

einem Punkt einer krummen Linie eine Gerade dergestalt gezogen, daß sie mit dem unendlich kleinen Element der Krümmen, welches die Richtung derselben an dem genommenen Punkt bestimmt, zusammenfällt, so ist diese Gerade eine Tangente oder Berührungslinie zu der Krümmen. Der Punkt, durch welchen die Tangente geführt wurde, heißt der Berührungspunkt.

Man erklärt auch eine Tangente als eine Gerade, welche dergestalt an eine krumme Linie gezogen ist, daß man zwischen ihr und der Krümmen keine andere Gerade mehr ziehen kann. Diese Erklärung schließt aber offenbar die oben gegebene ein; denn nur deswegen, weil die Tangente mit der Krümmen am Berührungspunkt ein Element gemein hat, läßt sich durch denselben Punkt keine andere Gerade mehr zwischen jenen beyden Linien ziehen.

68. Wenden wir unsere Definition, um ein Beyspiel zu geben, auf einen bekannten Fall an. Die Kreislinie wird erzeugt durch den Endpunkt einer Geraden, die sich in einer Ebene, um einen auf ihr genommenen unveränderlichen Punkt dreht. Da die Neigung der beweglichen Geraden und der erzeugten Linie offenbar in allen Punkten der letzten unveränderlich bleibt, und diese Neigung überdies die gleiche ist, ob die Gerade sich nach der einen oder der andern Seite bewege, so folgt daraus, daß die Richtung der Kreislinie in jedem Punkte senkrecht auf den, diesem Punkte entsprechenden Halbmesser sey, und daß daher die Tangente an einem Punkt einer Kreislinie ebenfalls senkrecht auf den Halbmesser dieses Punkts seyn müsse; wie in den Elementen der Geometrie bewiesen wird.

69. Man nennt Normale die Gerade, welche durch einen Punkt einer ebenen krummen Linie senkrecht auf die Tangente an demselben Punkt gezogen ist. Die krummen Linien von doppelter Krümmung können keine bestimmten Normalen haben; die Ebenen, welche durch einen ihrer Punkte senkrecht auf die Tangente an demselben geführt sind, heißen Normalebene der krummen Linien von doppelter Krümmung.

#### T a n g i r e n d e E b e n e n.

70. Denken wir uns an irgend einem Punkt einer krummen Fläche zwey verschiedene Erzeugungslinien in der Stellung, die sie haben müssen, wenn sie durch diesen Punkt gehen: wenn man an demselben Punkt zu jeder von diesen Erzeugungslinien die Tangente konstruirt, und durch diese zwey Tangenten eine Ebene führt, so ist diese eine tangirende Ebene zu der Fläche. Der Punkt der Fläche, in welchem die zwey Erzeugungslinien sich schneiden, und welcher zugleich auch den beyden Tangenten und der tangirenden Ebene gemeinschaftlich ist, heißt der Berührungspunkt der Fläche und der

Ebene. Diese Erklärung schließt die Bedingung ein, daß die tangirende Ebene am Berührungspunkt die Tangenten zu allen Linien enthalte, welche durch jenen Punkt auf der Fläche gezogen werden können.

71. Wie bey den Linien, so heißt auch bey den Flächen die Gerade, welche durch den Berührungspunkt senkrecht auf die tangirende Ebene geführt ist, Normale zu der Fläche. Sie ist senkrecht auf das Element der Fläche, weil die Richtung dieses Elements nach allen Seiten mit jener der tangirenden Ebene zusammenfällt, welche als die Verlängerung desselben betrachtet werden kann.

72. Die Betrachtung der tangirenden Ebenen und der Normalen zu den krummen Flächen ist für einen großen Theil der Künste sehr nützlich, und mehreren von ihnen ist sie durchaus unerläßlich. Wir wollen von jedem dieser Fälle nur ein einziges Beyspiel anführen, und diese aus der Baukunst und der Mahleren entlehnen.

Die verschiedenen Theile, aus denen die, von behauenen Steinen erbauten Gewölbe zusammengesetzt sind, heißen Gewölbsteine, und man nennt Fugen, diejenigen Seitenflächen, mit welchen zwey aneinanderstoßende Gewölbsteine sich berühren; sey es nun, daß diese Gewölbsteine einer nemlichen Schichte angehören, oder daß sie in zwey aufeinanderfolgenden Schichten enthalten sind.

Die Stellung der Fugen bey den Gewölben unterliegt mehreren nothwendig zu erfüllenden Bedingungen; wir wollen hier nur diejenigen herausheben, die sich auf unsern Gegenstand beziehen. Eine dieser Bedingungen ist, daß die Fugen senkrecht unter sich seyen, und daß sie sämtlich senkrecht auf die Oberfläche des Gewölbes stoßen. Wenn man sich merklich von diesem Gesetze entfernte, so würde man nicht nur die allgemeine Konvenienz verletzen, ohne welche Nichts wohlgefällig erscheint, sondern man würde auch Gefahr laufen, das Gewölbe weniger fest und weniger dauerhaft zu machen; denn wenn eine dieser Fugen schief auf die Oberfläche des Gewölbes wäre, so hätte der Eine von den zwey, an diese Fuge anstoßenden Gewölbsteinen einen stumpfen, und der Andere einen spitzen Winkel, und bey der Reaktion, welche die beyden Gewölbsteine gegen einander ausüben, wären diese zwey Winkel nicht des gleichen Widerstandes fähig; der spitze Winkel würde wegen der Zerbrechlichkeit der Materialien dem Zerspringen ausgesetzt seyn, wodurch die Gestalt des Gewölbes geändert, und die Dauer des Gebäudes gefährdet wäre. Die Zerlegung eines Gewölbes in Gewölbsteine erheischt sonach unumgänglich die Betrachtung der tangirenden Ebenen und der Normalen zu der krummen Oberfläche des Gewölbes.

73. Gehen wir nun zu einem andern Beispiele über, das aus einer Gattung genommen ist, die auf den ersten Anblick keiner so großen Strenge fähig scheint.

Man ist gewohnt, die Mahleren als aus zwey verschiedenartigen Theilen zusammengesetzt zu betrachten. Der Eine ist die Kunst im eigentlichen Sinne, und hat zum Zweck, in dem Beschauer eine bestimmte Rührung zu erregen, ihm ein Gefühl mitzutheilen, oder ihn in die Stimmung zu versetzen, die ihn für gewisse Eindrücke am meisten empfänglich macht. Diese eigentliche Kunst setzt in dem Künstler einen philosophisch geübten Geist voraus, sie erfordert von seiner Seite die genauesten Kenntnisse von der Natur der Dinge, von der Art ihrer Wirkung auf uns, und selbst von den unwillkürlichen Zeichen, in welchen diese Wirkung sich kund thut. Sie kann nur das Ergebnis einer sehr ausgezeichneten Erziehung seyn, wie sie nicht leicht jemand erhält, und wie wir sie unsern angehenden Künstlern überall nicht geben. Sie hängt nicht von allgemeinen Regeln ab, und verträgt bloß guten Rath.

Der andere Theil der Mahleren ist, so zu sagen ihr Handwerk, die Aufgabe desselben ist die genaue Ausführung des Erfundenen. Hier ist nichts willkürlich, alles kann durch strenges Raisonnement vorher berechnet werden, weil hier alles das nothwendige Resultat angenommener Gegenstände und gegebener Verhältnisse ist. Wenn ein Gegenstand nach Gestalt und Stellung bekannt ist, wenn man die Natur, die Anzahl und die Stellung aller Körper kennt, die ihn beleuchten können, sey es durch gerades Licht, oder durch Reflexionsstrahlen, wenn die Stellung des Auges des Beschauers fest ist, wenn endlich alle Umstände, welche auf das Sehen Einfluß haben können, recht geordnet und bekannt sind, so ist der Ton eines jeden Punkts der sichtbaren Oberfläche des Körpers absolut bestimmt. Alles was Bezug hat, auf die Farbe dieses Tons und auf ihren Glanz, hängt ab, von der Stellung der tangirenden Ebene an diesem Punkt, in Rücksicht auf die beleuchtenden Körper und das Auge des Beschauers, es kann durch bloßes Raisonnement gefunden werden; und ist es gefunden, so muß man sich genau daran halten. Jede Schwächung, jede Uebertreibung würde Form und Farbe der Erscheinung alteriren und eine andere Wirkung hervorbringen, als der Künstler erwartete.

Ich weiß wohl, daß die oft nöthige Schnelligkeit der Ausführung nur selten die Anwendung einer Methode zulassen würde, welche den Künstler aller materiellen Hülfsmittel beraubte, und ihn bloß dem Gebrauche seiner eigenen Fähigkeiten überließe, und daß es viel leichter für den Mahler sey, die Gegenstände vor Augen zu haben, ihre Tinten zu beobachten und sie nachzubilden; aber wäre er gewöhnt, die Stellung der tangirenden Ebenen und die zwey Krümmungen der Flächen in jedem ihrer Punkte \*) zu betrachten, so würde er aus jenem materiellen Hülfsmittel weit größeren Vortheil ziehen;

---

\*) Diese Krümmungen bilden den Gegenstand des fünften Buches.

er würde im Stande seyn, die Wirkungen wieder herzustellen, welche die Weglassung einiger Umstände zu entstehen verhinderte, und jene zu beseitigen, zu denen fremdartige Verhältnisse die Veranlassung gaben.

Endlich geben die schwankenden Ausdrücke, wie Halbflach, Helldunkel *ic.*, welche die Maler jeden Augenblick anwenden, stehende Beweise, wie nothwendig ihnen genauere Kenntnisse und strengeres Raisonnement seyen.

74. Außer ihrer Nützlichkeit in den Künsten ist die Betrachtung der tangirenden Ebenen und Normalen zu den krummen Flächen, eines der fruchtbarsten Mittel, welche die darstellende Geometrie zur Auflösung von Aufgaben anwendet, die mittelst anderer Verfahrensarten nur sehr schwierig zu lösen wären. Wir werden davon einige Beispiele beybringen.

75. Die allgemeine Methode zur Bestimmung der tangirenden Ebene zu einer krummen Fläche besteht, nach Art. 70 darin; an dem Berührungspunkt die Tangenten zu zwey verschiedenen Erzeugungslinien, welche durch diesen Punkt gehen, zu konstruiren und durch diese zwey Geraden eine Ebene zu führen.

Wenn eine Fläche zur Erzeugungslinie eine Gerade hat, so muß die tangirende Ebene offenbar die gerade Erzeugungslinie enthalten, welche durch den Berührungspunkt geht, denn diese Gerade ist zu gleicher Zeit eine Linie der Fläche und ihre eigene Tangente, und als solche gehört sie ganz der tangirenden Ebene an.

76. Diese allgemeine Methode findet jedoch alsdann eine Ausnahme, wenn der Punkt, an welchem die tangirende Ebene geführt werden soll, zugleich ein vielfacher Punkt der Fläche ist. Unter vielfachen Punkten einer Fläche versteht man nemlich jene, welche mehreren Theilen einer Fläche gemein sind. Nehmen wir als Beispiel einen Cylinder, dessen senkrechter Schnitt eine geschlossene Linie mit einem doppelten Punkte sey. \*) Die zwey Tangenten, welche zu dieser Kurve, durch den doppelten Punkt gezogen sind, sind offenbar auch Tangenten zu der Fläche, und dem ungeachtet ist die, durch diese beyden Tangenten gehende Ebene nicht tangirend zu dem Cylinder, denn sie müßte auch die gerade Erzeugungslinie enthalten, die durch den doppelten Punkt geht, (Art. 75.) auf welche sie aber in der That senkrecht ist. Aber man muß bemerken,

---

\*) Doppelten Punkt einer krummen Linie nennt man denjenigen, in welchem sich zwey Zweige derselben schneiden, wie zum Beispiel bey der Linie in Form einer 8 (Lemniscata). Dreyfacher Punkt heißt der gemeinschaftliche Punkt dreyer Zweige, und im Allgemeinen nennt man vielfachen Punkt einer Linie denjenigen, in welchen sich mehrere Zweige derselben Linie kreuzen.

daß diese Erzeugungslinie der Durchschnitt der zwey Netze der Fläche ist, und daß man durch eben diese Gerade zu jedem Netz der Fläche eine tangirende Ebene führen könne. Es folgt aus dem Gesagten, daß, so oft zwey Tangenten von demselben Punkt einer Fläche auslaufen, und zwey verschiedene krumme Linien berühren, die durch diese beyden Tangenten geführte Ebene an demselben Punkt tangirend zu der Fläche sey; vorausgesetzt jedoch, daß der genannte Berührungspunkt nicht zugleich ein vielfacher Punkt der Fläche sey, denn in diesem Falle kann man durch denselben so viele tangirende Ebenen zu der Fläche führen, als diese Netze hat.

Was die Konstruktion der Normalen betrifft, so beschränkt sich diese darauf, eine Senkrechte auf die tangirende Ebene zu errichten; wir werden uns deshalb einige besondere Fälle ausgenommen, im Allgemeinen nicht näher damit beschäftigen.

Konstruktion tangirender Ebenen zu krummen Flächen, wobey der Berührungspunkt gegeben ist.

77. Vorbemerkung. Wir glauben von nun an ohne Mißverständnisse folgende Abkürzungen im Texte eintreten lassen zu können. Einen Punkt im Raume werden wir durch die Buchstaben seiner Horizontal- und seiner Vertikalprojektion, zwischen eine Parenthese gesetzt bezeichnen. Unter Punkt  $(A, a)$  ist demnach der Punkt des Raumes zu verstehen, dessen Projektionen  $A$  und  $a$  sind. Auf gleiche Weise bezeichnet Linie  $(A B, a b)$  die Linie, deren Projektionen  $A B$  und  $a b$  sind.

Ebene  $(A B, a b)$  bezeichnet die Ebene, deren Risse auf beyden Projektionsebenen die Geraden  $A B, a b$  sind; und Ebene  $A B$  bezeichnet die Ebene, welche als Riß auf einer Projektionsebene die Gerade  $A B$  hat, und welche zugleich senkrecht auf dieselbe Ebene ist.

### E r s t e A u f g a b e.

Man soll durch einen Punkt einer Cylinderfläche, dessen eine Projektion gegeben ist, eine tangirende Ebene zu der Fläche führen?

78. Auflösung. Es sey  $(A B, a b)$  (Taf. VII. Fig. 1.) die Gerade, zu welcher die Erzeugungslinie der Cylinderfläche parallel seyn soll;  $P H Q G$  sey die, auf der horizontalen Projektionsebene gegebene Grundlinie der Fläche, welche man als ihren Horizontalriß betrachten kann.

Da alle geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche parallel zu der Geraden  $(A B, a b)$  seyn müssen, ziehe man parallel zu  $A B$  die Geraden  $G J, H N$  tangirend an