

---

## Z w e y t e s B u c h.

### K r u m m e F l ä c h e n.

---

#### E r s t e s K a p i t e l.

#### V o n d e r E r z e u g u n g d e r F l ä c h e n.

---

52. Die Annahmen, welche die Grundlage der Projektionsmethode bilden, eignen sich vollkommen zur Darstellung eines Punktes im Raume, so wie einer jeden geraden oder krummen Linie; sie sind ferner ganz passend, um die Stellung und Gestalt eines Körpers auszudrücken, dessen Grenzen ebene Flächen, geradlinige Kanten und die Scheitel körperlicher Winkel sind; weil in diesem Falle der Körper vollkommen bestimmt ist, sobald man die Stellung aller seiner Kanten und der Scheitel aller seiner Winkel kennt. Aber, wenn der Körper durch eine einzige krumme Fläche begränzt wäre, deren sämtliche Punkte einem nemlichen Gesetze unterlägen, wie bey der Kugel; oder durch stückweise Zusammenfügung verschiedener krummer Flächentheile, wie bey gedrehten Körpern, so wären diese Annahmen nicht nur unbequem, unpraktisch, und hätten den Fehler kein Bild zu geben, sondern sie ermangelten noch überdies der Fruchtbarkeit, und sie wären unzureichend.

Vorerst ist leicht zu ersehen, daß die Annahmen, welche wir aufgestellt haben, für sich allein bestehend, unbequem und auch unpraktisch wären; denn man müßte, um die Stellung aller Punkte einer krummen Fläche auszudrücken, nicht allein die Vertikal- und Horizontalprojektion eines Jeden angeben, sondern die beyden Projektionen desselben Punktes müßten auch untereinander verbunden werden, damit man nicht Gefahr liefe, die Horizontalprojektion irgend eines Punktes mit der Vertikalprojektion eines Andern zusammen zu nehmen, und da, wie wir gesehen haben, die einfachste Verbindung solcher zwey Punkte, durch eine auf die Projektionsaxe senkrechte Gerade geschieht, so würde man die Zeich-

nungen mit einer außerordentlichen Anzahl von Linien überladen, die eine um so größere Verwirrung darauf hervorbrächten, je genauer man seyn wollte. Wir werden sogleich zeigen, daß diese Methode auch unzureichend wäre, und daß ihr die nöthige Fruchtbarkeit fehlte.

Unter der unendlichen Anzahl verschiedener krummer Flächen, giebt es Einige, die sich nicht über einen endlichen und umgränzten Theil des Raumes hinaus erstrecken, und deren Projektionen einen, nach allen Richtungen beschränkten Umfang haben. Die Kugelfläche ist zum Beyspiel in diesem Fall: die Ausdehnung ihrer Projektion auf einer Ebene beschränkt sich auf die eines Kreises, von demselben Halbmesser wie die Kugel, und es läßt sich annehmen, daß die Ebene, auf welcher die Projektion derselben gemacht werden soll, hiezu hinreichend groß sey. Aber alle Cylinderflächen sind nach der Richtung der Geraden, die sich auf ihnen ziehen lassen, unbestimmt; selbst die Ebene, die einfachste aller Flächen ist nach zwey Richtungen unbestimmt; endlich giebt es eine große Zahl krummer Flächen, die sich zu gleicher Zeit nach allen Regionen des Raums ausbreiten. Nun aber haben die Ebenen, auf welchen man die Projektionen ausführt, nothwendig eine begränzte Ausdehnung; besäße man daher kein anderes Mittel, um die Natur einer krummen Fläche kennen zu lernen, als die zwey Projektionen eines jeden Punkts, durch welchen sie geht, so wäre dasselbe nur auf diejenigen Punkte der Fläche anwendbar, die der Ausdehnung der Projektionsebenen entsprächen, alle jene, welche darüber hinaus lägen, könnten weder ausgedrückt, noch erkannt werden; und sonach wäre die Methode unzureichend. Sie ermangelte endlich der Fruchtbarkeit, weil man Nichts daraus ableiten könnte, was Bezug hat auf die tangirenden Ebenen der Flächen, auf ihre Normalen, auf ihre Wendungslinien, auf ihre Rückkehrkanten, auf ihre vielfachen Punkte, auf ihre vielfachen Linien, auf alle jene Eigenschaften endlich, welche nothwendig betrachtet werden müssen, sobald man auf einer krummen Fläche arbeiten will.

Es bedurfte daher noch einer ferneren Annahme, welche vereinbar mit der Ersten, dieselbe überall ergänzte, wo sie nicht zureichte. Auf diese weitere Annahme sollen uns die folgenden Betrachtungen leiten.

53. Gleich wie eine Linie eine Reihe von Punkten des Raumes ist, die nach einem gewissen Gesetze der Stetigkeit unter sich verbunden sind, eben so ist eine Fläche, das Ganze aller Punkte des Raumes, welche eine besondere Eigenthümlichkeit gemein haben. Wenn aber ein Punkt sich im Raume nach irgend einem Gesetze bewegt, so ist der geometrische Ort seiner Bewegung eine Linie. Lassen wir eine Linie, sich nach irgend einem Gesetze im Raume bewegen, wobey sie entweder, indem sie ihre Stellung verändert, ihre Gestalt unveränderlich beybehalten, oder zu gleicher Zeit Stellung und Gestalt ver-

ändern kann, ohne jedoch ihre Natur zu wechseln; so ist der geometrische Ort ihrer Bewegung, oder was dasselbe ist, das Ganze aller auf einanderfolgenden Stellungen, welche die bewegliche Linie nacheinander einnahm, eine Fläche.

Man kann dem zufolge eine krumme Fläche betrachten, als sey sie durch die Bewegung einer Linie von beständiger oder veränderlicher Gestalt entstanden: und die Fläche wird bestimmt seyn, sobald man folgende drey Stücke kennt: 1tens die Gestalt der beweglichen Linie, 2tens das Gesetz ihrer Bewegung und 3tens das Gesetz ihrer Gestaltsveränderung.

54. Diese Betrachtungsweise der krummen Flächen: als den Ort irgend einer beweglichen Linie, deren beständige oder veränderliche Gestalt in jedem Augenblick der Bewegung gegeben ist, hat man in der darstellenden Geometrie angenommen; sie bildet die Ergänzung der Projektionsmethode; und wir werden häufige Gelegenheit haben uns von ihrer Einfachheit und von ihrer Fruchtbarkeit zu überzeugen.

55. Wir werden der beweglichen Linie, durch deren Orts- und Gestaltsveränderung eine krumme Fläche entsteht, den Namen der Erzeugungslinie dieser Fläche geben.

Gewöhnlich ist das Bewegungsgesetz einer Erzeugungslinie dadurch gegeben, daß diese Linie eine bestimmte Stellung in Bezug auf andere bekannte Linien haben soll; diese Letzteren werden wir die Leitlinien der Fläche nennen.

56. Also nicht durch die Angabe der Projektionen einzelner Punkte, durch welche eine krumme Fläche geht, wird die Gestalt und Stellung derselben bestimmt, sondern dadurch, daß man die Mittel angiebt, um für jeden beliebigen Punkt einer Fläche die Erzeugungslinie konstruiren zu können, in der Stellung und Gestalt, die sie haben muß, indem sie durch diesen Punkt geht, und wir stellen daher den Grundsatz auf: eine krumme Fläche ist bestimmt, wenn man für jeden Punkt derselben, dessen eine Projektion beliebig angenommen seyn kann, die Projektionen der Erzeugungslinie zu konstruiren weiß, welche durch diesen Punkt geht.

57. Man kann es als eine Folge dieser Annahme betrachten, daß wir die Ebene, die einfachste aller Flächen, nicht durch die Angabe von drey ihrer Punkte bestimmt haben, welche hinreichend wären, um ihre Stellung festzusetzen; sondern durch Angabe ihrer Risse, von denen man jeden als die Erzeugungslinie der Ebene betrachten kann, welche sich so bewegt, daß alle ihre Punkte Parallelen zu dem zweyten Risse beschreiben.

In den folgenden Nummern werden wir die Erzeugungen einiger besonderer Gattungen von krummen Flächen durchgehen, und dadurch dasjenige noch deutlich machen, was diese Allgemeinheiten allenfalls dunkel gelassen haben könnten.

## Von einigen krummen Flächen insbesondere.

## Von den Cylinderflächen.

58. Die Cylinder werden hauptsächlich auf folgende zwey Arten erzeugt. Erstlich durch die Bewegung einer geraden Linie, welche, indem sie beständig parallel zu einer gegebenen Richtung bleibt, sich bey ihrer Bewegung auf eine gegebene krumme Linie stützt; oder zweitens, durch die Bewegung der Krümmen, welche im ersten Fall als leitende Linie diente, und welche sich so bewegt, daß, während sie sich immer mit dem nemlichen Punkte an eine gegebene Gerade anlehnt, alle ihre übrigen Punkte Parallelen zu dieser Geraden beschreiben.

Die erste Erzeugungsart der Cylinder durch die gerade Linie ist die, unter welcher man diese Flächen am gewöhnlichsten betrachtet. In beyden Arten bleibt übrigens die Erzeugungslinie beständig von Gestalt, sie verändert bloß ihre Stellung im Raume.

Es ist aus dem Gesagten ersichtlich, daß es so viele Arten von Cylindern gäbe, als sich verschiedene Leitlinien nehmen lassen, um die Bewegung der geraden Erzeugungslinie zu leiten; und daß man mit einer nemlichen Leitlinie wiederum unendlich verschiedene Varietäten von Cylindern bilden könne, je nach der verschiedenen Neigung, welche man der geraden Erzeugungslinie giebt.

Eine für die darstellende Geometrie sehr wichtige Klasse von Cylindern sind die projektirenden Flächen der krummen Linien (Art. 13). Dies sind Cylinder, welche als Leitlinien die Projektionen der Krümmen haben, und deren Erzeugungslinien senkrecht auf die Projektionsebenen sind.

Wenn die Leitlinie eines Cylinders eine ebene Kurve ist, so heißt sie gewöhnlich die Basis oder Grundlinie desselben. Je nachdem diese Basis ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel u. s. w. ist, erhält die Fläche die Benennung: kreisförmiger, elliptischer oder parabolischer Cylinder &c. Ferner sind die Cylinder gerade oder schief, je nachdem die gerade Erzeugungslinie senkrecht oder schief auf die Ebene der Grundlinie ist.

Jede einzelne Stellung der geraden Erzeugungslinie nennt man in den mechanischen Künsten eine Kante des Cylinders.

Man kann die Cylinder als Prismen von unendlich schmalen Seiten betrachten, oder vielmehr als die Gränze aller Prismen, deren Grundlinien um die der Cylinder umschriebene oder eingeschriebene Polygone sind.

## Von den Regelflächen.

59. Die Regelflächen haben so wie die Cylinder ebenfalls zwey Haupterzeugungsarten. Man kann sie einmal betrachten als durch eine unbestimmte Gerade hervorgebracht, welche immer durch einen gegebenen festen Punkt geht und sich dabey auf eine gegebene Kurve als Leitlinie stützt. Der einzige Punkt, durch den die Gerade immer geht, ist der Mittelpunkt der Fläche, sehr ungeeignet hat man ihm den Namen des Scheitels gegeben.

Man kann die Regelflächen auch auf eine zweyte Art erzeugen, welche wir hier zu mehrerer Einfachheit, nur auf diejenigen von kreisförmigen Leitlinien anwenden wollen. Diese Flächen können betrachtet werden, als von einem Kreise durchlaufen, welcher sich so bewegt, daß, während sein Mittelpunkt immer in der nach dem Mittelpunkt der Fläche gerichteten Geraden bleibt, sein Halbmesser in jedem Augenblick der Bewegung proportional sey, zu der Entfernung seines Mittelpunkts von jenem der Fläche.

Es ist einleuchtend, daß, so wie die Ebene des Kreises sich gegen den Mittelpunkt der Fläche bewegt, der Halbmesser desselben abnehme, und Null werde, wenn die Ebene durch den Mittelpunkt geht, und daß dieser Halbmesser seine Richtung ändere, um sofort unbestimmt zu wachsen, so wie die Ebene, nachdem sie den Mittelpunkt passirt hat, sich mehr und mehr von demselben entfernt.

Bei dieser zweyten Erzeugungsart ändert der Kreis, welcher Erzeugungslinie ist, nicht nur die Stellung, er ändert auch die Gestalt, weil er den Halbmesser ändert, und folglich Krümmung und Ausdehnung.

60. Der Mittelpunkt vereinigt zwey durchaus gleiche Theile eines Kegels, welche zusammen aber nur eine und dieselbe Fläche konstituiren. Wir nennen jeden dieser Theile ein Netz der Fläche. Es ist dieses ein allgemeiner Grundsatz, daß man als zu einer und derselben Fläche gehörig alle jene Theile zu betrachten hat, welche durch eine nemliche Bewegung, oder durch eine nemliche Linie in ihrer ganzen Ausdehnung erzeugt werden können, und wir nennen im Allgemeinen jeden solchen Theil ein Netz dieser Fläche. Die Eintheilung einer Fläche in Netze ist ganz analog mit der Eintheilung der Kurven in Zweige oder Schenkel.

61. Die Familie der Cylinderflächen kann als in jener der Regelflächen mitbegriffen betrachtet werden; um dieses einzusehen, denken wir uns die Leitlinie eines Kegels in einer unveränderlichen Stellung, und nehmen wir an, daß der Mittelpunkt der Fläche, nach welchem alle geraden Erzeugungslinien zusammenlaufen, in eine unendliche Entfernung von dieser Leitlinie übergehe, so werden alle geraden Erzeugungslinien eine parallele Stellung unter sich nehmen, und die Fläche wird sich in einen Cylinder verwandeln.

Wegen dieser Analogie der beyden Flächenfamilien wendet man auch auf beyde die gleiche Benennungsweise an; so nimmt man die ebene Leitlinie den Namen der Basis oder der Grundlinie, und jede einzelne Stellung der geraden Erzeugungslinie die einer Kante der Regelfläche an *cc*.

Die einfachste aller Regelflächen ist der gerade kreisförmige Kegel, er hat als Grundlinie einen Kreis, und der Mittelpunkt der Fläche liegt in der Axe dieses Kreises, welche zugleich der Axe des Kegels ist.

Der schiefe kreisförmige Kegel hat als Grundlinie einen Kreis, aber die aus dem Mittelpunkt der Grundlinie nach jenem der Fläche gezogene Geraden ist nicht senkrecht auf die Ebene dieser Grundlinie.

Man kann die Regelflächen als die Gränzen der Pyramiden betrachten, deren gemeinschaftlicher Scheitel im Mittelpunkt der Fläche liegt, und deren Grundlinien um die des Kegels umschriebene oder eingeschriebene Polygone sind. (Man sehe in Bezug auf die Kegel; und die Cylinderflächen die Note 1 zu Ende dieses Buches).

### Von den Umdrehungsflächen.

62. Wenn man irgend eine gerade oder krumme Linie, von einfacher oder doppelter Krümmung, sich dergestalt um eine feste Gerade als Axe drehen läßt, daß jeder Punkt der beweglichen Linie immer in gleichem Abstände von jedem Punkte der Axe bleibt, so erzeugt man durch die Bewegung dieser Linie eine Umdrehungsfläche.

Jeder Punkt der Erzeugungslinie einer Umdrehungsfläche beschreibt bey ihrer Drehung den Umfang eines Kreises, die Ebenen aller dieser Kreise sind senkrecht auf die Axe und ihre Mittelpunkte liegen in dieser Axe. Wenn man durch irgend einen Punkt der Erzeugungslinie und durch die Axe eine Ebene annimmt, so lassen sich alle diese Eigenschaften, nach dem was wir (Art. 42 u. 43.) über die Bewegung einer Ebene und eines Punktes in derselben gesagt haben, leicht erklären.

Die Umdrehungsflächen können auch betrachtet werden, als durch einen Kreis erzeugt, welcher sich so bewegt, daß, während sein Mittelpunkt immer in der Axe bleibt, und seine Ebene immer senkrecht auf diese Axe, sein Halbmesser in jedem Moment der Bewegung gleich sey der Entfernung des Punktes, in welchem die Ebene des Kreises die Axe durchschneidet, von demjenigen, in welchem sie eine im Raume gegebene Kurve trifft. Hiebey ändert die Erzeugungslinie, deren Gestalt bey der ersten Erzeugung beständig blieb, zu gleicher Zeit Stellung und Gestalt.

63. Wenn man aus allen Punkten einer doppelt gekrümmten Erzeugungslinie einer Umdrehungsfläche Senkrechte auf die Axe gefällt denkt, und an derselben beendigt, so

sind diese die Halbmesser der von jenen Punkten beschriebenen Kreise, und ihre Fußpunkte auf der Axe sind die Mittelpunkte dieser Kreise. Nun aber werden diese Halbmesser weder ihre Abstände von einander, noch ihre Größe ändern, wenn man sie sämmtlich auf eine durch die Axe geführte Ebene zurücklegt; ihre Endpunkte, die immer noch der Fläche angehören, werden eine besondere ebene Kurve bilden, und diese ebene Kurve wird daher durch ihre Umdrehung um die Axe dieselbe Fläche erzeugen, wie die vorgelegte Erzeugungslinie von doppelter Krümmung. Es läßt sich eben so leicht beweisen, daß nicht nur die genannte ebene Kurve, sondern, im Allgemeinen, jede auf einer Umdrehungsfläche verzeichnete Linie durch ihre Rotationsbewegung um die Axe wiederum die nemliche Fläche erzeugen müssen.

Man nennt eine durch die Axe einer Umdrehungsfläche gehende Ebene eine Meridianebene, und die krumme Linie, nach welcher eine solche Ebene die Fläche schneidet, einen Meridian derselben.

Die Kreise, aus denen man eine Umdrehungsfläche zusammengesetzt betrachten kann, und deren Ebenen senkrecht auf die Axe und parallel unter sich sind, heißen die Parallelkreise oder auch bloß die Parallelen der Fläche.

64. Die Klasse der Umdrehungsflächen ist eine der zahlreichsten, welche in den Künsten angewendet werden und ihre Verfertigung ist eine der einfachsten. Es giebt so viele Familien derselben, als sich verschiedenerley Linien, oder auch selbst Zusammensetzungen von Linien zu ihrer Erzeugung nehmen lassen, und diese Familien zerfallen wiederum in sehr unterschiedene Arten, je nach der Stellung der Axe in Bezug auf die Erzeugungslinie.

Die geraden Regel und Cylinder von kreisförmigen Grundlinien sind Umdrehungsflächen, deren Meridian aus zwey geraden Linien gebildet wird.

Die Kugel entsteht durch die Umdrehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser. Wenn die Axe, um welche ein Kreis sich dreht, nicht durch den Mittelpunkt desselben geht, so bildet man eine Fläche, welche zu der Familie der ringförmigen gehört. Die Ringe, die in den mechanischen Künsten so häufig vorkommen, sind eine besondere Art dieser Flächenfamilie.

---

65. Wir wollen diese Aufzählung besonderer krummer Flächen für den Augenblick nicht weiter fortsetzen; die angeführten Beispiele werden die Richtigkeit unseres oben aufgestellten Satzes deutlich gezeigt haben: „Daß es keine krumme Fläche gäbe, deren Gestalt und Stellung nicht vollkommen durch die genaue und vollständige Angabe ihrer Erzeugung bestimmt werden könnte.“ Es ist hiebey nur noch folgendes zu bemerken. Itens da es leicht ist, für jede krumme Fläche mannigfache Erzeugungsarten anzu-

geben, so bleibt es der Geschicklichkeit und dem Scharfsinn des Arbeitenden überlassen, in jedem einzelnen Falle diejenige zu wählen, welche die einfachste Kurve gebraucht, und die am wenigsten mühsamen Betrachtungen erheischt. 2tens hat eine vielfache Erfahrung gezeigt, daß, anstatt bey jeder krummen Fläche nur eine einzige Erzeugungsart zu betrachten, was das Studium des Gesetzes der Bewegung und der Gestaltveränderung der Erzeugungslinie erforderte; es oft weit einfacher sey, zu gleicher Zeit zwey verschiedene Erzeugungsarten zu betrachten, und für jeden beliebigen Punkt die Konstruktion zweyer Erzeugungslinien anzugeben.

66. Um an einem Beyspiel zu zeigen, mit welcher Einfachheit und Fruchtbarkeit die vorgetragene Betrachtungsweise der krummen Flächen sich zu allen graphischen Operationen mit denselben anwenden lasse; nehmen wir an, es sey eine krumme Fläche gegeben, und es solle der Durchschnitt dieser Fläche mit einer gleichfalls gegebenen Ebene konstruirt werden. Wenn die Erzeugungslinie der vorgelegten Fläche in irgend einer ihrer Stellungen die gegebene Ebene durchschneidet, was in einem oder in mehreren Punkten geschehen kann, so gehören diese Punkte, da sie zu gleicher Zeit auf der Fläche sowohl, als auf der durchschneidenden Ebene liegen, offenbar dem Durchschnitte dieser beyden an. Hat man daher eine hinreichende Anzahl von Stellungen der Erzeugungslinie konstruirt, und die Begegnungspunkte einer jeden mit der durchschneidenden Ebene bestimmt, und man verbindet die Vertikalprojektionen dieser Begegnungspunkte durch eine erste krumme Linie, sodann die Horizontalprojektionen derselben Punkte durch eine zweyte Krumme, so hat man die beyden Projektionen der gesuchten Durchschnittslinie, und zwar um so genauer, je mehr Begegnungspunkte der durchschneidenden Ebene mit den verschiedenen Erzeugungslinien man bestimmt haben wird.

Die Konstruktionen der ebenen Schnitte der krummen Flächen und der Durchschnitte dieser Flächen unter sich, sind der Gegenstand des 3ten Buches. In dem weiteren Kapiteln des gegenwärtigen Buches werden wir uns mit der Konstruktion der tangirenden Ebenen und der Normalen zu den krummen Flächen beschäftigen.

## Z w e y t e s   K a p i t e l.

Von den Tangenten, den tangirenden Ebenen und den Normalen zu den krummen Linien und Flächen.

67. Nach der gemeinhin in der Geometrie angenommenene Erklärung ist eine krumme Linie diejenige, deren Richtung sich stetig verändert. Denken wir uns an irgend