^2 auch „a im Quadrat", statt a^3 auch „a im Cubus". Vergl. § 18.

$$(33) \qquad \frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}.$$

Wie lautet diese Formel in Worten? Beweis: $\frac{ab}{c} =$

$$\frac{a + a + a + \ldots (b \text{ mal})}{c} = \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \ldots (b \text{ mal}) = \frac{a}{c} \cdot b,$$

und $$\frac{a \cdot b}{c} = \frac{b + b + b + \ldots (a \text{ mal})}{c} = \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \ldots (a \text{ mal}) = a \cdot \frac{b}{c}.$$

Erweiterung: Ein Product von beliebig vielen Factoren kann dividirt werden, indem man einen Factor dividirt und den Quotienten mit den anderen Factoren multiplicirt.

$$(34) \qquad \frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$$ In Worten?

Beweis: $\frac{a}{b \cdot c}$ bedeutet die Zahl, welche mit $b \cdot c$ multiplicirt a zum Product giebt. Es ist aber $\left(\frac{a}{b} : c\right) \cdot (bc) = \left(\frac{a}{b} : c\right) \cdot c \cdot b = \frac{a}{b} \cdot b = a$,

und $\left(\frac{a}{c} : b\right) \cdot (b \cdot c) = \left(\frac{a}{c} : b\right) \cdot b \cdot c = \frac{a}{c} \cdot c = a.$

Erweiterung von (34) für ein Product von beliebig vielen Factoren als Nenner.

Verbindung der Formeln (33) und (34) und Erweiterung:

Soll ein Product aus beliebig vielen Factoren durch ein anderes Product aus beliebig vielen Factoren dividirt werden, so darf man jeden Factor des Divisors in einen beliebigen einzelnen Factor des Dividenden dividiren.

Beispiel: $$\frac{12 \cdot 8 \cdot 34 \cdot 39 \cdot 18}{9 \cdot 4 \cdot 17 \cdot 8 \cdot 13} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}} \cdot \cancel{8} \cdot \overset{2}{\cancel{34}} \cdot \overset{3}{\cancel{39}} \cdot \overset{2}{\cancel{18}}}{\cancel{9} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{13}} = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2.$$

(35) $$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{a}{b : c}.$$ In Worten?

Beweis durch Umkehrung von (33), oder durch Multiplication der drei Seiten mit derselben Zahl b.

(36) $$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b.$$ In Worten?

Beweis durch Umkehrung von (33), oder durch Multiplication der drei Seiten mit c.

(37) $$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{b \cdot c}.$$ In Worten?

Beweis durch Multiplication der drei Seiten mit c. Vergl. (34).

(38) $$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}.$$ In Worten?

Beweis durch Multiplication der drei Seiten mit b.

Anmerkung 3: Aus (35) und (37) folgt: Multiplicirt man den Dividend eines Quotienten mit einer Zahl, so wird der Quotient eben so viele mal größer, multiplicirt man aber den Divisor, so wird der Quotient so viele mal kleiner. Dividirt man den Dividend, so wird der Quotient eben so viele mal kleiner, dividirt man den Divisor, so wird der Quotient eben so viele mal größer. Hieraus folgt weiter:

(39) $$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a : n}{b : n},$$

d. h. der Werth eines Quotienten bleibt unverändert, wenn man seinen Dividend und seinen Divisor mit derselben Zahl multiplicirt, oder wenn man beide durch dieselbe Zahl dividirt. (Erweitern und Heben.)

Anwendung der Regel (39) um einen Quotienten in einen solchen mit anderem Divisor zu verwandeln. (Gemeinschaftliche Divisoren; kleinster gemeinschaftlicher Divisor. Gleichnamigmachen.) Auf diesem Wege ergiebt sich:

(40) $$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d},$$

(41) $$a \pm \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c \pm b}{c},$$ und umgekehrt. In Worten? Beweis?

(42) $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a}{b} : \frac{d}{c}.$$ In Worten?

Beweis: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \cdot c\right) : d = \frac{a \cdot c}{b} : d = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, oder $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} : d\right) \cdot c = \frac{a}{b} : \frac{d}{c}$.

$$(43) \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$ In Worten?

Beweis ähnlich wie vorher.

Heis § 15, 21—24, 18, 19, Nr. 30—54. Bardey VI 1—28, 51—57, 111—127; VII 1, 4—13, 28—39; IX, X.

§ 15. Multiplication und Division mit Null, algebraischen Zahlen und algebraischen Summen.

Die Erklärungen der Begriffe Multiplication und Division in § 10 und § 11 setzen voraus, daß der Multiplicator, bezw. der Divisor oder Quotient eine absolute Zahl sei, während der Multiplicand und Dividendus stets auch algebraische Zahlen oder Null sein können. Man kann nach jenen Definitionen z. B. wohl von einer Summe von b Summanden reden, von denen jeder gleich Null ist, nicht aber von einer Summe von 0 Summanden gleich a. Mit dieser Einschränkung aber gelten jene Erklärungen und die aus ihnen abgeleiteten Lehrsätze über Producte und Quotienten im Uebrigen ganz allgemein.

Da nun der Werth des Products $a \cdot b$ sich um den Multiplicand a verkleinert, wenn man den Multiplicator um 1 abnehmen läßt, und man durch consequente Fortsetzung dieses Verfahrens noch über die Summe von zwei Summanden oder $a \cdot 2$ hinaus auf $a \cdot 1 = (a + a) - a$, $a \cdot 0 = a - a = 0$, $a \cdot (-1) = 0 - a = -a$, u. s. w. gelangen würde, so ist es gestattet, den Begriff des Productes dahin zu erweitern, daß

$$a \cdot 1 = a$$
$$a \cdot 0 = 0$$
$$a \cdot (-b) = -ab$$

gesetzt werden solle. Diese neuen Definitionen stoßen die frühern, für absolute Werthe des Multiplicators geltenden, nicht um; die aus dieser letzteren abgeleiteten Erklärungen und Gesetze der nachfolgenden Paragraphen bleiben also in ihrer Gültigkeit bestehen, aber sie erweitern sich nun ebenfalls auf den neuen, allgemeineren Begriff und gelten also allgemein. Insbesondere ergeben sich die folgenden Sätze:

$$(44) \qquad 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0.$$

Beweis: $0 \cdot a = (b - b) \cdot a = b \cdot a - b \cdot a = 0$.

$$(45) \qquad 0 \cdot 0 = 0.$$

$$(46) \qquad \frac{0}{a} = 0.$$ Beweis: $\frac{b - b}{a} = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = 0$

$\frac{a}{0}$ bedeutet die Zahl, welche mit Null multiplicirt zum Product a giebt.

Nun ist das Product jeder denkbaren Zahl mit 0 wieder gleich 0, also ist $\frac{a}{0}$ nur dann eine denkbare Zahl, wenn $a = 0$ ist, und zwar kann $\frac{0}{0}$ jede beliebige Zahl bedeuten. Ist dagegen a nicht gleich Null, so kann man $\frac{a}{0}$ als ein Zeichen für eine undenkbar große Zahl betrachten (da jede denkbare Zahl zu klein ist). — Man pflegt eine solche durch ∞ zu bezeichnen. Da aber weder mit einer unendlich großen, noch mit der ganz unbestimmten Zahl $\frac{0}{0}$ gerechnet werden kann, so folgt, daß man nie durch Null dividiren darf.

(47)
$$\begin{aligned}(+a)\cdot(+b) &= +ab,\\ (+a)\cdot(-b) &= -ab,\\ (-a)\cdot(+b) &= -ab,\\ (-a)\cdot(-b) &= +ab,\end{aligned}$$

d. h. algebraische Zahlen werden multiplicirt, indem man ihre Glieder multiplicirt und dem Product das Zeichen $+$ oder $-$ giebt, je nachdem die Factoren gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

Beweis durch die Formeln (29) für $a = 0$, $c = 0$.

Die Erweiterung von (47) auf Producte beliebig vieler algebraischer Zahlen ergiebt, daß man das Product sämmtlicher Glieder mit dem Vorzeichen $+$ versieht, wenn die Anzahl der negativen Factoren eine gerade, dagegen mit $-$, wenn sie eine ungerade ist.

(48)
$$\begin{aligned}\frac{+a}{+b} &= +\frac{a}{b},\\ \frac{+a}{-b} &= -\frac{a}{b},\\ \frac{-a}{+b} &= -\frac{a}{b},\\ \frac{-a}{-b} &= +\frac{a}{b}.\end{aligned}$$

In Worten? Beweis: $\left(+\frac{a}{b}\right)\cdot(+b) = +\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)$ (nach 47) $= +a$, also ist $+\frac{a}{b}$ die Zahl, welche mit $+b$ multiplicirt $+a$ giebt u. s. w.

Aus (47) folgt ferner: Eine algebraische Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man jedes Glied derselben mit ihr multiplicirt, das Vorzeichen jedes einzelnen Productes nach (47) bestimmt, und die einzelnen Producte addirt.

Multiplication zweier algebraischer Summen durch Anwendung von (29) und (47). Ausdehnung auf ein Product von mehr als zwei algebraischen Summen.

Eine algebraische Summe wird durch eine Zahl dividirt, indem man jeden Summanden nach (48) durch dieselbe dividirt und die einzelnen Quotienten addirt.

Heis § 26, 3—9, 10 δ—μ, 21—33, 34 δ—ϑ, 35 η—44. Bardey VI 29—36, VII 14—22, 25—27.

§ 16. Die Eins und die gebrochenen Zahlen.

Setzt man in dem Quotienten $\frac{a}{b}$ für a und b beliebige bestimmte Zahlen ein, so sind drei Fälle möglich: 1) a ist gleich dem Werthe eines Products, dessen einer Factor b ist; 2) a ist gleich b; 3) b ist nicht in a als Factor enthalten. Nur im ersten Falle hat nach unserer bisherigen Auffassung der Quotient einen Sinn. Wir können aber (ähnlich, wie früher bei der Differenz) die in § 11 gegebene Definition des Quotienten auf alle drei Fälle ausdehnen, dergestalt, daß unter $\frac{a}{b}$ stets ein Ausdruck verstanden werden soll, dessen Product mit b gleich a ist. Ist nun $a = b$, so ist für $\frac{a}{b}$ die Einheit zu setzen, oder es ist

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = 1. \tag{49}$$

Denn soll eine Zahl gesucht werden, mit welcher a multiplicirt werden muß, um das Product a zu erhalten, so kann diese Zahl nur gleich 1 sein.

Es kann nämlich die Zahl als die Summe ihrer Einheiten, $1 + 1 + 1 + \ldots$ betrachtet werden, oder es ist $1 \,.\, a = a$, und zufolge der Definition im Anfang des § 15 ist daher auch

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a. \tag{50}$$

Man kann also auch umgekehrt jeder Zahl den Factor 1 zufügen.

Für das Rechnen mit der Einheit merke man noch die aus den früheren Regeln für diesen besonderen Fall folgenden:

$$\frac{a}{1} = a, \tag{51}$$

$$1 \cdot 1 = 1,\ 1 : 1 = 1 \ldots$$

Uebersetzungen in Worte und Beweise leicht.

Ist ferner der Divisor b in dem Dividenden a weder als Factor enthalten, noch gleich a, so erhält $\frac{a}{b}$ die Bedeutung einer neuen Zahlform, welche wir eine gebrochene Zahl oder einen Bruch nennen.

In allen Fällen nämlich, in welchen die Einheit sich in kleinere Theile zerlegen läßt, kann man sich auch jedes Vielfache der Einheit, z. B. a Einheiten, in b gleiche Theile getheilt denken, und es ist klar, daß dann ein solcher Theil, b mal genommen, gleich a Einheiten ist, daß also jeder derartige Theil der Erklärung des Quotienten $\frac{a}{b}$ entspricht.

Legt man z. B. 5 Linien AB, BC, CD, DE, EF, deren jede gleich der Einheit (1" od. dgl.) angenommen ist, an einander und theilt dann die ganze Linie AF in drei gleiche Theile AX, XY, YC, so ist jeder dieser Theile gleich $\frac{5}{3}$ der Einheit.

Man erhält dasselbe Resultat, wenn man zuerst die Einheit in b gleiche Theile theilt und dann a solcher Theile vereinigt.

Denn denkt man sich jede von a Einheiten AB, BC u. s. w. in b gleiche Theile getheilt, so erhält man im Ganzen $a \cdot b$ kleinere Theile, und vereinigt man a solcher kleineren Theile mit einander, so hat man wieder den $b$ten Theil der $a \cdot b$ Theile oder der a größeren Einheiten.

Ein **Bruch** bedeutet also einen oder mehrere Theile von einer oder mehreren in gleiche Theile getheilten Größen.

Alle im Vorigen für Quotienten abgeleiteten Gesetze gelten auch für gebrochene Zahlen, denn dieselben sind nur aus der auch für diese geltenden allgemeinen Definition des Quotienten abgeleitet.

Insbesondere merke man noch die Regeln:

$$(52) \quad a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}; \; a : \frac{1}{b} = a \cdot b; \; \frac{1}{a} : b = \frac{1}{a \cdot b}.$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}; \; 1 : \frac{1}{a} = a;$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}; \; \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{b}{a}.$$

Uebersetzungen in Worte und Beweise leicht.

Heis § 20.

§ 17. Allgemeine Division algebraischer Summen.

Jeder Quotient kann gleich der Summe aus einer beliebigen Zahl und einem dem ersteren gleichnamigen Quotienten gesetzt werden. Der Dividend des letzteren ist gleich dem des ersteren minus dem Product aus der beliebigen Zahl und dem Divisor, oder

$$(53) \qquad \frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B}.$$

Beweis $x + \frac{A - Bx}{B} = x + \frac{A}{B} - \frac{Bx}{B} = x + \frac{A}{B} - x = \frac{A}{B}$.

Anwendung dieses Satzes zur Division zweier beliebiger Zahlen oder Zahlenverbindungen. Die Zahl x kann jeden Werth erhalten; in der Praxis wählt man die dem Werthe von $\frac{A}{B}$ nächste, kleinere ganze Zahl.

Um zwei algebraische Summen zu dividiren, ordne man sie zunächst übereinstimmend (nach fallenden oder steigenden Potenzen einer Größe, alphabetisch od. dgl.), dividire dann das erste Glied des Divisors in das erste Glied des Dividenden, multiplicire den gefundenen Theil-Quotienten (q_1) mit dem ganzen Divisor und subtrahire das Product von dem Dividendus. Man wiederhole dieses Verfahren, indem man das erste Glied des Divisors in das erste des so eben erhaltenen, geordneten Restes dividirt, den gefundenen zweiten Theil-Quotienten (q_2) mit dem ganzen Divisor multiplicirt und das Product von dem vorher erhaltenen Reste subtrahirt. Man fahre in dieser Weise fort, bis entweder eine Subtraction ohne Rest aufgeht, oder sich herausstellt, daß dies nicht möglich ist. Der Quotient der beiden algebraischen Summen ist dann gleich der (algebraischen) Summe der gefundenen Theil-Quotienten, im letzteren Falle vermehrt um den zuletzt gebliebenen Rest, dividirt durch den Divisor.

Der Beweis folgt aus einer wiederholten Anwendung der Formel (53). Sind A und B die zu dividirenden Summen, $r_1, r_2, r_3 \ldots$ die einzelnen Reste, so ist

$$\frac{A}{B} = q_1 + \frac{A - Bq_1}{B} = q_1 + \frac{r_1}{B};\ \frac{r_1}{B} = q_2 + \frac{r_1 - Bq_2}{B} = q_2 + \frac{r_2}{B},$$

u. s. f. bis $q_n + \frac{r_n}{B}$, also $\frac{A}{B} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n + \frac{r_n}{B}$.

Geht die Division auf, so ist $r_n = 0$.

Zusatz 1: Läßt sich der Dividend so umformen, daß der Divisor als ein Factor desselben erscheint, so findet man den Quotienten am einfachsten nach § 12, (21); z. B.

$$\frac{ap - bp + aq - bq}{a - b} = \frac{(a-b)\cdot p + (a-b)\cdot q}{a - b}$$
$$= \frac{(a-b)\,(p+q)}{a-b} = p + q.$$

Zusatz 2: Geht die Division nicht auf, so kann man dieselbe beliebig weit fortsetzen. — Bildung unendlicher Reihen, z. B.

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots.$$

Angabe des Ergänzungsgliedes $+ \frac{q^{n+1}}{1-q}$ beim Abbrechen der Reihe. Vergl. § 39 über Convergenz unendlicher Reihen.

Heis § 25. Bardey VII 48—91.

Anhang 1. Von den Proportionen.

Heis § 31—33.

1. Ein Verhältniß ist nach § 11 ein Quotient zweier gleichartiger (gleichbenannter) Größen. Man schreibt das Verhältniß $\frac{a}{b}$ in der Regel

$a : b$ und liest „a verhält sich zu b", oder kürzer „a zu b". Man nennt den Dividendus a das erste **Glied**, den Divisor b das zweite Glied und den Werth q den **Quotienten** (Exponent) des Verhältnisses.

2. Der Quotient eines Verhältnisses bleibt nach § 14, (39) unverändert, wenn beide Glieder mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt werden. Alle auf solche Weise aus einem und demselben Verhältniß entstehenden neuen Verhältnisse sind demnach einander gleich, und zu jedem Verhältniß giebt es unzählig viele gleiche Verhältnisse.

Anwendung zu Wegschaffung von Nennern in den Gliedern eines Verhältnisses. $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{a}{m} \cdot mn : \frac{b}{n} \cdot mn = an : bm.$

3. Die Verbindung zweier gleicher Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen, wie z. B. $a : b = c : d$, heißt eine **Proportion** (geometrische Proportion; Verhältnißgleichung). In derselben heißen a, b, c, d der Reihe nach das erste, zweite, dritte, vierte Glied, $a : b$ das erste, $c : d$ das zweite Verhältniß, a und c die **Vorderglieder**, b und d die **Hinterglieder**, a und d die **äußeren**, b und c die **inneren** Glieder.

4. **Lehrsatz: In jeder Proportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Product der inneren Glieder.**

Voraussetzung: $a : b = c : d$.

Behauptung: $a \cdot d = b \cdot c$.

Beweis: Macht man die Quotienten $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ durch Erweiterung mit d, beziehungsweise mit b, gleichnamig, so erhält man $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$, und da hier die Divisoren einander gleich sind, so müssen auch die Dividenden einander gleich sein, oder es ist $a \cdot d = b \cdot c$.

Beispiel: $2 : 3 = 6 : 9$; $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 9} = \frac{18}{27}$; $\frac{6}{9} = \frac{3 \cdot 6}{3 \cdot 9} = \frac{18}{27}$; $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 = 18$.

Zusatz 1: Jedes äußere Glied einer Proportion ist gleich dem Producte der inneren Glieder, dividirt durch das andere äußere; jedes innere Glied ist gleich dem Producte der äußeren, dividirt durch das andere innere.

Anwendung dieses Satzes zur Berechnung eines Gliedes einer Proportion aus den drei übrigen.

Beispiele: a) $5 : 15 = 7 : x$, $x = \frac{15 \cdot 7}{5} = 21$. b) $11 : 33 = x : 6$, c) $13 : x = 5 : 7$; d) $x : 9 = 10 : 18$.

Zweisatz- oder Regel de Tri-Rechnung. Zinsrechnung.

Zusatz 2: Sind in einer Proportion drei Glieder den gleichstelligen Gliedern einer anderen Proportion gleich, so sind auch die vierten Glieder einander gleich, oder: Ist $a : b = c : x$ und $a : b = c : y$, so ist $x = y$.

Erklärung: Sind in einer Proportion die beiden äußeren, oder sind die beiden inneren Glieder einander gleich, so heißt die Proportion eine **stetige**, und das gleiche Glied das **geometrische Mittel** (die mittlere geometrische Proportionale) zwischen den beiden ungleichen. Beispiel: $a : x = x : b$; $c : d = e : c$.

Zusatz 3: In einer stetigen Proportion ist das Quadrat der mittleren Proportionale gleich dem Producte der beiden anderen Glieder, oder aus $a : x = x : b$ folgt $x^2 = a \cdot b$.

5. Umkehrung des Lehrsatzes in 4: Ist das Product zweier Zahlen gleich dem Product zweier anderen Zahlen, so ist jede Proportion richtig, in welcher die Factoren eines dieser Producte die äußeren und die Factoren des anderen die inneren Glieder sind.

Beweis: Aus $a \cdot d = b \cdot c$ folgt durch Division beider Seiten mit $b \cdot d$,

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}, \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad a : b = c : d.$$

Anwendung dieses Satzes zur Prüfung der Richtigkeit einer gegebenen Proportion.

Zusatz: Aus jeder gegebenen Proportion lassen sich sieben andere richtige Proportionen durch Vertauschung ihrer Glieder ableiten; dabei müssen die äußeren (inneren) Glieder entweder beide äußere (innere) bleiben, oder beide innere (äußere) werden. — Aus

1) $a : b = c : d$ folgt also:	5) $b : a = d : c$
2) $a : c = b : d$	6) $b : d = a : c$
3) $d : b = c : a$	7) $c : a = d : b$
4) $d : c = b : a$	8) $c : d = a : b$.

Anmerkung: Bei benannten Zahlen beachte man, daß nur gleichbenannte Zahlen ein Verhältniß bilden können, also 3 Thlr. : 4 Thlr. = 6 Meter : 8 Meter, aber nicht 3 Thlr. : 6 Meter = 4 Thlr. : 8 Meter, wohl aber 3 Thlr. : 6 Thlr. = 4 Meter : 8 Meter.

6. Lehrsatz: In jeder Proportion verhält sich die Summe (oder die Differenz) des ersten und zweiten Gliedes zum ersten oder zweiten Gliede, wie die Summe (oder die — entsprechend wie vorher gebildete — Differenz) des dritten und vierten Gliedes zum dritten oder vierten Gliede, d. h.

ist $a : b = c : d$, so ist

$(a + b) : a = (c + d) : c$ und $(a - b) : a = (c - d) : c$, und $(a + b) : b = (c + d) : d$, und $(a - b) : b = (c - d) : d$.

Beweis: Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt $\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$ oder $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$, oder $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$, und aus $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ folgt $1 \pm \frac{b}{a} = 1 \pm \frac{d}{c}$, oder $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$, oder $(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$.

Zusatz: Daher folgt aus $a : b = c : d$ auch:

$(a + b) : (c + d) = a : c = b : d$,
$(a - b) : (c - d) = a : c = b : d$, und also auch

$(a+b):(c+d)=(a-b):(c-d)$, oder
$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$.

Wie lauten diese Sätze in Worten?

7. Werden mehr als zwei Verhältnisse einander gleich gesetzt, so entsteht eine fortlaufende Proportion, z. B. $a:A=b:B=c:C=d:D$, u. s. w.

Dieselbe läßt sich auch in der Form:

$$a:b:c:d:\ldots=A:B:C:D:\ldots$$

schreiben, wobei das Verhältniß je zweier Glieder der einen Seite gleich dem Verhältniß der an den entsprechenden Stellen der anderen Seite stehenden Glieder ist. Der Beweis folgt aus Nr. 5, Zus.

Lehrsatz: In einer fortlaufenden Proportion verhält sich jedes aus allen oder einem Theil der Vorderglieder gebildete Polynom zu dem auf gleiche Weise aus den entsprechenden Hintergliedern gebildeten Polynom, wie irgend ein Vorderglied zu seinem Hinterglied, oder ist

$$a:A=b:B=c:C=d:D=\ldots, \text{ so ist}$$
$$(a\pm b\pm c\pm d\pm\ldots):(A\pm B\pm C\pm D\pm\ldots)=a:A=b:B, \text{ u. s. w.}$$

Beweis: Es sei q der Quotient der sämmtlichen einander gleichen Verhältnisse, also $\frac{a}{A}=q$, $\frac{b}{B}=q$, u. s. w., so ist $a=A\cdot q$, $b=B\cdot q$, u. s. w., also

$$\frac{a\pm b\pm c\pm d\pm\ldots}{A\pm B\pm C\pm D\pm\ldots}=\frac{Aq\pm Bq\pm Cq\pm Dq\ldots}{A\pm B\pm C\pm D\pm\ldots}=$$
$$\frac{(A\pm B\pm C\pm D\pm\ldots)q}{A\pm B\pm C\pm D\pm\ldots}=q, \text{ also auch gleich } \frac{a}{A}=\frac{b}{B}, \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung: Insbesondere verhält sich also die (arithmetische) Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Anwendung auf die sogenannte Gesellschafts- oder Vertheilungs-Rechnung.

Der vorstehende Satz ist ein specieller Fall des allgemeineren: Bildet man eine algebraische Summe aus Producten der Vorderglieder einer fortlaufenden Proportion mit je einer beliebigen Zahl und bildet man sodann durch Multiplication der entsprechenden Hinterglieder mit denselben Zahlen und Verbindung der Producte mit einander auf gleiche Weise, wie vorher, eine zweite algebraische Summe, so verhält sich die erstere Summe zur letzteren, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied, oder ist

$$a:A=b:B=c:C=d:D, \text{ so ist}$$

$$\frac{a\cdot\alpha\pm b\cdot\beta\pm c\cdot\gamma\pm d\cdot\delta}{A\cdot\alpha\pm B\cdot\beta\pm C\cdot\gamma\pm D\cdot\delta}=\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}=\frac{d}{D}.$$

Beweis ähnlich wie vorher.

8. Lehrsatz: Multiplicirt oder dividirt man die gleichstelligen Glieder zweier — oder mehrerer — Proportionen mit einander, so bilden die Producte (oder Quotienten) in derselben Reihenfolge wieder eine richtige Proportion.

Ist $a : b = c : d$ und $A : B = C : D$, so ist $aA : bB = cC : dD$ und $\frac{a}{A} : \frac{b}{B} = \frac{c}{C} : \frac{d}{D}$.

Beweis durch § 14, Gl. (42) und (43):

$$\frac{a}{b} : \frac{A}{B} = \frac{c}{d} : \frac{C}{D}; \text{ oder } \frac{a : A}{b : B} = \frac{c : C}{d : D}, \text{ u. s. w.}$$

Eine aus zwei oder mehreren Proportionen durch Multiplication der gleichstelligen Glieder entstandene Proportion heißt aus den ursprünglichen zusammengesetzt.

Zusatz: Durch Potenzirung aller Glieder einer gegebenen Proportion mit derselben Zahl erhält man wieder eine richtige Proportion. Aus $a : b = c : d$ und $a : b = c : d$ folgt die zusammengesetzte Proportion $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$, u. s. w.

Ist in einer Reihe von Verhältnissen immer das zweite Glied des einen dem ersten Gliede des folgenden Verhältnisses gleich, so sagt man, daß diese Verhältnisse eine Kette bilden.

Lehrsatz: Bilden die ersten Verhältnisse von zwei oder mehreren auf einander folgenden Proportionen eine Kette, so verhält sich das erste Glied irgend einer dieser Proportionen zum zweiten Gliede irgend einer anderen, wie das Product der dritten Glieder dieser beiden und aller zwischen ihnen stehenden Proportionen zu dem Product der vierten Glieder dieser beiden und aller zwischen ihnen stehenden Proportionen, oder ist

$$A : B = f : g,$$
$$B : C = h : i,$$
$$C : D = k : l,$$
$$D : E = m : n, \text{ so ist}$$

$$A : C = f \cdot h : g \cdot i; \; A : D = f \cdot h \cdot k : g \cdot i \cdot l;$$
$$A : E = f \cdot h \cdot k \cdot m : g \cdot i \cdot l \cdot n; \; B : D = h \cdot k : i \cdot l, \text{ u. s. w.}$$

Beweis durch Multiplication der einzelnen Proportionen, z. B.

$$A \cdot B \cdot C \cdot D : B \cdot C \cdot D \cdot E = f \cdot h \cdot k \cdot m : g \cdot i \cdot l \cdot n,$$

oder, da B, C, D den Gliedern des ersten Verhältnisses gemeinschaftliche Factoren sind,

$$A : E = f \cdot h \cdot k \cdot m : g \cdot i \cdot l \cdot n.$$

Man sagt, das Verhältniß $A : E$ sei aus den Verhältnissen $f : g$, $h : i$, $k : l$, $m : n$ zusammengesetzt.

Anwendung auf die sogenannte zusammengesetzte Regel de Tri (Regula de quinque, de septem) und die Kettenrechnung.

Zusatz 1: Ist $A : B = f : g$, $B : C = f : g$, so ist $A : C = f^2 : g^2$, und man sagt, A stehe zu B im quadratischen Verhältniß von $f : g$.

Ebenso erhält man aus $A : B = B : C = C : D = f : g$, $A : D = f^3 : g^3$ (cubisches Verhältniß), u. s. w.

Zusatz 2: Bilden auch die zweiten Verhältnisse der Proportionen eine Kette, so verhält sich das erste Glied jeder beliebigen dieser Proportionen zu dem zweiten Gliede jeder beliebigen anderen, wie das dritte Glied der ersteren zum vierten Gliede der letzteren, oder ist

$$A : B = m : n,$$
$$B : C = n : o,$$
$$C : D = o : p,$$
$$D : E = p : q, \text{ u. s. w., so ist}$$

$A : C = m : o$, $A : D = m : p$, $A : E = m : q$, $B : D = n : p$, u. s. w.

9. Vertauscht man in einem Verhältniß die beiden Glieder mit einander, so sagt man, dasselbe sei umgekehrt. Die Umkehrung von $a : b$ ist $b : a$.

Zwei Zahlen a, b verhalten sich zu einander umgekehrt wie zwei andere Zahlen c, d, wenn ihr Verhältniß gleich dem umgekehrten Verhältniß der letzteren, also $a : b = d : c$ ist.

Lehrsatz: Das umgekehrte Verhältniß zweier Zahlen ist gleich dem Verhältniß der reciproken Werthe dieser Zahlen (d. h. der durch Division der letzteren in 1 erhaltenen Zahlen), oder

$$a : b = \frac{1}{b} : \frac{1}{a}.$$

Beweis durch den Lehrsatz in Nr. 4; $a \cdot \frac{1}{a} = b \cdot \frac{1}{b} = 1$.

Daher kann man auch sagen: Zwei Zahlen verhalten sich zu einander umgekehrt wie zwei andere, heißt, das Verhältniß der ersteren ist gleich dem Verhältniß der reciproken Werthe der letzteren; $a : b = \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$.

Anmerkung: Zwei Größen A, B stehen zu einander im umgekehrten Verhältniß der Quadrate zweier anderen Größen a, b, heißt also:

$$A : B = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} = b^2 : a^2. \text{ — Beispiele.}$$

Anwendung auf die sogenannte umgekehrte Regel de Tri.

Anhang 2: Sätze aus der Zahlenlehre.

Heis § 27, 28.

1. Die Zahlenlehre im engeren Sinne ist die Lehre von den Eigenschaften der ganzen Zahlen. Unter einer Zahl schlechthin wird in derselben stets eine ganze Zahl verstanden.

Ist eine Zahl a das Product einer Zahl b mit einer zweiten ganzen Zahl m, ist also $a = m \cdot b$, so heißt a ein Vielfaches oder Multiplum von b, und b wird ein Theiler (Divisor, Maß) von a genannt. Man sagt auch, die Zahl a sei theilbar durch b, oder b gehe in a auf.

Ist eine Zahl a kein Vielfaches einer anderen b, sondern muß einem Vielfachen $m \cdot b$ der letzteren noch eine ganze Zahl $\alpha < b$ hinzugefügt werden, um a zu erhalten, so ist a durch b nicht theilbar. Bei der Division von a durch b bleibt dann der durch b untheilbare Rest α.

Jede Zahl ist durch sich selbst und durch 1 theilbar. Zahlen, welche, außer durch sich selbst und durch die Einheit, durch keine Zahl theilbar sind, heißen absolute Primzahlen, oder Primzahlen schlechthin. Zahlen, welche nicht Primzahlen sind, heißen zusammengesetzte Zahlen.

Zahlen, welche durch 2 theilbar sind, heißen gerade, alle anderen ungerade Zahlen.

Ist eine Zahl h ein Theiler mehrerer Zahlen $a, b, c, \ldots$, ist also $a = m \cdot h$, $b = n \cdot h$, $c = p \cdot h$ u. s. w., so heißt h ein gemeinschaftlicher Theiler, oder ein gemeinschaftliches Maß der Zahlen $a, b, c, \ldots$ Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler (außer der 1) haben, heißen relative Primzahlen.

2. Lehrsätze: 1) Ist h ein Theiler zweier Zahlen a, b, so ist h auch ein Theiler ihrer Summe $a + b$ und ihrer Differenz $a - b$.

Denn ist $a = m \cdot h, b = n \cdot h$, so ist $a \pm b = (m \pm n) \cdot h$.

Allgemein: Ist h ein Theiler mehrerer Zahlen, so ist h auch ein Theiler ihrer (arithmetischen) Summe, sowie eines jeden aus denselben gebildeten Polynoms.

2) Ist h ein Theiler einer Zahl a, so ist h auch ein Theiler eines jeden Vielfachen $b = ma$ von a.

Denn ist $a = n \cdot h$, so ist $b = m \cdot a = m \cdot (nh) = (mn) \cdot h$.

Allgemein: Hat man eine Reihe von Zahlen, in welcher jede ein Vielfaches der nächstfolgenden ist, so ist auch jede frühere Zahl ein Vielfaches jeder späteren.

Zusatz: Ist h ein Theiler von a, so ist auch jeder Divisor von h ein solcher von a.

Anmerkung: Dagegen ist ein Vielfaches eines Theilers h von a nicht nothwendig auch ein Theiler von a, und ebenso h nicht nothwendig auch ein Theiler eines Divisors von a.

3) Die Summe mehrerer Zahlen $a, b, c, d, \ldots$ ist durch eine Zahl h theilbar, wenn die Summe der Reste, welche bei der Division der einzelnen Summanden durch h entstehen, durch h theilbar ist.

Denn ist

$$a = m \cdot h + \alpha,\ b = n \cdot h + \beta,\ c = p \cdot h + \gamma,\ d = q \cdot h + \delta,$$

so ist $a + b + c + d = (m + n + p + q)\,h + \alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Ist also $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ durch h theilbar, so ist auch $a + b + c + d$ durch h theilbar. (L. 1.)

4) Die Differenz zweier Zahlen ist durch h theilbar, wenn die Differenz der Reste, welche bei der Division jener Zahlen durch h entstehen, gleich Null ist.

Denn ist

$a = mh + \alpha$, $b = nh + \beta$, so ist $a - b = (m - n)\,h + \alpha - \beta$. $\alpha - \beta$ kann, da α und β kleiner als h sind, nicht durch h theilbar sein, also muß $\alpha - \beta = 0$ sein, damit $a - b$ durch h theilbar sei, und umgekehrt.

5) Ein Product $P = a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots$ ist durch jeden seiner Factoren theilbar.

Denn es ist

$$P = a \cdot (b \cdot c \cdot d \ldots) = b \cdot (a \cdot c \cdot d \ldots) = c \cdot (a \cdot b \cdot d \ldots), \text{ u. s. w.}$$

Zusatz 1: Enthält eine Zahl mehrere Factoren $a, b, c \ldots$, neben einander, so ist sie auch durch das Product derselben theilbar.

Zusatz 2: Ist eine Zahl durch ein Product $a \cdot b \cdot c \ldots$ theilbar, so ist sie auch durch jeden Factor desselben theilbar.

6) Ein Product $P = a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots$ ist durch eine Zahl h theilbar, wenn das Product der Reste, welche bei der Division der einzelnen Factoren durch h entstehen, durch h theilbar (oder gleich Null) ist.

Denn ist

$$a = m \cdot h + \alpha,\ b = n \cdot h + \beta,\ c = p \cdot h + \gamma,\ d = q \cdot h + \delta, \text{ u. s. w.,}$$

so ist

$$a \cdot b = mnh^2 + mh\beta + nh\alpha + \alpha\beta = (mnh + m\beta + n\alpha) \cdot h + \alpha\beta,$$
$$= z \cdot h + \alpha \cdot \beta,$$
$$a \cdot b \cdot c = (zh + \alpha \cdot \beta)(ph + \gamma) = (zph + \alpha\beta p + z\gamma) h + \alpha\beta\gamma$$
$$= z'h + \alpha\beta\gamma,$$
$$a \cdot b \cdot c \cdot d = (z'h + \alpha\beta\gamma)(qh + \delta) = (z'qh + \alpha\beta\gamma q + z'\delta) h + \alpha\beta\gamma\delta$$
$$= z''h + \alpha\beta\gamma\delta, \text{ u. s. w.}$$

Zusatz: Ist einer der Reste Null, so folgt die Richtigkeit des Satzes schon aus L. 5. — Ist weder einer der Reste Null, noch das Product der Reste durch h theilbar, so ist auch das Product P nicht durch h theilbar.

3. Lehrsatz: Dividirt man die kleinere b von zwei Zahlen a, b in die größere, sodann, wenn bei dieser Division ein Rest r_1 bleibt, diesen Rest in den Divisor b, den etwa hier bleibenden Rest r_2 wieder in den vorhergehenden Divisor r_1, und fährt so fort, bis die Division einmal aufgeht, so ist der letzte Divisor r_n das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen a, b.

Beweis: Bezeichnen $q_1, q_2, q_3 \ldots$ der Reihe nach die einzelnen Quotienten, ist also

$$a = b \cdot q_1 + r_1,$$
$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2,$$
$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3,$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n,$$
$$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1},$$

so ist r_n ein Theiler von r_{n-1} und folglich auch von dem Vielfachen $r_{n-1} \cdot q_n$ der letzteren Zahl. Da jede Zahl in sich selbst aufgeht, so folgt weiter, daß r_n auch ein Theiler von $r_{n-1} \cdot q_n + r_n$, d. i. von r_{n-2} ist. In dieser Weise fortfahrend, findet man der Reihe nach, daß r_n ein Theiler sämmtlicher Reste ist, und schließlich, daß r_n auch in b und a aufgeht.

Es sei δ irgend ein anderer Theiler von a und b, so geht δ auch in $b \cdot q_1$ und mithin in $a - b \cdot q_1 = r_1$ auf. Folglich ist δ auch ein Theiler von $r_1 \cdot q_2$ und mithin auch von $b - r_1 q_2 = r_2$. In dieser Weise fortfahrend, findet man, daß δ ein Theiler für jeden der Divisoren ist und schließlich auch in r_n aufgeht. Hieraus folgt, daß δ nicht größer als r_n, mithin r_n der größte gemeinschaftliche Theiler von a und b ist.

Zusätze: 1) Jeder gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen ist zugleich ein Theiler des größten gemeinschaftlichen Divisors derselben. — 2) Da jeder Rest kleiner als der vorhergehende Rest sein muß, so bilden r_1, r_2, r_3 u. s. w. eine abnehmende Reihe, und es muß mithin, wenn die Division nicht schon vorher aufgeht, zuletzt der Rest 1 erscheinen, dessen Division stets aufgeht. Das vorstehende Verfahren führt also immer zu einem Ziele. Ist der letzte Divisor 1, so sind a und b relative Primzahlen.

Durch das Vorstehende ist die Lösung der Aufgabe gegeben, zu zwei Zahlen den größten gemeinschaftlichen Theiler zu suchen.

Um die gleiche Aufgabe für drei oder mehrere Zahlen $a, b, c, \ldots$ zu lösen, suche man zunächst den größten gemeinschaftlichen Theiler h zu irgend zweien (a, b) derselben, setze diesen an die Stelle der beiden Zahlen und suche wieder zu zwei beliebigen der nun vorhandenen Reihe von Zahlen $h, c, \ldots$ den größten gemeinschaftlichen Theiler. Man wiederhole dieses Verfahren, bis man zuletzt auf eine einzige Zahl gelangt; diese letztere ist die gesuchte.

Der Beweis gründet sich darauf, daß jeder gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen auch ein Divisor ihres größten gemeinschaftlichen Theilers sein muß.

4. Lehrsatz: Sind a, b relative Primzahlen, und ist k eine beliebige dritte Zahl, so ist jeder gemeinschaftliche Theiler von $a \cdot k$ und b auch ein gemeinschaftlicher Theiler von k und b.

Beweis: Wendet man das in 3. angegebene Verfahren auf die Zahlen a, b an, für welche hier $r_n = 1$ ist, und multiplicirt jede der dort gebildeten Gleichungen mit k, so erhält man

$$\begin{aligned} ak &= bq_1 k + r_1 k, \\ bk &= r_1 q_2 k + r_2 k, \\ r_1 k &= r_2 q_3 k + r_3 k \\ &\text{u. s. w.} \\ r_n \cdot k &= k. \end{aligned}$$

Ist nun δ ein gemeinschaftlicher Theiler von ak und b, also auch ein Theiler von $b \cdot q_1 k$, so ist δ auch ein Theiler von $ak - bq_1 k = r_1 k$, also auch von $r_1 q_2 k$ und mithin auch von $bk - r_1 q_2 k = r_2 k$. Fährt man so fort, so ergiebt sich zuletzt, daß δ ein Theiler von $r_n k = k$ ist. Also geht δ in b und k auf.

Zusätze: 1) Sind a und b relative Primzahlen, und ist k ebenfalls relative Primzahl zu b, so ist auch das Product $a \cdot k$ relative Primzahl zu b. — 2) Sind a und b relative Primzahlen, und ist ak durch b theilbar, so ist auch k durch b theilbar. — 3) Allgemein: Ist jede der Zahlen $a, b, c, d, \ldots$ relative Primzahl zu einer anderen Zahl α, so ist auch ihr Product relative Primzahl zu α, und 4) sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ mehrere Zahlen, von denen jede relative Primzahl zu jeder der Zahlen $a, b, c, d, \ldots$ ist, so ist auch das Product $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \ldots$ relative Primzahl zu dem Product

$a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots$ — Hieraus folgt wieder als besonderer Fall: 5) Sind a und α relative Primzahlen, so ist auch jede Potenz (vergl. § 14) von α relative Primzahl zu jeder Potenz von a.

5. Lehrsatz: Jede Zahl, welche nicht selbst eine Primzahl ist, läßt sich stets auf eine und nur auf eine Art als Product einer endlichen Anzahl von Primzahlen darstellen.

Beweis: 1) Es sei a keine Primzahl, habe also außer a und 1 noch einen Theiler b, so ist b entweder selbst eine Primzahl, oder hat wieder einen Theiler c. Dieser Schluß läßt sich in gleicher Weise wiederholen, und da die Theiler $b, c, \ldots$ eine Reihe abnehmender Zahlen bilden, so muß man schließlich zu einem Theiler gelangen, welcher eine Primzahl ist. (Denn wäre der letzte Theiler keine Primzahl, so könnte er noch einmal zerlegt werden.) Es sei nun p diese Primzahl, so ist p auch ein Theiler von a, also a von der Form $p \cdot m$. Entweder ist nun m eine Primzahl, und dann ist a bereits als ein Product von Primzahlen dargestellt, oder es läßt sich auf m dasselbe Verfahren, wie bei a anwenden, und man erhält eine zweite Primzahl p_1, so daß $m = p_1 m_1$, also $a = p \cdot p_1 \cdot m_1$ ist. Dieselbe Schlußreihe wiederholt sich nun, und da jede folgende der Zahlen $m, m_1, \ldots$ kleiner als die vorhergehende ist, so muß man schließlich zu einem nicht mehr in Factoren zerlegbaren Theiler gelangen. Dann ist also $a = p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$.

Da diese Zerlegung der Zahl a in Primfactoren möglicherweise mit verschiedener Anordnung der einzelnen Divisionen ausgeführt werden kann, so ist noch 2) nachzuweisen, daß jedes andere Product $q \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_n$, welches man für a erhalten kann, mit dem ersteren übereinstimmt. Da nun $a = p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ durch q theilbar sein muß, so folgt aus 4), daß einer der Factoren $p, p_1, p_2 \ldots$ durch q theilbar sein muß, z. B. p, und da p eine absolute Primzahl ist, so muß $q = p$ sein. Daher ist $q_1 \cdot q_2 \cdots q_n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$, und man kann auf dieselbe Weise wie vorher zeigen, daß q_1 mit einem der Factoren $p_1, p_2, \ldots$ identisch sein muß. Indem man diese Schlußweise wiederholt, ergiebt sich, daß jeder Factor, welcher in dem einen Producte ein- oder mehrere Male vorkommt, ebenso oft in dem anderen vorkommen muß, und daß daher beide Producte — abgesehen von etwaiger Verschiedenheit in der Reihenfolge der Factoren — genau mit einander übereinstimmen müssen.

Anmerkung 1: Hieraus erklärt sich die Benennung „zusammengesetzte Zahl". 2. Vereinigt man alle Primfactoren einer Zahl a, welche in derselben in mehrfacher Anzahl vorkommen, in eine Potenz, so erhält a die Form $p^\alpha \cdot q^\beta \cdot t^\gamma \ldots$, in welcher $p, q, t, \ldots$ Primzahlen sind.

6. Der größte gemeinschaftliche Theiler mehrerer Zahlen $a, b, c, \ldots$ kann nun auch dadurch gefunden werden, daß man jede dieser Zahlen in ihre Primfactoren zerlegt. Das Product aller derjenigen dieser Factoren, welche in sämmtlichen Zahlen $a, b, c, \ldots$ vorkommen, ist der gesuchte gemeinschaftliche Theiler. — Kommen Primfactoren in derselben Zahl wiederholt (auf einer Potenz) vor, so erhält der gesuchte Theiler die kleinste Anzahl derselben, welche vorkommt.

Jeder andere gemeinschaftliche Theiler mehrerer Zahlen $a, b, c, \ldots$ wird aus dem größten gemeinschaftlichen Theiler m derselben gefunden, wenn man diesen in seine Primfactoren zerlegt und alle möglicheu Producte aus zwei, drei, oder mehreren derselben bildet.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen (Generalnenner, Hauptnenner in der Bruchrechnung) wird gefunden, wenn man diese Zahlen in ihre Primfactoren zerlegt und aus letzteren ein Product bildet, welches jeden von ihnen so oft enthält, als die Zahl, in welcher er am häufigsten vorkommt. Beweise leicht.

Anhang 3: Zahlensysteme.

1. Zur besseren Uebersicht der unendlichen Reihe von Zahlen ordnet man dieselben in Gruppen, denen eine bestimmte Zahl, in der Regel die Zahl „zehn“, als Grundzahl oder Basis zu Grunde liegt.

Man bezeichnet nämlich nur die neun ersten Zahlen durch besondere Zahlzeichen (Ziffern): 1, 2, 3, ... 9 und betrachtet die Zehn als eine neue Einheit höherer Ordnung, welche wieder durch **1** bezeichnet, doch zum Unterschied von der ursprünglichen Einheit um eine Stelle weiter nach links, als diese, geschrieben wird, wobei man die leere Stelle rechts durch eine 0 ausfüllt. Zehn solche Einheiten (Hundert) bilden wieder eine Einheit einer höheren Ordnung und werden als solche durch 1 in der dritten Stelle nach links, oder durch 100 bezeichnet. In derselben Weise schreitet man weiter zu den Einheiten der folgenden Ordnungen, indem jede derselben gleich zehn Einheiten der nächst niederen Ordnung gerechnet wird.

Bei dem Zählen wird nun, wenn die Anzahl der ursprünglichen Einheiten neun übersteigt, für jede zehn solche Einheiten eine Einheit der nächsten Ordnung gesetzt; z. B. $2\,3 = 20 + 3 = 2$ Einheiten der ersten höheren Ordnung und 3 Einheiten der ursprünglichen Art. Falls hierbei die Anzahl der Einheiten dieser höheren Ordnung wieder neun übersteigt, so wird für jede zehn solcher Einheiten wieder eine Einheit der zweiten höheren Ordnung geschrieben, z. B. $7\,5\,8 = 700 + 50 + 8$.

In dieser Weise kann man beliebig weit fortschreiten und jede Zahl aus der unendlichen Reihe derselben mit alleiniger Hülfe der neun Ziffern und der Null ausdrücken.

2. Statt der Zahl zehn kann jede beliebige andere Anzahl $1 \cdot a = a$ von ursprünglichen Einheiten als eine Einheit der ersten höheren Ordnung angenommen werden, und es sind in diesem Falle die Potenzen von a: $1 \cdot a = a^1$, $a \cdot a^1 = a^2$, $a \cdot a^2 = a^3$, u. s. w. die Einheiten der höheren Ordnung. Die ursprüngliche Einheit wird folgerecht als diejenige der nullten Ordnung (a^0) betrachtet. Jede derartige Anordnung der Zahlenreihe wird ein Zahlensystem genannt; je nach der Grundzahl heißt dasselbe ein zweitheiliges, dreitheiliges, — zehntheiliges, u. s. w. (dyadisches, triadisches, — decadisches, u. s. w.).

Anmerkungen: In jedem System werden die höheren Einheiten, also die Potenzen der Grundzahl, durch 10, 100, 1000 u. s. w. bezeichnet, und diese Zahlen haben also in verschiedenen Systemen verschiedene Werthe.

So sind z. B. 10, 100, 1000, 10000

$$\left.\begin{array}{l}\text{für das dyadische System den Zahlen } 2,\ 4,\ 8,\ 16\\ \text{für das triadische System den Zahlen } 3,\ 9,\ 27,\ 81\\ \text{für das elftheilige System den Zahlen } 11,\ 121,\ 1331,\ 14641\end{array}\right\}\text{ des decadischen}$$

gleich.

Für alle Systeme, deren Grundzahl kleiner als die des decadischen ist, genügen die Ziffern des letzteren zur Bezeichnung sämmtlicher Zahlen; für Systeme, deren Grundzahl größer ist, müssen neue Zifferzeichen eingeführt werden, z. B. bei dem zwölftheiligen System Zeichen für X und XI (etwa φ und ψ).

Jede Systemzahl ist ein nach abnehmenden Potenzen der Grundzahl geordnetes Polynom von Vielfachen dieser Potenzen und nur in vereinfachter Form geschrieben, indem diese Potenzen weggelassen und nur durch die Stellung der Ziffern angedeutet sind. So bedeutet z. B. die Zahl 2384

im decadischen System: $2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4$,

im neuntheiligen: $2 \cdot 9^3 + 3 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 + 4$,

im zwölftheiligen: $2 \cdot XII^3 + 3 \cdot XII^2 + 8 \cdot XII + 4$.

3. Die Aufgaben: 1) eine decadische Zahl in eine solche aus einem anderen Systeme, 2) eine Zahl aus einem anderen Systeme in eine decadische und 3) allgemein eine Zahl aus einem beliebigen in eine solche aus einem anderen beliebigen Systeme zu verwandeln, lassen sich leicht durch Anwendung der für das Rechnen mit Polynomen geltenden Regeln lösen, und kann das dazu einzuschlagende Verfahren von dem Anfänger selbständig gefunden werden.

Beispiele: 1) Die decadische Zahl 9837 zu verwandeln

a) in eine solche des achttheiligen Systems:

$9837 = 8 \cdot 1229 + 5$; $1229 = 8 \cdot 153 + 5$; $153 = 8 \cdot 19 + 1$;
$19 = 8 \cdot 2 + 3$, also erhält man 23155.

b) in eine des dreitheiligen Systems:

$9837 = 3 \cdot 3279 + 0$; $3279 = 3 \cdot 1093 + 0$; $1093 = 3 \cdot 364 + 1$;
$364 = 3 \cdot 121 + 1$; $121 = 3 \cdot 40 + 1$; $40 = 3 \cdot 13 + 1$; $13 = 3 \cdot 4 + 1$;
$4 = 3 \cdot 1 + 1$, also 111111100.

c) in eine des zwölftheiligen Systems:

$9837 = 12 \cdot 819 + 9$; $819 = 12 \cdot 68 + 3$; $68 = 12 \cdot 5 + 8$, also 5839.

2) Die Zahl 5839 des zwölftheiligen Systems in eine decadische zu verwandeln:

$$5 \cdot (12)^3 + 8 \cdot (12)^2 + 3 \cdot (12) + 9 = \left\{(5 \cdot 12 + 8) \cdot (12) + 3\right\} \cdot (12) + 9 =$$
$$\left\{68 \cdot (12) + 3\right\} \cdot (12) + 9 = 819 \cdot (12) + 9 = 9837.$$

Ebenso die Zahl 23155 des achttheiligen Systems:

$2 \cdot 8 + 3 = 19$; $19 \cdot 8 + 1 = 153$; $153 \cdot 8 + 5 = 1229$; $1229 \cdot 8 + 5 = 9837$.

Ebenso die Zahl 3213002 des viertheiligen Systems:

$3 \cdot 4 + 2 = 14$; $14 \cdot 4 + 1 = 57$; $57 \cdot 4 + 3 = 231$; $231 \cdot 4 + 0 = 924$;
$924 \cdot 4 + 0 = 3696$; $3696 \cdot 4 + 2 = 14786$.

3) Die Zahl 1206530 des siebentheiligen Systems in eine solche des zwölftheiligen zu verwandeln.

Man verwandele dieselbe zunächst in eine decadische (153587) und sodann diese in eine des zwölftheiligen Systems (74X 6 XI).

4. Die Regeln für das **Rechnen** mit systematischen Zahlen lassen sich ebenfalls leicht aus den für Polynome geltenden ableiten.

Alle Zahlen, welche in einer Rechnung verbunden werden sollen, müssen demselben System angehören.

Beispiele: Zu berechnen: a) 124 + 3005 + 4310, Grundzahl 6; b) 9327 — 6831, Grundzahl XII; c) 5327 · 246, Grundzahl 8; d) 573825 : 384X, Grundzahl XI.

Ausrechnung:

a)		b)		c)		d)	
a)	124	b)	9327	c)	5327	d)	573825 : 384 *X* = 156
	3005		6831		246		384 *X*
	4310		26*X*16		40412		19992
	11443				25534		17926
					12656		20675
					1603552		20675

Anmerkung 1: Das Rechnen mit systematischen Zahlen beruht hiernach im Wesentlichen auf dem mit einzifferigen Zahlen, dem „Eins und Eins, Eins von Eins, Ein mal Eins und Eins in Eins", d. h. die Resultate aller zwischen zwei ein- (bis zwei-) zifferigen Zahlen möglichen Additionen, Subtractionen, Multiplicationen und Divisionen bilden somit die Grundlage seiner practischen Ausführung. Dieselben sind natürlich für jedes System verschieden; so lautet z. B. das Ein mal Eins des sechstheiligen Systems:

1 · 1 = 1	2 · 2 = 4	3 · 3 = 13	4 · 4 = 24	5 · 5 = 41
1 · 2 = 2	2 · 3 = 10	3 · 4 = 20	4 · 5 = 32	5 · 10 = 50
1 · 3 = 3	2 · 4 = 12	3 · 5 = 23	4 · 10 = 40	10 · 10 = 100
1 · 4 = 4	2 · 5 = 14	3 · 10 = 30		
1 · 5 = 5	2 · 10 = 20			
1 · 10 = 10				

2. Die großen Vorzüge, welche das Rechnen mit systematischen Zahlen vor dem Gebrauche z. B. der römischen oder griechischen Zahlzeichen hat, und welche sich auf die Bezeichnung des Ranges der Zahlen durch ihre Stellung gründen, sind ermöglicht durch den Gebrauch der Null zum Ausfüllen leerer Stellen. Die für das practische Rechnen zu gebrauchende Grundzahl kann ganz willkürlich bestimmt werden, doch empfehlen sich weder sehr kleine Zahlen, wie 2, 3 (weil bei ihnen die größeren Zahlen in zu ausgedehnter und deßhalb wenig bequemer und übersichtlicher Form erscheinen), noch sehr große (weil bei diesen die Anzahl der einzelnen Zahlzeichen ebenfalls sehr groß wird). Bequem sind auch solche Zahlen, welche möglichst viele Theiler zulassen (wie z. B. die Zahl 12), weil sich für dieselben eine größere Anzahl von Zahlen niederen Ranges als einfache Bruchtheile von solchen höheren Ranges ausdrücken läßt. So sind z. B. im zwölftheiligen System die Zahlen 2, 3, 4, 6, 8 einfache Bruchtheile der höheren Einheit 10 ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$).

Die Praxis hat sich indeß seit den ältesten Zeiten für das decadische System entschieden, doch finden sich daneben — für benannte Größen — auch andere Systeme im Gebrauch, so z. B. das frühere Duodecimalsystem der Längenmaaße. Man benutzt selbst verschiedene Systeme bei einer und derselben Art von Größen; so ist z. B. bei dem Messen von Winkeln die kleinste Einheit die Secunde, die nächst höhere, oder die Minute gleich 60 Secunden, der Grad gleich 60 Minuten, dagegen der rechte Winkel gleich 90 Grad. Aehnliches gilt für die Zeitmaaße, die bisherige Eintheilung des Geldes u. dgl.

Die größere Bequemlichkeit, welche eine durch möglichst viele kleinere Zahlen theilbare Grundzahl bietet, ist in solchen Fällen einer der Gründe, welche sich gegen die im Uebrigen so zweckmäßige Einführung eines und desselben Systems für alle Rechnungen geltend machen lassen.

5. In gleicher Weise, wie man von der ursprünglichen Einheit zu Einheiten höherer Ordnung aufsteigt, kann man auch von derselben zu Einheiten niederer Ordnung herabsteigen, indem man die ursprüngliche Einheit in gleiche Theile theilt, und zwar bei der Grundzahl a in a Theile, so daß der Bruch $\frac{1}{a}$ als die Einheit der — 1ten Ordnung (a^{-1}), der $a$te Theil dieser letzteren, also $\frac{1}{a^2}$, als Einheit der — 2ten Ordnung (a^{-2}), u. s. f., allgemein $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ als Einheit der — $n$ten Ordnung angenommen wird. Man pflegt auch in diesem Falle den Rang einer Zahl durch ihre Stellung anzugeben, indem man jede Anzahl von Einheiten eines niederen Ranges um eine Stelle weiter nach rechts schreibt als die Einheiten des vorhergehenden Ranges. Hierbei entsteht die Nothwendigkeit, die Stelle, welche die Einheiten des ursprünglichen Ranges einnehmen, zu bezeichnen, und dies geschieht durch ein unmittelbar nach diesen letzteren gesetztes Komma. So bedeutet also 156,34001 die Zahl

$$1 \cdot a^2 + 5 \cdot a + 6 + 3 \cdot \frac{1}{a} + 4 \cdot \frac{1}{a^2} + 1 \cdot \frac{1}{a^5}.$$

Anmerkung: Zahlen niederen Ranges sind also ächte Brüche, welche zu Nennern Potenzen der Grundzahl haben.

Für das decadische System führen dieselben den Namen Decimalbrüche. Die Regeln für das Rechnen mit solchen Brüchen, die Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche, u. s. w., ergeben sich aus dem Bisherigen und können hier als bekannt vorausgesetzt werden.

Heis § 29, 30. Bardey XI, 204.

6. Theilbarkeit der decadischen Zahlen.

Heis § 28.

Eine in irgend einem Zahlensystem ausgedrückte Zahl z ist durch eine Zahl k theilbar, wenn die Summe der Producte aus ihren einzelnen Ziffern in diejenigen Reste, welche durch Division ihrer Einheiten mit k entstehen, durch k theilbar ist. — Denn sind $a, b, c, \ldots d, e, f$ die aufeinander folgenden Ziffern von z und die Einheiten derselben bezüglich $A^n, A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots A^2, A^1, A^0$, so ist $z = aA^n + b \cdot A^{n-1} + c \cdot A^{n-2} + \ldots + dA^2 + eA + f$. Ist nun $A^n = p \cdot k + \alpha$, $A^{n-1} = q \cdot k + \beta$, $A^{n-2} = r \cdot k + \gamma, \ldots, A^2 = s \cdot k + \delta$, $A = t \cdot k + \varepsilon$, so ist

$$\begin{aligned} z = {} & apk + bqk + crk + \ldots + dsk + etk \\ & + a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots + d\delta + e\varepsilon + f, \end{aligned}$$

also z durch k theilbar, wenn $a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots + d\delta + e\varepsilon + f$ durch k theilbar ist.

Wendet man diesen Satz auf das decadische System an, so findet man leicht:

Eine Zahl z ist theilbar durch:

1) $k = 2$, wenn ihre letzte Ziffer f durch 2 theilbar ist,
2) $k = 3$, wenn die Summe $a + b + c + \ldots + d + e + f$ ihrer Ziffern durch 3 theilbar ist,
3) $k = 4$, wenn die aus den beiden letzten Ziffern e, f gebildete Zahl $2e + f$ es ist (oder auch, wenn $10e + f$ es ist),
4) $k = 5$, wenn die letzte Ziffer f es ist, also für $f = 0$ oder $f = 5$,
5) $k = 6$, wenn $4(a + b + c + \ldots + e) + f$ es ist,
6) $k = 7$, wenn $\ldots 5a + 4b + 6c + 2d + 3e + f$ es ist,
7) $k = 8$, wenn $4d + 2e + f$ (oder auch $100d + 10e + f$) es ist,
8) $k = 9$, wenn die Quersumme der Ziffern $a + b + c + \ldots + f$ es ist,
9) $k = 10$, wenn die letzte Ziffer $f = 0$ ist.
10) Durch $k = 11$ ist z theilbar, wenn die Summe der an der ersten, dritten, fünften, überhaupt der an ungeraden Stellen stehenden Ziffern gleich der Summe der an geraden Stellen stehenden ist, oder wenn $f - e + d - c + b - a$ 2c. $= 0$ ist.

II. Abschnitt: Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

III. Capitel.

Potenziren.

§ 18. Erklärung.

Multiplication und Division mit Potenzen.

Ein Product $a \cdot a \cdot a \ldots$, dessen Factoren einander gleich sind, heißt eine **Potenz**. Der Factor a heißt ihre **Basis**, die Anzahl b der Factoren ihr **Exponent**. Man schreibt die Potenz $a \cdot a \cdot a \ldots$ ($b$mal) kürzer a^b und liest „a zur b^{ten} Potenz", oder „a hoch b".

Heis § 5. Bardey XI, 1—20. — Vergl. § 14, Anmerk. 2.

Anmerkung 1: a^b ist nicht gleich b^a, wie jedes Beispiel (mit Ausnahme von $2^4 = 4^2$) zeigt.

Für die Rechnung mit Potenzen erhält man die Formeln:

(54) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

d. h. statt zwei Potenzen mit gleichen Basen zu multipliciren, kann man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziren.

Beweis: $a^m \cdot a^n = (a \cdot a \cdot a \ldots (m\text{mal})) \cdot (a \cdot a \ldots (n\text{mal})) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots (m + n\text{mal}) \cdot$ (§ 14, (31), (32).) $= a^{m+n}$.

Heis § 34. Bardey XI, 21—103.

(55) $$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Wie lautet diese Formel in Worten?

Heis § 35. Bardey XI, 104—167.

Beweis: $\frac{a^m}{a_n} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots (m \text{ mal})}{a \cdot a \ldots\ldots (n \text{ mal})}$. Dividirt man hier nach § 14, (34) und § 12, (21) mit den einzelnen Factoren des Nenners, so heben sich diese Factoren des letzteren gegen eine gleiche Anzahl von Factoren des Zählers auf, es bleiben also $m - n$ Factoren in diesem, oder die Potenz a^{m-n} übrig.

Anmerkung 2: Dieser Beweis setzt stillschweigend voraus, daß $m > n$ sei. Für $m = n$ erhält man auf gleiche Weise den Werth 1, für $m < n$ den Werth $\frac{1}{a^{n-m}}$.

(56) $$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m,$$

d. h. statt zwei Potenzen mit gleichen Exponenten zu multipliciren, kann man das Product ihrer Basen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziren.

Beweis: $a^m \cdot b^m = \big(a \cdot a \cdot a \ldots (m \text{mal})\big) \cdot \big(b \cdot b \cdot b \ldots (m \text{mal})\big) = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \ldots (m \text{mal})$, nach § 14, (31), (32), oder $= (ab)^m$.

Heis § 36, 3—12. Bardey XI, 172—174.

(57) $$a^m : b^m = (a : b)^m.$$

Wie lautet diese Regel in Worten?

Beweis ähnlich wie vorher.

Heis § 37, 5—13. Bardey XI, 168—171.

Anmerkung 3: Für die Addition und Subtraction von Potenzen, wie für die Multiplication und Division solcher, welche verschiedene Basen und Exponenten haben, giebt es keine so einfachen Regeln. Man merke, daß $a^n \pm b^n$ nicht gleich $(a \pm b)^n$ ist, wie jedes Beispiel zeigt.

§ 19. Potenzen mit zusammengesetzten Exponenten.

(58) $$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

Wie wird eine Zahl mit einer Summe potenzirt?

Beweis folgt aus (54).

(59) $$a^{m-n} = a^m : a^n.$$

Wie wird eine Zahl mit einer Differenz potenzirt?

Beweis folgt aus (55).

(60) $$a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m.$$

Wie wird eine Zahl mit einem Product potenzirt?

Beweis: Ordnet man die mn Factoren in a^{mn} in m Reihen, deren jede n Factoren enthält, z. B. nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{l} a \cdot a \cdot a \ldots (n \text{mal}) \\ \cdot\, a \cdot a \cdot a \ldots \\ \cdot\, a \cdot a \cdot a \ldots \\ \cdot\, a \cdot a \cdot a \ldots \\ \vdots \\ m \text{mal}, \end{array}$$

so bilden die Factoren jeder Horizontalreihe für sich die Potenz a^n, und da m solcher Reihen zu multipliciren sind, so erhält man $(a^n)^m$. Da ferner die m Factoren jeder der n neben einander stehenden Verticalreihen die Potenz a^m bilden, so erhält man ebenso $(a^m)^n$.

Heis § 38, 14—16.

§ 20. Potenzen mit zusammengesetzter Basis.

(61) $$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Wie wird ein Product potenzirt? Beweis folgt aus (56).

Heis § 36, 13—16. Bardey XI, 175—176.

(62) $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Wie wird ein Quotient potenzirt? Beweis folgt aus (57).

Heis § 37, 14—18. Bardey XI, 177—186.

(63) $$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}.$$

Wie wird eine Potenz potenzirt? Beweis folgt aus (60).

Heis 38, 2—13. Bardey XI, 187—199.

Anmerkung: Die Potenzirung einer Summe oder einer Differenz führt nicht auf so einfache Resultate und ist daher vorläufig nur durch Ausführung der Multiplication zu bewirken. Vergleiche § 13, Gl. (29). Einstweilen merke man (§ 13, Gl. 30):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;\ (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;\ (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Aus diesen Formeln geht auch hervor, daß $(a \pm b)^n$ nicht gleich $a^n \pm b^n$ ist. Erweiterung der Formeln (54) — (63) auf zusammengesetztere Ausdrücke.

§ 21. Potenzen mit Null, Eins und algebraischen Zahlen.

Die Formel (59) geht für $m = n$ über in

(64) $$a^0 = 1,$$

und ist $m < n$, also $m - n$ negativ, so kann man dafür schreiben:

$a^{-b} = a^{0-b} = \frac{a^0}{a^b}$, oder nach (64)

(65) $$a^{-b} = \frac{1}{a^b}.$$

Obgleich nun nach der oben gegebenen Definition der Potenz die Ausdrücke a^0 und a^{-b} keinen Sinn haben, weil von einem Product mit 0 Factoren, oder mit einer negativen Anzahl von Factoren keine Rede sein kann, so steht doch nichts im Wege, nunmehr jene Definition der Art zu erweitern, daß die vorgenannten Ausdrücke den durch die Formeln (64) und (65) ihnen beigelegten Sinn erhalten. Wir haben zu diesem Zwecke nur nöthig, die Potenz a^{m-n} als den Werth von $\frac{a \cdot a \cdot a \ldots (m\,\text{mal})}{a \cdot a \ldots (n\,\text{mal})}$ zu definiren, wodurch die frühere Definition der Potenz für ganze positive Exponenten nicht verändert wird; vielmehr ist diese in jener als besonderer Fall enthalten. Auch die im Vorigen für positive Exponenten abgeleiteten Gesetze behalten für den erweiterten Begriff ihre Gültigkeit. So ist z. B. auch $(ab)^{-n} = a^{-n} \cdot b^{-n}$, denn es ist

$$\frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n \cdot b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n}.$$

Die Ausführung dieses Beweis-Verfahrens für alle übrigen Fälle bedarf keiner weiteren Anleitung und kann als Uebungsaufgabe dienen.

Ist endlich der Exponent gleich 1, so erhält man aus dieser selbigen Definition, wenn man $m = n + 1$ annimmt,

(66) $$a^1 = a.$$

Ist umgekehrt die Basis Null, oder eine negative Zahl, oder Eins, so erhält man leicht die Regeln:

(67) $0^a = 0$, aber $0^0 = 0^{a-a} = \frac{0^a}{0^a} = \frac{0}{0}$, d. h. 0^0 kann jede beliebige Zahl bedeuten;

(68) $(-a)^2 = +a^2$, $(-a)^3 = -a^3$, $(-a)^4 = +a^4$, u. s. w., allgemein

$(-a)^{2n} = +a^{2n}$, $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$,

d. h. eine negative Zahl wird potenzirt, indem man ihr Glied mit demselben Exponenten potenzirt und der Potenz das Vorzeichen + oder — giebt, je nachdem der Exponent eine gerade (d. i. durch 2 theilbare), oder eine ungerade Zahl ist.

Endlich ist $1^a = 1$.

Anmerkung: Jeder Zahl a kann man 1 als Exponent zusetzen.

Heis § 39. Bardey XII.

IV. Capitel.

Radiciren.

§ 22. Erklärungen.

Eine Zahl a mit einer anderen Zahl b radiciren (aus a die b^{te} Wurzel ausziehen), heißt zu einer Potenz a und ihrem Exponenten b die Basis c suchen. Man schreibt $\sqrt[b]{a} = c$, nennt a den Radicanden, b den Exponenten (Wurzelexponent, im Gegensatz zu Potenzexponent), $\sqrt[b]{a}$ die b^{te} Wurzel aus a, und c den Werth der Wurzel.

Anmerkung: Ist $\sqrt[b]{a} = c$, so ist $c^b = a$. Das Radiciren ist also eine dem Potenziren entgegengesetzte Operation. Ist für die unbekannte Größe x die Gleichung $x^n = a$ gegeben, so ist zufolge der Erklärung der Wurzel $x = \sqrt[n]{a}$. Aehnlich folgt aus $\sqrt[n]{x} = b$, $x = b^n$.

Die zweite Wurzel wird auch Quadratwurzel, die dritte Cubikwurzel genannt. Bei Quadratwurzeln pflegt man den Exponenten wegzulassen, z. B. $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.

Die Erklärung des Begriffs einer Wurzel ist ausgesprochen in der Formel:

$$(69) \qquad \left(\sqrt[b]{a}\right)^b = a,$$

oder in Worten: Die b^{te} Wurzel aus a ist diejenige Zahl, deren b^{te} Potenz gleich a ist.

Aus dieser Erklärung folgt:

$$(70) \qquad \sqrt[b]{a^b} = a,$$

d. h. radicirt man eine Potenz mit ihrem Exponenten, so erhält man die Basis.

Heis § 41. Bardey XIII, 1.

§ 23. Sätze über das Rechnen mit Wurzeln.

$$(71) \qquad \sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}.$$

Wie wird ein Product radicirt?

Beweis: Denn $(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m$ ist nach (61) gleich $(\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m$, oder nach (69) gleich $a \cdot b$. (Was bedeutet — zufolge der Definition der Wurzel — $\sqrt[m]{a \cdot b}$?)

Anmerkung 1: Anwendung dieser Formel auf practisches Wurzelausziehen aus größeren Zahlen durch Zerlegung derselben in Factoren, z. B. $\sqrt{6084} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 13} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 169} = 2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$. Heraussetzen quadratischer Factoren von Radicanden vor das Wurzelzeichen, z. B. $\sqrt{4 \cdot a} = 2\sqrt{a}$.

$$(72) \qquad \sqrt[m]{a : b} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}.$$

Wie wird ein Quotient radicirt?

Beweis: Durch Potenziren der rechten Seite der Gleichung mit m nach (62).

Anmerkung 2: Für das Radiciren von Summen oder Differenzen giebt es keine einfachen Formeln. Man merke, daß $\sqrt[m]{a \pm b}$ nicht gleich $\sqrt[m]{a} \pm \sqrt[m]{b}$ ist.

Umgekehrt ist

$$(73) \qquad \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b},$$

$$(74) \qquad \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a : b}.$$

Wie werden Wurzeln mit gleichen Exponenten multiplicirt, wie dividirt?

Beweise wie vorher.

Anmerkung 3: Anwendung der Formel (73) um Factoren vor einem Wurzelzeichen unter dieses zu bringen, z. B. $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$. — Erweiterung der Formeln (71) — (74) auf zusammengesetztere Ausdrücke. — Entfernung von Wurzelzeichen aus den Nennern von Quotienten durch Erweiterung der letzteren, z. B.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} = \frac{\sqrt{a^2 b}}{b}, \text{ oder } \frac{a}{b + \sqrt{c}} = \frac{a\,(b - \sqrt{c})}{(b + \sqrt{c})\,(b - \sqrt{c})} =$$

$$\frac{a \cdot (b - \sqrt{c})}{b^2 - \sqrt{c^2}} = \frac{a \cdot (b - \sqrt{c})}{b^2 - c}, \text{ oder } \frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a\,(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})\,(\sqrt{b} - \sqrt{c})} =$$

$$\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{\sqrt{b^2}-\sqrt{c^2}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}, \text{ oder } \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-d}=$$
$$\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{b+c-d+2\sqrt{bc}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})(b+c-d-2\sqrt{bc})}{(b+c-d)^2-4bc}, \text{ u. dgl. m.}$$

(75) $$\sqrt[m]{a^b}=(\sqrt[m]{a})^b=a^{\frac{b}{m}}=\sqrt[\frac{m}{b}]{a}.$$

Wie wird aus einer Potenz eine Wurzel ausgezogen?
Wie wird umgekehrt eine Wurzel potenzirt?

Beweis: $\sqrt[m]{a^b}$ ist die Zahl, deren m^{te} Potenz gleich a^b ist. Es ist nun nach (63) $[(\sqrt[m]{a})^b]^m=[(\sqrt[m]{a})^m]^b=a^b$, und $(a^{\frac{b}{m}})^m=a^{\frac{b}{m}\cdot m}=a^b$. Bei $a^{\frac{b}{m}}$ ist vorläufig vorausgesetzt, daß m ein Factor von b, oder $\frac{b}{m}$ eine ganze Zahl sei. Ebenso ist in $\sqrt[\frac{m}{b}]{a}$, $\frac{m}{b}$ als ganze Zahl vorauszusetzen (z. B. $\sqrt[12]{a^4}=\sqrt[3]{a}$), und man hat dann $(\sqrt[\frac{m}{b}]{a})^m=\sqrt[\frac{m}{b}]{a^m}=a^{m:\frac{m}{b}}=a^b$, wie vorher:

(76) $$\sqrt[m]{a^b}=\sqrt[m.p]{a^{b\cdot p}}=\sqrt[m:p]{a^{b:p}};$$

d. h. man darf bei einer Wurzel aus einer Potenz die beiden Exponenten mit derselben Zahl multipliciren oder durch dieselbe Zahl dividiren.

Beweis: Denn $(\sqrt[mp]{a^{bp}})^m=\sqrt[\frac{mp}{m}]{a^{bp}}=\sqrt[p]{a^{bp}}=\sqrt[p]{(a^b)^p}=a^b$, und umgekehrt $(\sqrt[m]{a^b})^{\frac{m}{p}}=\sqrt[m:\frac{m}{p}]{a^b}=\sqrt[p]{a^b}=a^{b:p}$.

Anmerkung: Bei $\sqrt[m:p]{a^{b:p}}$ ist (vorläufig) wieder vorausgesetzt, daß p ein Factor von m und b sei.

(77) $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Wie wird eine Wurzel radicirt?
Wie wird eine Zahl mit einem Producte radicirt?

Beweise: Durch Potenziren mit m, oder mit mn nach (75).

Heis § 42—46. Bardey XIII.

§ 24. Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten.

Die Formel $\sqrt[m]{a^b}=a^{\frac{b}{m}}$ führt umgekehrt zu der Regel:

Eine Zahl wird mit einem Quotienten potenzirt, indem man sie (in beliebiger Reihenfolge) mit seinem Dividenden potenzirt und mit seinem Divisor radicirt.

Diese, zunächst nur für den Fall, daß m ein Factor von b, d. h. daß

$\frac{b}{m}$ eine ganze Zahl ist, gültige Regel läßt sich nun auch auf die Fälle ausdehnen, daß $\frac{b}{m} = 1$ oder eine gebrochene Zahl ist, indem wir die frühere Erklärung der Potenz für ganze (positive und negative) Exponenten nur dahin erweitern, daß unter $a^{\frac{b}{m}}$ in allen Fällen die m^{te} Wurzel aus a^b verstanden werden soll.

Wir setzen also allgemein:

$$a^{\frac{b}{m}} = \sqrt[m]{a^b}, \tag{78}$$

und insbesondere

$$a^1 = a = \sqrt[1]{a}, \tag{79}$$

$$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a},\ a^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}},\ a^{-\frac{b}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^b}}. \tag{80}$$

Ebenso erweitern wir den Begriff der Wurzel für gebrochene Exponenten, indem wir

$$\sqrt[\frac{m}{b}]{a} = \sqrt[m]{a^b} = a^{\frac{b}{m}} \tag{81}$$

setzen.

Anmerkung: Daher ist nun auch ganz allgemein $\sqrt[m:p]{a^{b:p}} = \sqrt[m]{a^b}$. Die für Potenzen und Wurzeln mit ganzen Exponenten aufgestellten Sätze gelten unverändert auch für solche mit gebrochenen Exponenten, da dieselben sich aus den erweiterten Begriffen der Potenz und Wurzel ebenfalls ableiten lassen.

Es ist z. B. $a^{\frac{b}{m}} \cdot a^{\frac{c}{m}} = a^{\frac{b+c}{m}}$; denn $\sqrt[m]{a^b} \cdot \sqrt[m]{a^c} = \sqrt[m]{a^{b+c}}$, u. s. w.

Heis § 47. Bardey XVI.

§ 25. Wurzeln aus Null und algebraischen Zahlen. Vorzeichen der Wurzeln; imaginäre Zahlen.

Wird der Exponent einer Wurzel gleich Null, so hat man $\sqrt[0]{a} = \sqrt[b-b]{a} = a^{\frac{1}{b-b}} = a^{\frac{1}{0}} = a^{\infty} = \infty$, 1 oder 0, je nachdem $a > 1, = 1$ oder < 1 ist; wird die Basis gleich Null, so hat man $\sqrt[m]{0} = 0$, denn $0^m = 0$. Dagegen kann $\sqrt[0]{1}$ jede beliebige Zahl bedeuten, denn $a^0 = b^0 = 1$.

Ist der Exponent einer Wurzel negativ, so hat man $\sqrt[-m]{a} = a^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}$.

Ist der Radicand einer Wurzel eine algebraische Zahl, so kann man die Wurzel aus dem Gliede derselben ausziehen. In Betreff des dieser Wurzel zu gebenden Vorzeichens sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Ist der Wurzelexponent eine ungerade Zahl, so erhält die Wurzel dasselbe Vorzeichen, welches der Radicand hatte, oder es ist

(82) $\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}, \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}.$

2) Ist der Wurzelexponent eine gerade Zahl und α) der Radicand positiv, so kann die Wurzel sowohl positiv als negativ sein und erhält somit ein doppeltes Vorzeichen, oder

(83) $$\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a}.$$

β) Ist der Radicand aber negativ, so kann die Wurzel überhaupt nicht ausgezogen werden, oder dem Ausdruck $\sqrt[2n]{-a}$ entspricht keine der bekannten Zahlformen.

Beweis: Denn aus (68) folgt 1) $(+\sqrt[2n+1]{a})^{2n+1} = +a$ und $(-\sqrt[2n+1]{a})^{2n+1} = -a$, und 2) $(+\sqrt[2n]{a})^{2n} = (-\sqrt[2n]{a})^{2n} = +a$. Dagegen bedeutet $\sqrt[2n]{-a}$ diejenige Zahl, deren $2n^{\text{te}}$ Potenz gleich $-a$ ist. Da aber nach (68) die geraden Potenzen sowohl einer jeden positiven als einer jeden negativen (ganzen oder gebrochenen) Zahl positiv sind, so kann $\sqrt[2n]{-a}$ durch keine dieser Zahlformen dargestellt werden.

Anmerkung: Insbesondere merke man $\sqrt{a^2} = \pm a$, $\sqrt[3]{+a^3} = +a$, $\sqrt[3]{-a^3} = -a$.

Eine Wurzel aus einer negativen Zahl mit geradem Wurzelexponenten wird eine imaginäre Zahl genannt, im Gegensatz zu den übrigen Zahlformen, welche reelle Zahlen genannt werden.

Wenn auch eine imaginäre Zahl sich durch keine der reellen Zahlformen darstellen läßt, so folgt doch daraus keineswegs, daß dieselbe „unmöglich“ oder sinnlos sei, vielmehr liegt hier eine Erweiterung des bisherigen Zahlbegriffs vor, in ähnlicher Weise, wie bei der Einführung der negativen und der gebrochenen Zahlen. Wie z. B. die Differenz $3-4$ oder der Quotient $\frac{3}{4}$ nur dann unmöglich sind, wenn nur absolute, bezw. ganze Zahlen in Betracht kommen können, dagegen in anderer Hinsicht einen Sinn erhalten, durch welchen der anfängliche Begriff der (absoluten, ganzen) Zahl erweitert wird, so verhält es sich auch mit den imaginären Zahlen in Beziehung auf die reellen. Veranschaulicht man z. B. die Zahl $+1$ durch eine Strecke AB, welche auf einer Geraden von A aus in der als die positive angenommenen Richtung abgetragen ist, setzt dem entsprechend die nach der entgegengesetzten Richtung abgetragene, gleich lange Strecke AC gleich -1, und errichtet auf BC in A die Senkrechte $AD = AB = AC$, so ist nach geometrischen Sätzen AD die mittlere geometrische Proportionale zwischen AB und AC, und man kann also $AD^2 = (+1)\cdot(-1)$, oder $AD = \sqrt{-1}$ setzen. Die Strecke AD veranschaulicht also die imaginäre Einheit. Man kann in gleicher Weise auf der errichteten Senkrechten von A aus nach der entgegengesetzten Richtung die Strecke $AE = AD$ abtragen und $AD = +\sqrt{-1}$, $AE = -\sqrt{-1}$ betrachten. Die Entscheidung darüber, welche der beiden Richtungen hier als die positive, welche als die negative gelten soll, ist an sich ebenso willkürlich, wie bei AB und AC, die Verschiedenheit der Vorzeichen bezeichnet nur den Gegensatz der Zahlen. Die imaginäre

Zahl $\sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1}$ bedeutet nun das $a$fache der imaginären Einheit.

Aus den imaginären Zahlen kann in Folge weiterer Rechnung ein reeller Ausdruck hervorgehen, wie z. B. aus $\sqrt{-a^2}$ durch Erhebung ins Quadrat die Größe $-a^2$. Von besonderer Wichtigkeit bei der Rechnung mit imaginären Zahlen sind die — auch im Vorstehenden zunächst in's Auge gefaßten — Quadratwurzeln aus negativen Zahlen, über welche deßhalb im Folgenden die wichtigsten Rechnungsregeln angegeben werden.

Es ist

$$(84)\quad \begin{aligned}(\sqrt{-a})^2 &= -a,\\ (\sqrt{-a})^3 &= (\sqrt{-a})^2\cdot\sqrt{-a} = -a\sqrt{-a},\\ (\sqrt{-a})^4 &= (\sqrt{-a})^3\cdot\sqrt{-a} = (-a)\cdot(-a) = +a^2,\\ (\sqrt{-a})^5 &= (\sqrt{-a})^4\cdot\sqrt{-a} = +a^2\sqrt{-a}, \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

$$(85)\quad \sqrt{-a} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}.$$

Denn $-a = (+a)\cdot(-1)$. Die imaginäre Zahlform $\sqrt{-1}$, oder die imaginäre Einheit, wird häufig durch i bezeichnet. Aus (84) ergiebt sich dafür:

$$(86)\quad \begin{aligned}&i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = +1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1, \text{ u. s. w.}\\ &i^{4n+1} = +i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ i^{4n} = +1.\end{aligned}$$

Ferner ist $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$; $i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1$, $i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = -\frac{i}{i^2} = +i$, $i^{-4} = \frac{1}{i^4} = +1$, u. s. w., allgemein:

$$(87)\quad i^{-(4n+1)} = -i,\ i^{-(4n+2)} = -1,\ i^{-(4n+3)} = +i,\ i^{-4n} = +1.$$

Für die Multiplication und Division imaginärer Zahlen findet man nun:

$$(88)\quad \begin{aligned}(\pm\sqrt{-a})\cdot(\pm\sqrt{-b}) &= -\sqrt{ab},\\ (\pm\sqrt{-a})\cdot(\mp\sqrt{-b}) &= +\sqrt{ab},\end{aligned}$$

oder ein Product zweier (quadratischer) imaginärer Größen ist reell und zwar positiv oder negativ, je nachdem die Vorzeichen der Factoren ungleich oder gleich sind.

Beweis: $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\cdot i$, $\sqrt{-b} = \sqrt{b}\cdot i$, $(\pm\sqrt{-a})\cdot(\pm\sqrt{-b}) = (\pm\sqrt{a})\cdot(\pm\sqrt{b})\cdot i^2 = +\sqrt{ab}\cdot(-1) = -\sqrt{ab}$; $(\pm\sqrt{-a})\cdot(\mp\sqrt{-b}) = (\pm\sqrt{a})\cdot(\mp\sqrt{b})\cdot i^2 = -\sqrt{ab}\cdot(-1) = +\sqrt{ab}$.

$$(89)\quad \frac{\pm\sqrt{-a}}{\pm\sqrt{-b}} = +\sqrt{\frac{a}{b}};\quad \frac{\pm\sqrt{-a}}{\mp\sqrt{-b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}},$$

oder ein Quotient aus zwei imaginären Größen ist reell, und zwar positiv oder negativ, je nachdem die Vorzeichen der Factoren gleich oder ungleich sind.

Beweise ähnlich wie bei (88).

$$(90)\quad \begin{aligned}\sqrt{-a}\cdot\sqrt{b} &= \sqrt{-ab}\\ \sqrt{-a}:\sqrt{b} &= \sqrt{a:b}\cdot\sqrt{-1}\\ \sqrt{a}:\sqrt{-b} &= -\sqrt{a:b}\cdot\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Wie lauten diese Formeln in Worten? Beweise ähnlich wie bei (88).

Anwendung der Formeln (84)—(90) zur Entfernung imaginärer Ausdrücke aus den Divisoren gegebener Quotienten, z. B.

$$\frac{a}{b+\sqrt{-c}}=\frac{a(b-\sqrt{-c})}{b^2-\sqrt{-c}^{\,2}}=\frac{a(b-\sqrt{-c})}{b^2+c},\text{ u. dgl. m.}$$

Eine Zahl von der Form $a \pm b\sqrt{-1}$, worin a und b reelle Zahlen sind, heißt eine complexe Zahl.

Zwei complexe Zahlen, welche sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Gliedes unterscheiden, wie $a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$, heißen einander conjugirt. Das Product derselben ist $a^2 + b^2$.

Heis § 48, 49. Bardey XVII.

§ 26. Irrationale Zahlen.

Die Erklärung der $b$ten Wurzel aus a in § 22 setzt voraus, daß der Radicand a eine $b$te Potenz irgend einer ganzen oder gebrochenen Zahl sei. So sind z. B. 4, 16, 25, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{4}{9}$, $2\frac{7}{9}$ vollständige zweite Potenzen und die Quadratwurzeln aus denselben beziehungsweise 2, 4, 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3}$.

Ist dagegen die Zahl a keine vollständige $b$te Potenz einer ganzen oder gebrochenen Zahl, so kann auch zu derselben in dem bisherigen Sinne die $b$te Wurzel nicht gefunden werden.

Daß es solche Zahlen giebt, zeigt folgende Betrachtung: Bildet man die Reihe 1^b, 2^b, 3^b u. s. w. der b^{ten} Potenzen aller ganzen Zahlen, so liegen zwischen je zwei derselben noch andere ganze Zahlen. Es sei a eine der letzteren, so kann $\sqrt[b]{a}$ keine ganze Zahl sein. Es sei nun $\sqrt[b]{a}$ gleich einem Bruche $\frac{c}{d}$, den wir uns in den kleinsten Zahlen ausgedrückt denken, so daß also c und d relative Primzahlen sind, so muß $a = \left(\frac{c}{d}\right)^b = \frac{c^b}{d^b}$, also $\frac{c^b}{d^b}$ eine ganze Zahl, oder c^b durch d^b theilbar sein. Aus Anhang 2. Nr. 4, Zus. 5 folgt, daß dies nicht möglich ist, wenn c und d relative Primzahlen sind. Also kann $\sqrt[b]{a}$ auch durch keinen Bruch dargestellt werden.

Gleichwohl hat die Form $\sqrt[b]{a}$ auch in solchen Fällen eine bestimmte Bedeutung. Man kann nämlich stets zwei Zahlen α, β finden, so daß $\alpha^b < a$ und $\beta^b > a$ ist. Man kann hierbei für α nach und nach immer größere Werthe setzen, so daß α^b sich dem Werthe a mehr und mehr nähert, jedoch stets kleiner als derselbe bleibt. Ebenso kann man für β nach und nach immer kleinere Werthe setzen, so daß β^b sich dem Werthe a mehr und mehr nähert, ohne denselben je zu erreichen. Der Ausdruck $\sqrt[b]{a}$ erhält dann die Bedeutung desjenigen Grenzwerthes, welchem sich α und β immer mehr nähern, ohne ihn je vollständig zu erreichen.

So kann z. B. $\sqrt{2}$ weder durch eine ganze noch durch eine gebrochene Zahl genau ausgedrückt werden. Es liegt aber 2 zwischen $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$, also $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2, ebenso liegt 2:

1) zwischen $1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$,
2) zwischen $1{,}41^2 = 1{,}9881$ und $1{,}42^2 = 2{,}0164$,
3) zwischen $1{,}414^2 = 1{,}999396$ und $1{,}415^2 = 2{,}002225$, u. s. w.

Also liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1,4 und 1,5, ferner zwischen 1,41 und 1,42, 1,414 und 1,415, u. s. w.

Hieraus ist zu ersehen, daß $\sqrt{2}$ zwischen zwei Grenzzahlen liegt, die man bis ins Unendliche einander nähern kann, daß also $\sqrt{2}$ einen bestimmten Werth hat, welcher zwar nicht vollständig, aber doch bis zu jedem verlangten Grade der Annäherung angegeben werden kann. Vergl. § 27.

Derartige Zahlen heißen irrationale Zahlen. Eine irrationale Zahl ist also eine solche, deren Werth zwischen rationalen (ganzen oder gebrochenen) Zahlen liegt, und dem man sich durch solche bis zu jedem verlangten Grade der Genauigkeit nähern kann, ohne ihn jedoch jemals wirklich zu erreichen.

Die bisherigen allgemeinen Lehrsätze gelten, weil für die Grenzzahlen, auch für die von diesen eingeschlossenen Irrationalzahlen.

Anmerkung: Sind beide Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks gleich a, so ist die Hypotenuse (Planimetrie § 29, L. 93) gleich $\sqrt{2a^2}$. Ist also z. B. $a = 1$, so ist die Hypotenuse gleich $\sqrt{2}$. Es ist also hier die Länge der durch eine irrationale Zahl ausgedrückten Linie genau construirbar.

Sind zwei Strecken $AB = a$, $CD = b$ gegeben, und soll das Verhältniß $a : b$ derselben angegeben werden, so erhält man, wenn a ein (ganzes) Vielfaches von b ist, eine ganze Zahl. Ist a nicht durch b theilbar, läßt sich aber ein aliquoter Theil von b finden, der sich auf a ohne Rest abtragen läßt, so erhält man einen Bruch. Ist dagegen kein solcher Theil von b vorhanden, so kann das Verhältniß $a : b$ weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch angegeben werden, und die Strecken a und b heißen incommensurabel. (Vgl. Plan. § 26.) Trägt man in diesem Fall irgend einen aliquoten Theil k von b, etwa $k = \frac{1}{n} b$, auf a ab, so bleibt zuletzt ein Rest, welcher kleiner als k ist, und man erhält also $a > mk$ und $a < (m + 1) k$, während $b = nk$ ist. Demnach ist das Verhältniß $a : b$ größer als $\frac{m}{n}$ und kleiner als $\frac{m+1}{n}$, und da n beliebig groß angenommen werden kann, so kann auch der Unterschied dieser beiden Brüche, nämlich $\frac{1}{n}$, so klein gemacht werden, als man will, d. h. kleiner als jede gegebene Zahl. Das auf diese Art mit jeder verlangten Annäherung, jedoch nie mit absoluter Genauigkeit durch einen Bruch angebbare Verhältniß ist eine irrationale Zahl.

Legt man in diesem Fall CD so auf AB, daß C auf A fällt, so fällt, wenn $a > b$ ist, D auf einen Punkt zwischen A und B. Dieser Theilpunkt von AB hat die Eigenschaft, daß man niemals durch Theilung von AB in eine Anzahl gleicher Theile auf denselben kommen kann, d. h. also, daß er stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Theilpunkten der letzteren Art liegt. Man kann ihm aber durch diese beliebig nahe kommen, wenn man die Anzahl derselben entsprechend groß nimmt.

Veranschaulicht man die Reihe der absoluten ganzen Zahlen durch Punkte einer Geraden, deren Entfernungen von einem festen Anfangspunkt (Null) sich wie diese Zahlen verhalten, so hat man eine Reihe in gleichen Abständen von einander liegender Punkte, welche nach der einen Richtung ins Unendliche fortschreiten. Durch die gebrochenen Zahlen werden zwischen diesen Punkten beliebig viele andere eingeschaltet, man behält jedoch, wie nahe man dieselben einander auch bringen möge, nur eine discrete Punkt-Reihe. Durch die irrationalen Zahlen wird dieselbe stetig, und jeder Punkt des Strahls (d. h. seine Entfernung vom Anfangspunkt) kann durch eine Zahl dargestellt werden. Durch die negativen Zahlen wird die Gerade in gleicher Weise auch nach der anderen Richtung bis ins Unendliche fortgesetzt. Den imaginären Zahlen entspricht in gleicher Weise die durch den Anfangspunkt zu der ersten senkrecht gelegte Gerade, die complexe Zahl $a + bi$ endlich kann versinnlicht werden durch den Punkt, welchen man erhält, wenn man zuerst auf der reellen Geraden um die Strecke a und dann in der dazu senkrechten Richtung um die Strecke b fortschreitet. Erweiterung des Zahlenbegriffs von der Linie auf die ganze Fläche.

§ 27. Die Berechnung der Wurzeln.

a) Quadratwurzeln.

Das Quadrat einer einziffrigen Zahl liegt zwischen $1^2 = 1$ und $10^2 = 100$, ist also ein- oder zweiziffrig; das Quadrat einer zweiziffrigen Zahl liegt zwischen 100 und 10000, ist also drei- oder vierziffrig. Ebenso ist das Quadrat einer dreiziffrigen Zahl fünf- oder sechsziffrig, u. s. w. Allgemein, das Quadrat einer $n$ziffrigen Zahl ist $2n - 1$- oder $2n$-ziffrig, denn dasselbe liegt zwischen $(10^{n-1})^2$ und $(10^n)^2$, d. h. zwischen 10^{2n-2} und 10^{2n}.

Daher ist umgekehrt die Quadratwurzel aus einer ein- oder zweiziffrigen Zahl einziffrig, die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierziffrigen Zahl zweiziffrig, u. s. w. Allgemein ist die Quadratwurzel aus einer $2n - 1$- oder $2n$-ziffrigen Zahl n-ziffrig, und man erhält somit die Anzahl der Ziffern einer Quadratwurzel, wenn man den Radicanden von rechts nach links in Gruppen von je zwei Ziffern theilt und die Anzahl dieser Gruppen bestimmt, wobei eine etwa vorn übrig bleibende Zahl als eine ganze Gruppe gerechnet wird.

Die Quadratwurzel aus einer ein- oder zweiziffrigen Zahl findet man mit Hülfe des Ein- mal Eins.

Die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierziffrigen Zahl hat die Form $10x + y$, demnach ist der Radicand gleich $(10x + y)^2 = 100x^2 + 2 \cdot 10x \cdot y + y^2$. Man bestimme hiernach, um die Quadratwurzel zu finden, x so, daß x^2 der ersten Gruppe des in Paare getheilten Radicanden möglichst nahe kommt (jedoch nicht größer als dieselbe wird), subtrahire von dem Radicanden $100x^2$, bestimme y so, daß $20x \cdot y$ dem Reste möglichst nahe kommt (jedoch nicht größer als dieser Rest wird).

Ist der Radicand — was hier, wie im Folgenden, zunächst vorausgesetzt wird — ein vollständiges Quadrat, so muß $20x \cdot y + y^2$ gleich dem ganzen Reste sein. Findet sich, daß dies nicht der Fall ist, so ist der Werth von y zu groß, und also zunächst um eine Einheit kleiner als vorher anzunehmen.

Beispiel:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{62|41} = \overset{x}{7}\,\overset{y}{9} \\
x^2 = & 49| \\
20x = 140 & \quad 1341,\ y = 9 \\
20xy + y^2 = 1260 + 81 = & \quad \underline{1341}
\end{array}$$

Die Quadratwurzel aus einer 5- oder 6ziffrigen Zahl hat die Form $100x + 10y + z = 10 \cdot (10x + y) + z$, oder, wenn man für $10x + y$, x_1 setzt, $10x_1 + z$. Demnach muß der Radicand gleich $(100x + 10y + z)^2 = (10x_1 + z)^2 = 100x_1{}^2 + 20x_1 z + z^2$ sein. Hieraus folgt die Regel: Man bestimme zunächst die zweiziffrige Zahl $x_1 = 10x + y$, so daß $x_1{}^2$ möglichst nahe der Summe sämmtlicher Hunderter des Radicanden kommt, d. h. man ziehe aus der durch die beiden ersten Gruppen des in Paare getheilten Radicanden gebildeten Zahl, wie vorher gezeigt, die Quadratwurzel möglichst annähernd aus, füge dem etwa bleibenden Reste das letzte Zifferpaar zu und bestimme durch Division mit $20x_1$ in die so entstandene Zahl den Werth von z so, daß $20x_1 z + z^2$ gleich dieser letzteren Zahl wird.

Beispiel:

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{42|77|16} = \overset{x}{6}\,\overset{y}{5}\,\overset{z}{4} \\
x^2 = & 36 \\
\hline
20x = 120 & 677 \quad y = 5;\; x_1 = 65 \\
20xy + y^2 = & 625 \\
\hline
20x_1 = 1300 & 5216 \quad z = 4 \\
20x_1 z + z^2 = & 5216 \\
\hline
\end{array}
$$

Die Ausdehnung dieses Verfahrens auf mehr als sechsziffrige Zahlen geschieht in entsprechender Weise und bedarf keiner eingehenden Erläuterung.

Bei der practischen Ausführung der Rechnungen läßt man die nur zum Verständniß des Verfahrens in den obigen Beispielen angegebenen Gleichungen weg und rechnet wie in folgendem Beispiel:

$$
\begin{array}{r|r}
 & \sqrt{1|52|27|56} = 1234, \text{ oder} \\
 & 1 \\
\hline
2 & 5 \\
 & 4 \\
\hline
 & 12 \\
 & 4 \\
\hline
24 & 82 \\
 & 72 \\
\hline
 & 107 \\
 & 9 \\
\hline
246 & 985 \\
 & 984 \\
\hline
 & 16 \\
 & 16 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r}
 & \sqrt{1|52|27|56} = 1234 \\
 & 1 \\
\hline
2 & 5|2 \\
 & 44 \\
24 & 82|7 \\
 & 729 \\
246 & 985|6 \\
 & 9856 \\
\hline
\end{array}
$$

Um die Quadratwurzel aus einem Decimalbruch auszuziehen, betrachte man denselben als einen gemeinen Bruch, dessen Nenner eine Potenz von 10 ist, ziehe nach § 23 (72) die Wurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner einzeln aus und dividire die erstere Wurzel durch die letztere. Die Radicirung des Nenners setzt voraus, daß derselbe eine gerade Potenz von 10 ist, oder daß der Decimalbruch eine gerade Anzahl von Decimalstellen hat. In diesem Fall ist die Wurzel aus dem Nenner wieder eine Potenz von 10, und man erhält die Wurzel aus dem Decimalbruch, indem man den Zähler radicirt und von demselben halb so viele Decimalstellen abstreicht, als der Radicand hat, oder ebensoviele als Gruppen von Zifferpaaren in diesem auf das Komma folgen.

Ist der Zähler des Decimalbruches kein vollständiges Quadrat, so kann die Wurzel aus demselben nicht genau gefunden werden, sondern dieselbe ist irrational. Es bleibt in diesem Fall bei dem Ausziehen der Wurzel nach dem vorher angegebenen Verfahren ein Rest. Da man aber dem Decimalbruch beliebig viele Nullen als Decimalstellen anhängen kann, so kann man in diesem Falle die Rechnung beliebig weit fortsetzen und auf diese Weise die Wurzel bis zu jedem verlangten Grad von Genauigkeit finden. Hat man nämlich $2n$ Decimalstellen im Radicanden zum Wurzelausziehen benutzt und vernachlässigt nun den Rest, so beträgt der Fehler der Wurzel weniger als eine Einheit der $n$ten Decimalstelle.

Hieraus ergiebt sich die allgemeine Regel für die Berechnung von Quadratwurzeln aus Decimalbrüchen:

Man theile den Decimalbruch in Gruppen von je zwei Ziffern, und zwar indem man vom Komma aus nach beiden Seiten hin theilt, und ergänze die letzte Gruppe, falls für dieselbe nur eine Ziffer bleibt, durch eine Null. Man radicire dann, wie bei ganzen Zahlen und setze im Resultat das Komma, sobald man zu der ersten auf das Komma des Radicanden folgenden Gruppe kommt. Geht die Rechnung nicht ohne Rest auf, so bilde man durch Zufügen von Nullen an die Decimalstellen des Radicanden neue Gruppen und setze mit diesen die Rechnung fort, bis man für die gesuchte Wurzel so viel Decimalstellen gefunden hat, als die im einzelnen Falle erforderliche Genauigkeit verlangt.

In gleicher Weise findet man die Quadratwurzel aus einer nicht quadratischen ganzen Zahl, indem man derselben durch Anhängen von Nullen $2n$ Decimalstellen giebt, wenn das Resultat bis auf eine Einheit der $n$ten Decimale genau gefunden werden soll.

Uebrigens ist die Anwendung von $2n$ Decimalstellen des Radicanden zur Bestimmung von n Stellen der Wurzel nicht nothwendig, denn da das Quadrat der für irgend eine Stelle neu gefundenen Ziffer der Wurzel auf eine Anzahl der folgenden Ziffern ohne Einfluß ist, so kann dasselbe auch für diese letzteren unberücksichtigt bleiben. Man hat dann nur mit $2x$ zu dividiren und dies zu wiederholen, indem man bei jeder folgenden Division eine Ziffer von der rechten Hand aus vom Divisor abstreicht. Man nennt dieses Verfahren die abgekürzte Ausziehung der Quadratwurzel. Soll z. B. $\sqrt{2}$ auf 7 Stellen berechnet werden, so ergeben sich die drei letzten Stellen durch bloße Division, wie aus folgender Ausführung dieses Beispiels näher zu ersehen ist.

$\sqrt{2} = 1{,}4142135(6)$

```
         1
       2|100
        | 96
      28| 400
        | 281
     282|11900
        |11296
    2828 |60400
         |56564
 2828(4) |3836
         |2828
  282(8) |1008
         | 848
   28(2) |160
         |141
    2(8) |19
```

Die Quadratwurzel aus einem gemeinen Bruche kann nach § 23 (72) durch Ausziehen zweier Wurzeln und Division derselben gefunden werden. Ist der Nenner kein vollständiges Quadrat, so kann man, um die Division mit einer irrationalen Zahl zu vermeiden, zuvor den Bruch so erweitern, daß der Nenner quadratisch wird, was immer durch Erweiterung mit dem Nenner selbst möglich ist.

Bequemer ist in der Regel die Verwandlung des gemeinen Bruches in einen Decimalbruch und Radicirung des letzteren. Wird hierbei der Radicand ein periodischer Decimalbruch, welchen man in abgekürzter Form verwendet, so darf man nicht Nullen anhängen, sondern muß die fehlenden Stellen mit den Ziffern der Periode besetzen.

Ebenso darf man bei dem Ausziehen der Quadratwurzel aus einer in Form eines abgekürzten Decimalbruches gegebenen irrationalen Zahl nicht Nullen anhängen, sondern muß die fehlenden Ziffern dieses Decimalbruches zu bestimmen suchen.

Um die Quadratwurzel aus einem Buchstaben-Polynom zu ziehen, ordne man dieses zunächst nach einer Hauptgröße und suche dann, wie oben bei bestimmten Zahlen, die Werthe von $x, y, z, \ldots$ so zu bestimmen, daß $(x + y + z + \ldots)^2$ gleich dem gegebenen Polynom wird.

Anmerkung. Zur letzten Ziffer, welche man von einer irrationalen Quadratwurzel bestimmt, nimmt man diejenige, bei welcher man dem vorhergehenden Reste am nächsten kommt.

b) Cubikwurzeln.

Der Cubus einer einziffrigen Zahl ist ein-, zwei- oder dreiziffrig, da er zwischen $1^3 = 1$ und $10^3 = 1000$ liegt; der Cubus einer zweiziffrigen Zahl ist vier- bis sechsziffrig, u. s. w. Allgemein: Der Cubus einer $n$ziffrigen Zahl ist $3n - 2$-, $3n - 1$- oder $3n$-ziffrig, denn derselbe liegt zwischen $(10^{n-1})^3 = 10^{3n-3}$ und $(10^n)^3 = 10^{3n}$.

Daher ist umgekehrt die Cubikwurzel aus einer ein- bis dreiziffrigen Zahl einziffrig, die Cubikwurzel aus einer vier- bis sechsziffrigen Zahl zweiziffrig, u. s. w., allgemein, die Cubikwurzel aus einer $3n - 2$- bis $3n$-ziffrigen Zahl $n$ziffrig. Man findet die Anzahl der Ziffern der Cubikwurzel aus einem gegebenen Radicanden, wenn man die Ziffern des letzteren von rechts nach links in Gruppen von je drei Ziffern theilt und die Anzahl dieser Gruppen bestimmt, wobei die erste Gruppe links auch dann als eine vollständige gilt, wenn sie nur eine oder zwei Ziffern enthält.

Die Cubikwurzel aus einer ein- bis dreiziffrigen Zahl findet man unmittelbar durch Vergleichung mit den bekannten Cuben der einziffrigen Zahlen.

Die Cubikwurzel aus einer vier- bis sechsziffrigen Zahl hat die Form $10x + y$; daher ist der Radicand gleich

$$(10x + y)^3 = 1000 \cdot x^3 + 3 \cdot 100x^2 \cdot y + 3 \cdot 10x \cdot y^2 + y^3.$$

Hieraus folgt für das Ausziehen der Cubikwurzel die Regel:

Man bestimme x so, daß x^3 der ersten Gruppe des, wie vorher angegeben, eingetheilten Radicanden (d. h. der Anzahl der vorhandenen Tausender) möglichst nahe kommt (ohne jedoch größer als dieselbe zu sein), und ziehe x^3 von dieser Gruppe ab. Zu dem etwa bleibenden Reste zieht man die nächste Zifferngruppe des Radicanden herunter, bestimmt y so, daß $3 \cdot 100 \cdot x^2 \cdot y$ dem so erhaltenen ganzen Reste möglichst nahe kommt, was durch Division mit $300x^2$ in diesen Rest geschieht, und subtrahirt $300x^2y$, sodann $30xy^2$ und schließlich y^3. Ist der Radicand ein vollständiger Cubus, so wird hierbei zuletzt kein Rest bleiben. Ergiebt sich, daß $30xy^2$ oder y^3 größer wird, als derjenige Rest, von welchem es abzuziehen ist, so hat man für y eine zu große Zahl genommen und daher mit der nächst kleineren Zahl die Rechnung zu wiederholen. Die Factoren 100 und 10 werden kürzer weggelassen; man rückt die Zahlen entsprechend ein.

Beispiel:

$$\begin{array}{rl}
& \sqrt[3]{493|039} = \overset{x,}{7}\,\overset{y}{9}, \\
x^3 = & 343 \\
3x^2 = 147 & |1500| \quad y = 9 \\
3x^2y = & 1323 \\
& 1773 \\
3xy^2 = & 1701 \\
& 729 \\
y^3 = & 729
\end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{rl}
& \sqrt[3]{493|039} = \overset{x,}{7}\,\overset{y}{9} \\
x^3 = & 343 \\
3x^2 = 147 & |150039| \quad y = 9
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x^2y \\ +\,3xy^2 \\ +\,y^3 \end{array}\right\} = \begin{array}{l} 1323 \\ +\,1701 \\ +\,729 = 150039 \end{array}$$

Die Ausdehnung dieses Verfahrens auf mehr als sechsziffrige Zahlen geschieht in ähnlicher Weise, wie oben bei den Quadratwurzeln. Sie gründet sich darauf, daß $(100x + 10y + z)^3 = \{10 \cdot (10x + y) + z\}^3 = \{10x_1 + z\}^3 = 1000x_1{}^3 + 3 \cdot 100x_1{}^2 \cdot z + 3 \cdot 10 \cdot x_1 \cdot z^2 + z^3$ ist.

Beispiel: $\sqrt[3]{14|366|628|991} = \overbrace{\overbrace{2\,\cancel{5}\,4}^{x_1}\,3}^{x_2}\,1$, kürzer: $\sqrt[3]{14|366|628|991} = 2431$

$$\begin{array}{rll}
x^3 = & 8 & \\
3x^2 = 12 & 63 & y = 5 \\
3x^2y = & 60 & \\
 & \cancel{36} & \\
3xy^2 = & \cancel{150} & y \text{ ist zu groß} \\
 & 63 & y = 4 \\
3x^2y = & 48 & \\
 & 156 & \\
3xy^2 = & 96 & \\
 & 606 & \\
y^3 = & 64 & \\
3x_1^2 = 1728 & 5426 & z = 3 \\
3x_1^2 \cdot z = & 5184 & \\
 & 2422 & \\
3x_1 \cdot z^2 = & 648 & \\
 & 17748 & \\
z^3 = & 27 & \\
3x_2^2 = 177147 & 177219 & u = 1 \\
3x_2^2 \cdot u = & 177147 & \\
 & 729 & \\
3x_2 \cdot u^2 = & 729 & \\
 & 1 & \\
u^3 = & 1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
8 & \\
12 & 6366 \\
48 & \\
96 & \\
64 & 5824 \\
1728 & 542628 \\
5184 & \\
648 & \\
27 & 524907 \\
177147 & 17721991 \\
177147 & \\
729 & \\
1 & 17721991
\end{array}$$

Die Regeln für die Ausziehung der Cubikwurzeln aus Decimalbrüchen, sowie aus Radicanden, welche keine vollständigen Cuben sind, aus gemeinen Brüchen und aus Buchstabenpolynomen sind analog den entsprechenden Regeln für die Quadratwurzeln, nur tritt hier überall die Dreitheilung an die Stelle der Zweitheilung.

c) Höhere Wurzeln.

Die Berechnung von Wurzeln mit höheren Exponenten als drei geschieht in analoger Weise, wie die der Quadrat- und Cubikwurzeln. Man findet allgemein, daß die p^{te} Potenz einer n-ziffrigen Zahl $pn - (p-1)$- bis pn-ziffrig, die p^{te} Wurzel aus einer $pn - (p-1)$- bis pn-ziffrigen Zahl also n-ziffrig ist, daher man den Radicanden einer p^{ten} Wurzel in Gruppen zu je p Ziffern zu theilen hat. Die Ausführung der Rechnung geschieht im Anschluß an die aus $(10x + y)^p$ durch Multiplication für jeden einzelnen Fall zu entwickelnde Formel.

Ist der Exponent einer Wurzel eine zusammengesetzte Zahl, so kann man dieselbe durch Zerlegung des Exponenten in ein Product und Anwendung von Gl. (77) in § 23 auf Wurzeln niederer Grade zurückführen.

So lassen sich z. B. 4te Wurzeln durch zweimaliges, 8te durch dreimaliges Ausziehen einer Quadratwurzel, 9te durch zweimaliges Ausziehen einer Cubikwurzel, 6te durch Ausziehen einer Quadrat- und einer Cubikwurzel, allgemein alle Wurzeln, deren Exponenten die Form 2^n, oder 3^n, oder $2^n\,3^m$ haben, durch wiederholte Anwendung von Quadratwurzeln oder Cubikwurzeln berechnen. — Die Aufgabe der Berechnung beliebiger Wurzeln reducirt sich demnach auf die Behandlung solcher Wurzeln, deren Exponenten Primzahlen sind.

Man vergl. Cap. V, § 30.

Heis § 50—54. Bardey XV.

V. Capitel.

Logarithmen.

§ 28. Erklärungen.

Logarithmus einer Zahl a zu einer Basis b ist der Exponent, mit dem die Basis potenzirt werden muß, um die Zahl a zu erhalten. Man schreibt denselben $\overset{b}{\log}\, a$ oder auch $\overset{a}{\underset{b}{\wedge}}$ und liest „Logarithmus von a zur Basis b", oder „b-Logarithmus von a". Die Zahl a heißt der Logarithmand oder Numerus ($a = \text{num. } \overset{b}{\log}.\, a$).

Das Logarithmiren, d. i. das Bestimmen des Werthes eines Logarithmus, ist also, wie das Radiciren, eine dem Potenziren entgegengesetzte Operation.

Anmerkung: Logarithmiren heißt also, zu einer Potenz und ihrer Basis den Exponenten bestimmen. — Daß die beiden Umkehrungen des Potenzirens sich nicht, wie bei der Addition und Multiplication der Fall war, zu einer einzigen Rechnungsart vereinigen lassen, ist eine Folge davon, daß a^b nicht gleich b^a ist.

Die vorstehende Erklärung des Begriffs eines Logarithmus ist ausgesprochen in den Formeln:

(91) $$b^{\overset{b}{\log}\, a} = a$$

(92) $$\overset{b}{\log}\,(b^a) = a$$

Was erhält man, wenn man die Basis eines Logarithmus mit diesem potenzirt? Wem ist der Logarithmus einer Potenz der Basis gleich?

Zusätze. Insbesondere erhält man:

(93) $\overset{b}{\log}\, b = 1$, denn $b^1 = b$.

(94) $\overset{a}{\log}\, 1 = 0$, denn $a^0 = 1$.

(95) $\overset{a}{\log}\, 0 = -\infty$, denn $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$ (wenn $a > 1$).

Anmerkung 1: Ausnahmen sind $\overset{1}{\log}\, 1$ und $\overset{0}{\log}\, 0$, welche jede beliebige Zahl bedeuten können. Warum? — $\overset{1}{\log}\, a$ und $\overset{0}{\log}\, a$ lassen sich durch keine endlichen Zahlen darstellen, die Eins und die Null eignen sich also nicht zur Basis von Logarithmen.

Anmerkung 2: Der Logarithmus von a zur Basis b ist nur dann eine (ganze oder gebrochene) rationale Zahl, wenn a eine vollständige Potenz von b ist. Ist dies nicht der Fall, wie z. B. bei $\overset{2}{\log}\, 3$ oder $\overset{10}{\log}\, 2$, u. dgl., so ist der Logarithmus eine irrationale Zahl, kann also nur näherungsweise, jedoch bis zu jedem beliebigen Grade der Annäherung, durch eine rationale Zahl angegeben werden. Heis § 56. Bardey XVIII A, 1—3, 31—32.

§ 29. Lehrsätze.

Für die Logarithmen zusammengesetzter Ausdrücke ergeben sich die Regeln:

$$(96)\qquad \begin{aligned} &\overset{m}{\log}\,(ab) = \overset{m}{\log}\, a + \overset{m}{\log}\, b, \\ &\overset{m}{\log}\,\frac{a}{b} = \overset{m}{\log}\, a - \overset{m}{\log}\, b, \\ &\overset{m}{\log}\,(a^b) = b.\ \overset{m}{\log}\, a, \\ &\overset{m}{\log}\,\sqrt[b]{a} = \frac{\overset{m}{\log}\, a}{b}, \end{aligned}$$

welche sich leicht in Worte fassen lassen.

Beweise: Potenzirt man die Basis m mit $\overset{m}{\log}\, a + \overset{m}{\log}\, b$, so erhält man nach (58): $m^{\overset{m}{\log} a + \overset{m}{\log} b} = m^{\overset{m}{\log} a}.\ m^{\overset{m}{\log} b}$, oder nach (91): $a.\ b$, also ist der Exponent, womit m potenzirt werden muß, um $a \cdot b$ zu erhalten, d. i. $\overset{m}{\log}\,(ab)$, gleich $\overset{m}{\log}\, a + \overset{m}{\log}\, b$. — Ebenso findet man $m^{\overset{m}{\log} a - \overset{m}{\log} b} = m^{\overset{m}{\log} a} : m^{\overset{m}{\log} b}$ (59) $= a : b$ (91), also u. s. w. — In ähnlicher Art sind die Beweise der beiden übrigen Formeln mit Hülfe der Gleichungen (60) und (78) zu führen.

Anmerkung 1: Für den Logarithmus einer Summe oder einer Differenz giebt es keine einfachen Umformungen.

Anmerkung 2: Die Regeln (96) lassen sich leicht auf Ausdrücke, welche aus mehr als zwei Zahlen zusammengesetzt sind, erweitern. So ist z. B. $\overset{m}{\log}\,(abc\ldots) = \overset{m}{\log}\, a + \overset{m}{\log}\, b + \overset{m}{\log}\, c +$ rc., $\overset{m}{\log}\,\frac{ab}{cd} = \overset{m}{\log}\, a + \overset{m}{\log}\, b - \overset{m}{\log}\, c - \overset{m}{\log}\, d$, u. dgl. m. Heis § 57. Bardey XVIII, A 35—36, B 1—44.

§ 30. Logarithmensysteme und ihre Anwendung.

Ist man im Stande, zu jeder beliebigen Zahl a den Logarithmus für irgend eine Basis b mit Leichtigkeit (z. B. mittelst einer dazu berechneten Tabelle), sowie umgekehrt zu einem solchen Logarithmus die Zahl a (den

Numerus) zu finden, so kann man sich der Sätze (96) bedienen, um weitläufige Multiplications- und Divisionsaufgaben, sowie Potenzirungen und Radicirungen auf eine bequeme Weise auszuführen, indem man zunächst die Logarithmen der gesuchten Zahlen und dann zu diesen die Zahlen selbst bestimmt.

Die Zusammenstellung der Logarithmen aller Zahlen für eine und dieselbe Basis heißt ein **Logarithmensystem**. Es giebt so viele Logarithmensysteme, als man verschiedene Basen annehmen kann, d. h. unendlich viele. Im Gebrauch sind jedoch nur zwei derselben, nämlich das sogenannte **natürliche** oder **Neper'sche** System, dessen Grundzahl die irrationale Zahl $e = 2{,}7182818\ldots$ ist, und das **gemeine** oder **Briggische** System, dessen Grundzahl 10 ist. Die Logarithmen des letzteren Systems werden im Folgenden überall vorausgesetzt, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil angegeben ist, und schlechthin mit log (ohne Angabe der Basis) bezeichnet.

Die **Tafeln** der gemeinen Logarithmen, welche von verschiedenen Mathematikern berechnet oder herausgegeben sind (z. B. Henry Briggs, Prof. in Oxford, Vega, de la Lande, Köhler, August, Wittstein, Schrön u. s. w.), enthalten die Logarithmen aller **ganzen** Zahlen von 1 bis zu einer bestimmten Grenze (über welche letztere hinaus keine Zahlen in denjenigen Rechnungen erwartet werden, die mit Hülfe der betreffenden Tafeln gelöst werden sollen). Da die Mehrzahl dieser Logarithmen irrationale Zahlen sind, so werden dieselben in Form abgekürzter Decimalbrüche angegeben. Daher können die Rechnungen mit Logarithmen nicht in allen Fällen Anspruch auf absolute Genauigkeit machen; vielmehr ist diese Genauigkeit von der Anzahl der Decimalstellen abhängig, welche die Tafeln von den einzelnen Logarithmen angeben. Für die meisten practischen Rechnungen genügen fünfstellige Logarithmen vollständig.

Jeder solche Logarithmus besteht aus zwei Theilen, nämlich der Zahl vor dem Decimalkomma (den Ganzen), oder der **Characteristik** (Kennziffer) und den Decimalstellen oder der **Mantisse**.

Lehrsatz: Im Briggischen Logarithmensystem ist die Characteristik des Logarithmus einer ganzen Zahl stets um Eins kleiner als die Anzahl der Ziffern der letzteren.

Beweis: Für die Basis 10 ist $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$ u. s. w. Alle **einziffrigen** ganzen Zahlen liegen zwischen 1 und 10, also die Logarithmen derselben zwischen 0 und 1 (denn wenn in $b^x = a$, x zunimmt, so wächst auch a und umgekehrt), ihre Characteristik ist also gleich Null. Ebenso liegen alle zweiziffrigen Zahlen zwischen 10 und 100, ihre Logarithmen also zwischen 1 und 2, also ist die Characteristik der letzteren gleich 1. In dieser Weise kann man beliebig weit fortfahren.

Allgemein: Alle $n$ziffrigen Zahlen liegen zwischen 10^{n-1} und 10^n, ihre Logarithmen also zwischen $\log(10^{n-1}) = n - 1$ und $\log(10\ ) = n$, also ist ihre Characteristik $n - 1$.

Anmerkung: Daher kann in den Tafeln der Briggischen Logarithmen die Characteristik überall weggelassen werden, da man sich dieselbe jederzeit leicht ergänzen kann.

Lehrsatz: Die Briggischen Logarithmen aller Zahlen, welche durch Multiplication oder Division mit 10 oder Potenzen von 10 aus einander abgeleitet werden können, haben dieselbe Mantisse.

Beweis: $\log (a \cdot 10^n) = \log a + \log (10^n) = \log a + n$,
$\log (a : 10^n) = \log a - \log (10^n) = \log a - n$.

Die Addition oder Subtraction von n Ganzen wirkt nur auf die Characteristik.

Zusatz 1. Die Logarithmen aller ganzen Zahlen, welche sich nur durch angehängte Nullen von einander unterscheiden, haben dieselbe Mantisse. Daher kann man die Mantissen aller Zahlen mit weniger als n Ziffern bei den Logarithmen der n ziffrigen Zahlen finden, und da ferner die Characteristik sich nach dem vorigen Lehrsatz bestimmen läßt, so brauchen die Tafeln nur die Mantissen der höchstziffrigen von denjenigen Zahlen zu enthalten, für welche sie bestimmt sind.

Zusatz 2. Der Logarithmus eines Decimalbruchs hat dieselbe Mantisse, wie der Logarithmus seines Zählers; die Characteristik ist um eins kleiner als die Anzahl der vor dem Komma stehenden Ziffern, sofern der Decimalbruch ein unächter ist. Für einen ächten Decimalbruch erhält der Logarithmus eine negative Characteristik von soviel Einheiten, als Nullen vor den geltenden Ziffern stehen, einschließlich der Null vor dem Komma. Diese negative Characteristik wird der Mantisse — welche außerdem eine Null vor dem Komma erhält — in Form eines Subtrahendus angehängt.

Zusatz 3. Ist umgekehrt die Characteristik eines gegebenen Logarithmus 0 oder positiv, so ist der Numerus größer als 1, kann also in der Form eines unächten Decimalbruchs angegeben werden, dessen Ganze eine Ziffer mehr haben, als die Characteristik Einheiten hat. Ist die Characteristik negativ, so ist der Numerus ein ächter Decimalbruch, welcher mit so viel Nullen (einschließlich der vor dem Komma stehenden) beginnt, als die Characteristik Einheiten hat.

Zusatz 4. Der Logarithmus eines gemeinen Bruches ergiebt sich nach (96) als Differenz der Logarithmen seines Zählers und seines Nenners. Der Logarithmus eines ächten Bruches ist negativ.

Negative Logarithmen verwendet man in der Rechnung, indem man sie durch solche mit positiver Mantisse und negativer Characteristik ersetzt. Zu diesem Zwecke addirt man zu dem negativen Logarithmus die nächst höhere ganze Zahl und fügt dem erhaltenen positiven Resultat diese letztere Zahl wieder als negative Characteristik zu.

Mit solchen halb negativen Logarithmen rechnet man nach den für Differenzen geltenden Regeln. Falls bei dem Subtrahiren zweier Logarithmen die Mantisse der Differenz negativ würde, vermehrt man den Minuendus um so viel ganze Einheiten, als nöthig sind, damit die Mantisse der Differenz positiv werde, und fügt dann eben so viele Einheiten als negative Characteristik zu, oder vermehrt die etwa schon vorhandene negative Characteristik um so viele Einheiten.

Ist ein Logarithmus mit negativer Characteristik durch eine Zahl zu dividiren, so vermeidet man das Entstehen einer gebrochenen negativen Characteristik, indem man sowohl die Null vor der Mantisse des zu dividirenden

Logarithmus als auch seine negative Characteristik um eine solche ganze Zahl vergrößert, daß letztere durch den Divisor theilbar wird.

Ist mit einem halb negativen Logarithmus in eine Zahl zu dividiren, so muß man zuvor ersteren in einen ganz negativen verwandeln.

Lehrsatz: Negative Zahlen haben keine Logarithmen.

Beweis: Denn sowohl 10^{+a}, als $10^{-a} = \frac{1}{10^a}$ sind positive Zahlen, oder keine Potenz einer positiven Zahl, also auch keine Potenz von 10 kann negativ sein.

Anmerkung 1: Um Rechnungen, in welchen negative Zahlen vorkommen, mittelst Logarithmen ausführen zu können, formt man die zu berechnenden Ausdrücke mit Hülfe der für negative Zahlen geltenden Regeln so um, daß man dafür Ausdrücke mit absoluten Zahlen erhält, deren Vorzeichen nach vollendeter logarithmischer Rechnung bestimmt wird. Logarithmen solcher Zahlen, welchen nach dem Schlusse der Rechnung das Vorzeichen — zu geben ist, pflegt man durch ein angefügtes n als solche kenntlich zu machen.

So kann man z. B. bei der Multiplication algebraischer Zahlen zunächst das Product der absoluten Glieder mittelst der Logarithmen berechnen und dann dem Resultate das Vorzeichen + oder — geben, je nachdem die Anzahl der mit negativen Vorzeichen versehenen Factoren (oder der mit n bezeichneten Logarithmen) gerade oder ungerade ist. Aehnlich verfährt man bei Divisionen, u. s. w.

Anmerkung 2: Die specielle Einrichtung der logarithmischen Tafeln und ihr Gebrauch sind in den Tafeln selbst erläutert.

Heis § 58, 59a. Bardey XVIII. A, 4—30, CD.

§ 31. Die Berechnung der Logarithmen.

Sind die Logarithmen irgend eines Systems bekannt, so kann mit ihrer Hülfe jeder andere Logarithmus leicht gefunden werden, denn aus $b^x = a$ folgt $\overset{c}{\log}(b^x) = \overset{c}{\log} a$, oder $x \cdot \overset{c}{\log} b = \overset{c}{\log} a$, also $x =$

$$\overset{b}{\log} a = \frac{\overset{c}{\log} a}{\overset{c}{\log} b} = \overset{c}{\log} a \cdot \frac{1}{\overset{c}{\log} b},$$

d. h. man findet den Logarithmus einer Zahl a für irgend eine Basis b, wenn man den Logarithmus derselben Zahl für eine andere Basis c durch den Logarithmus der ersten Basis b für die letztere c dividirt, oder wenn man ihn mit dem reciproken Werthe $\frac{1}{\overset{c}{\log} b}$ dieses letzteren Logarithmus multiplicirt

Anmerkung: Insbesondere erhält man $\overset{b}{\log} a = \frac{\overset{a}{\log} a}{\overset{a}{\log} b} = \frac{1}{\overset{a}{\log} b}$, oder $\overset{b}{\log} a \cdot \overset{a}{\log} b = 1$.

Der Multiplicator $\frac{1}{\overset{c}{\log} b}$, mit welchem die Logarithmen zur Basis c multiplicirt werden müssen, um die entsprechenden Logarithmen zur Basis b zu erhalten, kann daher auch gleich $\overset{b}{\log} c$ gesetzt werden.

Es kommt somit, um jeden beliebigen Logarithmus berechnen zu können, nur darauf an, zunächst die Logarithmen aller Zahlen für irgend eine Basis oder eine Tafel der Logarithmen für irgend ein bestimmtes System berechnen zu können. Da die Wahl dieser Basis theoretisch ganz willkürlich ist, so wird man sich für eine solche entscheiden, für welche die practische Ausführung der Rechnung sich möglichst vereinfacht. Es sei zu diesem Zwecke α eine sehr kleine Zahl, und man setze $\overset{c}{\log}\,(1 + \alpha) = \alpha$, sodaß also die Basis c dieser Logarithmen (da $c^\alpha = 1 + \alpha$) gleich $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ ist. Dann ist $\log\,(1 + \alpha)^2 = 2\alpha$, $\log\,(1 + \alpha)^3 = 3\alpha$, u. s. w. Die Zahlen $1 + \alpha$, $(1 + \alpha)^2$, $(1 + \alpha)^3$ u. s. w. bilden eine in sehr kleinen Intervallen fortschreitende Reihe, und man erhält somit auf diese Weise zunächst eine Tafel der Logarithmen, deren Numeri zwar nicht nach ganzen Zahlen, aber doch mit sehr kleinen Differenzen fortschreiten.

Setzt man z. B. $\alpha = 0{,}0000001$, so ist die Basis gleich

$1{,}0000001^{10000000} = 2{,}71828168$, und man hat:

$\log 1{,}0000001 \qquad\qquad = 0{,}0000001$

$\log 1{,}00000020000001 = 0{,}0000002$, oder, wenn man überall auf 7 Decimalen abkürzt,

$$\begin{aligned}\log 1{,}0000002 &= 0{,}0000002,\\ \log 1{,}0000003 &= 0{,}0000003,\\ \log 2{,}7182817 &= 1{,}0000000, \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

Die auf diese Weise erhaltenen Zahlen gestatten nun, die zwischen ihnen liegenden Logarithmen durch ein näherungsweises Interpolationsverfahren mit dem erforderlichen Grade der Genauigkeit zu bestimmen.

Anmerkung: Nimmt man α als unendlich klein an, so erhält die in diesem Falle mit e bezeichnete Basis — wie in der höheren Mathematik gezeigt wird — den Werth $2{,}718281828459\ldots$, und die zugehörigen Logarithmen sind in diesem Falle die oben erwähnten „natürlichen" Logarithmen. Die höhere Mathematik giebt zugleich Methoden zur Berechnung der Logarithmen, welche bequemer sind, als die oben geschilderte und daher die sonst noch zu diesem Zweck abgeleiteten elementaren Methoden — welche sämmtlich bedeutend weitläufiger und mühsamer sind — entbehrlich machen. Eine elementare Methode, welche die Möglichkeit zeigt, jeden beliebigen Logarithmus auch außerhalb der Reihenfolge mit jedem verlangten Grad von Genauigkeit zu berechnen, wird jedoch später (§ 44) erklärt werden.

Der Factor, mit welchem die natürlichen Logarithmen multiplicirt werden müssen, um die Logarithmen für irgend ein anderes System zu erhalten, heißt der Modulus dieses Systems. Der Modulus des Briggischen Systems ist $\dfrac{1}{\text{log. nat. } 10} = 0{,}43429448\ldots$ Umgekehrt erhält man die natürlichen Logarithmen aus den Briggischen durch Division der letzteren mit diesem Modulus oder durch Multiplication derselben mit log. nat. $10 = \dfrac{1}{\log e} = 2{,}30258509\ldots$

Bardey XVIII, 33—34, 37—39 u. Anh. 4.

III. Abschnitt: Gleichungen.

VI. Capitel.

Von den Gleichungen überhaupt und den Bestimmungsgleichungen ersten Grades.

§ 32. Von den Gleichungen überhaupt, ihren Umformungen und ihrer Eintheilung.

Eine Gleichung ist (Arithm. § 1, Anmerk. 1) die Verbindung zweier gleichwerthiger Größen durch das Gleichheitszeichen. Die beiden gleichen Größen heißen die Seiten der Gleichung, und sind dieselben aus einzelnen Zahlen oder Zahlformen durch Addition oder Subtraction zusammengesetzt, so heißen diese Bestandtheile die Glieder der Gleichung.

Anmerkung: Beide Seiten einer Gleichung, beziehungsweise die Glieder derselben, müssen auf die nämliche Einheit bezogen sein. So folgt z. B. daraus, daß 5 Mark gleich 50 Sgr. sind, nicht $5 = 50$, wohl aber $5 = \frac{50}{10}$, oder $5 \cdot 10 = 50$.

Da gleiche Größen, wenn sie auf gleiche Weise verändert werden, gleiche Resultate geben müssen (Gleiches zu Gleichem addirt, Gleiches von Gleichem subtrahirt, Gleiches mit Gleichem multiplicirt, oder Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches), so folgt, daß man, unbeschadet der Richtigkeit einer Gleichung, zu beiden Seiten einer solchen dieselbe Zahl addiren, oder von beiden Seiten dieselbe Zahl (oder beide von derselben Zahl) subtrahiren, sowie beide Seiten mit derselben Zahl multipliciren, oder durch (bezw. in) dieselbe Zahl dividiren darf.

Insbesondere folgt hieraus, daß man mit jeder Gleichung folgende Umformungen vornehmen darf:

1) Jedes Glied kann mit verändertem Vorzeichen auf die andere Seite gesetzt (transponirt) werden.

Denn war das Glied durch das Zeichen $+$ mit den anderen Gliedern verbunden, so ist es hierdurch von beiden Seiten subtrahirt worden, war es durch das Zeichen $-$ verbunden, so ist es zu beiden Seiten addirt worden, oder ist $A + m = B$, so ist $A + m - m = B - m$, d. i. $A = B - m$, und ist $A - m = B$, so ist $A - m + m = B + m$, d. i. $A = B + m$.

Beispiele: Aus $(a + b) \cdot c = ac + bc$ folgt $(a + b) \cdot c - ac = bc$, aus $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ folgt $\frac{a}{b} = \frac{ad - bc}{bd} + \frac{c}{d}$, aus $x + 7 = 12$, $x = 12 - 7 = 5$, aus $y + 8 = 7 - y$ folgt $2y = 7 - 8 = -1$.

Zusatz: Ein Glied, welches auf beiden Seiten einer Gleichung steht und durch dasselbe Rechnungszeichen verbunden ist, kann beiderseits weggelassen werden.

Ist $A + m = B + m$, oder $A - m = B - m$, so ist $A = B$.

2) Man kann jeden in einem Gliede einer Gleichung vorkommenden Nenner aus der Gleichung wegschaffen, indem man beide Seiten (also jedes Glied) mit diesem Nenner multiplicirt.

Ist $A + \frac{b}{c} = D$, so ist $A \cdot c + b = D \cdot c$.

Man kann also auch sämmtliche Nenner aus einer Gleichung entfernen, indem man beide Seiten nach und nach mit den einzelnen Nennern, oder kürzer auf einmal mit dem Hauptnenner multiplicirt.

Beispiele: Ist $\frac{x}{4} = 3$, so ist $x = 3 \cdot 4 = 12$. Ist $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, so ist $\frac{12a}{2} + \frac{12b}{3} = \frac{12c}{4}$, oder $6a + 4b = 3c$.

Zusatz: Sind beide Seiten einer Gleichung durch eine und dieselbe Zahl dividirt, so kann man diesen gemeinschaftlichen Divisor weglassen.

3) Man kann jeden Factor eines Gliedes einer Gleichung aus derselben entfernen, indem man beide Seiten (also jedes Glied) durch diesen Factor dividirt.

Ist $A + b \cdot c = D$, so ist $\frac{A}{c} + b = \frac{D}{c}$.

Beispiele: Aus $4x = 12$ folgt $x = \frac{12}{4} = 3$, aus $a \cdot c = d + e$ folgt $a = \frac{d+e}{c}$.

Zusatz: Sind beide Seiten einer Gleichung mit einem und demselben Factor multiplicirt (haben alle Glieder beider Seiten einen gemeinschaftlichen Factor), so kann man denselben weglassen. — Sind die Seiten einer Gleichung Quotienten mit demselben Dividenden, so sind die Divisoren einander gleich.

Anmerkung: Man beachte jedoch, daß man nie mit Null dividiren darf. Das Multipliciren beider Seiten mit Null führt auf die zwar richtige, aber werthlose Gleichung $0 = 0$.

Eine Gleichung, in welcher die eine Seite nur eine Umformung oder Entwickelung der anderen ist, wie z. B. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, oder $a : \frac{1}{b} = a \cdot b$, welche also für jeden beliebigen Werth jeder in ihr enthaltenen unbestimmten Zahl (Buchstaben) richtig bleibt, heißt eine analytische (identische). Gleichungen, in denen die eine Seite nicht durch bloße Umformung und Entwickelung aus der anderen gebildet werden kann, welche also auch nicht für jeden beliebigen Werth jeder in ihr enthaltenen unbestimmten Zahl richtig bleiben, heißen Bestimmungsgleichungen. Dieselben gelten also nur, wenn einer oder mehreren ihrer unbestimmten Zahlen bestimmte Werthe beigelegt werden, wie z. B.

die Gleichung $x + 5 = 7$ nur für $x = 2$, die Gleichung $2 \cdot y = 8$ nur für $y = 4$. Man pflegt diese Größen die unbekannten Größen, oder schlechthin die Unbekannten zu nennen und dieselben durch die letzten Buchstaben des Alphabets (x, y, z) zu bezeichnen, während Zahlen, denen jeder beliebige Werth beigelegt werden darf, in der Regel durch die ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet werden. Eine Bestimmungsgleichung auflösen, heißt durch Umformung derselben die Werthe der Unbekannten ermitteln, welche ihr genügen. Diese Werthe nennt man die Wurzeln der Gleichung. Im Folgenden werden, sofern nicht das Gegentheil gesagt ist, nur solche Bestimmungsgleichungen berücksichtigt, in denen die Unbekannten nur als Bestandtheile einer Summe oder Differenz, eines Products oder eines Quotienten, oder endlich als Basen von Potenzen vorkommen. Wir schließen also vorläufig alle Gleichungen aus, in denen z. B. eine Unbekannte als Exponent einer Potenz oder Wurzel, als Radicand, Logarithmand u. dergl. vorkommt. — Eintheilung der Gleichungen in algebraische und transscendente. Eintheilung der algebraischen in rationale und irrationale. — Algebra.

Man theilt die Bestimmungsgleichungen nach der Anzahl der in ihnen enthaltenen Unbekannten in solche mit einer, zwei oder mehreren Unbekannten ein.

Die Glieder einer Gleichung werden unterschieden in solche 0^{ter}, 1^{ter}, $2^{\text{ter}}, \ldots n^{\text{ter}}$ Dimension. Ein Glied ist von der n^{ten} Dimension, wenn dasselbe n unbekannte Factoren enthält (welche unter sich verschieden oder zum Theil oder sämmtlich gleich sein können. Potenzen unbekannter Größen.).

Ein Glied, welches keine Unbekannte enthält, ist also von der 0^{ten}, ein Glied mit einer einzigen Unbekannten auf der ersten Potenz ist von der 1^{ten}, Glieder mit x^2, $x \cdot y$ sind von der 2^{ten} Dimension, u. s. w.

Die Auflösung einer Bestimmungsgleichung wird in der Regel durch folgende Umformungen derselben vorbereitet:

1) Man löst alle Klammern auf, welche eine unbekannte Größe enthalten.

2) Man schafft alle Nenner aus der Gleichung.

3) Man bringt alle Glieder, welche (eine oder mehrere) Unbekannte enthalten, auf die eine Seite, alle übrigen Glieder auf die andere Seite der Gleichung.

Eine Gleichung, welche nach diesen Umformungen wenigstens ein Glied von der n^{ten}, aber keins von einer höheren Dimension enthält, heißt eine Gleichung vom n^{ten} Grade.

Eine Gleichung heißt also vom ersten Grade, wenn sie kein Product und keine Potenz von Unbekannten enthält, sie heißt vom zweiten Grade, wenn sie das Quadrat einer oder ein Product zweier unbekannter Größen, aber kein Glied von einer höheren Dimension enthält, u. s. w.

Im Folgenden werden zunächst nur Gleichungen des ersten und zweiten Grades berücksichtigt.

§ 33. Gleichungen ersten Grades.

Eine Gleichung heißt geordnet, wenn nach Vornahme der vorher angegebenen Umformungen noch alle Glieder, welche dieselbe Unbekannte enthalten, in je ein Glied (durch Absondern des gemeinschaftlichen unbekannten Factors) zusammengefaßt sind.

Eine geordnete Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten hat die Form

$$a \,.\, x = b.$$

Dieselbe wird aufgelöst durch Division beider Seiten mit dem Coefficienten der Unbekannten. Es ist

$$x = \frac{b}{a}.$$

Anmerkung: Eine Probe der Richtigkeit ergiebt sich durch Einsetzen des gefundenen Werthes in die gegebene Gleichung.

Eine geordnete Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten hat die Form

$$ax + by = c.$$

Eine solche Gleichung reicht zur Auffindung der Werthe der Unbekannten nicht hin, denn löst man dieselbe durch die Umformungen

$$ax = c - by,\ x = \frac{c - by}{a},\ \text{oder}$$

$$by = c - ax,\ y = \frac{c - ax}{b}\ \text{auf},$$

so enthält der für eine Unbekannte gefundene Ausdruck noch die andere Unbekannte, ist also nicht geeignet, den Werth der ersteren zu bestimmen. Dagegen gelingt dies, wenn man mit der gegebenen Gleichung eine zweite zwischen denselben Unbekannten verbindet, oder zum Berechnen der Werthe zweier Unbekannten bedarf man zweier Gleichungen zwischen denselben.

Zwei solche geordnete Gleichungen $ax + by = c$
$\alpha x + \beta y = \gamma$ werden aufgelöst, indem man zunächst aus denselben eine dritte Gleichung (die Eliminationsgleichung) ableitet, welche eine der Unbekannten nicht mehr enthält. Man nennt dies das Eliminiren dieser Unbekannten und bedient sich für dasselbe in der Regel einer der drei folgenden Methoden:

1) Die Combinationsmethode: Man leitet aus jeder der beiden Gleichungen einen Ausdruck für die zu eliminirende Unbekannte ab, indem man dieselbe wie eine Gleichung mit einer Unbekannten behandelt. Die beiden Ausdrücke setzt man einander gleich. Man findet z. B.

$$x = \frac{c - by}{a},\ x = \frac{\gamma - \beta y}{\alpha},\ \text{also}\ \frac{c - by}{a} = \frac{\gamma - \beta y}{\alpha}.$$

2) Die Substitutionsmethode: Man sucht nur aus einer der gegebenen Gleichungen einen Ausdruck für die zu eliminirende Unbekannte und substituirt diesen dann an der Stelle derselben in der anderen Gleichung, z. B.

$$x = \frac{c - by}{a}, \quad \alpha \cdot \frac{c - by}{a} + \beta y = \gamma.$$

3) Die Englische, oder die Additions- und Subtractionsmethode: Man bilde das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Coefficienten der zu eliminirenden Unbekannten und multiplicire beide Seiten einer jeden Gleichung mit demjenigen Factor dieses Vielfachen, welcher ihrem Coefficienten der genannten Unbekannten fehlt. Darauf addire oder subtrahire man die so umgeformten Gleichungen, je nachdem die Vorzeichen der in Folge des oben genannten Verfahrens mit gleichen Coefficienten versehenen Glieder ungleich oder gleich sind; z. B.

$$\begin{array}{rl} 9x + 20y = 78 & \cdot 5 \\ 15x - 8y = 54 & \cdot 3 \\ \hline 45x + 100y = 390 & \\ 45x - 24y = 162 & \\ \hline 124y = 228 & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rl} 9x + 20y = 78 & \cdot 2 \\ 15x - 8y = 54 & \cdot 5 \\ \hline 18x + 40y = 156 & \\ 75x - 40y = 270 & \\ \hline 93x = 426 & \end{array}$$

Allgemein am besten nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{r|c|c} ax + by = c & \beta & -\alpha \\ \alpha x + \beta y = \gamma & -b & a \\ \hline \end{array}$$
$$x(a\beta - b\alpha) = c\beta - b\gamma$$
$$y(a\beta - b\alpha) = a\gamma - c\alpha, \text{ u. s. w.}$$

Hat man auf eine dieser Arten (oder auf einem sonstigen Wege) die Eliminationsgleichung erhalten, so löst man diese auf die in ihr noch enthaltene Unbekannte auf. Die zweite Unbekannte findet man in der Regel am einfachsten durch Substitution des für die erste erhaltenen Werthes in eine der gegebenen (geordneten) Gleichungen und Auflösen der so erhaltenen Gleichung auf diese zweite Unbekannte, doch kann man auch das Eliminationsverfahren in Beziehung auf die andere Unbekannte wiederholen, und man erhält nach 3) hierdurch auf bequeme Weise die allgemeinen Resultate

$$x = \frac{c\beta - b\gamma}{a\beta - b\alpha}, \quad y = \frac{a\gamma - c\alpha}{a\beta - b\alpha},$$

bei welchen man die Gleichheit der Nenner und das übereinstimmende Bildungsgesetz der Zähler und Nenner beachte.

Anmerkung: Aus den Gleichungen $x + y = s$, $x - y = d$ folgt durch Addition unmittelbar $2x = s + d$, also $x = \frac{1}{2}(s + d)$, und durch Subtraction $2y = s - d$, also $y = \frac{1}{2}(s - d)$.

Ist also die Summe s und die Differenz d zweier Größen gegeben, so ist die eine von diesen gleich der halben Summe, die andere gleich der halben Differenz der gegebenen Summe und Differenz.

Zur Auflösung von Gleichungen mit drei oder mehreren Unbekannten bedarf man ebensovieler Gleichungen, als unbekannte Größen vorhanden sind.

Der Beweis folgt daraus, daß bei Vermehrung der Anzahl der Unbekannten um eine, auch eine Vermehrung der Gleichungen erforderlich wird, weil anderen Falls die für die übrigen unbekannten Größen gefundenen Ausdrücke die neue Unbekannte enthalten müssen. Man verbindet die gegebenen Gleichungen, nachdem sie geordnet sind, paarweise und bildet aus jedem Paare, wie oben angegeben, eine Eliminationsgleichung, indem man jedesmal dieselbe Unbekannte eliminirt. Hat man auf diese Weise aus n Gleichungen mit n Unbekannten $n - 1$ neue Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten erhalten, so verfährt man mit diesen auf gleiche Weise, indem man $n - 2$ Eliminationsgleichungen mit $n - 2$ Unbekannten bildet. Man fährt hiermit so lange fort, bis man eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, die man dann auf diese letztere auflöst. Den gefundenen Werth substituirt man an ihrer Stelle in eine der Eliminationsgleichungen mit zwei Unbekannten und bestimmt hierdurch die zweite Unbekannte; dann substituirt man die beiden nun bekannten Werthe in eine der Gleichungen mit drei Unbekannten, und fährt in dieser Weise fort, bis die Werthe sämmtlicher n Unbekannten gefunden sind.

Soll die Auflösung gegebener Gleichungen auf mehrere Unbekannte möglich sein, so müssen diese Gleichungen sämmtlich von einander unabhängig sein, d. h. es darf keine derselben sich aus einer oder mehreren der übrigen durch bloße Umformung oder Verbindung derselben ableiten lassen.

Denn befindet sich unter den gegebenen Gleichungen eine solche, welche sich aus den übrigen ableiten läßt, so ist dieselbe durch letztere von selbst gegeben und kann nicht als eine neue, selbständige Gleichung gelten. Der Versuch der Auflösung führt in solchem Falle auf eine identische Gleichung. Daher darf auch bei der Elimination von Unbekannten niemals eine Eliminationsgleichung durch Verbindung zweier Gleichungen gebildet werden, welche bereits mittelbar mit einander verbunden worden sind. Alle n gegebenen Gleichungen müssen zur Elimination benutzt werden.

VII. Capitel.

Gleichungen zweiten Grades.

§ 34.

Eine Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten enthält nach § 32 das Quadrat derselben und kann außerdem auch Glieder mit der ersten Potenz und Glieder ohne die Unbekannte enthalten. Sie heißt vollständig, wenn alle drei Arten von Gliedern vorkommen, unvollständig, wenn eine der letzteren oder beide fehlen. Die vollständige quadratische Gleichung heißt geordnet, wenn sie durch Auflösen der etwa vorhandenen Klammern, Wegschaffen der Nenner, Zusammenfassen der Glieder jeder einzelnen Art und Ordnen derselben, endlich durch Division mit dem Coefficienten von x^2 auf die Form:

(1) $$x^2 + p \cdot x = q$$

gebracht ist.

Um eine solche geordnete quadratische Gleichung aufzulösen, bringe man ihre linke Seite auf die Form eines vollständigen Quadrats: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, indem man für $p \cdot x$, $2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}p$ setzt und zu beiden Seiten der Gleichung $(\frac{1}{2}p)^2$ oder $\frac{1}{4}p^2$ addirt. Man erhält so: $x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2}p + (\frac{1}{2}p)^2 = q + \frac{1}{4}p^2$, oder $(x + \frac{1}{2}p)^2 = q + \frac{1}{4}p^2$, und hieraus $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, also

$$(2) \qquad x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}.$$

Substitution der Werthe von p und q in die Formel (2) bei jedem speciellen Fall statt jedesmaliger Wiederholung der ganzen Ableitung.

*§ 35. Discussion der Formel (2).

Die Formel (2) umfaßt alle besonderen Fälle vollständiger oder unvollständiger Gleichungen. Wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzel liefert sie zwei Werthe für x; eine quadratische Gleichung hat also stets zwei Wurzeln.

Ist q positiv, so ist $q + \frac{1}{4}p^2$ ebenfalls positiv, gleichviel ob p positiv oder negativ ist; beide Wurzeln der Gleichung sind also in diesem Fall reell. Dabei ist für positives p die eine stets negativ, die andere stets positiv (denn $\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} > \sqrt{\frac{1}{4}p^2}$, d. i. $> \frac{1}{2}p$). Für negatives p, oder für die Gleichung $x^2 - px = q$ kann die Formel (2) durch $x = +\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$ ersetzt werden, und es ist wieder die eine Wurzel positiv, die andere negativ. Für $p = 0$, oder für die Gleichung $x^2 = q$, welche eine rein quadratische heißt, erhält man, wie auch leicht unmittelbar zu finden, $x = \pm\sqrt{q}$.

Ist q negativ, so erhält man für die Gleichung $x^2 + px = -q$ die Formel: $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$. Ist nun a) $\frac{1}{4}p^2 > q$, so sind beide Wurzeln der Gleichung reell und bei positivem p beide negativ, bei negativem p beide positiv. Ist b) $\frac{1}{4}p^2 = q$, so werden beide Wurzeln einander gleich, und man hat $x = -\frac{1}{2}p$. Ist c) $\frac{1}{4}p^2 < q$, so sind beide Wurzeln imaginär. Dasselbe findet also auch statt für die reine quadratische Gleichung $x^2 = -q$, welche $x = \pm\sqrt{-q}$ ergiebt. Ist endlich $q = 0$, so hat die Gleichung $x^2 + px = 0$ die Wurzel $x = 0$ und außerdem die Wurzel $x = -p$.

Anmerkung 1: Die Gleichung $x^2 + px = 0$ läßt sich durch x dividiren, aber nur in der Voraussetzung, daß x nicht gleich Null sei. Man erhält dann $x + p = 0$, $x = -p$. Die andere Wurzel der quadratischen Gleichung ist offenbar $x = 0$.

Anmerkung 2: Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ läßt sich stets auf die Form $(x-a)(x-b) = 0$ bringen, wobei a und b die beiden Wurzeln der Gleichung sind. Es ist $p = -(a+b)$, $q = +ab$.

Man kann hierauf eine andere Methode der Ableitung der Formel (2) gründen.

Anmerkung 3: Eine dritte Methode ist folgende: Man setze in $x^2 + px = q$, $x = y + \xi$ und bestimme in der dadurch entstehenden neuen Gleichung den Werth von ξ so, daß der Coefficient des Gliedes mit der ersten Potenz von y gleich Null wird, also eine rein quadratische Gleichung von der Form $y^2 = A$ entsteht. Dann hat man $y = \pm\sqrt{A}$, also $x = \xi \pm \sqrt{A}$.

Auf diesem Wege kann man überhaupt aus jeder geordneten Gleichung das Glied mit der zweithöchsten Potenz der Unbekannten wegschaffen.

Eine so umgeformte Gleichung heißt reducirt.

Anmerkung 4: Auflösung der Gleichungen von der Form $x^{2n} + p \cdot x^n = q$ durch die Substitution $x^n = y$; $(x = \sqrt[n]{y})$.

*§ 36.

Eine geordnete quadratische Gleichung mit 2 Unbekannten hat, wenn sie vollständig ist, die Form:

$$x^2 + a\,xy + by^2 + cx + dy = e.$$

Um aus zwei solchen Gleichungen die Werthe der Unbekannten zu finden, kann man sich der bekannten Eliminationsmethoden (§ 33) bedienen.

Man erhält als Eliminationsgleichung in der Regel eine Gleichung vom vierten Grade, deren weitere Behandlung außerhalb der Grenzen dieses Lehrbuchs liegt. Vgl. übrigens § 44. In vielen Fällen gelingt es jedoch, die Eliminationsgleichung auf eine solche eines niederen Grades zu reduciren, so daß dieselbe auch mittelst der bisher behandelten Lehren auflösbar wird.

Es seien z. B. aus der Summe $x + y = s$ und dem Producte $x \cdot y = p$ zweier Zahlen diese Zahlen zu finden, so ergiebt die Substitution von $y = s - x$ aus der ersten in die zweite Gleichung die quadratische Eliminationsgleichung $sx - x^2 = p$, also $x = \pm\sqrt{-p + \frac{s^2}{4}} + \frac{s}{2}$, und ebenso $y = \mp\sqrt{-p + \frac{s^2}{4}} + \frac{s}{2}$. Oder man bilde zunächst $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = (x + y)^2 - 4xy = s^2 - 4p$, also $x - y = \sqrt{s^2 - 4p}$, und berechne aus $x + y$ und $x - y$ die Werthe von x und y. Oder man folgert aus § 35, Anmerk. 2, daß x und y die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 - sx + p = 0$ sind.

Beispiel 2: $x^2 - y^2 = m$, $y(x + y) = n$. Man setze $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = m = x(x + y) - y(x + y) = x(x + y) - n$, also $x(x + y) = m + n$, daher $\frac{x}{y} = \frac{m + n}{n}$, $x = \frac{m + n}{n} \cdot y$, also $y(x + y) = y\left(\frac{m + n}{n} \cdot y + y\right) = y^2 \cdot \frac{m + 2n}{n} = n$, $y^2 = \frac{n^2}{m + 2n}$, $y = \frac{n}{\pm\sqrt{m + 2n}}$ 2c.

Beispiel 3: $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 12y = -4$.

$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5y = 53.$$

Heis § 73, Nr. 46.

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen $x^2 - 6xy + 9y^2 = (x - 3y)^2$; $-4x + 12y = -4(x - 3y)$ und sodann $x - 3y = z$, so erhält man $z^2 - 4z = -4$, also $z = \pm\sqrt{-4 + 4} + 2 = 2$, also $x = 2 + 3y$. Setzt man diesen Ausdruck für x in die zweite Gleichung ein, so erhält man $6y^2 + y = 57$

und hieraus $y_1 = +3$, $y_2 = -3\frac{1}{6}$, also $x_1 = 2 + 3 \cdot 3 = 11$, $x_2 = 2 - 3 \cdot 3\frac{1}{6} = -7\frac{1}{2}$.

Beispiel 4: (Heis § 73, Nr. 18). $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}, \frac{10}{xy} = \frac{1}{18}$.

Aus der ersten Gleichung folgt $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{5}$, also, wenn man für xy aus der zweiten Gleichung 180 einsetzt, $x + y = \frac{180}{5} = 36$. Hieraus und aus $xy = 180$ ergeben sich nach Beispiel 1 die Werthe von x und y.

Oder man setze $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ und berechne zunächst x' und y'.

Beispiel 5: (Heis § 73, Nr. 13). $(x+y)^2 - 2x^2 = 49$; $3x^2 + 4(x+y)^2 = 372$. Man multiplicire die erste Gleichung mit 4 und subtrahire die so entstehende Gleichung von der zweiten. Dies ergiebt $11x^2 = 176$, $x = \pm 4$. Daher ist $(x+y)^2 - 32 = 49$; $x + y = \pm 9$, mithin $x_1 = +4$, $y_1 = +5$ oder -13; $x_2 = -4$, $y_2 = +13$ oder -5.

Anmerkung: Enthält eine Gleichung eine oder mehrere unbekannte Größen unter Wurzelzeichen, so müssen diese Wurzeln zum Zwecke des Ordnens der Gleichung entfernt werden. Dies kann in vielen Fällen dadurch geschehen, daß man beide Seiten der Gleichung mit einem passenden Exponenten potenzirt. Enthält die Gleichung nur eine solche Wurzel, so schaffe man diese zunächst auf eine Seite allein und potenzire dann beide Seiten mit ihrem Exponenten. Enthält die Gleichung zwei Quadratwurzeln, so bringe man entweder eine von ihnen oder beide zusammen auf eine Seite allein und potenzire mit 2. Die hierdurch entstehende Gleichung wird dann noch eine Quadratwurzel enthalten, welche durch nochmaliges Potenziren, wie vorher gezeigt, entfernt wird.

Anhang 4. Gleichungen 3. Grades mit einer Unbekannten.

Eine Gleichung 3. Grades mit einer Unbekannten heißt geordnet, wenn sie auf die Form $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ gebracht ist. Sie ist vollständig, wenn keiner der Coefficienten a, b, c gleich Null ist, anderenfalls, also wenn eins oder mehrere der 3 letzten Glieder fehlen, heißt sie unvollständig. Eine Gleichung 3. Grades, welcher das zweite Glied fehlt ($a = 0$), heißt reducirt, eine Gleichung, welcher das zweite und das dritte fehlen, heißt eine reine Gleichung 3. Grades.

a) Auflösung der reinen Gleichung 3. Grades: $x^3 + a = 0$. Es ist $x^3 = -a$, also $x = \sqrt[3]{-a}$.

b) Auflösung der reducirten Gleichung 3. Grades: $x^3 + px + q = 0$. Man setze $x = y + z$, so ist $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y + z) + q = 0$, oder $y^3 + z^3 + 3yz(y + z) + p(y + z) + q = 0$, oder $y^3 + z^3 + (y + z)(3yz + p) + q = 0$.

Bestimmt man nun den Werth von z so, daß $3yz + p = 0$ wird, setzt also

$$(1) \qquad z = -\frac{p}{3y},$$

so wird (2) $y^3 + z^3 + q = 0$, oder $y^3 - \frac{p^3}{27\,y^3} + q = 0$, oder $y^6 + qy^3 = \frac{p^3}{27}$. Setzt man $y^3 = x'$, so wird $x'^2 + q \cdot x' = \frac{1}{27}p^3$, also $x' = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}$,
also $y = \sqrt[3]{x'} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$.

Aus (2) folgt nun $z^3 = -q - y^3 = -\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}$, also $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$.

Mithin ist

(3) $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$.

Diese Formel heißt die Cardanische.

c) Auflösung der vollständigen cubischen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Man setze $x = y + \alpha$, so ist

$$\left.\begin{array}{l|l|l} y^3 + 3\alpha & y^2 + 3\alpha^2 & y + \alpha^3 \\ \quad + a & \quad + 2a\alpha & \quad + a\alpha^2 \\ & \quad + b & \quad + b\alpha \\ & & \quad + c \end{array}\right\} = 0.$$

Bestimmt man nun den Werth von α so, daß $3\alpha + a = 0$ wird, setzt also $\alpha = -\frac{1}{3}a$, so erhält man für y eine reducirte Gleichung, die mittelst der Cardanischen Formel aufgelöst werden kann, und hat dann $x = y - \frac{1}{3}\alpha$.

Ist $x = \omega$ eine Wurzel irgend einer cubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, so ist die linke Seite (das sogenannte Polynom) derselben durch $x - \omega$ ohne Rest theilbar.

Denn in diesem Fall ist $\omega^3 + a\omega^2 + b\omega + c = 0$, und führt man die angegebene Division aus, so erhält man hierdurch für den Rest den Werth Null. Dasselbe ergiebt sich auch durch Subtraction der beiden vorstehenden Gleichungen, denn in $(x^3 - \omega^3) + a(x^2 - \omega^2) + b(x - \omega)$ ist jedes einzelne Glied durch $x - \omega$ theilbar.

Hieraus folgt, daß sich das Polynom jeder cubischen Gleichung in der Form des Products von $x - \omega$ mit einem quadratischen Factor darstellen läßt, und da dieses Product auch dadurch den Werth Null erhalten kann, daß dieser quadratische Factor gleich Null gesetzt wird, die so entstehende Gleichung zweiten Grades aber wieder zwei Wurzeln hat, so folgt, daß jede Gleichung 3. Grades drei Wurzeln besitzt. Mit dem Vorstehenden ist zugleich der Weg gezeigt, auf dem man allgemein die beiden übrigen Wurzeln nach Bestimmung der ersten mittels der Cardanischen Formel finden kann.

So ergiebt sich zunächst für die Gleichung $x^3 - 1 = 0$ aus $x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$ die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$, und man erhält hiernach für x die drei Werthe:

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ x_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Die Aufgabe, die Gleichung $x^3 - 1 = 0$ auflösen, heißt nichts anderes, als den Werth der Cubikwurzel aus 1 bestimmen, und man sieht aus dem Vorstehenden, daß diese Cubikwurzel dreideutig ist, indem sie neben ihrem gewöhnlichen (arithmetischen) Werthe 1 noch zwei imaginäre Werthe besitzt. Man überzeugt sich umgekehrt leicht durch Potenziren dieser Werthe von x_2 und x_3, daß die dritten Potenzen derselben gleich 1 sind.

Die Gleichung $x^3 - a = 0$ führt in gleicher Weise auf den Satz, daß jede Cubikwurzel dreideutig ist, und daß, wenn unter $\sqrt[3]{a}$, wie bisher, der gewöhnliche arithmetische Werth derselben verstanden wird, die beiden anderen Werthe durch Multiplication des ersteren mit den obigen von x_2 und x_3 erhalten werden. Setzt man der Kürze halber

$$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = J_1,\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = J_2,$$

so sind also die drei Werthe der Cubikwurzel aus a, $\sqrt[3]{a}$, $J_1\sqrt[3]{a}$, $J_2\sqrt[3]{a}$.

Hiernach läßt sich nun die Bestimmung der drei Wurzeln einer reducirten cubischen Gleichung kürzer fassen, da man nur nöthig hat, in der Cardanischen Formel die dreifachen Werthe der beiden Cubikwurzeln y, z zu beachten, deren arithmetische Werthe wir der Kürze halber mit u und v bezeichnen wollen. Da aber, der obigen Entwickelung zufolge, das Product yz den reellen Werth $-\frac{1}{3}p$ haben muß, so ergiebt sich leicht, daß nur die drei Zusammenstellungen

$$u + v,\ J_1 u + J_2 v,\ J_2 u + J_1 v$$

brauchbar sind, welche somit die drei Wurzeln der cubischen Gleichung angeben.

Discussion: Ist $\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2$ positiv, so sind u und v reell; man erhält daher in diesem Fall durch die Cardanische Formel eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln der Gleichung. Ist $\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^3 = 0$, also p negativ und $-4p^3 = 27q^2$, so wird $u = v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q}$, und man erhält drei reelle Wurzeln, von denen aber zwei einander gleich sind, sodaß die cubische Gleichung in diesem Fall anscheinend nur zwei Wurzeln hat. Ist endlich $\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2$ negativ, also p negativ und $4p^3 > 27q^2$, so werden u und v imaginär, und man erhält die drei Wurzeln der Gleichung in imaginärer Form. Es läßt sich jedoch zeigen, daß eben nur die Form derselben imaginär, dagegen die Werthe in diesem Fall für alle drei Wurzeln reell sind. Der Beweis dieses Satzes, sowie eine Methode, diese reellen Werthe zu berechnen, findet sich in der Trigonometrie (Anhang 3, VII). Da diese Werthe aber nicht durch algebraische Formeln gefunden werden können, so wird dieser Fall der irreducibele genannt.

Um eine cubische Gleichung zu bilden, welche drei gegebene Wurzeln ω_1, ω_2, ω_3 hat, braucht man nur das Product $(x-\omega_1)(x-\omega_2)(x-\omega_3)$ zu entwickeln und gleich Null zu setzen. Umgekehrt läßt sich jede ge=

gebene Gleichung dritten Grades, wenn ihre drei Wurzeln bekannt sind, in dieser Form schreiben, wie leicht daraus folgt, daß das Polynom derselben durch jeden der drei Factoren theilbar sein muß, und außerdem kein weiterer, x enthaltender Factor vorkommen kann. Durch Entwickelung des obigen Products und Vergleichung mit $x^3 + ax^2 + bx + c$ erhält man

$$-a = x_1 + x_2 + x_3; \; +b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \; -c = x_1x_2x_3.$$

Für die reducirte Gleichung ist also die Summe der drei Wurzeln gleich Null, oder $x_3 = -(x_1 + x_2)$.

Ist in einer cubischen Gleichung das letzte Glied gleich Null, hat dieselbe also die Form $x^3 + ax^2 + bx = 0$, so ist die eine Wurzel gleich Null, und die beiden anderen ergeben sich direct durch Auflösen der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$. Ist auch $b = 0$, so sind zwei Wurzeln der Gleichung gleich Null, und die dritte ist gleich $-a$.

Heis § 95. Bardey XXXVIII.

Anhang 5. Das Ansetzen der Gleichungen.

Die Anwendung der Bestimmungsgleichungen zum Auflösen von Rechnungsaufgaben erfordert in der Regel vorerst die Bildung der nöthigen Gleichungen aus den in Worten ausgedrückten Bedingungen der Aufgabe. Es ist dieses sogenannte „Ansetzen“ der Gleichungen im Wesentlichen eine Uebersetzung der in der Aufgabe angegebenen Beziehungen zwischen gesuchten (unbekannten) und gegebenen Größen in die Formelsprache der Arithmetik, und es ist daher zum Gelingen der Arbeit vor allem nöthig, daß man sich jene Beziehungen, welche in mehr oder minder complicirter Fassung gegeben sein können, völlig klar mache. Man gebe genau an, welche Größe (oder bei mehreren Gleichungen, welche Größen) als Unbekannte x (y, z, . . .) gesucht werden soll, und auf welche Einheit (Benennung) jede Unbekannte bezogen wird. Dann suche man diejenigen Größen, welche einander gleichzusetzen sind, drücke jede derselben mittelst der in der Aufgabe angegebenen Operationen aus, indem man dabei x wie eine bekannte Zahl behandelt, und bilde aus ihnen die Gleichung. Im Folgenden sollen einige leichtere und in der Praxis besonders wichtige Arten von Aufgaben noch etwas näher besprochen werden.

1. **Procent-Rechnungen.** Ist ein Capital K zu p Procent auf Zinsen ausgeliehen, so empfängt der Darleiher für jede 100 Einheiten (Thaler, Mark u. dgl.), welche in dem Capital enthalten sind, in einem bestimmten Zeitraume, z. B. in jedem Jahre, p solche Einheiten von dem Schuldner als Zinsen. Demnach sind die Zinsen z eines Jahres gleich $\frac{K \cdot p}{100}$, und das ursprüngliche Capital wächst durch dieselben am Ende des Jahres auf $C_1 = K + z = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ an. Die Zinsen von n Jahren sind $z_n = \frac{K \cdot p \cdot n}{100}$, und das um dieselben vermehrte Capital ist

$C_n = K + z_n = K \cdot \left(1 + \frac{p \cdot n}{100}\right)$. Diese Gleichungen, welche die gegenseitigen Beziehungen zwischen den sieben Größen $K, p, z, z_n, n, C_1, C_n$ angeben („Beziehungsgleichungen"), können als Bestimmungsgleichungen für jede einzelne derselben dienen, sofern die übrigen, zur Bestimmung nöthigen Größen gegeben sind. Man hat zu diesem Zwecke nur die gesuchte Größe als die Unbekannte der Gleichung zu behandeln und letztere auf jene aufzulösen.

Man berechne hiernach z. B.

1) K aus z und p, oder aus z_n, n, p, oder aus C_1 und p, oder aus C_n, p und n.

2) p aus K und z, oder aus K, z_n, n, oder C_1, K, oder C_n, K, n.

3) n aus z_n, K, p, oder aus C_n, K, p.

In diesen Gleichungen kann n sowohl eine ganze, als eine gebrochene Zahl sein, oder die Zinsen für einen Theil des Jahres sind gleich dem entsprechenden Bruchtheil der Zinsen eines ganzen Jahres. — Dieselben Gleichungen gelten, außer für ausgeliehene Capitalien, für Größen jeder Art, sobald bei diesen eine nach Procenten derselben zu berechnende Größe vorkommt. Die Erklärung der hierbei vorkommenden Begriffe Rabatt, Disconto, Tara, Brutto und Netto, Prämie, u. s. w. kann dem mündlichen Unterricht überlassen bleiben.

Hat man eine Reihe von Aufgaben derselben Art, welche sich nur durch verschiedene Zahlenwerthe der vorkommenden Größen unterscheiden, z. B. mehrere Berechnungen eines Capitals aus den Procenten und den Zinsen eines Jahres, gelöst, so sieht man leicht ein, daß man jedesmal eine und dieselbe Arbeit, nur mit verschiedenen Zahlenwerthen ausgeführt hat. Statt einer solchen öfteren Wiederholung kann man die Aufgabe ein für allemal lösen, indem man statt der bestimmten Zahlen allgemeine Zahlzeichen anwendet, für die man dann in jedem einzelnen Fall nur die betreffenden Werthe im Resultat einzusetzen braucht. So ergiebt sich in dem angeführten Beispiel aus der allgemeinen Gleichung

$$z = \frac{x}{100} \cdot p \text{ das Resultat } x = \frac{100\, z}{p},$$

und man kann dasselbe auch in Worten, in Form einer Rechnungsregel: „Um das Capitel zu finden, dividire man das Hundertfache der jährlichen Zinsen durch die Anzahl der Procente" aussprechen. — Diese Bemerkung gilt natürlich nicht blos für Procentrechnungen, sondern allgemein.

Die vorstehenden Beziehungsgleichungen wird man auch bei zusammengesetzteren Procentrechnungen anwenden können.

Sollen z. B. zwei Capitalien gefunden werden, deren Summe gleich a gegeben ist, wenn das erste zu p, das zweite zu q Procent ausgeliehen war, und das zweite jährlich b Mark Zinsen mehr als das erste trug, so kann man als Unbekannte x die Anzahl der Mark des ersten annehmen, das zweite gleich $a - x$ und die Differenz der Zinsen des zweiten und ersten gleich b setzen. Man erhält dann nach dem Vorigen

$$\frac{a-x}{100} \cdot q - \frac{x}{100} \cdot p = b.$$

Anmerkung: Bei der Bestimmung des baaren Werthes eines Capitals C, welches nach n Jahren (Zeiträumen) zahlbar ist, muß man nach dem Vorigen das gegenwärtig zu zahlende Capital K so bestimmen, daß es durch seine $n$jährigen Zinsen zu p Procent auf den schuldigen Betrag C anwachsen würde, d. h. es muß $K \cdot \left(1 + \frac{pn}{100}\right) = C$ sein. In der Praxis werden gewöhnlich die Procente (Disconto) statt von dem wirklich gezahlten Capital K von dem zu zahlenden C gerechnet, also $K = C - \frac{Cpn}{100} = C\left(1 - \frac{pn}{100}\right)$ gesetzt. Theoretisch ist dies falsch. Nimmt man z. B. $n = 1$, $p = 5$ an, so beträgt der Fehler für jede 420 Thaler des Capitals einen Thaler. Ein ähnlicher Fall findet statt bei sogen. Terminalzahlungen. Ist das Capital K_1 nach a Zeiträumen, K_2 nach b, K_3 nach c Zeiträumen u. s. w. zu zahlen, und sollen sämmtliche Capitalien statt dessen gleichzeitig abgetragen werden, so entsteht die Frage, nach wieviel Zeiträumen dies geschehen könne, so daß weder dem Schuldner noch dem Gläubiger dadurch ein Schaden erwachse. Nennt man die Anzahl dieser Zeiträume n, so muß für den Procentsatz p:

$$\frac{K_1}{100 + pa} + \frac{K_2}{100 + pb} + \frac{K_3}{100 + pc} + \cdots = \frac{K_1 + K_2 + K_3 + \cdots}{100 + pn}$$

sein, während gewöhnlich nach der, streng genommen, unrichtigen Gleichung

$$\frac{K_1 \cdot p \cdot a}{100} + \frac{K_2 \cdot p \cdot b}{100} + \frac{K_3 \cdot p \cdot c}{100} + \cdots = \frac{(K_1 + K_2 + K_3 \cdots)\, pn}{100},$$

$$\text{oder } K_1 \cdot a + K_2 \cdot b + K_3 \cdot c + \cdots = (K_1 + K_2 + K_3 + \cdots)\, n$$

gerechnet wird. — Auch diese Gleichungen können selbstverständlich zur Bestimmung jeder einzelnen der in ihnen vorkommenden Größen aus den übrigen benutzt werden.

Heis 63, Nr. 34—50, 56—58, 70, 109—117, 178—187. Bardey XXIII, 1. St. 94—100, 111, 2. St. 61—68, 79—87, 3. St. 1, 10—22.

2. Vertheilungs-Rechnung. Soll eine Größe a unter mehrere Personen A, B, C, ... so vertheilt werden, daß B den Betrag b', C den Betrag c', u. s. w. mehr als A erhalte, so hat man, wenn x den Antheil des A bezeichnet, $x + (x + b') + (x + c') + \cdots = a$, oder $n \cdot x + b' + c' + \cdots = a$. Soll a dagegen in einem gegebenen Verhältniß $m : n : p$ u. s. w. vertheilt werden, so kann man durch x den auf die Verhältnißzahl 1 kommenden Antheil bezeichnen, so daß mx, nx, px bezüglich die Antheile von A, B, C sind, und die Gleichung

$$(m + n + p + \cdots)\, x = a$$

besteht. Soll jeder Theil außerdem noch einen bestimmten Betrag a', b', c' u. s. w. von der gegebenen Größe erhalten, so ist

$$(m + n + p + \cdots)\, x + a' + b' + c' + \cdots = a,$$

und die gesuchten Größen sind bezüglich $mx + a'$, $nx + b'$, u. s. w., wobei a', b', $\cdots$ auch negativ sein können.

Heis: 21—24, 28—32, 52—54, 79, 86, 92, 188—196. Bardey 1. St. 70—93, 132—146; 2. St. 124—134; 3. St. 44—49.

3. Mischungs-Rechnung. Es seien α, β, γ u. s. w. die Preise

je einer Einheit von verschiedenen Sorten einer Waare, und μ der Preis einer Einheit der durch Mischung von bezüglich a, b, c u. s. w. Einheiten jener Sorte entstehenden Mischsorte, so ist, wenn keine andere Bestimmung getroffen wird, der Preis des Gesammtbetrags der letzteren gleich der Summe der Preise ihrer Bestandtheile, und man hat also die Gleichung

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \cdots = (a + b + c + \cdots)\,\mu,$$

mittelst welcher sich jede einzelne der Größen $a, b, c, \cdots \alpha, \beta, \gamma. \cdots, \mu$ als Unbekannte aus den übrigen berechnen läßt. Werden blos zwei Sorten gemischt, so kann gefragt werden, wieviel von jeder zu nehmen sei, damit ein bestimmter Betrag s der Mischsorte von gegebenem Preise erhalten werde. Hier sind also a und b die Unbekannten, und es ist $a + b = s$, $a\alpha + b\beta = s\mu$, u. s. w.

Heis: 207—222. Bardey: 1. St. 147—154; 2. St. 109—123; 3. St. 23—35.

4. Ketten-Rechnung. Soll das Verhältniß $a : b$ zweier Größen bestimmt werden, wenn eine Kette von verbindenden Verhältnissen

$$a : c = m : n,\ c : d = o : p,\ d : e = q : r,\ \ldots.\ f : b = s : t$$

gegeben ist, so hat man

$$c = \frac{n}{m}\,a,\ d = \frac{p \cdot c}{o} = \frac{p}{o} \cdot \frac{n}{m}\,a,\ e = \frac{dr}{q} = \frac{p}{o} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{r}{q}\,a, \text{u.s.w.},$$

bis $b = \frac{t \cdot f}{s} = \frac{pnr \ldots t}{omq \ldots s}\,a$, also $a : b = omq \ldots s : pnr \ldots t$.

Vrgl. Anhang 1. Nr. 8.

5. Bewegungs-Aufgaben. Legt ein Körper in gleichförmiger Bewegung innerhalb der Zeit t den Raum s zurück, und bezeichnet c seine Geschwindigkeit, d. h. den in der Zeiteinheit durchlaufenen Weg, so ist

$$s = ct, \text{ oder } c = \frac{s}{t}, \text{ oder } t = \frac{s}{c}.$$

Sollen sich z. B. zwei Körper hinter einander bewegen, und zwar der eine mit der Geschwindigkeit c, der andere mit der Geschwindigkeit c_1 und von einem um a (Meter) zurückgelegenen Orte aus, so ist für den Ort, an welchem der letztere Körper den ersteren einholt, der Weg des letzteren gleich dem des ersteren plus a, also $c_1 t = ct + a$. Wird nun z. B. t gesucht, so hat man $c_1 x - cx = a$, $x = \frac{a}{c_1 - c}$. Dieses allgemeine Resultat möge zugleich als Beispiel für die Discussion eines solchen dienen: Ist $c_1 > c$, so ist x positiv, und nur in diesem Fall ist die Aufgabe in engerem Sinn berechtigt. Für $c_1 = c$ erhält man $x = \infty$, d. h. der zweite Körper holt den ersten nie ein; für $c_1 < c$ wird x negativ, und dieses Resultat sagt, daß beide Körper x Zeiteinheiten vor dem gedachten Anfang der Bewegung an demselben Orte gewesen wären, wenn dieser Anfang entsprechend zurückgelegt würde.

Heis: 120—162. Bardey 2. St. 89—108, 136; 3. St. 50—58, 99—108.

Anhang 6. Ueberbestimmte und unbestimmte Aufgaben.

Sind zwischen n Unbekannten **mehr** als n von einander unabhängige Gleichungen gegeben, so kann man von denselben beliebige n Gleichungen auswählen und dieselben auf die Unbekannten auflösen. Die für letztere gefundenen Werthe können nun in die bisher nicht benutzten Gleichungen statt der betreffenden Unbekannten eingesetzt werden. Werden hierdurch diese letzteren Gleichungen zu identischen, so ist die Aufgabe lösbar, und diese Gleichungen waren einfach überflüssig; wird dagegen denselben durch die eingesetzten Werthe nicht genügt, so ist die Aufgabe nicht lösbar.

In practischen Fällen können jedoch derartige überzählige Gleichungen von Werth sein, zunächst wenn die einzelnen Gleichungen mehrfache Wurzeln gestatten und die Anzahl derselben durch die überzähligen beschränkt wird. So erhält man z. B. aus den beiden Gleichungen $(x+y)^2-2x=49$; $3x^2+4\,(x+y)^2=372$ (§ 36, Beisp. 5) die Resultate $x_1=+4$, $y_1=+5$; $x_2=+4, y_2=-13$; $x_3=-4, y_3=+13$; $x_4=-4$, $y_4=-5$. Ist nun noch die überzählige Gleichung $x^2+y^2-2\,xy=5\,x-4y+1$ gegeben, so sieht man, daß dieser letzteren durch die Werthe $x=4$, $y=5$ ebenfalls genügt wird, während die übrigen Werthe für dieselbe nicht brauchbar sind.

Hat man ferner überzählige Gleichungen, von denen im Voraus bekannt ist, daß die Werthe der Unbekannten ihnen genügen müssen, so kann man dieselben zur Probe der Richtigkeit der stattgefundenen Rechnung benutzen. Sind z. B. die drei Winkel α, β, γ eines Dreiecks gemessen oder berechnet, so dient die Gleichung $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, deren Gültigkeit im Voraus feststeht, zu einer solchen Probe.

Endlich können solche überzählige Gleichungen dazu dienen, die unvermeidlichen kleinen Ungenauigkeiten, welche bei Messungen und Beobachtungen die stete Folge der mangelnden Vollkommenheit der Sinne oder der Meßinstrumente sind, auszugleichen. Das Nähere hierüber lehrt ein Theil der angewandten Mathematik, die sogenannte Ausgleichungsrechnung.

Sind dagegen **weniger** Gleichungen als Unbekannte vorhanden, so kann man so viel beliebig ausgewählten der letzteren, als Gleichungen fehlen, ganz beliebige Werthe beilegen und sodann die zugehörigen Werthe der übrigen Unbekannten durch Auflösen der Gleichungen bestimmen. Derartige Aufgaben gestatten also eine unendlich große Anzahl von Auflösungen und heißen deßhalb **unbestimmte**.

In vielen Fällen sind jedoch hierbei anderweitige Bedingungen für die unbekannten Größen gegeben, welche sich nicht in Form von Gleichungen darstellen lassen, aber gleichwohl die Anzahl der Auflösungen in engere Grenzen einschließen, oder selbst die Aufgabe zu einer völlig bestimmten machen. Die wichtigsten hierher gehörigen Fälle sind die, in welchen die Bedingung gestellt ist, daß die Werthe der Unbekannten sämmtlich ganze Zahlen oder, bei quadratischen Gleichungen, daß sie rationale Zahlen sein sollen. In diesen Fällen heißt die Aufgabe eine **Diophantische**.*)

*) Diophantus, ein griechischer Mathematiker.

Es sei eine Gleichung mit zwei Unbekannten $ax + by = c$ gegeben, in welcher x und y ganze Zahlen sein sollen und a, b, c ebenfalls ganze Zahlen seien. Man kann voraussetzen, daß a, b, c keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, da man anderen Falls alle Glieder der Gleichung durch diesen Theiler dividiren kann. In diesem Fall müssen a und b auch unter sich relative Primzahlen sein. Denn hätten beide Zahlen einen gemeinschaftlichen Factor k, wäre also $a = k \cdot \alpha$, $b = k \cdot \beta$, so wäre $ax + by = k(\alpha x + \beta y) = c$, also müßte, da x und y, und mithin auch $\alpha x + \beta y$ ganze Zahlen sind, auch c den Factor k haben.

Sind nun a, b relative Primzahlen, so löse man die Gleichung $ax + by = c$ zunächst auf diejenige Unbekannte auf, welche den kleineren Coefficienten hat, indem man die andere Unbekannte wie eine bekannte Größe behandelt. Erhält man z. B. $y = \frac{c - ax}{b}$, so sondere man durch Division mit b in c und in a soviel ganze Einheiten als möglich aus dem Ausdrucke $\frac{c - ax}{b}$ ab und setze den Rest $\frac{c' - a'x}{b}$ gleich einer ganzen Zahl h. Dann ist $x = \frac{c' - bh}{a'}$, und da jedenfalls $b > a'$ sein muß, so kann man hier wieder die ganzen Vielfachen von a' absondern und den Rest $\frac{c'' - b''h}{a'}$ gleich einer ganzen Zahl h' setzen. Dann ist wieder $h = \frac{c'' - a'h'}{b'}$. Man fährt nun in dieser Weise fort, bis man zu einem Ausdrucke $h_{n-1} = \gamma - \alpha \cdot h_n$ kommt, in welchem der Nenner gleich 1 geworden ist, ein Fall, welcher immer eintreten muß, da die Nenner b, a', b' u. s. w. eine Reihe beständig abnehmender ganzer Zahlen bilden. Dann sind für jeden ganzen Werth n von h_n auch h_{n-1} und daher auch h_{n-2}, u. s. w. bis schließlich x und y ganze Zahlen. Substituirt man den für h_{n-1} gefundenen Ausdruck $h_{n-1} = \gamma - \alpha h_n$ in die vorhergehende Gleichung für h_{n-2}, den so für h_{n-2} gefundenen Ausdruck in die Gleichung für h_{n-3}, u. s. w., so erhält man schließlich Formeln, welche x und y durch n ausdrücken und für jeden beliebigen ganzen Werth von n ein der gegebenen Gleichung genügendes Paar ganzer Werthe von x und y ergeben.

Beispiel: $17x = 11y + 86$; $y = \frac{17x - 86}{11} = x - 7 + \frac{6x - 9}{11}$;

$\frac{6x - 9}{11} = h$, $x = \frac{11h + 9}{6} = h + 1 + \frac{5h + 3}{6}$; $\frac{5h + 3}{6} = h'$, $h = \frac{6h' - 3}{5} = h' + \frac{h' - 3}{5}$; $\frac{h' - 3}{5} = h''$, $h' = 5h'' + 3$.

$$h = \frac{6 \cdot (5h'' + 3) - 3}{5} = 6h'' + 3;\ x = \frac{11 \cdot (6h'' + 3) + 9}{6} = 11h'' + 7;$$

$$y = \frac{17(11h'' + 7) - 86}{11} = 17h'' + 3.$$

Für $h'' = 0$ erhält man $x = 7$, $y = 3$; für $h'' = 1$, $x = 18$, $y = 20$, für $h'' = 2$ erhält man $x = 29$, $y = 37$, für $h'' = -1$, $x = -4$, $y = -14$ u. s. w.

Sind allgemein $n - 1$ Gleichungen für n Unbekannte gegeben, so bilde man zunächst durch Elimination eine Gleichung mit zwei Unbekannten x, y und verfahre mit dieser, wie vorher angegeben. Durch Substitution der erhaltenen Ausdrücke bildet man sodann eine Gleichung zwischen der Größe h_n und einer dritten Unbekannten z, welche in Beziehung auf die Größen h_n und z wieder wie vorher behandelt wird. Indem man in dieser Weise fortfährt, gelangt man schließlich zu Formeln für sämmtliche unbekannte Größen.

Fehlen p Gleichungen, sind also $n - p$ Gleichungen für n Unbekannte gegeben, so kann man für $p - 1$ beliebig ausgewählte unbekannte Größen beliebige ganze Werthe setzen und dann für jede einzelne solche Annahme die $n - p$ Gleichungen in Beziehung auf die noch übrigen $n - p + 1$ Unbekannten, wie vorher angegeben, behandeln.

Ist außer der Bedingung, daß die Werthe der Unbekannten ganze Zahlen seien, noch die weitere gestellt, daß dieselben positiv sein sollen, so wird die Anzahl der Auflösungen, wie leicht ersichtlich, in der Regel in noch engere Grenzen eingeschränkt, indem man dann nur solche ganze Werthe für h_n annehmen darf, welche für die Unbekannten positive Werthe liefern.

Weiteres über die diophantischen Aufgaben siehe in § 44. — Heis § 77, 79. Bardey XXXI.

Anhang 7. Exponentialgleichungen.

Von den sogenannten transscendenten Gleichungen gestatten solche, in welchen x nur als Exponent oder als Bestandtheil eines Exponenten einer bekannten Basis vorkommt, zuweilen eine einfache Auflösung mit Hülfe der Logarithmentafeln, indem man zunächst die Logarithmen beider Seiten der Gleichung entwickelt und einander gleich setzt. Wird hierdurch die Gleichung auf eine algebraische Form gebracht, so kann dieselbe nach den früheren Regeln behandelt werden.

Beispiel: Aus $a^{2x+3} = b^{5-7x}$ folgt:

$$(2x + 3) \cdot \log a = (5 - 7x) \cdot \log b;\ x = \frac{5 \log b - 3 \log a}{2 \log a + 7 \log b}.$$

Heis § 61, Nr. 126 u. w., Bardey XXII.

IV. Abschnitt: Anfangsgründe der höheren Arithmetik.

VIII. Capitel.

Von den Reihen.

§ 37.

Eine Reihe heißt jede gesetzmäßige Aufeinanderfolge von Größen. Die einzelnen Größen, aus denen die Reihe besteht, heißen ihre Glieder.

Wir behandeln im Folgenden nur zwei Reihen von besonders einfacher Art, die sogenannten arithmetischen und die geometrischen.

§ 38.

Eine arithmetische Reihe ist eine solche, bei welcher jedes folgende Glied aus dem ihm vorhergehenden durch Addition einer und derselben Zahl entsteht, bei welcher also die Differenz je zweier auf einander folgenden Glieder einen constanten Werth hat. Diese Differenz heißt die Differenz der Reihe; das erste Glied heißt hier, wie bei jeder Reihe, das Anfangsglied; ist dieses gleich a, die Differenz gleich d, so ist die Reihe:

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ \text{u. s. w.}$$

Aus diesem Bildungsgesetz der arithmetischen Reihe folgt ohne Weiteres, daß allgemein das n^{te} Glied a_n durch die Formel

$$a_n = a + (n - 1)d \tag{1}$$

gefunden wird. Eine derartige Formel für das n^{te} Glied einer Reihe, welche die Berechnung jedes beliebigen Gliedes derselben ohne die Kenntniß der vorhergehenden gestattet, heißt das allgemeine Glied derselben. Unter dem Summenglied einer Reihe versteht man eine Formel für die Summe S_n der n ersten Glieder, welche die Berechnung dieser Summe ohne die Kenntniß der Werthe der einzelnen Glieder gestattet. Für die arithmetische Reihe findet man dieses Summenglied auf folgende Weise: Es ist

$$S_n = a + [a+d] + [a+2d] + .. + [a+(n-1)d],$$

und $S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + [a+(n-3)d] + .. + a,$

daher $2\,S_n = [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1d]$
$+ \,.\,. + [2a + (n-1)d] = [2a + (n-1)d] \cdot n$, also

$$S_n = \frac{[2a + (n-1)d]n}{2}, \text{ oder auch} \tag{2}$$

$$S_n = \frac{a + a_n}{2} \cdot n. \tag{3}$$

Die Formeln (1) — (3) gestatten überhaupt die Berechnung der Werthe jeder beliebigen zwei von den 5 Größen a, n, d, a_n, S_n aus den drei übrigen. Man stelle die sich hieraus ergebenden 10 einzelnen Aufgaben zusammen und gebe ihre Auflösungen an.

Beispiele: Heis § 81, 82. Bardey XXXII A.

Die Differenz d einer arithmetischen Reihe kann sowohl positiv, als negativ sein, d. h. jedes folgende Glied kann auch aus dem vorhergehenden durch Subtraction einer constanten Größe entstehen. In diesem letzteren Falle ist jedes folgende Glied kleiner als das vorhergehende, während bei positivem d jedes folgende größer als das vorhergehende ist. Eine jede Reihe, deren Glieder an Größe beständig zunehmen, heißt eine steigende, jede Reihe, deren Glieder beständig abnehmen, eine fallende.

Kann es auch Reihen geben, die weder steigend noch fallend sind? Ist dies bei arithmetischen Reihen möglich?

§ 39.

Eine *geometrische* Reihe ist eine solche, bei welcher jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplication desselben mit einer und derselben Zahl entsteht, in welcher also der Quotient je zweier auf einander folgender Glieder denselben Werth hat. Ist q dieser *Quotient der Reihe*, a das Anfangsglied, so ist die Reihe:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4 \text{ u. s. w.},$$

und man findet ohne Weiteres für das allgemeine Glied

(4) $$a_n = a \cdot q^{n-1}.$$

Für das Summenglied hat man:

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}, \\ q \cdot S_n = & \phantom{a +{}} aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n, \\ \hline \text{also } S_n(1-q) = & a \phantom{+ aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}} - aq^n, \end{array}$$

demnach

(5) $$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \text{ oder (6) } S_n = \frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

Man löse wieder die Aufgabe, aus zwei der 5 Größen a, q, n, a_n, S_n die übrigen zu berechnen, für jeden der 10 einzelnen Fälle.

Anmerkung: Die Aufgaben q und a_n aus S_n, a und n, sowie q und a aus a_n, S_n und n zu bestimmen, führen auf Gleichungen vom $n$ten Grade.

Eine geometrische Reihe ist steigend, wenn $q > 1$, fallend, wenn $q < 1$ ist. Was erhält man für $q = 1$?

Die Anzahl der Glieder einer Reihe kann unendlich groß gedacht werden, und in diesem Falle heißt die Reihe eine *unendliche*. Für eine unendliche geometrische Reihe erhält man aus (5) die Summe $S = a \cdot \frac{1-q^\infty}{1-q}$. Ist $q > 1$, so ist q^∞ und somit auch S unendlich groß, ist aber $q < 1$, so wird q^∞ unendlich klein, daher $1 - q^\infty = 1$, und

(6) $$S = \frac{a}{1-q}.$$

Eine jede unendliche Reihe, deren Summe gleichwohl einen endlichen Werth hat, heißt *convergent*, eine unendliche Reihe, deren Summe unendlich groß ist, heißt *divergent*. Eine geometrische Reihe divergirt, wenn sie steigend ist, sie convergirt, wenn sie eine fallende ist.

Anmerkung: Steigende Reihen können nie convergiren. Eine fallende Reihe kann divergiren, wie z. B. die Reihe: $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{8}$, $1\frac{1}{16}$ ... Damit eine Reihe convergiren könne, muß sie in der Art fallen, daß ihre Glieder, von irgend einem Gliede an, an Größe ins Unendlich-Kleine abnehmen, aber auch in diesem Falle kann sie gleichwohl eine divergente sein, und es bedarf daher die Frage nach der Convergenz oder Divergenz auch in diesem Falle einer besonderen Untersuchung. Die Summen divergenter Reihen dürfen nie in eine Rechnung aufgenommen werden. — Kann eine unendliche arithmetische Reihe convergiren?

Aufgaben: 1) Man führe umgekehrt die Divisionen $\frac{1-q^2}{1-q}$, $\frac{1-q^3}{1-q}$, $\frac{a(1-q^4)}{1-q}$, $\frac{a}{1-q}$ aus. 2) Berechne a aus S und q. 3) Berechne q aus S und a. 4) Stelle die periodischen Decimalbrüche 0,333 . . ., 0,545454 . . . in Form geometrischer Reihen dar und berechne ihre Summen. Welche Regel ergiebt sich daraus für die Verwandlung periodischer Decimalbrüche in gemeine Brüche?

Heis § 83, 84, Nr. 1—13. Bardey XXXIII.

*§ 40. Interpolation der Reihen.

Eine Reihe interpoliren, heißt zwischen je zwei Glieder derselben eine bestimmte Anzahl neuer Glieder einschalten, so daß die hierdurch entstehende Reihe demselben Gesetze folgt, wie die gegebene.

Sollen zwischen zwei Glieder a_k und a_{k+1} einer arithmetischen Reihe p Glieder eingeschaltet werden, so entsteht eine neue arithmetische Reihe, deren erstes Glied k und deren $p+2$tes Glied a_{k+1} ist. Bezeichnet man die Differenz derselben durch x, so ist

$a_{k+1} = a_k + (p+1)\,x$, also $x = \frac{a_{k+1} - a_k}{p+1}$, oder, wenn wir die Differenz der ursprünglichen Reihe durch d bezeichnen, $x = \frac{d}{p+1}$. Die neuen Glieder sind also

$$a_k + \frac{d}{p+1},\ a_k + \frac{2d}{p+1},\ a_k + \frac{3d}{p+1}, \ldots a_k + \frac{pd}{p+1}.$$

Anmerkung: Vergleiche die Interpolation bei den logarithmischen und trigonometrischen Tafeln.

Sollen zwischen zwei Glieder a_k und a_{k+1} einer geometrischen Reihe p Glieder eingeschaltet werden, und ist x der Quotient der neuen geometrischen Reihe, so ist

$$a_{k+1} = a_k \cdot x^{p+1}, \text{ also } x = \sqrt[p+1]{a_{k+1} : a_k} = \sqrt[p+1]{q}.$$

*§ 41. Aufgaben.

1) Aus dem $m$ten und dem $r$ten Gliede einer arithmetischen Reihe die Differenz derselben zu berechnen. 2) Ebenso den Quotienten einer geometrischen Reihe. 3) Die Summe der Glieder a) einer arithmetischen, sowie b) einer geometrischen Reihe vom $m$ten bis zum $r$ten zu finden ($S_r - S_m$). 4) Aus dem Summengliede einer beliebigen Reihe ihr allgemeines Glied zu finden. 5) Das allgemeine und das Summenglied einer Reihe zu berechnen, welche durch Multiplication der einander entsprechenden Glieder einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe entstehen.

§ 42. Anwendung der geometrischen Reihen auf Zinseszinsen-Rechnung.

Zusammengesetzte Zinsen oder Zinseszinsen trägt ein Capital, wenn die am Ende je eines Zeitraums (eines Jahres) fälligen (einfachen) Zinsen nicht erhoben, sondern dem Capital zugefügt und mit demselben weiterhin verzinst werden.

Ist ein Capital K zu p Procent jährlich ausgeliehen, so betragen die einfachen Zinsen desselben nach Verlauf des ersten Jahres $\frac{K \cdot p}{100}$, und das Capital wächst durch Hinzufügung derselben auf $C_1 = K\,(1 + \frac{p}{100})$ an. Das Capital C_1 trägt im Laufe des zweiten Jahres $\frac{C_1 \cdot p}{100}$ Zinsen und wächst durch dieselben auf $C_1\,(1 + \frac{p}{100})$ an. Allgemein erhält man das angewachsene Capital C_n am Ende des n^{ten} Jahres, wenn man das angewachsene Capital vom Ende des vorhergegangenen Jahres mit $(1 + \frac{p}{100})$ multiplicirt. Die Größen C_1, C_2, C_3, .. C_n bilden demnach eine geometrische Reihe mit dem Anfangsgliede $C_1 = K\,(1 + \frac{p}{100})$ und dem Quo ienten $1 + \frac{p}{100}$. Dieser letztere wird der „Zinsfuß" genannt und soll im Folgenden der Kürze halber mit q bezeichnet werden. Es ist also

$$(7) \qquad C_n = K \cdot q^n.$$

Die Gleichung (7) gestattet überhaupt die Berechnung jeder der vier Größen C_n, K, p, n aus den drei übrigen. Man löse die sich hieraus ergebenden Aufgaben.

Sind die Zinsen statt nach je einem Jahre nach einem anderen Zeitraume fällig, so bleibt die Formel dieselbe, nur ist für n die Anzahl dieser Zeiträume und für p sind die Procente für einen solchen Zeitraum zu setzen.

Ist n eine gemischte Zahl, z. B. gleich $m + \frac{r}{s}$, so sind nur für die vollen m Jahre die Zinseszinsen, dagegen für den Bruchtheil des dann folgenden Jahres die einfachen Zinsen von C_m zu berechnen. Daher erhält man in diesem Fall

$$C_n = Kq^m + Kq^m \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{r}{s} = Kq^m \cdot (1 + \frac{pr}{100\,s}).$$

Wird am Ende jedes Jahres (Zeitraums) eine bestimmte Summe a dem Capital zugelegt, so beträgt der Endwerth des Capitals nach dem ersten Jahre: $Kq + a$, nach dem zweiten:

$$[Kq + a] \cdot q + a = Kq^2 + aq + a,$$

nach dem dritten in gleicher Weise:

$$Kq^3 + aq^2 + aq + a, \text{ u. s. w.},$$

am Ende des $n$ten Jahres:

$$Kq^n + aq^{n-1} + aq^{n-2} + \cdots + aq + a.$$

Berechnet man nach (5) die Summe der auf das erste Glied dieses Ausdrucks folgenden geometrischen Reihe, so ergiebt sich

$$C_n = Kq^n + a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Wird das Capital a am Ende jedes Jahres weggenommen, so erhält man durch eine ähnliche Entwickelung, oder indem man in dem Resultate der vorhergehenden a negativ nimmt,

$$C_n = K \cdot q^n - a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Hieraus folgt, daß durch jene Hinwegnahme das ursprüngliche Capital aufgezehrt sein wird, wenn

$$K \cdot q^n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ist, mittelst welcher Gleichung man jede der Größen K, n, a aus den übrigen berechnen kann.

Werden die Ein- oder Auszahlungen statt am Ende, am Anfang jedes Jahres gemacht, so ergiebt sich ebenso

$$C_n = K \cdot q^n \pm aq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Anmerkung: Die Berechnung von q (p) führt auf eine Gleichung $n$ten Grades.

Anwendungen auf Rentenrechnung, Rabatt- und Disconto-Rechnung, auf Aufgaben für Lebensversicherungen, Sparkassen u. dgl. m. Beispiele Heis § 84, Nr. 14—69. Bardey XXXIV.

IX. Capitel.

Von den Kettenbrüchen.

§ 43.

Erklärung: Ein Kettenbruch ist ein Ausdruck von der Form

$$(1) \qquad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots}}},$$

d. h. eine Verkettung von Brüchen, deren Zähler gleich 1 sind, unter sich (oder mit einer ganzen Zahl a), so daß jeder folgende Bruch mit dem Nenner des vorigen durch Addition verbunden ist. Die einzelnen Zahlen a, b, c, d, .. heißen die Glieder des Kettenbruchs. Die Anzahl derselben kann eine endliche oder eine unendliche sein (endliche und unendliche, oder rationale und irrationale Kettenbrüche).

Anmerkung: Im weiteren Sinne versteht man unter einem Kettenbruch eine Verkettung beliebiger Brüche, der Art, daß jeder folgende mit dem Nenner des vorhergehenden durch Addition oder Subtraction verbunden ist. Wir behandeln hier nur die für die Praxis wichtigen sogenannten gemeinen Kettenbrüche, bei denen, wie vorher erklärt, die einzelnen Zähler gleich 1 und die Nenner positiv sind.

Satz 1. Jeder endliche Kettenbruch läßt sich in einen gemeinen Bruch verwandeln, indem man die Additionen in der Reihenfolge von der letzten bis zur ersten nach der Regel $a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}$ ausführt und dazwischen den Satz 1 : $\frac{p}{q} = \frac{q}{p}$ benutzt.

Erklärung: Bricht man einen (endlichen oder unendlichen) Kettenbruch bei einem Gliede ab, indem man alle folgenden Glieder unterdrückt, und verwandelt den hierbei bleibenden Kettenbruch in einen gemeinen Bruch, so heißt dieser ein Näherungsbruch (Partialbruch) des Kettenbruchs.

Satz 2. Die Näherungsbrüche eines Kettenbruches sind abwechselnd kleiner und größer, als der Werth des vollständigen Kettenbruches.

Beweis: Im Kettenbruche (1) ist der erste Näherungsbruch $\frac{a}{1}$ kleiner als der vollständige Bruch, denn es fehlt ein Summand desselben. In dem zweiten Näherungsbruch $a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}$ ist der Nenner b zu klein $\left(\text{um } c + \frac{1}{d + ..}\right)$, also $\frac{1}{b}$, und folglich auch $a + \frac{1}{b}$ zu groß; im dritten Näherungsbruch ist c zu klein, also $\frac{1}{c}$ und daher auch $b + \frac{1}{c}$ zu groß, also $\frac{1}{b + \frac{1}{c}}$ und folglich auch $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}$ zu klein. Diese Schlußweise läßt sich ohne Ende fortsetzen.

Satz 3. Der Zähler eines Näherungsbruches ist gleich dem Product des Zählers des nächstvorhergehenden Näherungsbruches mit dem letzten Gliede, vermehrt um den Zähler des zweitvorhergehenden Näherungsbruches. Ebenso ist der Nenner des Näherungsbruches gleich dem Product aus dem Nenner des nächstvorhergehenden Näherungsbruches und dem letzten Gliede, vermehrt um den Nenner des zweitvorhergehenden.

Beweis: Es seien $\frac{z_1}{n_1}, \frac{z_2}{n_2}, \frac{z_3}{n_3}, \ldots \frac{z_p}{n_p}, \frac{z_{p+1}}{n_{p+1}}, \ldots.$ der Reihe nach die einzelnen Näherungsbrüche des Kettenbruches (1), so ist $\frac{z_1}{n_1} = \frac{a}{1}, \frac{z_2}{n_2} = \frac{ab+1}{b}$. Man findet nun $\frac{z_3}{n_3}$, wenn man in $\frac{z_2}{n_2}$ das Glied b in $b + \frac{1}{c}$ übergehen läßt. Also ist

$$\frac{z_3}{n_3} = \frac{a \cdot \left(b + \frac{1}{c}\right) + 1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{abc + a + c}{bc + 1} = \frac{(ab + 1)\, c + a}{bc + 1}$$

$= \frac{z_2 \cdot c + z_1}{n_2 c + n_1}$. Ebenso erhält man $\frac{z_4}{n_4}$, wenn man in $\frac{z_3}{n_3}$ statt c den Werth $c + \frac{1}{d}$ setzt, also ist

$$\frac{z_4}{n_4} = \frac{z_2\left(c + \frac{1}{d}\right) + z_1}{n_2\left(c + \frac{1}{d}\right) + n_1} = \frac{z_2 cd + z_2 + z_1 d}{n_2 cd + n_2 + n_1 d} = \frac{(z_2 c + z_1) d + z_2}{(n_2 c + n_1) d + n_2}$$

$= \frac{z_3 d + z_2}{n_3 d + n_2}$, u. s. w.

Der Beweis der **allgemeinen** Gültigkeit des Satzes läßt sich durch den Schluß von p auf $p + 1$ führen. Es sei nämlich angenommen, daß dieser Satz für den $p$ten Näherungsbruch $\frac{z_p}{n_p}$ gelte, daß also $\frac{z_p}{n_p} = \frac{z_{p-1} \cdot u + z_{p-2}}{n_{p-1} \cdot u + n_{p-2}}$ sei, so erhält man $\frac{z_{p+1}}{n_{p+1}}$, wenn man hier u in $u + \frac{1}{r}$ übergehen läßt. Es ist also $\frac{z_{p+1}}{n_{p+1}} = \frac{z_{p-1}\left(u + \frac{1}{r}\right) + z_{p-2}}{n_{p-1}\left(u + \frac{1}{r}\right) + n_{p-2}}$

$= \frac{z_{p-1}\, ur + z_{p-1} + z_{p-2}\, r}{n_{p-1}\, ur + n_{p-1} + n_{p-2}\, r} = \frac{(z_{p-1}\, u + z_{p-2})\, r + z_{p-}}{(n_{p-1}\, u + n_{p-1})\, r + n_{p-1}}$

$= \frac{z_p\ r + z_{p-1}}{n_p\ r + n_{p-1}}$; der Satz gilt also auch für den folgenden Näherungsbruch. Da derselbe nun für $p = 2$ und $p = 3$ bereits bewiesen ist, so folgt, daß er auch für $p = 4$, mithin auch wiederum für $p = 5$, u. s. w. gelte.

Satz 4. Die Differenz je zweier auf einander folgender Näherungsbrüche ist gleich einem Bruche, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Product der Nenner der beiden Näherungsbrüche ist.

Beweis: Es ist $\frac{z_1}{n_1} - \frac{z_2}{n_2} = \frac{a}{1} - \frac{ab + 1}{b} = \frac{ab - (ab + 1)}{1 \cdot b}$ $= -\frac{1}{b}$. Ebenso kann man $\frac{z_2}{n_2} - \frac{z_3}{n_3}$ u. s. w. berechnen.

Allgemein ist $\frac{z_p}{n_p} - \frac{z_{p+1}}{n_{p+1}} = \frac{z_p \cdot n_{p+1} - z_{p+1}\, n_p}{n_p \cdot n_{p+1}}$, und der Zähler dieses Quotienten gleich $z_p\,(n_p\, r + n_{p-1}) - (z_p\, r + z_{p-1})\, n_p$

$= z_p \cdot n_{p-1} - z_{p-1} n_p = - (z_{p-1} n_p - z_p \cdot n_{p-1})$. Die vorhergehende Differenz $\frac{z_{p-1}}{n_{p-1}} - \frac{z_p}{n_p} = \frac{z_{p-1} \cdot n_p - z_p n_{p-1}}{n_{p-1} \cdot n_p}$ hat somit einen Zähler von gleichem absolutem Werthe, aber entgegengesetztem Vorzeichen. Da nun der Zähler der ersten Differenz -1 war, so ist der Zähler der zweiten $+1$, der der dritten mithin -1 u. s. w. Allgemein ist daher

$$\frac{z_p}{n_p} - \frac{z_{p+1}}{n_{p+1}} = (-1)^p \cdot \frac{1}{n_p \cdot n_{p+1}}.$$

Anmerkung: Daß die Vorzeichen der Differenzen abwechseln, folgt schon aus Satz 2.

Satz 5. Jeder Näherungsbruch ist von dem vollständigen Kettenbruch um weniger verschieden, als von dem folgenden Näherungsbruch.

Der Beweis folgt daraus, daß die Näherungsbrüche abwechselnd größer und kleiner sind als der volle Werth.

Zusatz: Daher beträgt der Unterschied eines Näherungsbruches von dem vollen Werthe des Kettenbruches weniger als ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Product des Nenners jenes Näherungsbruches und des Nenners des auf ihn folgenden ist.

Satz 6. Jeder folgende Näherungsbruch kommt dem vollen Werthe des Kettenbruches näher als der vorhergehende Näherungsbruch.

Beweis: Denn die Nenner $n_{p-1}, n_p, n_{p+1}, \ldots$ werden zufolge ihrer Entstehung nach Satz 3 immer größer, also ist $n_p \cdot n_{p+1} > n_{p-1} \cdot n_p$, mithin $\frac{1}{n_p \cdot n_{p+1}} < \frac{1}{n_{p-1} \cdot n_p}$.

Satz 7. Jeder Näherungsbruch kommt dem vollen Werthe des Kettenbruches näher als jeder andere Bruch, der in kleineren Zahlen ausgedrückt ist.

Beweis: Es sei $\frac{s}{t}$ ein in kleineren Zahlen als $\frac{z_p}{n_p}$ ausgedrückter Bruch, also $t < n_p$, so ist

$$\frac{z_{p-1}}{n_{p-1}} - \frac{s}{t} = \frac{z_{p-1} \cdot t - n_{p-1} \cdot s}{n_{p-1} \cdot t} \text{ und}$$

$\frac{z_{p-1}}{n_{p-1}} - \frac{z_p}{n_p} = \pm \frac{1}{n_{p-1} \cdot n_p}$. Da nun z_{p-1}, t, n_{p-1} und s ganze Zahlen sind, so ist auch $z_{p-1} \cdot t - n_{p-1} \cdot s$ eine ganze Zahl, oder Null. Wäre der genannte Zähler gleich Null, so wäre $\frac{s}{t} = \frac{z_{p-1}}{n_{p-1}}$, käme also dem vollen Werthe des Kettenbruches weniger nahe als $\frac{z_p}{n_p}$. Ist aber dieser Zähler $\overline{\gtrless} 1$, so ist, da $t < n_p$, also auch $n_{p-1} \cdot t < n_{p-1} \cdot n_p$, jedenfalls $\frac{z_{p-1}}{n_{p-1}} - \frac{s}{t} > \pm \left(\frac{z_{p-1}}{n_{p-1}} - \frac{z_p}{n_p}\right)$. Hieraus folgt, daß $\frac{s}{t}$ nicht zwischen $\frac{z_{p-1}}{n_{p-1}}$ und $\frac{z_p}{n_p}$ liegen kann und daher auch von dem zwischen diesen beiden Brüchen liegenden vollen Werthe des Kettenbruchs weiter entfernt ist, als jeder von jenen.

Anmerkung: Aus dem vorstehenden Satz erklärt sich die Benennung Näherungsbrüche. Die Abweichung des Näherungsbruches $\frac{z_p}{n_p}$ von dem vollen Werthe ist nach Satz 5 kleiner als $\frac{1}{n_p \cdot n_{p+1}}$. Ist n_{p+1} nicht berechnet, so kann man, da $n_{p+1} < n_p$ ist, statt dieser Fehlergrenze die größere $\frac{1}{n_p{}^2}$ setzen.

§ 44. Anwendungen der Kettenbrüche.

Aufgabe 1: Einen gemeinen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung: Man dividire mit dem Nenner in den Zähler, dann mit dem Rest in den Nenner, und fahre so fort, indem man immer mit dem Rest in den vorhergehenden Divisor dividirt, bis die Division aufgeht. Die einzelnen Quotienten sind die Glieder des verlangten Kettenbruches.

Beweis: Sind a, b, c, d u. s. w. die einzelnen Quotienten, r_1, r_2, r_3 u. s. w. die Reste, so ist $\frac{A}{B} = a + \frac{r_1}{B} = a + \frac{1}{\left(\frac{B}{r_1}\right)} =$

$$a + \frac{1}{b + \frac{r_2}{r_1}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{r_3}{r_2}}} \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung: Da jeder folgende Rest kleiner als der vorhergehende sein muß (warum?), so muß die Division schließlich aufgehen, und zwar spätestens bei der Division mit dem Reste 1 und nach höchstens B Divisionen.

Hiernach läßt sich ferner leicht die Aufgabe lösen, zu jedem gegebenen gemeinen Bruch Näherungswerthe zu finden, welche bei einem bekannten Grade der Genauigkeit in möglichst kleinen Zahlen ausgedrückt sind.

Diese einfacheren und daher bequemeren Näherungswerthe dürfen in practischen Rechnungen statt des gegebenen Bruches gesetzt werden, falls bei diesen Rechnungen eine Ungenauigkeit innerhalb der betreffenden Fehlergrenze gestattet ist.

Auch für irrationale Zahlen erhält man auf diesem Wege Näherungsbrüche, sofern man dieselben in abgekürzter Form als gemeine Brüche näherungsweise aufstellt und behandelt.

So sind z. B. für $\pi = 3{,}1415926\,..$ die ersten Näherungswerthe (aus $\pi = \frac{31415926}{10000000}$ berechnet) $3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113}$ u. s. w., die Fehlergrenzen bezüglich $\frac{1}{7} = 01\,..,\ \frac{1}{742} = 0{,}001\,...,\ \frac{1}{11978} = 0{,}00008\,..,$ $\frac{1}{3114845} = 0{,}0000003\,...$ u. s. w.

*Aufgabe 2. Eine irrationale Quadratwurzel in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung nach Anleitung des folgenden Beispiels:

$$\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\alpha} = \sqrt{19} - 4,\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{19} - 4} = \frac{\sqrt{19} + 4}{19 - 16} =$$
$$\frac{\sqrt{19} + 4}{3} = 2 + \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\beta} = \frac{\sqrt{19} - 2}{3},\ \beta = \frac{3\,(\sqrt{19} + 2)}{15} =$$
$$\frac{\sqrt{19} + 2}{5} = 1 + \frac{1}{\gamma},\ \frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{19} - 3}{5},\ \gamma = \frac{5\,(\sqrt{19} + 3)}{10} =$$
$$\frac{\sqrt{19} + 3}{2} = 3 + \frac{1}{\delta},\ \frac{1}{\delta} = \frac{\sqrt{19} - 3}{2},\ \delta = \frac{2\,(\sqrt{19} + 3)}{10} =$$
$$\frac{\sqrt{19} + 3}{5} = 1 + \frac{1}{\varepsilon},\ \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{19} - 2}{5},\ \varepsilon = \frac{5\,(\sqrt{19} + 2)}{15} =$$
$$\frac{\sqrt{19} + 2}{3} = 2 + \frac{1}{\zeta},\ \frac{1}{\zeta} = \frac{\sqrt{19} - 4}{3},\ \zeta = \frac{3\,(\sqrt{19} + 4)}{3} =$$
$$\sqrt{19} + 4 = 8 + \frac{1}{\eta},\ \frac{1}{\eta} = \sqrt{19} - 4 = \frac{1}{\alpha},\ \eta = \alpha,\ \text{u. s. w.}$$

$$\sqrt{19} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \text{u. s. w. in inf.}}}}}}}}}}$$

Die Näherungsbrüche für $\sqrt{19}$ sind demnach

$$\frac{4}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{48}{11},\ \frac{61}{14},\ \frac{170}{39},\ \frac{1421}{326},\ \text{u. s. w.},$$

die Fehlergrenzen sind bezüglich

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{33},\ \frac{1}{154},\ \frac{1}{546},\ \frac{1}{12714},\ \frac{1}{225266},\ \text{oder}$$

die Werthe für $\sqrt{19}$ sind

$$4{,}0;\ 4{,}5;\ 4{,}33;\ 4{,}363;\ 4{,}357;\ 4{,}3589;\ 4{,}358895,$$

mit Fehlergrenzen bezüglich gleich:

$$0{,}5;\ 0{,}17;\ 0{,}03\ldots;\ 0{,}006\ldots;\ 0{,}0018\ldots;\ 0{,}000078\ldots;\ 0{,}0000044\ldots$$

Es ist also $\sqrt{19} = 4{,}358895$ auf 5 Decimalen genau, und die Abweichung vom wahren Werthe beträgt weniger als $0{,}000004\ldots$ — Die directe Berechnung ergiebt $\sqrt{19} = 4{,}358899$.

Anmerkung: Ein unendlicher Kettenbruch, dessen Glieder sich, von irgend einer Stelle an, regelmäßig wiederholen, heißt ein periodischer. — Jede irrationale Quadratwurzel läßt sich in einen periodischen Kettenbruch verwandeln.

* Aufgabe 3: (Umkehrung.) Einen periodischen Kettenbruch in einen geschlossenen (irrationalen) Ausdruck zu verwandeln.

Auflösung: Es seien $a, b, \ldots n$ die der Periode vorausgehenden Glieder, $\alpha, \beta, \ldots \nu$ die Glieder der Periode, so setze man

$$x = \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cdots + \cfrac{1}{\nu + x}}}.$$

Man verwandele diesen Kettenbruch in einen gemeinen Bruch und löse die dadurch entstehende quadratische Gleichung auf x auf. Den Werth von x setze man in die Gleichung

$$K = a + \cfrac{1}{b + \cdots + \cfrac{1}{n + x}}$$

ein und bringe auch diesen endlichen Kettenbruch auf die Form eines gemeinen Bruches.

* Aufgabe 4. Einen Logarithmus mittelst Verwandlung in einen Kettenbruch näherungsweise zu berechnen.

Auflösung nach Anleitung des folgenden Beispiels: Es sei $\log 2 = x$ zu berechnen, so ist $10^x = 2$, also liegt, da die Potenz 10^x sich bei einer Veränderung des Exponenten x in gleichem Sinne ändert und $10^0 = 1$, $10^1 = 10$ ist, x zwischen 0 und 1. Man setze daher $x = \frac{1}{\alpha}$, so ist $10^{\frac{1}{\alpha}} = 2$, $10 = 2^\alpha$. Da ferner $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ ist, so liegt α zwischen 3 und 4 Ganzen, man kann also $\alpha = 3 + \frac{1}{\beta}$ setzen, woraus dann $10 = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{\beta}}$; $2^{\frac{1}{\beta}} = \frac{10}{8}$, $2 = \left(\frac{10}{8}\right)^\beta = 1{,}25^\beta$ folgt. Da $1{,}25^3 = 1{,}953125$ und $1{,}25^4 = 2{,}44140625$ ist, so setze man $\beta = 3 + \frac{1}{\gamma}$, also $2 = 1{,}25^3 \cdot 1{,}25^{\frac{1}{\gamma}}$, $1{,}25 = \left(\frac{2}{1{,}953125}\right)^\gamma$. Die weitere Fortsetzung des Verfahrens ist hieraus von selbst klar. Man erhält auf diesem Wege $\gamma = 9 + \frac{1}{\delta}$; $\delta = 2 + \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon = 2 + \frac{1}{\zeta}$, $\zeta = 4 + \frac{1}{\eta}$, u. s. w. Daher ist $\log 2 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \text{ꝛc.}}}}}}}$

Die Näherungsbrüche für log 2 sind also:
$\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{28}{93}$, $\frac{59}{196}$, $\frac{146}{485}$, u. s. w., die Fehlergrenzen $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{930}$, $\frac{1}{18228}$, $\frac{1}{95060}$, $\frac{1}{1035960}$, oder in Decimalbrüchen: die Näherungsbrüche: 0,33 . ., 0,300 . ., 0,30107 . ., 0,30102 . ., 0,3010309 und die Fehlergrenzen: 0,03 . ., 0,001 . ., 0,00005 . ., 0,00001 . ., 0,00000096 . ., es ist also bis auf 6 Decimalen genau:

$$\log 2 = 0{,}301030.$$

* Aufgabe 5. Eine geordnete Gleichung höheren Grades mit einer Unbekannten mit Hülfe der Kettenbrüche näherungsweise aufzulösen.

Beispiel: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = 0$.

Die linke Seite der Gleichung erhält durch die Substitutionen $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ bezüglich die Werthe -5, -4, $+7$. Zwischen $x = 1$ und $x = 2$ wird demnach ein Werth von x liegen, für welchen der Uebergang des Werthes der linken Seite aus dem Negativen ins Positive stattfindet, d. h. für welchen dieser letztere Werth gleich Null ist. Daher setze man $x = 1 + \frac{1}{y}$. Substituirt man diesen Werth für x in die gegebene Gleichung und entwickelt die einzelnen Potenzen, so erhält man

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{4}{y} + \frac{6}{y^2} + \frac{4}{y^3} + \frac{1}{y^4}\\
&-2 - \frac{6}{y} - \frac{6}{y^2} - \frac{2}{y^3}\\
&+4 + \frac{8}{y} + \frac{4}{y^2}\\
&-2 - \frac{2}{y}\\
&-5 = 0,
\end{aligned}$$

oder $-4 + \frac{4}{y} + \frac{4}{y^2} + \frac{2}{y^3} + \frac{1}{y^4} = 0$, oder, wenn man mit $-y^4$ multiplicirt, $4y^4 - 4y^3 - 4y^2 - 2y - 1 = 0$.

Substituirt man hier wieder nach und nach $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, so erhält man für die linke Seite der Gleichung beziehungsweise -1,

-7, $+11$, also setzt man $y = 1 + \frac{1}{z}$. Die Substitution dieses Werthes für y in die letzte Gleichung führt in derselben Weise zu der neuen Gleichung $7z^4 + 6z^3 - 8z^2 - 12z - 4 = 0$, deren linke Seite für $z = 0, 1, 2$ bezüglich zu -4, -11, $+100$ wird. Daher ist wieder $z = 1 + \frac{1}{u}$, und hieraus folgt

$$11u^4 - 18u^3 - 52u^2 - 34u - 7 = 0.$$

Die Substitutionen $u = 0, 1, 2, 3, 4$ ergeben bezüglich -7, -100, -251, -172, $+689$, also setzt man $u = 3 + \frac{1}{v}$.

In dieser Weise fährt man fort, bis der nöthige Grad von Genauigkeit erreicht ist.

Es ist also $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}}$

Näherungsbrüche: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{11}{7}, \ldots,$

Fehlergrenzen: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{14}, \left(\frac{1}{49}\right), \ldots$

---

* 6. **Anwendung der Kettenbrüche zur Auflösung diophantischer Aufgaben** (vergl. Anhang 6).

Es sei eine Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten, $ax + by = c$, in welcher a, b, c relative Primzahlen sind, für ganze Werthe der Unbekannten x, y aufzulösen, so verwandele man den Bruch $\frac{b}{a}$ in einen Kettenbruch und berechne die Näherungsbrüche desselben. Ist $\frac{p}{q}$ der letzte dieser Näherungsbrüche (also der dem genauen Werthe $\frac{b}{a}$ unmittelbar vorangehende), so ist nach Satz 4: $\frac{p}{q} - \frac{b}{a} = \pm \frac{1}{q \cdot a}$, oder $a \cdot p - b \cdot q = \pm 1$, und daher auch

$$a \cdot pc - b \cdot qc = \pm c, \text{ oder } a \cdot (\pm pc) + b \cdot (\mp qc) = c$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der gegebenen $ax + by = c$, so sieht man, daß $x_1 = \pm p \cdot c$, $y_1 = \mp qc$ ein der letzteren genügendes Paar von ganzen Werthen für x und y sein muß.

Aus diesem einen Paare von Wurzeln der gegebenen Gleichung lassen sich aber alle anderen ableiten, denn ist x_2, y_2 ein zweites Wurzelpaar, so kann man dasselbe in den Formen $x_2 = x_1 + u$, $y_2 = y_1 - v$ schreiben (wo also $u = x_2 - x_1$, $v = y_1 - y_2$ ist), und es ist dann $a(x_1 + u) + b(y_1 - v) = ax_1 + by_1 + au - bv = c$, also, da $ax_1 + by_1 = c$ ist, $au - bv = 0$, oder $au = bv$. Da aber nur ganze Zahlen vorkommen können, so muß b ein Theiler von au sein, und da b gegen a relative Primzahl ist (Anhang 2, Nr. 4), so ist b ein Theiler von u, oder u hat die Form bn. Ebenso folgt, daß a ein Theiler von v, oder $v = a \cdot \frac{u}{b} = a \cdot n$ ist. Daher ist jedes weitere Wurzelpaar der gegebenen Gleichung in den Formeln $x = x_1 + bn$, $y = y_1 - an$ enthalten, in welchen n jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann. Daß umgekehrt jedes in diesen Formeln enthaltene Wurzelpaar der gegebenen Gleichung genügt, ist leicht zu beweisen.

Anmerkung: Hat die gegebene Gleichung die Form $ax - by = c$, so setze man statt y, $-y'$, löse die Gleichung $ax + by' = c$ auf und kehre dann das Zeichen von y' um. Man erhält also: $x = x_1 + bn$, $y = -y_1 + an$.

Beispiel: $25x + 56y = 187$; $\frac{56}{25} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{6}}$; $2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$; $25 \cdot 9 - 56 \cdot 4 = +1$; $x_1 = 9 \cdot 187 = 1683$, $y_1 = -4 \cdot 187 = -748$, $x = 1683 + 56n$, $y = -748 - 25n$.

Sollen nur ganze positive Werthe von x und y gelten, so muß n negativ sein. Ist $-n < 30$, so wird y negativ, ist $-n > 30$, so wird x negativ, daher muß $n = -30$ sein, also ist $x = 3$, $y = 2$.

Anmerkung: Hat man aus $x = x_1 + bn$, $y = y_1 - an$ zwei andere Werthe von x und y abgeleitet, so darf man letztere an Stelle von x_1 und y_1 in die Formeln einsetzen.

Heis § 85, 87. Bardey XX.

X. Capitel.

Combinationslehre.

§ 45.

Die Combinationslehre handelt von den verschiedenen möglichen Arten von Zusammenstellungen gegebener Größen. Dieselbe nimmt keine Rücksicht auf den Werth oder die Bedeutung dieser Größen, sondern allein auf die Anordnung oder Gruppirung derselben. Die einzelnen zusammenzustellenden Größen heißen Elemente und werden durch Buchstaben a, b, c, d — oder a_1, a_2, a_3, a_4, — oder durch Ziffern 1, 2, 3, 4 — bezeichnet. Man nimmt eine bestimmte Reihenfolge der Elemente als die ursprüngliche an, z. B. die alphabetische a, b, c, d, — oder die der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, — und nennt jedes Element, welches in dieser ursprünglichen Reihenfolge später als ein anderes steht, das höhere, und letzteres das niedere von beiden.

Jede Zusammenstellung der gegebenen Elemente heißt eine Complexion. Man unterscheidet drei verschiedene Arten solcher Zusammenstellungen, nämlich Permutationen, Combinationen im engeren Sinne und Variationen.

§ 46.

Permutationen sind solche Complexionen, von denen eine jede sämmtliche gegebene Elemente enthält, in denen also nur die Reihenfolge der einzelnen Elemente verschieden ist.

Die Permutationen zweier Elemente 1, 2 sind 12 und 21, die Permutationen dreier Elemente 1, 2, 3 sind 123, 132, 213, 231, 312, 321, die von vier Elementen: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Man erhält die sämmtlichen Permutationen von n gegebenen Elementen in geordneter Reihenfolge, wenn man jedes derselben einmal an die erste Stelle setzt, in jedem dieser n Fälle jedes der noch übrigen $n - 1$ Elemente einmal an die zweite Stelle, dann in jedem dieser $n \cdot (n - 1)$ Fälle jedes der noch übrigen Elemente einmal an die dritte Stelle setzt, und so fortfährt bis zum letzten Elemente.

Hieraus ergiebt sich zunächst, daß die **Anzahl der Permutationen** von n Elementen gleich $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \ldots \cdot 2 \cdot 1$, oder gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ ist, welchen Ausdruck man auch abgekürzt durch $n!$ (n Facultät) bezeichnet.

Für die geordnete **Aufstellung der einzelnen Permutationen** kann man auch die Regel anwenden, daß man, von der ursprünglichen Reihenfolge ausgehend, successive immer das dem Ende nächste noch einer Erhöhung fähige Element so wenig als möglich erhöht und alle nach diesem erhöhten Element noch folgenden Stellen jedesmal so niedrig als möglich besetzt.

Befinden sich unter den n gegebenen Elementen α einander gleiche Elemente, so wird die Anzahl der Permutationen kleiner. Denkt man sich zunächst alle n Elemente als von einander verschieden und, wie vorher angegeben, die $n!$ Permutationen derselben gebildet, so werden, wenn man darauf jene α Elemente einander gleich setzt, alle diejenigen Permutationen identisch, welche sich von einander nur durch eine verschiedene Stellung dieser α Elemente unterscheiden. Jede einzelne Permutation wiederholt sich daher so oft, als die Anzahl der Permutationen der in ihr enthaltenen gleichen Elemente beträgt, d. h. $\alpha!$ mal, mithin ist die Anzahl der von einander verschiedenen Permutationen der n Elemente gleich

$$\frac{n!}{\alpha!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha}.$$

Sind außer den genannten α Elementen noch β gleiche Elemente einer anderen Art vorhanden, so findet man durch eine entsprechende Schlußfolgerung die Anzahl der von einander verschiedenen Permutationen gleich $\frac{n!}{\alpha! \cdot \beta!}$, sind außerdem γ einander gleiche Elemente einer dritten Art vorhanden, so ist diese Anzahl gleich $\frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma!}$, u. s. w.

Zusatz: Sind α Elemente einander gleich und die übrigen $n - \alpha$ Elemente ebenfalls einander gleich, so ist die Anzahl der Permutationen gleich $\frac{n!}{\alpha!\cdot(n-\alpha)!}$, oder $\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{1\cdot2\cdot3\cdots\alpha\cdot1\cdot2\cdot3\cdots(n-\alpha)}$, also, wenn man den Zähler durch den ersten oder durch den zweiten Factorencomplex des Nenners dividirt (hebt),

$$\frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(\alpha+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-\alpha)}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-\alpha+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\alpha}$$

* Aufgabe: Zu bestimmen, die wievielte in der geordneten Reihe von Permutationen von n gegebenen Elementen eine gegebene Permutation ist.

Beispiel: Die wievielte Permutation ist 432122514 von 112223445?

Auflösung: Der gegebenen Permutation gehen voraus 1) alle, welche mit 1 beginnen, deren Anzahl also, da auf das erste Glied 1 noch die acht Glieder 12223445 folgen, gleich $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}=3360$ ist; 2) alle, welche mit 2 beginnen, also $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2}=5040$, 3) alle, welche mit 3 beginnen, also $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}=1680$, 4) alle, welche mit 41 beginnen, also $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3}=840$, 5) alle mit 42 beginnenden, oder $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot1\cdot2}=1260$, 6) alle mit 431 beginnenden, oder $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=120$, 7) alle mit 43211 beginnenden, oder $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2}=12$, 8) alle mit 432121 beginnenden, also $1\cdot2\cdot3=6$, 9) alle mit $\overset{1}{4321224}$ beginnenden, also $2\cdot1\cdot2=4$, also ist 432122514 die 12323te Permutation.

* Aufgabe: Eine bestimmte Permutation gegebener Elemente aus ihrer Stellenzahl anzugeben, ohne daß die ihr vorhergehenden gebildet werden.

Beispiel: Welches ist die 513te Permutation von 11123334?

Auflösung: Die Anzahl der mit 1 beginnenden Permutationen ist gleich $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=420$, die der mit 2 beginnenden gleich $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3}=140$, daher ist die gesuchte Permutation die $513-420=93$te dieser zweiten Ordnung. Innerhalb derselben ist die Anzahl der mit 1 beginnenden Permutationen gleich $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=60$, die Anzahl der mit 3 beginnenden gleich $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}=60$, also ist die gegebene die $93-60=33$te dieser zweiten Unterordnung. Innerhalb der letzteren hat man $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2}=30$ mit 1 beginnende und sodann $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=20$ mit 3 beginnende, also ist die gesuchte die $33-30$te der mit 233 anfangenden Permutationen. Unter diesen fangen $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2}=12$ mit 1 an, und es befindet sich die gesuchte mithin unter diesen letzteren. Von den mit 2331 beginnenden giebt es wieder zunächst $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ mit 1 und unter diesen wieder $1 \cdot 2 = 2$ mit 1 beginnende, es ist also die gesuchte die erste der hier folgenden, oder 23311314.

§ 47.

Man kann ferner solche Complexionen gegebener Elemente bilden, welche eine bestimmte Anzahl der letzteren enthalten, wie z. B. die Zusammenstellungen von 4 Elementen 1, 2, 3, 4 zu je dreien, also: 123, 124, 132, 134, 142, 124, 213, 231, 321, 312, 412, 413, u. s. w. Je nach der Anzahl der in ihnen enthaltenen Elemente unterscheidet man Complexionen der ersten, zweiten, u. s. w., *p*ten Classe.

Bildet man alle Complexionen von *n* Elementen zur *p*ten Classe, so lassen sich dieselben in Gruppen ordnen, dergestalt, daß die innerhalb jeder einzelnen Gruppe stehenden Complexionen dieselben Elemente enthalten und sich also von einander nur durch die Reihenfolge dieser Elemente unterscheiden, während Complexionen aus verschiedenen Gruppen auch ganz oder theilweise verschiedene Elemente enthalten. So erhält man z. B. für die 4 Elemente 1, 2, 3, 4 und die dritte Classe die folgende Gruppirung:

123	124	134	234
132	142	143	243
213	214	314	324
231	241	341	342
312	412	413	423
321	421	431	432.

Man sieht leicht ein, daß die innerhalb einer und derselben Gruppe stehenden Complexionen aus jeder beliebigen einzelnen von ihnen durch Permutation erhalten werden.

In solchen Fällen, in welchen die Reihenfolge der einzelnen Elemente gleichgültig ist und nur die verschiedene Auswahl der mit einander verbundenen Elemente in Betracht kommt, genügt daher die Angabe einer einzigen Complexion aus jeder der angegebenen Gruppen. Man hat in diesem Fall die Combinationen der gegebenen Elemente zu der betreffenden Classe. Es ist theoretisch gleichgültig, welche der in einer Gruppe enthaltenen Complexionen als Stellvertreterin dieser Gruppe ausgewählt wird; da nun in jeder Gruppe sich eine und nur eine solche Form befindet, in welcher die Elemente in der als ursprünglich gegeben angenommenen (alphabetischen oder arithmetischen) Reihenfolge auf einander folgen, so empfiehlt sich aus practischen Gründen die Wahl dieser geordneten Complexionen. Wird dagegen auch die verschiedene Reihenfolge der Elemente berücksichtigt, so hat man die entsprechenden Variationen.

Combinationen im engeren Sinn sind also die mit Rücksicht nur auf die Anzahl und auf die Auswahl, Variationen die mit Rücksicht auf Anzahl, Auswahl und Stellung der Elemente gebildeten Complexionen.

Anmerkung: Man sieht aus dem Gesagten, daß aus den Combinationen die entsprechenden Variationen gebildet werden können, indem man von jeder der ersteren sämmtliche Permutationen bildet. — Von n Elementen giebt es zur $n$ten Classe nur eine Combination, dieselbe ist mit der ursprünglichen Anordnung der Elemente identisch. Die Variationen von n Elementen zur $n$ten Classe sind zugleich Permutationen derselben. — Jede Aufeinanderfolge zweier Elemente, in welcher das höhere dem niederen vorausgeht, heißt eine Inversion. Bei dem Combiniren im engeren Sinn werden also die Variationen, welche Inversionen enthalten, weggelassen.

Man unterscheidet ferner Variationen und Combinationen mit oder ohne Wiederholungen. Bei letzteren darf jedes Element in derselben Complexion nur einmal, bei ersteren dagegen darf es wiederholt gesetzt werden. Die Wiederholbarkeit kann unbeschränkt sein, oder es kann nur eine bestimmte Anzahl von Wiederholungen für jedes einzelne Element erlaubt sein.

§ 48.

Um die Combinationen von n Elementen zur $p$ten Classe ohne Wiederholungen zu bilden, beginne man mit der aus den p ersten Elementen in ihrer ursprünglichen Reihenfolge bestehenden Complexion und bilde aus ihr nach und nach alle übrigen Combinationen, indem man immer das am weitesten nach rechts stehende Element, welches einer Erhöhung fähig ist, so wenig als möglich erhöht und dabei stets beachtet, daß keine Umkehrung der geordneten Reihenfolge (Inversion) vorkommen darf.

So sind z. B. die Combinationen von 123456 zur dritten Classe ohne Wiederholungen: 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456.

Um die Combinationen von n Elementen zur $p$ten Classe mit Wiederholungen (ohne Beschränkung der Anzahl der letzteren) zu bilden, verfahre man in gleicher Weise, beginne jedoch mit derjenigen Complexion, welche das erste Element p mal enthält und beachte, daß nach jedem Element einer Complexion nicht blos jedes der höheren, sondern auch das gleiche Element folgen kann.

So sind z. B. die Combinationen von $abcde$ zur vierten Classe mit Wiederholungen:

$aaaa$, $aaab$, $aaac$, $aaad$, $aaae$,
$aabb$, $aabc$, $aabd$, $aabe$, $aacc$, $aacd$, $aace$, $aadd$, $aade$, $aaee$,
$abbb$, $abbc$, $abbd$, $abbe$, $abcc$, $abcd$, $abce$, $abdd$, $abde$, $abee$,
$accc$, $accd$, $acce$, $acdd$, $acde$, $acee$, $addd$, $adde$, $adee$, $aeee$,
$bbbb$, $bbbc$, $bbbd$, $bbbe$, $bbcc$, $bbcd$, $bbce$, $bbdd$, $bbde$, $bbee$,
$bccc$, $bccd$, $bcce$, $bcdd$, $bcde$, $bcee$, $bddd$, $bdde$, $bdee$, $beee$,
$cccc$, $cccd$, $ccce$, $ccdd$, $ccde$, $ccee$, $cddd$, $cdde$, $cdee$, $ceee$,
$dddd$, $ddde$, $ddee$, $deee$, $eeee$.

Die Variationen von n Elementen zur $p$ten Classe lassen sich sowohl mit als ohne Wiederholungen bilden, indem man zunächst die entsprechenden Combinationen und dann von jeder der letzteren die Permutationen aufstellt.

Oder man setze für Variationen ohne Wiederholungen jedes der n

Elemente einmal an die erste Stelle, lasse in jedem dieser n Fälle jedes der noch übrigen $n - 1$ Elemente einmal an die zweite Stelle treten, sodann in jedem der so erhaltenen $n \cdot (n - 1)$ Fälle jedes der noch übrigen $n - 2$ Elemente einmal die dritte Stelle einnehmen und fahre so fort, bis jede Complexion p Elemente enthält.

Für Variationen mit (unbeschränkter) Wiederholung verfahre man in derselben Weise, nur daß jedesmal nicht blos jedes der noch übrigen, sondern jedes der n Elemente überhaupt einmal an die nächstfolgende Stelle gesetzt werden muß.

So sind z. B. die Variationen von 1234 zur dritten Classe a) ohne Wiederholungen:

123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432.

b) mit Wiederholungen:

111, 112, 113, 114—121, 122, 123, 124—131, 132, 133, 134—141, 142, 143, 144.
211, 212, 213, 214,—221, 222, 223, 224,—231, 232, 233, 234—241, 242, 243, 244.
311, 312, 313, 314—321, 322, 323, 324—331, 332, 333, 334—341, 342, 343, 344.
411, 412, 413, 414—421, 422, 423, 424—431, 432 433, 434—441, 442, 443, 444.

§ 49.

Aus der zuletzt angeführten Methode der Aufstellung der Variationen ergiebt sich leicht für die Anzahl derselben bei n Elementen zur $p$ten Classe

a) bei Variationen ohne Wiederholungen:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - p + 1)$$

b) bei Variationen mit Wiederholungen:

$$n^p.$$

Bezeichnet ferner C_n^p die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur $p$ten Classe ohne Wiederholungen, und denkt man sich diese Combinationen aufgestellt, so lassen sich von jeder derselben $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p = p!$ Permutationen bilden und ist daher $C_n^p \cdot p!$ die Anzahl der entsprechenden Variationen. Hieraus folgt:

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - p + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}$$

Für die Combinationen mit Wiederholungen läßt sich eine entsprechende Ableitung nicht ausführen, da bei ihnen die Anzahl der Permutationen je nach der Anzahl der in der einzelnen Combination vorkommenden gleichen Elemente verschieden ist. In diesem Falle kann man folgende Ableitung anwenden:

Man denke sich sämmtliche Combinationen der n Elemente 123 u. s. w. zur $p$ten Classe mit Wiederholungen hingeschrieben und erhöhe sodann in jeder einzelnen von ihnen das zweite Element um eine Stelle, das dritte um zwei, das vierte um drei Stellen u. s. w. bis zum letzten, welches um $p - 1$ Stellen erhöht wird. Man erhält dann eine Anzahl neuer Complexionen, und zwar von $n + p - 1$ Elementen. Man sieht nun leicht ein, daß — da jedes spätere Element um mehr als das vorhergehende erhöht wird — auch in den neuen Complexionen niemals ein niederes Element auf ein höheres folgen wird, sowie daß in keiner derselben ein Element wiederholt vorkommen kann. Denn für je zwei neben einander stehende Elemente, welche ursprünglich einander gleich waren, erhält man jetzt zwei aufeinander folgende verschiedene, und für zwei ursprünglich verschiedene Elemente erhält man jetzt wieder zwei verschiedene, da das an späterer Stelle stehende höhere Element um mehr erhöht wird, als das an der vorhergehenden Stelle stehende niedere Element. Die neuen Complexionen sind also Combinationen von $n + p - 1$ Elementen ohne Wiederholungen. Endlich enthalten dieselben auch alle möglichen solchen Combinationen, denn jede beliebige der letzteren kann umgekehrt durch entsprechende Erniedrigung der einzelnen Stellen auf eine der Combinationen von n Elementen zur $q$ten Classe mit Wiederholungen zurückgeführt werden. Es ist daher die Anzahl der neuen Complexionen und somit auch die ihr gleiche Anzahl der Combinationen von n Elementen zur $p$ten Classe mit Wiederholungen gleich der Anzahl der Combinationen von $n + p - 1$ Elementen ohne Wiederholungen, oder gleich

$$\frac{(n+p-1)\,(n+p-2)\,(n+p-3)\cdots(n+p-1-p+1)}{1\cdot\quad 2\cdot\quad 3\cdots\quad p},$$

oder gleich

$$\frac{n\cdot(n+1)\,(n+2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\quad\cdots\quad p}.$$

So gehen z. B. die Combinationen der vier Elemente 1234 zur dritten Classe mit Wiederholungen, nämlich

111	222	333	444	durch die angegebene Veränderung	123	234	345	456
112	223	334		über in:	124	235	346	
113	224	344			125	236	356	
114	233				126	245		
122	234				134	246		
123	244				135	256		
124					136			
133					145			
134					146			
144					156			

d. h. in die Combinationen der sechs Elemente 123456 zur dritten Classe ohne Wiederholungen. Die Anzahl der letzteren ist gleich $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}$, oder gleich $\frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}$.

* Ist die Anzahl der gestatteten Wiederholungen nicht unbeschränkt, so sind im Vorigen nur alle diejenigen Complexionen zu unterdrücken, welche ein Element häufiger enthalten, als gestattet ist.

Es können auch außerdem Fälle eintreten, in welchen nicht alle Combinationen oder Variationen, die an und für sich möglich sind, gültig bleiben, sondern nur diejenigen, welche einer gewissen Bedingung genügen. So kann z. B. vorgeschrieben sein, daß die — durch Zahlen dargestellten — Elemente jeder einzelnen Complexion dieselbe bestimmte Summe geben. Bei der Bildung solcher Combinationen oder Variationen hat man zunächst alle Stellen, mit Ausnahme der letzten, mit möglichst niedrigen Elementen, die letzte aber mit dem Ergänzungs-Elemente zur vorgeschriebenen Summe auszufüllen, und dann successive die vorhergehenden Stellen zu erhöhen, während man die nachfolgenden um eben so viel erniedrigt, dabei aber die übrigen Regeln für die Bildung der einzelnen Complexionen selbstverständlich mit beobachtet. In welchen zwei Fällen wird diese Art von Complexionen unmöglich?

Andere derartige Bedingungen können z. B. sein, daß die einzelnen Elemente mit gleichen Differenzen oder mit gleichen Verhältnissen je zweier auf einander folgenden fortschreiten u. dgl. m.

Von den Anwendungen der Combinationslehre auf verschiedene Gebiete der Mathematik und anderer Wissenschaften soll hier nur die auf die Berechnung der sogenannten mathematischen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses näher erörtert werden.

Heis § 88—90. Bardey XXXV.

XI. Capitel.

Die Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 50.

Unter mathematischer Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses versteht man das Verhältniß der Anzahl aller diesem Ereigniß günstigen Fälle zu der Anzahl aller überhaupt möglichen Fälle.

Sind also unter b möglichen Fällen a solche, welche einer bestimmten Forderung genügen, so ist $\frac{a}{b}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines dieser Forderung genügenden (günstigen) Falles.

Entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses heißt das Verhältniß der Anzahl der diesem Ereigniß ungünstigen Fälle zu der Anzahl aller möglichen.

Sind also von b möglichen Fällen a günstig, also $b - a$ ungünstig, so ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{b-a}{b}$.

Die Wahrscheinlichkeit ist demnach um so geringer — die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit um so größer — je kleiner die Anzahl der günstigen Fälle im Vergleich zu der aller möglichen Fälle ist, und umgekehrt. — Die Summe der Wahrscheinlichkeit und der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist immer gleich 1. — Sind alle möglichen Fälle zugleich günstig, so ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1, die entgegengesetzte gleich 0. Sind alle möglichen Fälle ungünstig, so ist die Wahrscheinlichkeit gleich 0, die entgegengesetzte gleich 1. Die 1 ist also das Symbol der Gewißheit, die Null das Symbol der Unmöglichkeit eines Ereignisses.

Beispiel: Enthält ein Gefäß 6 weiße und 8 schwarze Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel aus demselben zu ziehen, gleich $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$, die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{8}{14} = \frac{4}{7} = 1 - \frac{3}{7}$.

§ 51.

Sind unter den b möglichen Fällen a_1 günstige von einer Art, a_2 günstige einer zweiten Art u. s. w., und sind ω_1, ω_2 u. s. w. die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen eines Falles bezüglich der ersten, zweiten Art u. s. w., so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines günstigen Falles

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots,$$

oder die totale Wahrscheinlichkeit für eines von mehreren verschiedenen, aber gleich gültigen Ereignissen ist gleich der Summe der partiellen Wahrscheinlichkeiten.

Denn es ist $\omega = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots}{b} = \dfrac{a_1}{b} + \dfrac{a_2}{b} + \cdots$

Beispiel: Ein Gefäß enthalte 2 rothe, 3 blaue, 4 gelbe und 5 schwarze Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, aus demselben eine rothe Kugel zu ziehen, ist gleich $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$, die Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel ist $\frac{3}{14}$, die für eine gelbe Kugel $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$. Die Wahrscheinlichkeit, überhaupt eine bunte Kugel zu ziehen, ist $\dfrac{2+3+4}{14}$, oder $\frac{1}{7} + \frac{3}{14} + \frac{2}{7} = \frac{9}{14}$.

§ 52.

Hängt das Eintreffen eines Ereignisses aber in der Art von zwei oder mehr anderen Ereignissen ab, daß letztere zugleich (oder nach einander) eintreffen müssen, damit die gestellte Forderung erfüllt sei, so heißt seine Wahrscheinlichkeit aus den besonderen Wahrscheinlichkeiten der letzteren Ereignisse zusammengesetzt, und eine solche zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Product der partiellen Wahrscheinlichkeiten, oder

$$\omega = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \cdots.$$

Denn sind für das erste Ereigniß von b_1 möglichen Fällen a_1 günstig, für das zweite von b_2 möglichen Fällen a_2 günstig u. s. w., ist also $\omega_1 = \dfrac{a_1}{b_1}$, $\omega_2 = \dfrac{a_2}{b_2}$ u. s. w., so kann jeder der b_1 möglichen Fälle des ersten Ereignisses mit jedem der b_2 möglichen des zweiten, jede der so erhaltenen

$b_1 \cdot b_2$ Combinationen mit jedem der b_3 möglichen Fälle des dritten Ereignisses zusammentreffen u. s. w., die Anzahl der überhaupt möglichen Fälle ist also $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots$ In derselben Weise ergiebt sich die Anzahl der überhaupt günstigen Fälle gleich $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots$, also ist

$$\omega = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} \cdots = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \cdots$$

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit aus einem Gefäße mit 2 rothen, 3 blauen, 4 gelben und 5 schwarzen Kugeln zuerst eine rothe Kugel, darauf (nachdem die zuerst gezogene wieder hineingelegt ist) eine gelbe und sodann eine blaue Kugel zu ziehen, ist gleich $\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{343}$.

Anmerkung: Da jede Wahrscheinlichkeit durch einen ächten Bruch ausgedrückt wird, so folgt, daß eine zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit kleiner ist, als jede ihrer partiellen Wahrscheinlichkeiten.

Sind die partiellen Ereignisse einander gleich oder Wiederholungen eines einzigen, so wird die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit durch eine Potenz der partiellen angegeben. Ist ω die einfache Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, so ist ω^n die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß $n$mal wiederholt eintrete.

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel dreimal nacheinander die Zahl 4, oder mit jedem von drei Würfeln zugleich die Zahl 4 zu werfen, ist $(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}$.

Soll ein Ereigniß wiederholt eintreffen, so tritt zuweilen der Fall ein, daß nach jedem Eintreffen desselben die Anzahl der möglichen, wie die der günstigen Fälle sich um 1 verringert. Ist $\frac{a}{b}$ die Wahrscheinlichkeit für das erste Eintreffen eines solchen Ereignisses, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine $n$malige Wiederholung desselben in diesem Falle gleich

$$\frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \cdot (a-n+1)}{b \cdot (b-1) \cdot (b-2) \cdot \cdot (b-n+1)}.$$

Beispiel: Ein Gefäß enthalte 5 weiße und 6 schwarze Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit fünfmal nach einander aus demselben eine weiße Kugel zu ziehen, wenn jede gezogene Kugel nicht wieder in das Gefäß zurückgelegt wird, ist $\frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{462}$.

Wird die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, daß ein Ereigniß $n$mal und zugleich ein zweites Ereigniß $m$mal eintrete, so erhält man für dieselbe, wenn die Anzahl der möglichen und der günstigen Fälle für jedes dieser Ereignisse sich bei seinem wiederholten Eintreffen nicht verändert,

$$\omega = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m,$$

sofern $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die Wahrscheinlichkeiten für das einmalige Eintreffen des ersten, beziehungsweise des zweiten Ereignisses sind, und eine bestimmte Reihenfolge für das Eintreten der einzelnen Ereignisse vorgeschrieben ist.

Nimmt aber die Anzahl der möglichen, sowie die der günstigen Fälle für jedes erneute Eintreffen eines Ereignisses um 1 ab, so erhält man unter sonst gleichen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit $\omega =$
$$\frac{a\,(a-1)\,(a-2)\cdots(a-n+1)}{b\cdot(b-1)\,(b-2)\cdots(b-n+1)}\cdot\frac{c(c-1)\,(c-2)\cdots(c-m+1)}{d(d-1)\,(d-2)\cdots(d-m+1)}.$$
Ist dagegen die Reihenfolge für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse nicht vorgeschrieben, so hat man der vorher bestimmten Wahrscheinlichkeit noch die Anzahl der möglichen Combinationen von n Fällen der einen Art mit m Fällen der anderen Art als Factor beizufügen.

Beispiele: Die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel zuerst dreimal hintereinander (oder mit jedem von drei Würfeln zugleich) die Zahl 1, und sodann viermal die Zahl 6 zu werfen, ist $(\frac{1}{6})^3 \cdot (\frac{1}{6})^4 = (\frac{1}{6})^7 = \frac{1}{279936}$; die Wahrscheinlichkeit unter 7 Würfen überhaupt dreimal 1 und viermal 6 zu werfen, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge der Würfe, ist $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{6^7} = \frac{35}{279936}$.

Die Wahrscheinlichkeit unter 7 Würfen mit einem Würfel dreimal die Zahl 1, also viermal eine andere Zahl zu werfen, ist, wenn eine bestimmte Reihenfolge der einzelnen Würfe vorgeschrieben ist, $(\frac{1}{6})^3 \cdot (\frac{5}{6})^4 = \frac{625}{279936}$, wenn aber diese Reihenfolge nicht vorgeschrieben ist, $\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{21875}{279936}$.

Die Wahrscheinlichkeit, aus einem Gefäß mit 5 weißen und sechs schwarzen Kugeln drei weiße und zwei schwarze Kugeln zu ziehen, wenn jede gezogene Kugel nicht wieder in das Gefäß zurückgelegt wird, ist bei bestimmter Reihenfolge der einzelnen Züge $\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7} = \frac{5}{154}$, bei nicht bestimmter Reihenfolge $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}\cdot\frac{5\cdot4\cdot3\cdot6\cdot5}{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{5\cdot4}{1\cdot2}\cdot\frac{5\cdot4\cdot3\cdot6\cdot5}{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{25}{77}$.

§. 53.

Soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß von zwei verschiedenen Ereignissen, deren einfache Wahrscheinlichkeiten bezüglich ω_1 und ω_2 sind, entweder das erste, oder, wenn dieses nicht geschieht, dann doch das zweite eintreffe, so ist die einfache Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des ersten Ereignisses ω_1, die zusammengesetzte dafür, daß das erste Ereigniß nicht, dann aber das zweite eintrete, $(1 - \omega_1)\,\omega_2$, die totale Wahrscheinlichkeit also $\omega_1 + (1 - \omega_1)\cdot\omega_2 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \cdot \omega_2$.

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, daß entweder mit drei Würfeln zuerst die Summe 10, oder, wenn dies nicht geschieht, bei dem zweiten Wurfe die Summe 12 geworfen werde, ist $\frac{27}{216} + (1 - \frac{27}{216})\cdot\frac{25}{216} = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}\cdot\frac{25}{216} = \frac{391}{1728}$.

Unter relativer Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in Bezug auf ein anderes Ereigniß versteht man diejenige Wahrscheinlichkeit, welche man erhält, wenn unter den möglichen Fällen nur diejenigen in Rechnung gezogen werden, welche entweder dem einen oder dem anderen jener beiden Ereignisse günstig sind, so daß also diejenigen, welche keinem von beiden günstig sind, unbeachtet bleiben. Sind von n überhaupt möglichen Fällen a dem ersten und b dem zweiten günstig, also die „absoluten" Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse beziehungsweise $\omega_1 = \frac{a}{n}$, $\omega_2 = \frac{b}{n}$, so ist die relative Wahrscheinlichkeit des ersteren hiernach $\omega = \frac{a}{a+b}$, die des zweiten $\omega' = \frac{b}{a+b}$ (also wieder $\omega + \omega' = 1$). Hieraus folgt, daß die relative Wahrscheinlichkeit ω eines Ereignisses gefunden wird, indem man seine absolute Wahrscheinlichkeit durch die Summe der beiden absoluten Wahrscheinlichkeiten dividirt, oder daß

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$$

ist. — Relative Wahrscheinlichkeit bei mehr als zwei Ereignissen.

Beispiel: Für die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln eher 9 als 12 zu werfen, ist $\omega_1 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; $\omega_2 = \frac{1}{36}$, also $\omega = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{36}} = \frac{4}{5}$.

*§ 54.

Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung finden z. B. statt bei Glücksspielen und Wetten, wo es sich um Gewinn oder Verlust einer bestimmten Summe handelt. Hier gilt der Satz, daß der Einsatz eines Spielers um so größer (oder der von ihm zu hoffende Gewinn um so kleiner) sei, je höher die Wahrscheinlichkeit seines Gewinnens ist. Ist also ω_1 die Wahrscheinlichkeit, daß einer der Fälle eintrete, welche dem ersten Spieler günstig sind und a_1 der Einsatz desselben, sind ferner ω_2 und a_2 die entsprechenden Zahlen für den zweiten Spieler, so muß $\omega_1 : \omega_2 = a_1 : a_2$, oder $\omega_1 \cdot a_2 = \omega_2 \cdot a_1$ sein. Das Product aus der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen in den zu erwartenden Gewinn heißt die mathematische Erwartung des betreffenden Spielers. Diese mathematischen Erwartungen müssen also einander gleich sein.

Eine andere Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet statt bei Versicherungsbanken. Die Prämie, welche der Versicherte der versichernden Bank zu zahlen hat, hängt außer von der Größe der eintretenden Falls von der Bank zu zahlenden Summe auch von der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Falles ab. Diese Wahrscheinlichkeit wird auf Grund statistischer Ermittelungen festgestellt.

Eine wichtige Anwendung erfährt die Wahrscheinlichkeitsrechnung ferner bei der Ermittelung des wahrscheinlichen Fehlers angestellter Messungen oder Beobachtungen in der sogen. Ausgleichungsrechnung. Vergl. Anhang 6. Es sei z. B. eine Linie AB zu messen, so wird man auch bei der größten Sorgfalt und Anwendung der genauesten Hülfsmittel niemals ein absolut richtiges Resultat erwarten können, vielmehr werden in solchen Fällen noch gewisse kleine Fehler übrig bleiben, welche sich niemals ganz vermeiden lassen, da ihre Quellen nicht beseitigt oder in Rechnung gezogen werden können. (Solche Fehlerquellen sind z. B. der Mangel an absoluter Vollkommenheit der Meßinstrumente sowie der menschlichen Sinne, Störungen durch atmosphärische Einflüsse u. dgl. m.) Daher wird man bei einer Wiederholung der Messung ein zweites Resultat erhalten, welches von dem vorigen um eine, wenn auch sehr kleine, Größe abweicht. Die Ausgleichungsrechnung lehrt nun aus diesen Abweichungen verschiedener Messungen derselben Größe denjenigen Werth derselben finden, welcher die größte Wahrscheinlichkeit hat, der genau richtige zu sein, oder die wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Messungen zu bestimmen. Sie stellt zu diesem Zwecke den Satz auf, daß derjenige Werth der Wahrscheinlichkeit nach dem richtigen am nächsten kommen müsse, für welchen die Summe der Quadrate seiner Abweichungen von den einzelnen wirklich gemessenen Werthen möglichst klein sei — immer dabei vorausgesetzt, daß diese Abweichungen überhaupt sehr kleine Größen, also nur Folgen der unvermeidlichen Fehlerquellen seien (Methode der kleinsten Quadrate). Dabei hat das Resultat um so größeren Anspruch auf Genauigkeit, je öfter die Messung wiederholt wurde. In dem oben angeführten einfachen Beispiel einer Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, nämlich der Messung einer einzelnen selbständigen Größe (einer Linie AB), führt das Princip der kleinsten Quadrate auf die Regel, daß man die Summe der einzelnen gemessenen Werthe durch ihre Anzahl dividiren, d. i. das arithmetische Mittel aus diesen Werthen nehmen muß.

Heis § 91. Bardey XXXVI.

XII. Capitel.

Binomischer Lehrsatz.

§ 55.

Die Aufgabe, eine Potenz eines Binoms $a \pm b$ zu entwickeln, ist ein specieller Fall der Aufgabe, ein Product von der Form

$$(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c) \cdots (x \pm m)$$

durch Multiplication seiner Factoren als (algebraische) Summe von Partialproducten auszudrücken. Man erhält zu diesem Zweck durch Ausführung der Multiplication nach § 13. Gl. (29):

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab,$$

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc,$$

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^4 + (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (abc + abd + acd + bcd)x + abcd,$$ u. s. w.

Man erkennt leicht in diesen einzelnen — nach absteigenden Potenzen von x geordneten — Entwickelungen ein gemeinsames Bildungsgesetz, nach welchem (seine allgemeine Gültigkeit vorausgesetzt) ein Product von n Factoren $(x + a)(x + b)(x + c) \cdots (x + m)$ die Form

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \cdots + Lx + M$$

erhalten würde. In dieser letzteren Reihe erhält man den Coefficienten A durch Addition der sämmtlichen einzelnen Summanden $a, b, c \cdots m$, den Coefficienten B durch Bildung sämmtlicher Combinationen dieser Summanden zur zweiten Classe und Addition der aus den Elementen dieser einzelnen Combinationen gebildeten Producte. In gleicher Weise wird C durch die Combinationen der Summanden $a, b, c \cdots m$ zur dritten Classe, u. s. w., allgemein der Coefficient der Potenz x^{n-p} durch die Combinationen zur p^{ten} Classe gefunden. Das letzte Glied M ist das Product sämmtlicher Summanden. Bezeichnet man den aus den Combinationen der n Elemente zur p^{ten} Classe gebildeten Coefficient durch C_p^n, so ist also $(x+a)(x+b)(x+c)\cdots(x+m) = x^n + C_1{}^n x^{n-1} + C_2{}^n x^{n-2} + C_3{}^n x^{n-3} + \cdots + C_{n-1}^n x + C_n^n$.

Der Beweis der allgemeinen Gültigkeit dieses Gesetzes kann durch den Schluß von n auf $n+1$ geschehen. Angenommen, es sei die Gültigkeit desselben für ein Product von n Factoren als richtig erkannt, so erhält man bei Hinzufügung eines weiteren Factors $x+q$ durch Multiplication die Entwickelung:

$$x^{n+1} + C_1{}^n x^n + C_2{}^n x^{n-1} + C_3{}^n x^{n-2} + \cdots + C_{n-1}^n x^2 + C_n^n x$$
$$+ q x^n + q C_1{}^n x^{n-1} + q C_2{}^n x^{n-2} + \cdots + q C_{n-2}^n x^2 + q C_{n-1}^n x + q C_n^n,$$

oder, da $C_p{}^n + q C_{p-1}^n = C_p{}^{n+1}$ ist,

$$x^{n+1} + C_1{}^{n+1} x^n + C_2{}^{n+1} x^{n-1} + C_3{}^{n+1} x^{n-2} + \cdots + C_n^{n+1} x + C_{n+1}^{n+1}.$$

Das obige Bildungsgesetz gilt also auch für $n+1$ Factoren. Hiermit ist aber, wie leicht einzusehen, seine allgemeine Gültigkeit als erwiesen zu betrachten.

Das Product $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-m)$ kann durch ein entsprechendes Verfahren entwickelt werden. Kürzer ist die Ableitung desselben aus der vorstehenden Entwickelung, indem man die Summanden a, b, c u. s. w. als negativ betrachtet und statt derselben bezüglich $-a, -b, -c$ u. s. w. schreibt. Man erhält dann (mit Benutzung von § 15.)

$$x^n - C_1{}^n x^{n-1} + C_2 \; x^{n-2} - C_3{}^n x^{n-3} + \cdots + (-1)^n C_n{}^n,$$

d. h. dieselbe Entwickelung wie vorher, aber mit abwechselnden Vorzeichen der einzelnen Glieder.

Anmerkung: Ein Product, in welchem einzelne der Summanden a, b, u. s. w. positiv, andere negativ sind, läßt sich in ähnlicher Weise leicht entwickeln.

§ 56.

Sind die einzelnen Summanden a, b, c u. s. w. einander gleich, so ist nach § 49:

$$C_1{}^n = n \cdot a,\; C_2{}^n = \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^2,\; C_3{}^n = \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3,$$

allgemein $C_p{}^n = \dfrac{n\,(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots p} a^p$,

und somit

$$(x + a)^n = x^n + n \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 \cdot x^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^3 \cdot x^{n-3}$$
$$+ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p} a^p \cdot x^{n-p} + \cdots + a^n.$$

$$(x - a)^n = x^n - n \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 \cdot x^{n-2}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{n-3}$$
$$+ \cdots + (-1)^p \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p} a^p \cdot x^{n-p}$$
$$+ \cdots + (-1)^n a^n.$$

Diese beiden Formeln führen den Namen „**Binomischer Lehrsatz**“ und werden häufig auch in der Form

$$(1) \quad (a \pm b)^n = a^n \pm n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2$$
$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3$$
$$+ \cdots + (\pm 1)^p \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p} a^{n-p} b^p$$
$$+ \cdots + (\pm 1)^n b^n$$ geschrieben.

Anmerkung: Die Coefficienten n, $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, u. s. w. werden die **Binomialcoefficienten** genannt und auch durch $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, u. s. w. bezeichnet.

Die Formel für $(a - b)^n$ kann aus der für $(a + b)^n$ abgeleitet werden, indem man in letzterer b als negativ annimmt.

Zusätze: 1) Die Anzahl der Glieder der Binomialreihe ist eine endliche, und zwar gleich $(n + 1)$, denn der Coefficient des $n + 2^{\text{ten}}$ Gliedes würde, wie alle folgenden, den Factor Null enthalten.

2) Die Exponenten von a nehmen in jedem folgenden Gliede um 1 ab und erhalten so die Werthe von n bis 0; die Exponenten von b nehmen in gleicher Weise von 0 bis n zu; die Summe der Exponenten von a und b ist in jedem Gliede gleich n.

3) Der Coefficient des letzten Gliedes ist gleich dem des ersten, der Coefficient des vorletzten gleich dem des zweiten u. s. w., oder die Coefficienten der ersten Hälfte der Binomialreihe kehren in der zweiten in umgekehrter Reihenfolge wieder.

Denn es ist der Coefficient des p^{ten} Gliedes $\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-p+2)}{1 \cdot 2 \cdots (p-1)}$, der des p^{ten} vom Ende an gerechnet, oder des $n - p + 2^{\text{ten}}$ Gliedes

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-p+2)\cdot(n-p+1)(n-p)\cdots(p+1)\cdot p}{1\cdot 2\cdots(p-1)\cdot p\cdot(p+1)\cdots(n-p)(n-p+1)}$$
$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+2)}{1\cdot 2\cdots(p-1)}.$$

4) Das letzte Glied der Reihe heißt b^n, das vorletzte $n\cdot a\,b^{n-1}$ u. s. w.

5) Man erhält aus den Binomialcoefficienten für irgend eine Potenz n die der nächst höheren Potenz $n+1$, indem man je zwei benachbarte der ersteren (mit Einschluß von $\binom{n}{0}=1$ und $\binom{n}{n}=1$) addirt.

Denn es ist

$$\binom{n}{p}=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+2)(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots(p-1)\cdot p}$$
$$\binom{n}{p-1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+2)}{1\cdot 2\cdots(p-1)},$$

also $\binom{n}{p}+\binom{n}{p-1}=\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-p+2)}{1\cdot 2\cdots(p-1)}\left(\frac{n-p+1}{p}+1\right)$
$$=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdots(n-p+2)}{1\cdot 2\cdots(p-1)\cdot p}=\binom{n+1}{p}.$$

Hiernach kann man die Coefficienten für die einzelnen Potenzen leicht in folgender Form aufstellen (Pascal'sches Dreieck):

$n=1$								1		1					
$n=2$							1		2		1				
$n=3$						1		3		3		1			
$n=4$					1		4		6		4		1		
$n=5$				1		5		10		10		5		1	
$n=6$			1		6		15		20		15		6		1
$n=7$		1		7		21		35		35		21		7	1

u. s. w.

6) Setzt man in $(a+b)^n$, $a=1$, $b=1$, so erhält man

$$2^n=1+n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+\cdots,$$

die Summe der Coefficienten der Binomialreihe ist gleich der n^{ten} Potenz von 2.

Man berechne auch die Summe der Coefficienten der abwechselnden (1^{ten}, 3^{ten}, 5^{ten}, u. s. w.) Glieder.

§ 57.

Die Potenz eines Trinoms $(a\pm b\pm c)^n$ findet man mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes, indem man das Trinom zunächst als ein Binom $(a\pm b)\pm c$ betrachtet, letzteres potenzirt und die einzelnen Glieder der entstehenden Reihe wieder mittelst des binomischen Lehrsatzes entwickelt, z. B.

$(a + b - c)^3 = (a + b)^3 - 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 - c^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2$
$+ 3bc^2 - c^3$, oder
$a^3 + b^3 - c^3 + 3\,(a^2b + ab^2 - a^2c + ac^2 - b^2c + bc^2) - 6abc.$

In ähnlicher Weise kann man die Potenzen von Quadrinomen, u. s. f. entwickeln. (Polynomischer Lehrsatz.)

Anmerkung: Der binomische Lehrsatz ist im Vorigen nur unter der stillschweigenden Voraussetzung entwickelt worden, daß der Exponent n eine ganze Zahl sei. Die höhere Mathematik zeigt, daß derselbe auch für jede andere Beschaffenheit des Exponenten gilt, nur ist dann die Anzahl seiner Glieder unbegrenzt, und daher die entstehende unendliche Reihe nur auf die Fälle anwendbar, in welchen dieselbe convergirt.

Heis § 40, 92. Bardey XXXVI_1.

Verlag der Grote'schen Verlagsbuchhandlung (C. Müller) in Berlin.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.