Die Linien-Complexe des ersten Grades und ihre Congruenzen.

§ 1.

Die Linien-Complexe ersten Grades.

26. Wenn wir für die allgemeine homogene Gleichung des ersten Grades zwischen den sechs Strahlen-Coordinaten:

$$(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\ (x'z-xz'),\ (xy'-x'y) \qquad (1)$$

die folgenden nehmen:

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D(yz'-y'z)+E(x'z-xz')+F(xy'-x'y)=0; \qquad (2)$$

um einen Complex ersten Grades darzustellen, so erhalten wir gleichzeitig zur Darstellung desselben Complexes zwischen den Axen-Coordinaten:

$$(t-t'),\ (u-u'),\ (v-v'),\ (uv'-u'v),\ (t'v-tv'),\ (tu'-t'u) \qquad (3)$$

die folgende Gleichung:

$$D(t-t')+E(u-u')+F(v-v')+A(uv'-u'v)+B(t'v-tv')+C(tu'-t'u)=0. \qquad (4)$$

Um von einer dieser beiden Gleichungen zu der anderen überzugehen, haben wir bloss die Punct-Coordinaten x, y, z, x', y', z' mit den Plan-Coordinaten t, u, v, t', u', v' und zugleich A, B, C mit D, E, F gegenseitig zu vertauschen.

Wenn wir statt der sechs Coordinaten (1) und (3) bezüglich die fünf Coordinaten:

$$r,\ s,\ \sigma,\ \varrho,\ \eta \qquad (5)$$

und

$$p,\ q,\ \varkappa,\ \pi,\ \omega \qquad (6)$$

nehmen, gehen die Gleichungen (2) und (4) nach der 2. und 3. Nummer über in:

$$Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta = 0, \qquad (7)$$

und

$$Dp + Eq + F - A\varkappa + B\pi + C\omega = 0.^{*)} \qquad (8)$$

27. Wir können die beiden Gleichungen (3) und (4), welche denselben Complex darstellen, in folgender Weise entwickeln:

$$\begin{aligned} &(A + Fy' - Ez')\,x \\ &+ (B - Fx' + Dz')\,y \\ &+ (C + Ex' - Dy')\,z \\ &- (Ax' + By' + Cz') = 0, \end{aligned} \qquad (9)$$

und

$$\begin{aligned} &(D + Cu' - Bv')\,t \\ &+ (E - Ct' + Av')\,u \\ &+ (F + Bt' - Au')\,v \\ &- (Dt' + Eu' + Fv') = 0. \end{aligned} \qquad (10)$$

Wenn erstens (x', y', z') ein gegebener Punct ist, und wir demnach in (9) x', y', z' als constant, x, y, z als veränderlich betrachten, so stellt diese Gleichung eine Ebene dar, den geometrischen Ort beliebiger Puncte solcher Strahlen, welcher durch den gegebenen Punct gehen, mit anderen Worten, den geometrischen Ort dieser Strahlen selbst. Die Gleichung wird befriedigt, wenn wir für die veränderlichen Grössen die Coordinaten des gegebenen Punctes einsetzen: die bezügliche Ebene geht durch diesen Punct. Jedem Puncte des Raumes entspricht demnach eine Ebene, welche alle durch diesen Punct gehende Linien des Complexes enthält.

Wenn wir zweitens in (10) t', u', v' auf eine gegebene Ebene (t', u', v') beziehen und demnach als constant betrachten, während t, u, v veränderlich bleiben, so stellt diese Gleichung in Plan-Coordinaten einen Punct dar, welcher von den in der gegebenen Ebene liegenden Axen des Complexes umhüllt

*) Wir können nicht vermeiden, in der analytischen Darstellung der geraden Linie eine der drei Coordinaten-Axen auszuzeichnen. Indem wir die Gleichungen (1) und (2) der einleitenden Betrachtung zu Grunde legten, haben wir OZ für diese Axe genommen und, damit in Beziehung auf diese Axe Alles symmetrisch werde, in den beiden Ebenen XZ und YZ von dieser Axe aus die Winkel gerechnet. Hiermit im Widerspruch ist die Art und Weise, wie in der Mechanik die Drehungsmomente in Beziehung auf die drei Coordinaten-Axen genommen werden.

Rücksichten auf die späteren Untersuchungen über Mechanik bestimmen uns, daran festzuhalten, durch die drei letzten Coordinaten (1) auch dem Zeichen nach die drei doppelten Momente darzustellen. Dadurch wird die gewünschte Symmetrie in Beziehung auf OZ aufgehoben. Um sie aber in den analytischen Untersuchungen über Complexe wieder herzustellen, in dem Falle, dass wir (7) und (8) für die allgemeinen Gleichungen nehmen, müssen wir das positive σ, und, dem entsprechend, das positive $\varkappa$ als Coordinaten betrachten, die Glieder aber, welche σ und $\varkappa$ in ungeraden Potenzen enthalten, mit dem negativen Zeichen einführen. Dem entsprechend kommen in den beiden Gleichungen (7) und (8) $D\sigma$ und $A\varkappa$ mit dem negativen Zeichen vor.

wird, das heisst, in welchem diese Axen sich schneiden. In jeder Ebene liegen also unendlich viele Linien des Complexes, welche in einem Puncte derselben sich vereinigen, von dem wir sagen, dass er der Ebene entspreche.

Durch jeden Punct des Raumes gehen unendlich viele Linien des Complexes, welche in einer durch diesen Punct gehenden Ebene liegen. In jeder den Raum durchziehenden Ebene liegen unendlich viele Linien des Complexes, welche in einem Puncte der Ebene sich schneiden.

Die beiden Theile des Satzes bedingen einander. Die Beziehung von Punct und Ebene ist eine gegenseitige. Es gibt für jeden beliebigen Punct des Raumes eine Ebene, welche die durch diesen Punct gehenden Linien des Complexes enthält, und, umgekehrt, für diese Ebene ist es wiederum jener Punct, in welchem alle Linien des Complexes, welche in dieser Ebene liegen, sich schneiden.

28. Die einem gegebenen Puncte entsprechende Ebene ist bestimmt durch irgend zwei in dem Puncte sich schneidende Linien des Complexes, der einer gegebenen Ebene entsprechende Punct durch zwei in der Ebene liegende Linien des Complexes.

Es seien P und P' zwei Puncte, durch welche sich die gerade Linie (PP') legen lässt, p und p' die beiden diesen Puncten entsprechenden Ebenen, welche sich in einer zweiten geraden Linie (pp') schneiden. Dann gehören alle Linien, die durch P oder P' gehen und die gerade Linie (pp') schneiden, dem Complexe an. Schneiden sich zwei Linien, die durch P und bezüglich durch P' gehen, in irgend einem Puncte von (pp'), so ist die Ebene, welche diese beiden geraden Linien enthält, die ihrem Durchschnittspuncte auf (pp') entsprechende Ebene, und diese Ebene geht durch (PP'). Ebenso ist denn auch bewiesen, dass nicht nur die den beiden Puncten P und P', sondern überhaupt die allen Puncten der geraden Linie (PP') entsprechenden Ebenen sich in der Linie (pp') schneiden. Wir nennen die beiden geraden Linien (PP') und (pp'), deren Beziehung zu einander eine gegenseitige ist, zwei conjugirte Polaren in Beziehung auf den Complex.

Jede Linie des Raumes hat ihre conjugirte Polare. Jede Linie des Raumes kann als Strahl betrachtet werden: wenn dieselbe durch einen Punct beschrieben wird, so umhüllen die diesem Puncte entsprechenden Ebenen eine Axe, die dem Strahle conjugirt ist. Jede Linie des Raumes kann als Axe betrachtet werden: während dieselbe von einer sich drehenden Ebene umhüllt wird, beschreibt der dieser Ebene entsprechende Punct einen Strahl, der der Axe conjugirt ist. Jede der zwei conjugirten Linien kann als Strahl und als Axe angesehen werden.

Jede gerade Linie, welche zwei conjugirte Polaren schneidet, ist eine Linie des Complexes.

Jede Linie des Complexes ist als zwei zusammenfallende conjugirte Linien anzusehen.

29. Ein Complex ist durch fünf seiner Linien vollkommen bestimmt. Jede der Linien liefert eine lineare Gleichung zur Bestimmung der fünf unabhängigen Constanten der allgemeinen Complex-Gleichung. Vier der fünf Constanten können dadurch ersetzt werden, dass irgend zwei zugeordnete Polaren des Complexes gegeben sind. Weil nämlich jede gegebene gerade Linie nur eine zugeordnete hat, die sich in linearer Weise durch vier Constante bestimmt, so erhalten wir vier lineare Bedingungs-Gleichungen zwischen den Constanten der allgemeinen Gleichung, wenn irgend zwei zugeordnete Polaren eines Complexes gegeben sind. Zwei gegebene zugeordnete Polaren eines Complexes sind also für die Bestimmung desselben äquivalent mit vier gegebenen seiner Linien, so dass der Complex vollkommen bestimmt ist, sobald wir, ausser den beiden zugeordneten Polaren, noch irgend eine Linie desselben kennen.

Hiernach ergibt sich eine einfache Construction eines Complexes, wenn irgend fünf seiner Linien gegeben sind. Wenn wir von diesen fünf Linien irgend vier beliebig auswählen, so sind die beiden geraden Linien, welche diese vier Linien schneiden, zwei zugeordnete Polaren des Complexes, und jede neue Linie, welche diese beiden zugeordneten Polaren schneidet, ist eine neue Linie des Complexes. Wenn wir die gegebenen fünf geraden Linien in anderer Weise zu je vier combiniren, erhalten wir neue Paare zugeordneter Polaren, und jedem Paare entsprechen unendlich viele neue Linien des Complexes. Und so können wir fortfahren, indem wir die gefundenen Linien mit hinzuziehen, um neue Combinationen zu je vier zu bilden. Hierbei dürfen wir nicht übersehen, dass vier reelle gerade Linien nicht immer von zwei reellen geraden Linien geschnitten werden, sondern dass diese beiden Linien auch imaginär sein können.*)

*) Drei der fünf gegebenen geraden Linien können immer als drei Linien einer der beiden Erzeugungen eines Hyperboloids angesehen werden. Wenn eine vierte Linie das Hyperboloid schneidet,

Wenn ein Complex durch fünf seiner Linien gegeben ist, können wir für jeden gegebenen Punct die entsprechende Ebene, für jede gegebene Ebene den entsprechenden Punct construiren. Durch je vier gegebene gerade Linien ist ein Paar zugeordneter Polaren des Complexes bestimmt. Durch einen gegebenen Punct lässt sich eine einzige Linie legen, welche die beiden Polaren jedes Paares schneidet. Die so bestimmten geraden Linien liegen in der dem Puncte entsprechenden Ebene, welche durch zwei derselben vollkommen bestimmt ist. Eine gegebene Ebene schneiden die beiden Polaren jedes Paares in zwei Puncten. Die geraden Linien, welche die beiden Durchschnittspuncte jedes Paares verbinden, schneiden sich in dem der Ebene entsprechenden Puncte, welcher durch zwei dieser Linien bestimmt ist.

Die vorstehenden Betrachtungen schliessen sich an die allgemeine Theorie der Reciprocität. Die Gleichungen des Complexes (2) und (4) können betrachtet werden als besondere Fälle der allgemeinen Gleichung in Punct-Coordinaten x, y, z, x', y', z', und in Plan-Coordinaten t, u, v, t', u', v', durch welche die Reciprocität zweier Systeme überhaupt ausgedrückt wird. Wenn diese Gleichungen in Beziehung auf x, y, z und x', y', z' und in Beziehung auf t, u, v und t' u', v' symmetrisch sind, so entspricht demselben Punct und derselben Ebene in jedem der beiden Systeme bezüglich dieselbe Polar-Ebene und derselbe Pol in dem anderen Systeme. Das findet in dem Falle der Complex-Gleichungen Statt. Aber es kommt die Bedingung hinzu, dass der Pol einer gegebenen Ebene in dieser Ebene selbst liege. Durch diese neue Bedingung wird es nicht mehr möglich, Pole und Polar-Ebenen in gewohnter Weise vermittelst Flächen zweiter Ordnung und Classe zu construiren.*) Während im Allgemeinen die Polar-Ebene eines Punctes

---

so lässt sich durch jeden der beiden Durchschnittspuncte eine Linie der zweiten Erzeugung des Hyperboloids legen, welche sämmtliche vier Linien schneidet. Wenn die beiden Durchschnittspuncte imaginär sind, sind es auch die entsprechenden beiden geraden Linien.

*) Der analytische Grund hiervon liegt in dem Folgenden. Im allgemeinen Falle ist die Grund-Gleichung der Reciprocität (wir beschränken uns hier auf den Fall von Punct-Coordinaten und machen die Gleichungen durch Einführung von τ homogen):

$$(ax'+by'+cz'+d\tau')x+(bx'+b_1y'+c_1z'+d_1\tau')y+(cx'+c_1y'+c_2z'+d_2\tau')z$$
$$+(dx'+d_1y'+d_2z'+d_3\tau')\tau=0.$$

Schreiben wir in dem ersten Theile dieser Gleichung x', y', z', τ' für x, y, z, τ, so wird dieselbe eine homogene Function des zweiten Grades:

$$\Pi \equiv ax'^2+2bx'y'+2cx'z'+2dx'\tau'+b_1y'^2+2c_1y'z'+2d_1y'\tau'+c_2z'^2+2d_2z'\tau'+d_3\tau'^2$$

Durch Vermittelung dieser Function können wir die Reciprocitätsgleichung in der nachstehenden Weise schreiben:

$$\frac{d\Pi}{dx'}\cdot x+\frac{d\Pi}{dy'}\cdot y+\frac{d\Pi}{dz'}\cdot z+\frac{d\Pi}{d\tau'}\cdot\tau=0.$$

durch drei ihrer Puncte, der Pol einer Ebene durch drei in demselben sich schneidende Ebenen bestimmt ist, reichen hier zu dieser Bestimmung bezüglich zwei Puncte und zwei Ebenen hin. — Wenn eine gerade Linie, sich um einen festen Punct drehend, eine Kegelfläche n. Ordnung beschreibt, umhüllt die zugeordnete Polare eine Curve n. Classe in der dem festen Puncte entsprechenden, durch diesen Punct gehenden Ebene. Die n Linien, in welchen die dem Mittelpuncte des Kegels entsprechende Ebene von demselben geschnitten wird, sind zugleich die n Tangenten, welche von dem Mittelpuncte aus, der gegenseitig der Ebene entspricht, an die Curve in dieser Ebene sich legen lassen. Da nämlich diese Linien dem Complexe angehören, sind sie ihre eigenen zugeordneten Polaren.

30. Wir wenden uns zu dem rein analytischen Gange der Untersuchung zurück.

Die gewöhnlichen Coordinaten des Punctes, welcher der gegebenen Ebene (t', u', v') entspricht und in Plan-Coordinaten durch die Gleichung (10) dargestellt wird, sind:

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{D + Cu' - Bv'}{Dt' + Eu' + Fv'}, \\
y &= -\frac{E - Ct' + Av'}{Dt' + Eu' + Fv'}, \qquad (11) \\
z &= -\frac{F + Bt' - Au'}{Dt' + Eu' + Fv'}.
\end{aligned}
$$

Wenn die gegebene Ebene parallel mit sich selbst verschoben wird, so beschreibt der in derselben liegende, ihr entsprechende Punct einen geometrischen Ort. Unterscheiden wir durch x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des entsprechenden Punctes derjenigen unter den parallelen Ebenen, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, so ergibt sich, indem wir t', u', v' gleich ∞ setzen:

Wenn wir x', y', z', τ' als veränderlich betrachten, stellt die Gleichung:

$$\Pi = 0$$

eine Fläche zweiter Ordnung dar. In dem Falle, dass die Complex-Gleichung (2) an die Stelle der allgemeinen Reciprocitäts-Gleichung tritt, wird die Function Π identisch gleich Null.

Ich verweise, was die allgemeine Theorie der Reciprocität betrifft, auf mein „System der analytischen Geometrie des Raumes, 1846“ p. 10—14. — Die besondere Art von Reciprocität ist zuerst von Herrn Möbius im 10. Bande des Crelle'schen Journals hervorgehoben und später von L. J. Magnus in seiner „Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie des Raumes, 1837“, p. 139—145 behandelt worden.

$$x_0 = -\frac{Cu' - Bv'}{Dt' + Eu' + Fv'},$$
$$y_0 = -\frac{-Ct' + Av'}{Dt' + Eu' + Fv'}, \tag{12}$$
$$z_0 = -\frac{Bt' - Au'}{Dt' + Eu' + Fv'},$$

und hiernach:

$$x - x_0 = -\frac{D}{Dt' + Eu' + Fv'},$$
$$y - y_0 = -\frac{E}{Dt' + Eu' + Fv'}, \tag{13}$$
$$z - z_0 = -\frac{F}{Dt' + Eu' + Fv'}.$$

Wir ziehen hieraus:

$$(x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0) = D : E : F, \tag{14}$$

wonach der fragliche geometrische Ort die, durch die Doppel-Gleichung:

$$\frac{x - x^0}{D} = \frac{y - y_0}{E} = \frac{z - z_0}{F} \tag{15}$$

dargestellte, gerade Linie ist. Die Richtung dieser geraden Linie ist von der Richtung der parallelen Ebenen unabhängig. Wir nennen sie einen Durchmesser des Linien-Complexes ersten Grades, und sagen, die parallelen Ebenen seien dem Durchmesser zugeordnet, und gegenseitig, jeder der parallelen Ebenen sei der Durchmesser zugeordnet.

Alle Durchmesser eines Linien-Complexes ersten Grades sind einander parallel. Durch jeden Punct des Raumes geht ein solcher Durchmesser.

31. Unter den Durchmessern des Complexes gibt es einen einzigen, welcher auf den ihm zugeordneten Ebenen senkrecht steht, und den wir die Axe des Complexes nennen wollen. Soll die doppelte Gleichung (15) diese Axe darstellen, so kommt, um auszudrücken, dass sie auf den parallelen Ebenen (t', u', v') senkrecht steht:

$$t' : u' : v' = D : E : F,$$

wonach die Gleichungen (12) die folgenden Werthe für x_0, y_0, z_0 geben:

$$x_0 = \frac{BF - CE}{D^2 + E^2 + F^2},$$
$$y_0 = \frac{CD - AF}{D^2 + E^2 + F^2}, \tag{16}$$
$$z_0 = \frac{AE - BD}{D^2 + E^2 + F^2}.$$

diese Coordinatenwerthe werden insbesondere gleich Null, und die Axe geht durch den Anfangspunct, wenn:

$$A:B:C = D:E:F. \tag{17}$$

Die auf der Axe senkrechten Ebenen wollen wir Hauptschnitte des Complexes nennen. Der durch den Anfangspunct gehende Hauptschnitt hat zur Gleichung:

$$Dx + Ey + Fz = 0. \tag{18}$$

Wenn F verschwindet, sind die Durchmesser des Complexes, unter welchen sich auch die Axe desselben befindet, der Ebene XY parallel. Wenn F und C gleichzeitig verschwinden, werden x_0 und y_0 gleich Null. Dann schneidet die Axe des Complexes die Coordinaten-Axe OZ; für den Durchschnittspunct behält z_0 den obigen Werth. Für die Axe OZ sind die Coordinaten $(x - x')$, $(y - y')$, $(yz' - y'z)$, $(x'z - xz')$ gleich Null. Diese Axe ist also eine Linie des Complexes, wenn F und C verschwinden, und zwar eine solche, die von der Axe desselben geschnitten wird. Durch dieselbe geht der Hauptschnitt:

$$Dx + Ey = 0.$$

32. In gleicher Weise wollen wir die Gleichung (9) behandeln, welche diejenige Ebene darstellt, die alle Linien des Complexes enthält, welche durch einen gegebenen Punct (x', y', z') gehen, die, mit anderen Worten, diesem Puncte entspricht. Nennen wir die Coordinaten dieser Ebene t, u, v, so kommt:

$$\begin{aligned} t &= -\frac{A + Fy' - Ez'}{Ax' + By' + Cz'}, \\ u &= -\frac{B - Fx' + Dz'}{Ax' + By' + Cz'}, \\ v &= -\frac{C + Ex' - Dy'}{Ax' + By' + Cz'}. \end{aligned} \tag{19}$$

Wenn wir annehmen, dass der Punct (x', y', z') auf einer festen, durch den Anfangspunct gehenden geraden Linie fortrückt, so bleibt das Verhältniss der Coordinaten des Punctes $x' : y' : z'$ constant. Dem auf der festen Linie unendlich weit gerückten Puncte entspricht eine bestimmte Ebene, für welche, wenn wir zur Unterscheidung die Coordinaten derselben durch t_0, u_0, v^0 bezeichnen:

$$t_0 = -\frac{Fy' - Ez'}{Ax' + By' + Cz'},$$

$$u_0 = -\frac{-Fx' + Dz'}{Ax' + By' + Cz'}, \tag{20}$$
$$v_0 = -\frac{Ex' - Dy'}{Ax' + By' + Cz'}.$$

Es folgt hieraus:

$$t - t_0 = -\frac{A}{Ax' + By' + Cz'},$$
$$u - u_0 = -\frac{B}{Ax' + By' + Cz'}, \tag{21}$$
$$v - v_0 = -\frac{C}{Ax' + By' + Cz'},$$

wonach:

$$(t - t_0) : (u - u_0) : (v - v_0) = A : B : C.$$

Wenn wir t, u, v als veränderlich betrachten, so stellt die Doppel-Gleichung:

$$\frac{t - t_0}{A} = \frac{u - u_0}{B} = \frac{v - v_0}{C} \tag{22}$$

eine gerade Linie dar, die umhüllt wird von denjenigen Ebenen, welche den Puncten einer festen, durch den Anfangspunct gehenden Linie entsprechen. Da der Anfangspunct der Coordinaten bei der willkürlichen Annahme desselben in keiner besonderen Beziehung zum Complexe steht, ist in dem Vorstehenden der allgemeine Satz über conjugirte Polaren bewiesen (siehe Nr. 28).

Die Gleichungen (19) zeigen, dass, wenn der Punct (x', y', z') in der durch die Gleichung:

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{23}$$

dargestellten Ebene liegt, die Coordinaten t', u', v' der entsprechenden Ebene unendlich gross werden, die Ebene selbst also durch den Anfangspunct geht. Daraus folgt, dass die Ebene (23) diejenige ist, welche dem Anfangspuncte entspricht, und dass sie folglich der geometrische Ort für diejenigen Linien ist, welche solchen, die durch den Anfangspunct gehen, conjugirt sind. Linien, die in der Ebene liegen und zugleich durch den Anfangspunct gehen, sind ihre eigenen conjugirten und gehören also dem Complexe an.

Betrachten wir unter den durch den Anfangspunct gehenden geraden Linien insbesondere den durch diesen Punct gehenden Durchmesser des Complexes, so ist, in Folge der Doppel-Gleichung (15) für jeden Punct (x', y', z') desselben:

$$x' : y' : z' = D : E : F. \tag{24}$$

Dann folgt aus den Gleichungen (20):

$$t_0 = 0, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = 0,$$

und die Doppel-Gleichung (21), indem sie sich auf die folgende:

$$\frac{t}{A} = \frac{u}{B} = \frac{v}{C}$$

reducirt, gibt für die dem Durchmesser conjugirte Polare die in der Ebene (23) unendlich weit entfernt liegende Linie.

Bei der willkürlichen Annahme des Anfangspunctes des Coordinaten-Systems ist hiermit ausgesprochen, dass die einem beliebigen Durchmesser des Complexes zugeordnete Linie in der einem Puncte desselben entsprechenden Ebene unendlich weit liegt. Eine gerade Linie aber, welche in einer gegebenen Ebene unendlich weit gerückt ist, lässt, indem sie ihre Richtung verloren hat, keine nähere Bestimmung mehr zu und bleibt dieselbe, wenn die Ebene, welche sie enthält, parallel mit sich selbst verschobon wird. Eine unendlich weit entfernte gerade Linie ist immer einer gegebenen Ebene parallel, und nimmt, wenn diese Ebene um einen ihrer Puncte sich dreht, in unendlicher Entfernung alle möglichen Lagen an. In jeder solchen Lage entspricht ihr ein Durchmesser des Complexes. Alle unendlich weit entfernten Linien des Raumes bilden eine unendlich weit entfernt liegende Ebene, deren entsprechender Punct, weil er in ihr liegt, selbst nach gegebener Richtung unendlich weit entfernt ist. Eine Folge davon ist, dass die in diesem Puncte convergirenden Durchmesser unter einander parallel sind.

Ausgezeichnet unter denjenigen geraden Linien, welche durch den Anfangspunct gehen, ist endlich diejenige, welche auf der dem Anfangspunct entsprechenden Ebene:

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{25}$$

senkrecht steht, und also senkrecht steht auf jeder in dieser Ebene liegenden geraden Linie, d. h. auf jeder geraden Linie, die einer durch den Anfangspunct gehenden zugeordnet ist, insbesondere auf der ihr selbst zugeordneten. Die fragliche Linie ist dadurch charakterisirt, dass für jeden ihrer Puncte:

$$x' : y' : z' = A : B : C, \tag{26}$$

wonach t_0, u_0, v_0 die folgenden Werthe erhalten:

$$\begin{aligned} t_0 &= -\frac{BF - CE}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ u_0 &= -\frac{CD - AF}{A^2 + B^2 + C^2}, \end{aligned} \tag{27}$$

$$v_0 = -\frac{AE - BD}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Wenn wir diese Werthe in die Doppel-Gleichung (21) einsetzen, so stellt diese Gleichung in der Ebene (23) diejenige gerade Linie dar, welche der durch den Anfangspunct gehenden (26) zugeordnet ist.

Wenn durch den Anfangspunct der Coordinaten die Axe des Complexes geht, so ist sie es, die auf der ihr zugeordneten Linie senkrecht steht. Dann aber ist, nach (15):

$$x' : y' : z' = D : E : F,$$

mithin:

$$A : B : C = D : E : F$$

in Uebereinstimmung mit (17).

33. Aus den Gleichungen (10) ergeben sich:

$$\begin{aligned} Cu - Bv + D &= 0, \\ -Ct + Av + E &= 0, \\ Bt - Au + F &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

für die Gleichungen der drei Puncte, welche den Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY entsprechen, während:

$$Dt + Eu + Fv = 0 \tag{29}$$

denjenigen Punct darstellt, welcher der unendlich weit entfernten Ebene entspricht und selbst nach gegebener Richtung unendlich weit liegt.

Aus den Gleichungen (9) ergeben sich:

$$\begin{aligned} Fy - Ez + A &= 0, \\ -Fx + Dz + B &= 0, \\ Ex - Dy + C &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

für die Gleichungen der drei Ebenen, welche den Puncten entsprechen, die nach den Richtungen der drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ unendlich weit liegen, während, was bereits bemerkt (23):

$$Ax + By + Cz = 0$$

die dem Anfangspunct entsprechende Ebene darstellt.

34. Aus den drei Gleichungen (9) und den drei Gleichungen (10) erhalten wir übereinstimmend, wenn (x, y, z) ein Punct, (t, u, v) eine Ebene ist, die in Beziehung auf den Complex sich gegenseitig entsprechen, die Bedingungs-Gleichung:

$$(Ax + By + Cz)(Dt + Eu + Fv) + (AD + BE + CF) = 0. \tag{31}$$

Die vorstehende Gleichung schliesst als einen speciellen Fall ein, dass:

$$AD + BE + CF = 0. \tag{32}$$

Diesem speciellen Falle entspricht eine Particularisation des Complexes ersten Grades.

35. Die beiden allgemeinen Gleichungen:

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') + D(yz'-y'z) + E(x'z-xz') + F(xy'-x'y) = 0,$$
$$D(t-t') + E(u-u') + F(v-v') + A(uv'-u'v) + B(t'v-tv') + C(tu'-t'u) = 0,$$

welche in der doppelten Coordinaten-Bestimmung die Complexe ersten Grades darstellen, vereinfachen sich, wenn wir eine der drei rechtwinkligen Coordinaten-Axen mit der Axe des Complexes zusammenfallen lassen, wonach die beiden anderen in einem Hauptschnitte desselben liegen. Wählen wir für die mit der Axe des Complexes zusammenfallende Coordinaten-Axe, nach einander, OZ, OY, OX, so nehmen durch das bezügliche Verschwinden von:

$$A, B \text{ und } D, E,$$
$$A, C \text{ und } D, F,$$
$$B, C \text{ und } E, F$$

die vorstehenden beiden Gleichungen folgende Formen an:

$$\left.\begin{aligned} (xy'-x'y) + k(z-z') &= 0, \\ (x'z-xz') + k(y-y') &= 0, \\ (xy'-x'y) + k(x-x') &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} (v-v') + k(tu'-t'u) &= 0, \\ (u-u') + k(t'v-tv') &= 0, \\ (t-t') + k(uv'-u'v) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Unter dieser Form enthalten sie nur noch eine einzige Constante (k), und diese ist *dieselbe* in allen Gleichungen. Dieses ist von Vorne herein ersichtlich. Denn einmal ändert sich dieser Werth nicht, wenn wir von einer der beiden Gleichungen in derselben Zeile zu der andern übergehen. Es folgt dies aus der doppelten Bestimmung der geraden Linie vermittelst Punct- und Plan-Coordinaten, wonach z. B.

$$\frac{xy'-x'y}{z-z'} = \frac{v-v'}{tu'-t'u}.$$

Aber auch beim Uebergange von einer der drei unter einander stehenden Gleichungen des Complexes zu einer anderen bleibt der Werth der Constanten k unverändert. Die Ausdrücke:

$$\frac{xy'-x'y}{z-z'}, \quad \frac{x'z-xz'}{y-y'}, \quad \frac{yz'-y'z}{x-x'},$$

z. B. haben, wenn sie auf eine beliebige Linie des Complexes bezogen werden, eine absolute geometrische Bedeutung, vermittelt durch das jedesmalige Coordinaten-System, aber unabhängig von demselben. Beim Uebergange von dem einen Coordinaten-Systeme zum andern gehen die vorstehenden drei Ausdrücke durch die entsprechende Coordinaten-Vertauschung in einander über; aber ihre geometrische Bedeutung, was dieselbe immer sein mag, ändert sich nicht und folglich ändert sich auch k nicht.

Wir wollen die Grösse k, welche die Länge einer Linie darstellt, den Parameter des Complexes nennen. Der Complex ist, wenn wir von seiner Lage im Raume absehen, durch seinen Parameter vollkommen bestimmt.

36. Die allgemeine Gleichung eines Linien-Complexes des ersten Grades enthält in jeder der beiden Coordinaten-Bestimmungen fünf von einander unabhängige Constanten. Die Gleichungen (33) und (34) haben nur noch eine einzige Constante behalten. Die Anzahl der Constanten hat sich also um vier reducirt. Aber da wir zur Bestimmung eines neuen Coordinaten-Systems über sechs Constanten verfügen können, so ist das den letzten Gleichungen zu Grunde liegende Coordinaten-System nur unvollkommen bestimmt. Wir können noch über zwei Constanten der Lage verfügen, ohne dass diese Gleichungen irgendwie sich ändern. Wir werden dies in der folgenden Nummer bestätigt finden.

37. Die erste der drei Gleichungen (33)

$$(xy' - x'y) + k(z - z') = 0,$$

die wir willkürlich auswählen, ändert sich nicht, wenn der Anfangspunct der Coordinaten auf OZ, der Axe des Complexes, beliebig fortrückt. Dieselbe Gleichung bleibt auch dann ungeändert, wenn sich das Coordinaten-System beliebig um OZ dreht. Denn einerseits bleibt dann z und z' unverändert und andererseits behält auch $xy' - x'y$ seinen Werth. Dieser Ausdruck stellt nämlich die Projection auf XY der doppelten Fläche desjenigen Dreiecks dar, welches den Anfangspunct der Coordinaten und die beiden Puncte (x, y, z) und (x', y', z'), durch welche die Linien des Complexes bestimmt werden, zu seinen drei Winkelpuncten hat, und diese Projection ändert sich nicht, wenn der Complex um seine Axe OZ gedreht wird. Somit bleiben die Gleichungen (33), und folglich auch die Gleichungen (34) ungeändert dieselben, wie auch der Anfangspunct auf der Axe des Complexes fortrücken und das Coordinaten-System sich um diese Axe drehen mag. Oder, mit andern Worten:

Ein Linien-Complex ersten Grades bleibt unverändert, sowohl wenn derselbe parallel mit seiner Axe verschoben, als auch wenn er um dieselbe gedreht wird.

Alle Linien des Complexes in der ursprünglichen Lage kommen nach der Verschiebung und Drehung mit anderen Linien desselben zur Deckung.

38. Wir können durch Aenderung des Coordinaten-Systems die allgemeinen Complex-Gleichungen (2), (4) schrittweise in die sechs Gleichungen (33), (34) umformen. Da die einzige Constante, welche in diesen Gleichungen vorkommt, denselben Werth (k) hat, so handelt es sich bei diesen Umformungen nur um die Bestimmung von k, und es ist genügend, in einem einzigen Falle die Transformation durchzuführen. Wenn wir statt der Gleichungen (2), (4) der Kürze wegen die Gleichungen:

$$Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta = 0, \tag{7}$$

$$Dp + Eq + F - A\varkappa + B\pi + C\omega = 0 \tag{8}$$

zu Grunde legen, nehmen die Gleichungen (33) und (34) die folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \eta + k &= 0, \\ \varrho + ks &= 0, \\ -\sigma + kr &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (35) \qquad \left.\begin{aligned} \tau + \frac{1}{\varkappa} &= 0, \\ \pi + \frac{q}{\varkappa} &= 0, \\ -\varkappa + \frac{p}{\varkappa} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Wir beschränken uns darauf, aus der Gleichung (7) die erste der Gleichungen (35) abzuleiten.

Wenn wir das ursprüngliche Coordinaten-System, auf welches die Gleichung (7) bezogen ist, parallel mit sich selbst verschieben, und die Coordinaten des neuen Anfangspunctes x^0, y^0, z^0 sind, so geht unter Anwendung der Verwandlungsformeln (37) der 12. Nummer diese Gleichung über in die folgende:

$$\begin{aligned} (A + Fy^0 - Ez^0)\, r' + (B - Fx^0 + Dz^0)\, s' + (C + Ex^0 - Dy^0) \\ - D\sigma' + E\varrho' + F\eta' = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Wenn insbesondere:

$$\frac{x^0}{D} = \frac{y^0}{E} = \frac{z^0}{F},$$

so wird durch die Verschiebung des Coordinaten-Systems die Form der ursprünglichen Gleichung nicht geändert. Der Complex bleibt also derselbe, wenn er verschoben wird parallel mit der Richtung derjenigen geraden Linie, welche durch die letzte Gleichung dargestellt wird, wenn wir in ihr x^0, y^0, z^0 als veränderlich betrachten — d. h. parallel mit der Durchmesser-Richtung (vergl. (15)).

Wir erhalten für die Cosinus der Winkel, welche diese Durchmesser-Richtung mit den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ bildet:

$$\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}, \qquad \frac{E}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}, \qquad \frac{F}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}.$$

Wir wollen das ursprüngliche Coordinaten-System um OZ durch einen Winkel α in dem Nr. 13. festgestellten Sinne drehen. Dann verwandelt sich die allgemeine Gleichung (7) nach den Verwandlungsformeln (40) der 13. Nummer in die folgende:

$$\begin{aligned}(A\cos\alpha + B\sin\alpha)\, r' + (-A\sin\alpha + B\cos\alpha)\, s' + C \\ -(D\cos\alpha + E\sin\alpha)\,\sigma' + (-D\sin\alpha + E\cos\alpha)\,\varrho' + F\eta' = 0. \qquad (38)\end{aligned}$$

Wir wollen α so bestimmen, dass:

$$-D\sin\alpha + E\cos\alpha = 0, \qquad (39)$$

wonach

$$\cos^2\alpha = \frac{D^2}{D^2+E^2}. \qquad (40)$$

Dann können wir, unter Fortlassung der Accente, die Gleichung des Complexes in folgender Weise schreiben:

$$A'r + B's + C' - D's + F'\eta = 0, \qquad (41)$$

eine Gleichung, die, weil ϱ fehlt, den bezüglichen Complex als einen solchen charakterisirt, dessen Durchmesser der Ebene XZ parallel sind. Während C' und F' die früheren Werthe C und F behalten, kommt:

$$\begin{aligned} A' &= (AD + BE)\frac{\cos\alpha}{D}, \\ B' &= (-AE + BE)\frac{\cos\alpha}{D}, \qquad (42) \\ D' &= (D^2 + E^2)\frac{\cos\alpha}{D}, \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} A'D' &= AD + BE, \\ D'^2 &= D^2 + E^2. \end{aligned} \qquad (43)$$

Nach vollbrachter erster Drehung des Coordinatensystems wollen wir dasselbe um OY durch einen Winkel γ drehen, der, wie in der 13. Nr. von OZ nach OX gerechnet werden mag. Dann geben die Verwandlungsformeln (43) der 13. Nummer für die Gleichung des Complexes:

$$\begin{aligned}(A'\cos\gamma - C'\sin\gamma)\, r' + B's' + (A'\sin\gamma + C'\cos\gamma) \\ -(D'\cos\gamma - F'\sin\gamma)\,\sigma' + (-D'\sin\gamma + F'\cos\gamma)\,\eta' = 0. \qquad (44)\end{aligned}$$

Damit die neue Axe OZ mit dem durch den Anfangspunct laufenden Durchmesser des Complexes zusammenfalle, muss aus der Gleichung (44) σ' ausfallen. Dem entsprechend setzen wir:

$$D' \cos \gamma - F' \sin \gamma = 0, \tag{45}$$

wonach

$$\cos^2 \gamma = \frac{F'^2}{D'^2 + F'^2}, \tag{46}$$

Dann können wir, der Kürze wegen, die Complex-Gleichung (44) folgendermassen schreiben:

$$A'' r + B'' s + C'' + F'' \eta = 0. \tag{47}$$

Während B'' den früheren Werth B' behält, kommt:

$$\begin{aligned} A'' &= (A' F' - C' D') \frac{\cos \gamma}{F'}, \\ C'' &= (A' D' + C' F') \frac{\cos \gamma}{F'}, \\ -F'' &= (D'^2 + F'^2) \frac{\cos \gamma}{F'}, \end{aligned} \tag{48}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} \frac{C''}{F''} &= \frac{A' D' + C' F'}{D'^2 + F'^2} \\ &= \frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2}. \end{aligned} \tag{49}$$

Verschieben wir endlich die Coordinaten-Axen parallel mit sich selbst, wie in der 12. Nummer, so wird die Gleichung (47):

$$(A'' + F'' y^0) r' + (B'' - F'' x^0) s' + C'' + F'' \eta' = 0, \tag{50}$$

und reducirt sich, wenn wir

$$y^0 = -\frac{A''}{F''}, \qquad x^0 = \frac{B''}{F''} \tag{51}$$

nehmen, auf

$$\eta + k = 0, \tag{52}$$

indem wir der Kürze wegen:

$$k = \frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2} \tag{53}$$

setzen. Dann ist der Complex auf seine Axe als Coordinaten-Axe OZ bezogen, während die beiden anderen, auf einander und auf OZ senkrechten Coordinaten-Axen OX und OY nach übrigens beliebiger Richtung in einem beliebigen Puncte von OZ sich schneiden.

39. Wir erhalten unmittelbar die Deutung der Gleichungsform:

$$\eta + k = 0, \qquad (xy' - x'y) + k(z - z') = 0.$$

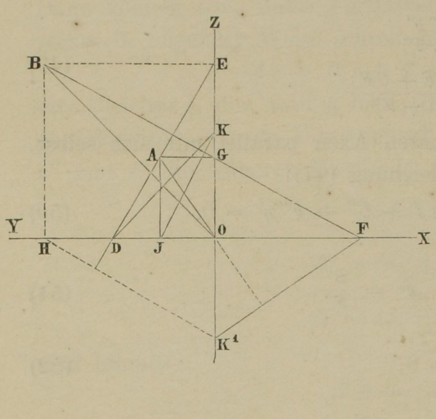
Denken wir uns eine Kraft von beliebiger Intensität, welche nach der Richtung irgend einer Linie des Complexes wirkt, so können wir den Ausdruck

$(xy' - x'y)$ als das doppelte Moment dieser Kraft in Beziehung auf die Axe des Complexes und $(z - z')$ als die Proportion der Kraft auf diese Axe betrachten. Also:

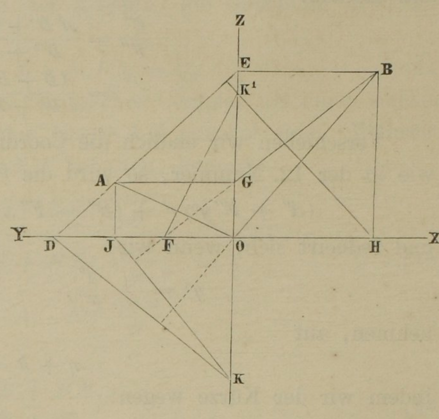
Wenn nach den Linien eines linearen Complexes beliebige Kräfte wirken, so ist das Verhältniss der Projection dieser Kräfte auf die Axe des Complexes zu dem Momente dieser Kraft in Beziehung auf dieselbe Axe constant und dem Parameter des Complexes gleich*).

Wenn wir insbesondere für die beiden Puncte (x, y, z) und (x', y', z'), durch welche die Linien des Complexes bestimmt werden, die beiden Puncte A und B nehmen, in welchen die Coordinaten-Ebenen von ihr geschnitten werden, so verschwinden die Werthe von x und y'. Dann kommt:

$$x'y = K(z - z'), \tag{54}$$



Figur 2.



Figur 3.

also mit Beziehung auf die Figur (Fig. 2, 3):**)

$$k = \frac{OH \cdot OJ}{EG}, \tag{55}$$

was eine unmittelbare Folge aus dem vorstehenden Satze ist, wie es auch

---

*) Dieser Satz wird, bei der späteren Ausführung des mechanischen Theils, in seinem natürlichen Zusammenhange mit anderen auftreten.

**) Es bietet für unsere Zwecke diejenige Projectionsweise einen besonderen Vortheil, in welcher die auf einander senkrechten drei Coordinaten-Axen OZ, OY, OX in derselben Ebene so dargestellt werden, dass etwa OZ und OX ihre natürliche Lage behalten, die positive Erstreckung von OY aber mit der negativen Erstreckung von OX zusammenfällt.

unmittelbar aus der Constantenbestimmung der geraden Linie folgt (vergleiche die 11. Nummer). Wir erhalten für jede beliebige Linie des Complexes:

$$-\eta = OJ\cdot\frac{OH}{EG} = -OJ\,\text{cotang}\,BFX = OJ\,\text{tang}\,OJK = OK = k. \quad (56)$$

$$-\eta = OH\cdot\frac{OJ}{EG} = OH\,\text{cotang}\,ADY = -OH\,\text{tang}\,OHK' = -OK' = k. \quad (57)$$

Es ist hierbei JK senkrecht auf GF und HK' senkrecht auf ED gezogen. In dem Falle der ersten Figur ist k positiv, in dem Falle der zweiten Figur k negativ.

Wir haben nach der eben angezogenen Nummer (11.), wenn wir uns der Axen-Coordinaten einer geraden Linie statt ihrer Strahlen-Coordinaten bedienen, und demnach die Gleichungen:

$$\omega = \frac{1}{k} = 0, \qquad (v - v') + k(tu' - t'u) = 0$$

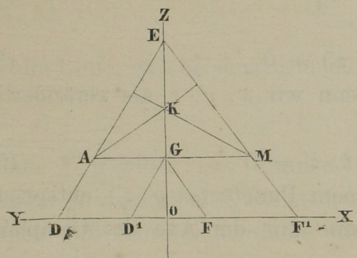
zu Grunde legen:

$$-\frac{1}{\omega} = \frac{OF\cdot OJ}{OG} = OF\cdot\text{tang}\,AOZ = -OF\cdot\text{tang}\,OFK' = -OK' = k, \quad (58)$$

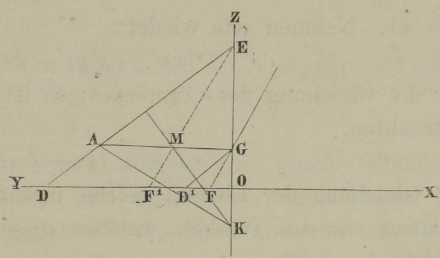
$$-\frac{1}{\omega} = -\frac{OD\cdot OH}{OE} = -OD\cdot\text{tang}\,BOZ = OD\cdot\text{tang}\,ODK = OK = k. \quad (59)$$

Es ist hierbei FK' senkrecht auf OA und DK senkrecht auf OB gezogen.

Auch die folgende Construction verdient noch angeführt zu werden (Figur 4, 5).



Figur 4.



Figur 5.

Wir können durch DE und FG, die Projectionen einer gegebenen geraden Linie des Complexes, in einziger Weise ein System zweier unter sich paralleler Ebenen legen: EDF' und $GD'F$, welche auf den Coordinaten-Axen OZ, OY, OX bezüglich in den Puncten E und G, D und D', F' und F einschneiden. Dann erhalten wir:

$$EG = \frac{\eta}{rs}, \qquad DD' = -\frac{\eta}{r}, \qquad F'F = -\frac{\eta}{s},$$

und hieraus:

$$\eta = \frac{DD' \cdot F'F}{EG}. \tag{60}$$

Um diesen Ausdruck zu construiren, legen wir durch G eine mit XY parallele Ebene, welche DE in A und $F'E$ in M schneidet. Dann ist:

$$-\frac{DD'.F'F}{EG} = \frac{AG.GM}{EG} = GK = k, \tag{61}$$

wenn K in dem Dreiecke AME derjenige Punct ist, in welchem die von den drei Winkelpuncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel sich schneiden. In der ersten der beiden Figuren ist k positiv, in der zweiten negativ.

40. Weil, wenn die Axe des Complexes gegeben ist und als eine der drei Coordinaten-Axen genommen wird, die Gleichung desselben nur eine einzige Constante enthält, so ist auch, wenn zugleich mit der Axe eine einzige gerade Linie des Complexes gegeben ist, dieser Complex vollkommen bestimmt. So wie in den letzten Entwickelungen die Constante k bestimmt worden ist, sobald eine Linie des Complexes gegeben war, so können auch umgekehrt, wenn k gegeben ist, alle Linien des Complexes construirt werden. Wir können die Linie, welche wir bestimmen wollen, von vorneherein dreien linearen Bedingungen unterwerfen, und begegnen so einer Reihe von Aufgaben, die ich hier nicht weiter berühre.

41. Nehmen wir wieder:

$$(xy' - x'y) + k(z - z') = 0 \tag{33}$$

für die Gleichung des Complexes; so ist, wenn wir x, y, z als veränderlich betrachten,

$$y' \cdot x - x' \cdot y + k \cdot z - k \cdot z' = 0 \tag{62}$$

die Gleichung der Ebene, welche irgend einem Puncte (x', y', z') entspricht. Nennen wir den Winkel, welchen diese Ebene mit der Axe des Complexes bildet, λ, so ist:

$$\sin^2 \lambda = \frac{k^2}{y'^2 + x'^2 + K^2}, \tag{63}$$

folglich:

$$y'^2 + x'^2 = \frac{k^2}{\operatorname{tang}^2 \lambda}. \tag{64}$$

Die Deutung der vorstehenden Gleichungen gibt die folgenden geometrischen Beziehungen.

Wenn irgend ein Punct P gegeben ist, so geht die demselben zugeordnete Ebene durch diejenige gerade Linie, welche durch den Punct senkrecht zur Axe des Complexes gezogen werden kann. Die zugeordneten Ebenen aller Puncte, welche gleichen Abstand von der Axe des Complexes haben, bilden mit dieser Axe gleiche Winkel. Während der Punct, um die Axe sich drehend, einen Kreis beschreibt, umhüllt die zugeordnete Ebene einen Rotationskegel, welcher denjenigen Punct zum Mittelpuncte hat, in welchem die Ebene des Kreises die Axe schneidet. Wenn die Puncte des Kreises, parallel mit der Axe fortrückend, Durchmesser beschreiben, so verschiebt sich der Kegel parallel mit sich selbst, so dass sein Mittelpunct immer auf der Axe bleibt. Solche Durchmesser, welche gleichen Abstand von der Axe des Complexes haben, bilden mit ihren zugeordneten Ebenen gleiche Winkel.

42. Wenn wir die von einem gegebenen Puncte P senkrecht nach der Axe gezogene gerade Linie als Axe OX nehmen, verschwinden die Coordinaten-Werthe z' und y'. Dann wird die Gleichung der zugeordneten Ebene:

$$x'y = kz. \tag{65}$$

Für die Puncte derjenigen geraden Linie, in welcher diese die Ebene YZ schneidet, ist:

$$\frac{y}{z} = \text{tang}\,\lambda = \frac{k}{x'}, \tag{66}$$

für die Linie, welche senkrecht darauf steht, und durch den Anfangspunct geht:

$$\frac{y}{z} = -\frac{x'}{k} \quad \text{oder} \quad \frac{z}{y} = -\frac{k}{x'}. \tag{67}$$

Wenn k gegeben ist, können wir hiernach sogleich die einem beliebigen Puncte P zugeordnete Ebene bestimmen, und umgekehrt, wenn irgend ein Punct und seine zugeordnete Ebene gegeben sind, den Parameter des Complexes, k.

Es sei in der oben gewählten Projectionsweise in dem auf OX angenommenen Puncte P ein Perpendikel PK auf diese Axe errichtet, und gleich k genommen. Dann ist diejenige Linie OL, welche senkrecht auf OK durch O gezogen ist, die Durchschnittslinie der dem Puncte P entsprechenden Ebene mit der Coordinaten-Ebene YZ. Damit ist die Ebene selbst gefunden. Ebenso ergibt sich, wenn die Ebene LOX und k gegeben sind, unmittelbar der dieser Ebene zugeordnete Punct P.

Wenn der Punct P sich von der Axe entfernt, nimmt tang λ im Verhältnisse der Entfernung ab.

Das Vorstehende erleichtert die Anschauung eines Complexes. Alle Linien, welche durch den beliebigen Punct P gehen und die Linie OL schneiden, gehören dem Complexe an, und thun es dann noch, wenn der Punct P und die Linie OL parallel mit der Axe verschoben werden, auch dann noch, wenn der Punct mit OL um die Axe sich dreht. Dem Kreise, welchen der Punct bei dieser Umdrehung beschreibt, entspricht ein Umdrehungs-Kegel, dessen Axe durch den Mittelpunct des Kreises geht und auf der Ebene desselben senkrecht steht: so, dass jede Linie des Complexes, welche durch einen Punct des Kreises geht, diesen Kegel berührt. Bei der Umkehrung dieses Satzes ist zu berücksichtigen, dass in Gemässheit der Gleichungen (63) (64) derselbe Kegel demselben Kreise in zwei verschiedenen Complexen entspricht, deren Parameter gleiche absolute Werthe, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben. Von den beiden Tangentialebenen, welche von einem Puncte des Kreises aus an den Kegel sich legen lassen, ist, wenn das Zeichen des Parameters k gegeben ist, nur diejenige zu nehmen, deren Durchschnittslinie mit der YZ-Ebene mit der Axe des Complexes einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente (66) gleich $+\frac{k}{x'}$ ist. Dass der dem Kreise entsprechende Kegel, wenn der Kreis parallel mit sich selbst nach der Axe OZ fortrückend einen Rotationscylinder beschreibt, in gleicher Weise parallel mit sich selbst fortrückt, wurde schon in der vorigen Nummer gesagt.

43. Die Linien des Raumes ordnen sich mit Bezug auf einen gegebenen Complex paarweise zusammen, so dass jede Linie ihre zugeordnete hat und die Beziehung irgend zweier zugeordneter Linien zu einander eine gegenseitige ist, welche durch den Complex in linearer Weise vermittelt wird. Wir wollen bei den Erörterungen hierüber wiederum die einfachste Gleichung des Complexes:

$$(xy'-x'y)+k(z-z')=0,$$

wobei die Axe des Complexes als Axe OZ genommen ist, zu Grunde legen.

Es seien (x', y', z') und (x'', y'', z'') irgend zwei Puncte im Raume, die gerade Linie, welche sie verbindet, eine von zwei conjugirten Polaren. Die Gleichungen dieser geraden Linie sind:

$$\begin{aligned}(z'-z'')x &= (x'-x'')z-(x'z''-x''z'),\\ (z'-z'')y &= (y'-y'')z-(y'z''-y''z'),\end{aligned}\tag{68}$$

und ihre fünf Strahlen-Coordinaten, die wir durch r_0, s_0, ϱ_0, σ_0, η_0 unterscheiden wollen:

$$r_0 = \frac{x'-x''}{z'-z''}, \qquad s_0 = \frac{y'-y''}{z'-z''},$$
$$\varrho_0 = -\frac{x'z''-x''z'}{z'-z''}, \qquad \sigma_0 = -\frac{y'z''-y''z'}{z'-z''}, \tag{69}$$
$$\eta_0 = \frac{x'y''-x''y'}{z'-z''}.$$

Die zweiten der beiden zugeordneten Polaren können wir als den Durchschnitt derjenigen beiden Ebenen construiren, welche den beiden Puncten (x', y', z') und (x'', y'', z''), die auf der ersten liegen, entsprechen und die die folgenden sind:

$$\begin{aligned} y'x - x'y + kz - kz' &= 0, \\ y''x - x''y + kz - kz'' &= 0. \end{aligned} \tag{70}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich nach successiver Elimination von y und x:

$$\begin{aligned} (x'y''-x''y')x + k[-(x'-x'')z + (x'z''-x''z')] &= 0, \\ (x'y''-x''y')y + k[-(y'-y'')z + (y'z''-y''z')] &= 0, \end{aligned} \tag{71}$$

und hiernach für die vier ersten der fünf Coordinaten der zweiten Linie, die wir zur Unterscheidung mit r^0, s^0, ϱ^0, σ^0, η^0, bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} r^0 &= k\cdot\frac{x'-x''}{x'y''-x''y'}, & s^0 &= k\cdot\frac{y'-y''}{x'y''-x''y'}, \\ \varrho^0 &= -k\cdot\frac{x'z''-x''z'}{x'y''-x''y'}, & \sigma^0 &= -k\cdot\frac{y'z''-y''z'}{x'y''-x''y'}. \end{aligned} \tag{72}$$

Aus der Zusammenstellung der vorstehenden vier Gleichungen mit den Gleichungen (69) ergibt sich eine Reihe von Relationen zwischen den fünf Coordinaten der beiden conjugirten Polaren:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_0}{r_0} &= \frac{\varrho^0}{r^0}, & \frac{\sigma_0}{s_0} &= \frac{\sigma^0}{s^0}, \\ \frac{r_0}{s_0} &= \frac{r^0}{s^0}, & \frac{\varrho_0}{\sigma_0} &= \frac{\varrho^0}{\sigma^0}, \end{aligned} \tag{73}$$

ferner:

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{\eta_0} &= \frac{r^0}{k}, & \frac{s_0}{\eta_0} &= \frac{s^0}{k}, \\ \frac{\varrho_0}{\eta_0} &= \frac{\varrho^0}{k}, & \frac{\sigma_0}{\eta_0} &= \frac{\sigma^0}{k}, \end{aligned} \tag{74}$$

und hieraus, indem wir berücksichtigen, dass

$$\eta^0 = r^0\sigma^0 - s^0\varrho^0,$$

folgt:

$$\eta_0 \eta^0 = k^2. \tag{75}$$

Wir können die sämmtlichen Relationen in die folgenden Gleichungen zusammenfassen:

$$\frac{r_0}{r^0} = \frac{s_0}{s^0} = \frac{\varrho_0}{\varrho^0} = \frac{\sigma_0}{\sigma^0} = \frac{\eta_0}{k} = \frac{k}{\eta^0}. \tag{76}$$

In diesen Gleichungen ist zugleich die reciproke Beziehung der beiden zugeordneten Linien zu einander ausgesprochen. Um von der zweiten der beiden conjugirten Polaren zu der ersten zurückzugehen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{r^0}{\eta^0} &= \frac{r_0}{k}, & \frac{s^0}{\eta^0} &= \frac{s_0}{k}, \\ \frac{\varrho^0}{\eta^0} &= \frac{\varrho_0}{k}, & \frac{\sigma^0}{\eta^0} &= \frac{\sigma_0}{k}. \end{aligned} \tag{77}$$

Wenn wir berücksichtigen, dass irgend zwei auf einander senkrechte Ebenen, welche durch die Axe OZ gehen, zu Coordinaten-Ebenen XZ, YZ genommen werden können, ohne dass die Gleichung des Complexes irgendwie sich ändert, so entnehmen wir aus den beiden ersten Gleichungen (73), dass jede durch die Axe des Complexes gelegte Ebene von je zwei zugeordneten Linien so geschnitten wird, dass die beiden Durchschnittspuncte auf einer geraden Linie liegen, welche auf der Axe senkrecht steht.

Das Quadrat des Abstandes desjenigen Punctes, in welchem die eine der beiden zugeordneten geraden Linien die durch irgend einen Werth von z bestimmte auf der Axe OZ senkrechte Ebene schneidet, ist:

$$(s_0 z + \sigma_0)^2 + (r_0 z + \varrho_0)^2.$$

Der Werth von z, für welchen dieser Abstand ein Minimum wird, ist:

$$z = -\frac{s_0 \sigma_0 + r_0 \varrho_0}{s_0^2 + \varrho_0^2}. \tag{78}$$

Wenn wir, wodurch die Gleichung des Complexes nicht geändert wird, die Ebene XY durch den kürzesten Abstand legen, so erhalten wir die Bedingungsgleichung:

$$s_0 \sigma_0 + r_0 \varrho_0 = 0, \tag{79}$$

und der kürzeste Abstand selbst wird:

$$\sigma_0^2 + \varrho_0^2.$$

Die Bedingungsgleichung (79) bringt für die andere conjugirte Polare die entsprechende:

$$s^0 \sigma^0 + r^0 \varrho^0 = 0 \tag{80}$$

mit sich.

Die kürzesten Abstände irgend zweier zugeordneter Polaren von der Axe des Complexes liegen in derselben auf dieser Axe senkrechten Ebene, und fallen in dieser Ebene in derselben geraden Linie zusammen.

Der letzte Theil dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Satze. Der directe Beweis liegt darin, dass, wenn wir die Axe OZ mit dem kürzesten Abstande der einen zugeordneten Linie zusammenfallen lassen, σ_0 verschwindet, was mit sich bringt, dass auch σ^0 verschwindet (74). In Folge der Gleichung (79) verschwindet alsdann r_0 und also, nach (74), auch r^0. Da die Gleichung (80) hiernach befriedigt wird, ist der Beweis geführt.

Die kürzesten Abstände selbst sind ϱ_0 und ϱ^0. Es ist:

$$\eta_0 = - s_0 \varrho_0 = \frac{k^2}{\eta^0} = - \frac{k^2}{s^0 \varrho^0}. \tag{81}$$

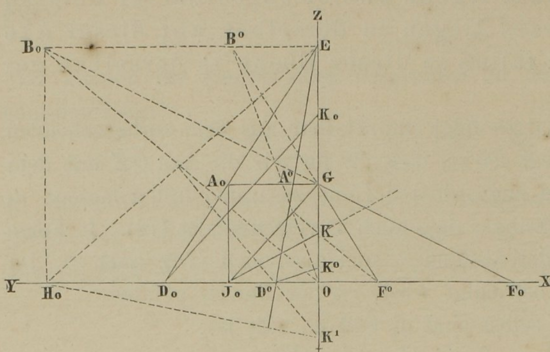
44. Es gibt unendlich viele Complexe, welche eine gegebene gerade Linie zur Axe haben. Jeder derselben ist durch eine seiner Linien vollkommen bestimmt. Jede von zwei conjugirten Linien bestimmt also einen Complex, der die Axe des gegebenen auch zu der seinigen hat, auf welchem sie selbst liegt. Der Parameter des gegebenen Complexes ist mittlere Proportionale zwischen den beiden Parametern der beiden neuen Complexe. Alle Linien eines desselben haben solche Linien zu conjugirten, die auf dem anderen liegen. Wir können die beiden Complexe zwei Polar-Complexe in Bezug auf den gegebenen nennen.

Das Vorstehende liefert in der von uns gebrauchten Darstellungsweise eine Reihe einfacher Constructionen. Wenn der Complex

$$\eta + k = 0$$

gegeben ist, können wir für jede gegebene gerade Linie die zugeordnete construiren, und, wenn die Axe des Complexes und ein System von zwei conjugirten Polaren gegeben ist, welches die Bedingungen erfüllt, die es nach der vorigen Nummer bei gegebener Complex-Axe zu befriedigen hat, den Complex vollständig bestimmen.

Es seien D_0E und F_0G die Projectionen einer gegebenen geraden Linie auf YZ und XZ (Fig. 6). Dann wissen wir, wenn OZ die Axe des Complexes ist, dass die entsprechenden Projectionen der conjugirten geraden Linie ebenfalls durch E und G gehen, und es bleibt, zur Bestimmung dieser geraden Linie, nur noch übrig, die beiden Puncte D^0 und F^0 zu suchen, in welchen ihre beiden Projectionen OY und OX schneiden. Wir wollen noch in analoger



Figur 6.

Weise, wie früher, die Puncte, in welchen die gegebene gerade Linie die Coordinaten-Ebenen YZ und XZ trifft, durch A_0 und B_0 und deren Projectionen auf OY, bezüglich OX durch J_0 und H_0 bezeichnen. Es sei endlich der Complex-Parameter $k = OK = -OK'$.

Man fälle in der Figur von K' ein Perpendikel auf H_0E, von K auf J_0G. Das erste Perpendikel schneidet OY in D^0, das zweite OX in F^0.

Man ziehe durch K und K' zwei gerade Linien nach J_0 und H_0 und fälle auf diese beiden Linien bezüglich von G und E zwei Perpendikel. Diese beiden Perpendikel schneiden OX und OY in F^0 und D^0.

Die beiden vorstehenden Constructionen knüpfen sich unmittelbar an die Gleichungen (74).

Es ist einerseits in Gemässheit der Construction [§ 1. (34)]:

$$\varrho^0 = k\frac{\varrho_0}{\eta_0} = \frac{-k}{\operatorname{tang} A_0OZ} = -OK \cdot \operatorname{tang} A_0OJ_0 = OK \operatorname{tang} OKF^0 = OF^0, \tag{82}$$

$$\sigma^0 = k\frac{\sigma_0}{\eta_0} = \frac{k}{\operatorname{tang} B_0OZ} = -OK' \cdot \operatorname{tang} B_0OH_0 = OK' \operatorname{tang} OK'D^0 = OD^0; \tag{83}$$

und andererseits [§ 1. (33)]:

$$\operatorname{tang} F^0GO = -r^0 = -k\frac{r_0}{\eta_0} = \frac{OK}{OJ_0} = \frac{OF^0}{OG}, \tag{84}$$

$$\operatorname{tang} D^0EO = -s^0 = -k\frac{s_0}{\eta_0} = \frac{OK'}{OH_0} = \frac{OD^0}{OE}. \tag{85}$$

Aus den vorstehenden Constructionen können wir andere sogleich ableiten, welche statt der Projectionen der zu bestimmenden geraden Linie unmittelbar die Puncte geben, in welchen sie die Coordinaten-Ebenen schneidet.

Ebenso erhalten wir, wenn die beiden zugeordneten Polaren gegeben sind, unmittelbar den Complex-Parameter $k = OK = -OK'$. Es sind K und K' die Kreuzungspuncte der Perpendikel, welche in den Dreiecken J_0GF^0

und $H_0 E D^0$ von den Winkelpuncten auf die gegenüber liegenden Seiten gefällt werden können.

Die Parameter der beiden Polarcomplexe, die wir durch k_0 und k^0 unterscheiden wollen, ergeben sich unmittelbar nach der früheren Nummer. Man fälle durch D_0 und D^0 Perpendikel auf OB_0 und OB^0, welche OZ in K_0 und K^0 schneiden. Dann ist (Nr. 39):

$$k_0 = OK_0; \qquad k^0 = OK^0, \tag{86}$$

wobei:

$$OK_0 \cdot OK^0 = \overline{OK}^2. \tag{87}$$

45. Wenn der Parameter des Complexes k verschwindet, so particularisirt sich der Complex. Die Gleichung desselben:

$$xy' - x'y = 0 \tag{88}$$

zeigt, dass alle Linien des Complexes seine Axe schneiden. Die allgemeine geometrische Definition eines Complexes ersten Grades, dass durch jeden Punct des Raumes unendlich viele Linien desselben gehen, die alle in derselben Ebene liegen, und dass, entsprechend, jede den Raum durchziehende Ebene unendlich viele Linien desselben enthält, welche in demselben Puncte sich schneiden, behält, auch nach der Particularisation, ihre Geltung. Nur schneiden sich die Ebenen, welche beliebigen Puncten zugeordnet sind, alle in der Axe des Complexes, so wie die Puncte, welche beliebigen Ebenen zugeordnet sind, alle auf dieser Axe liegen. Alle Durchmesser des Complexes fallen in seiner Axe zusammen. Jeder beliebigen geraden Linie ist die Axe zugeordnet.

Wenn wir den Complex durch die allgemeine Gleichung:

$$Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta = 0$$

darstellen, so erhalten wir, um auszudrücken, dass er in der fraglichen Weise sich particularisirt (vergl. auch Nr. 34), die Gleichung:

$$AD + BE + CF = 0^{*}). \tag{89}$$

---

*) Wir sehen hier von dem Falle ab, dass D, E und F gleichzeitig verschwinden und somit:

$$k \equiv \frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2}$$

unendlich gross wird. Der Grund dazu ist der folgende. Ein Complex mit unendlich gossem Parameter, für dessen Gleichung wir die folgende nehmen wollen:

$$(xy' - x'y) + k(z - z') = 0,$$

enthält nur diejenigen Linien, welche der Ebene XY parallel sind oder die unendlich weit liegen. Die vorstehende Gleichung wird nämlich nur befriedigt, wenn man entweder hat:

$$z - z' = 0,$$

oder

Zur Bestimmung derjenigen Linien des Complexes, welche durch irgend einen gegebenen Punct (x, y, z) gehen, können wir zwischen der allgemeinen Gleichung des Complexes und den Gleichungen:

$$x = rz + \varrho,$$
$$y = sz + \sigma,$$
$$ry - sx = \eta,$$

welche ausdrücken, dass der gegebene Punct auf der geraden Linie $(r, s, \varrho, \sigma, \eta)$ liegt, ϱ, σ und η eliminiren. In der resultirenden Gleichung:

$$(A + Fy - Ez)r + (B - Fx + Dz)s + (C + Ex - Dy) = 0 \qquad (90)$$

bestimmen r und s die Richtung der Ebene, welche dem Puncte (x, y, z) zugeordnet ist. Wenn die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} A + Fy - Ez &= 0, \\ B - Fx + Dz &= 0, \\ C + Ex - Dy &= 0 \end{aligned} \qquad (91)$$

gleichzeitig befriedigt werden, was die Bedingungsgleichung (89) voraussetzt, so wird die Richtung der zugeordneten Ebene unbestimmt. Dann ist der Punct (x, y, z) auf einer geraden Linie angenommen worden, deren drei Projectionen, wenn wir x, y, z als veränderlich betrachten, durch die drei letzten Gleichungen dargestellt werden. Diese gerade Linie ist die Axe des Complexes.

Ohne die beschränkende Bedingungsgleichung (89) stellen die vorstehenden drei Gleichungen einzeln genommen diejenigen Ebenen dar, welche Puncten entsprechen, die nach der Richtung der Coordinaten-Axen OX, OY, OZ unendlich weit liegen.

Auf ähnliche Weise stellen die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} D + Cu - Bv &= 0, \\ E - Ct + Av &= 0, \\ F + Bt - Au &= 0 \end{aligned} \qquad (92)$$

$$\frac{xy' - x'y}{z - z'} = \infty.$$

Für einen solchen Complex fällt also der Begriff der Axe als einer vollständig bestimmten geraden Linie fort, indem jede zu OZ parallele Linie auf diesen Namen mit gleichem Rechte Anspruch macht.

Denselben Complex können wir aber auch betrachten als einen Complex der besonderen Art, dessen Parameter gleich Null und dessen Axe in der Ebene XY unendlich weit liegt. Darin liegt die Berechtigung, sobald die Bedingung:

$$AD + BE + CF = 0$$

erfüllt ist, allgemein von einem Complexe besonderer Art, dessen Parameter gleich Null ist, zu sprechen (vergl. Gleichung (91) des Textes).

in den Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY die Puncte dar, welche diesen Ebenen zugeordnet sind. Diese drei Gleichungen bestehen gleichzeitig, wenn die Bedingungsgleichung (89) befriedigt wird. Dann liegen die drei Puncte in gerader Linie und sind diejenigen, in welchen die drei Coordinaten-Ebenen von der Axe des Complexes geschnitten werden.

Die Bedingungsgleichung (89) besteht ungeändert, wenn wir den Complex als einen Axen-Complex betrachten und dem entsprechend durch die Gleichung:

$$Dp + Eq + F - A\varkappa + B\pi + C\omega = 0$$

darstellen. Aber es ist zu bemerken, dass diese Gleichung in dem besonderen Falle, den wir betrachten, dann illusorisch wird, wenn wir, wie wir es in dem Falle von Strahlen-Coordinaten gethan haben, die Axe des Complexes zu einer der drei Coordinaten-Axen nehmen.

Wir können die Bedingungsgleichung (89) dadurch befriedigen, dass wir von den Constanten der allgemeinen Complex-Gleichung drei gleich Null setzen, und erhalten vier wesentlich verschiedene Fälle, wenn wir nach einander für die verschwindenden Constanten:

$$D,\ E,\ F, \qquad A,\ B,\ C, \qquad C,\ D,\ E, \qquad A,\ B,\ F,$$

wählen. Diesen vier Fällen entsprechen die folgenden Gleichungen in Strahlen- und Axen-Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned} Ar + Bs + C &= 0, \\ -A\varkappa + B\pi + C\omega &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

$$\left.\begin{aligned} -D\sigma + E\varrho + F\eta &= 0, \\ Dp + Eq + F &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

$$\left.\begin{aligned} Ar + Bs + F\eta &= 0, \\ -A\varkappa + B\pi + F &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

$$\left.\begin{aligned} C - D\sigma + E\varrho &= 0, \\ C\omega + Dp + Eq &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

In dem Falle der Gleichungen (93) liegt die Axe des Complexes, auf der alle Linien sich schneiden, unendlich weit; sie ist, wie alle Linien des Complexes, der durch die Gleichung:

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{97}$$

dargestellten Ebene parallel [vergl. die Note zu (89)].

In dem Falle der Gleichungen (94) steht die Axe des Complexes im Anfangspuncte auf der durch die Gleichung:

$$Dx + Ey + Fz = 0 \tag{98}$$

dargestellten Ebene senkrecht.

In dem Falle der Gleichungen (95) ist die Axe des Complexes der Coordinaten-Axe OZ parallel und schneidet die Ebene XY in einem Puncte, der in dieser Ebene durch die Gleichung:

$$Bt - Au + Fv = 0 \tag{99}$$

dargestellt wird.

In dem Falle der Gleichungen (96) endlich liegt die fragliche Axe in der Ebene XY und wird in dieser Ebene durch die Gleichung:

$$C + Ex - Dy = 0 \tag{100}$$

dargestellt.

46. Wir haben im Vorstehenden, indem wir die Axe eines Complexes zu einer der drei Coordinaten-Axen OZ, OY, OX genommen, die Gleichung desselben auf die folgenden einfachen Formen zurückgeführt:

$$\eta + k = 0, \qquad \varrho + ks = 0, \qquad \sigma - kr = 0,$$

in welchen k den Parameter des Complexes bedeutet. Der Anfangspunct kann hierbei auf der Axe des Complexes eine beliebige Lage haben und die beiden übrigen Coordinaten-Axen, unter der Bedingung, dass sie auf einander und auf der Axe des Complexes senkrecht bleiben, beliebig angenommen werden. Wir wollen nunmehr statt der Axe einen beliebigen der ihr parallelen Durchmesser des Complexes zur Axe OZ nehmen. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir die Ebene YZ durch den Durchmesser und die Axe legen. Den Abstand des Durchmessers von der Axe wollen wir durch y^0 bezeichnen. Dann wird, indem wir (Nr. 14)

$$\eta \text{ mit } \eta + y^0 \cdot r$$

vertauschen, derselbe Complex, welcher früher durch die Gleichung:

$$\eta + k = 0$$

dargestellt wurde, nunmehr durch die Gleichung:

$$\eta + y^0 r + k = 0 \tag{101}$$

dargestellt. Wenn wir hiernach, während die Axen OZ und OY unverändert bleiben, die Axe OX in der Ebene XZ so drehen, dass sie, nach der Drehung, mit OZ einen Winkel δ bildet, so geben die Verwandlungsformeln (42) der 13. Nummer, indem wir in denselben $\gamma' = \delta$, $\gamma = 0$ schreiben, für

$$r \text{ und } \eta$$

die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{r \sin \delta}{r \cos \delta + 1}, \qquad \frac{\eta \sin \delta}{r \cos \delta + 1}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung des Complexes ein, so kommt:

$$\eta \sin \delta + y^0 r \sin \delta + k(r \cos \delta + 1) = 0. \tag{102}$$

Es bedeutet δ die Neigung der Ebene XY gegen die Axe OZ, also gegen die Durchmesserrichtung des Complexes. Bestimmen wir die Neigung durch die Gleichung:

$$y^0 \sin \delta + k \cos \delta = 0, \tag{103}$$

so vereinfacht sich die Gleichung des Complexes in die folgende:

$$\eta + \frac{k}{\sin \delta} = 0, \tag{104}$$

oder

$$\eta + k' = 0, \tag{105}$$

indem wir

$$\frac{k}{\sin \delta} = k' \tag{106}$$

setzen. Wir haben die Constante k den Parameter des Complexes genannt, wir können sie auch den Parameter der Axe des Complexes nennen und in diesem Sinne überhaupt von dem Parameter eines beliebigen Durchmessers sprechen und k' insbesondere als den Parameter des als Axe OZ genommenen Durchmessers bezeichnen. Unter allen Durchmessern eines Complexes hat die Axe den kleinsten Parameter.

Indem wir den Complex durch die vorstehende Gleichung darstellen, beziehen wir ihn auf einen beliebigen seiner Durchmesser als Axe OZ und nehmen eine beliebige zugeordnete Ebene dieses Durchmessers zur Ebene XY. Die beiden Axen OX und OY in dieser Ebene sind auf einander senkrecht geblieben, und OY ist die Projection des Durchmessers auf die ihm zugeordnete Ebene.

Um also von dem beliebigen Durchmesser zur Axe zurückzugehen, brauchen wir blos diesen Durchmesser nach derjenigen Linie innerhalb der conjugirten Ebene, die auf dem Durchmesser senkrecht steht, zu verschieben, und zwar um ein Stück:

$$-y^0 = k' \cos \delta.$$

Die Gleichung des Complexes, die wir auch unter der Form:

$$(xy' - x'y) + k'(z - z') = 0 \tag{107}$$

schreiben können, bleibt unverändert dieselbe, wenn wir innerhalb der Ebene XY die rechtwinkligen Coordinaten-Axen beliebig drehen. Drehen wir sie aber von einander unabhängig so, dass sie nach der Drehung einen Winkel ε mit einander machen, so haben wir:

$$(xy' - x'y) \text{ und } \eta$$

mit

$$(xy' - x'y) \sin\varepsilon \text{ und } \eta \sin\varepsilon$$

zu vertauschen. Die Form der Complexgleichung bleibt also auch dann noch dieselbe:

$$\eta + k'' = 0, \tag{108}$$

wobei wir:

$$\frac{k'}{\sin\varepsilon} = \frac{k}{\sin\varepsilon \sin\delta} = k'' \tag{109}$$

setzen. Das ist die Gleichung des Complexes, wenn wir einen beliebigen Durchmesser, der mit seiner zugeordneten Ebene einen Winkel δ bildet, als Axe OZ nehmen und in der zugeordneten Ebene zwei beliebige Axen OX und OY wählen, die den Winkel ε einschliessen.

Wir erhalten die entsprechenden Gleichungsformen:

$$\varrho + \frac{ks}{\sin\delta \sin\varepsilon} = 0, \qquad \sigma - \frac{kr}{\sin\delta \sin\varepsilon} = 0, \tag{110}$$

wenn wir statt OZ nach einander OX und OY mit der Axe des Complexes zusammenfallen lassen.

47. Wir haben bisher in der Discussion der Complexe noch unerörtert gelassen, welchen Einfluss das Zeichen des Parameters auf die Natur derselben hat. Dem doppelten Zeichen dieses Werthes entsprechend erhalten wir zwei wesentlich verschiedene Arten von Complexen ersten Grades.

Wenn wir irgend eine gerade Linie, die wir unter den Linien eines Complexes auswählen, parallel mit der Axe des Complexes beliebig verschieben und um diese Axe beliebig drehen, so fällt sie in allen ihren neuen Lagen mit andern Linien des Complexes zusammen. Sie berührt hierbei fortwährend einen Rotationscylinder, dessen Axe die Axe des Complexes ist, und dessen Kreisschnitte die kürzeste Entfernung der geraden Linie von der Axe des Complexes zum Radius haben. Die den Cylinder berührende gerade Linie kann sich in Uebereinstimmung mit dem Gesagten um den Cylinder so bewegen, dass sie eine Curve umhüllt. Diese Curve ist dann eine auf dem Cylinder liegende Schraubenlinie. Wenn wir die Schraubenlinie um die Höhe eines Schraubenganges auf dem Cylinder verschieben, geben die Tangenten der Schraubenlinie in den verschiedenen Lagen dieser letzteren sämmtliche Complexlinien, welche den Cylinder berühren.

Es sei

$$\eta + k \equiv (r\sigma - s\varrho) + k = 0$$

die Gleichung des Complexes,

$$y^2 + x^2 = R^2 \qquad (111)$$

die Gleichung eines Rotationscylinders, der die Axe des Complexes zu der seinigen, und dessen kreisförmige Basis R zum Radius hat. Dann ist eine gerade Linie, deren drei Coordinaten:

$$r = 0, \qquad \varrho = R, \qquad \sigma = 0 \qquad (112)$$

sind, eine Tangente des Cylinders. Um auszudrücken, dass sie dem Complex angehört, erhalten wir:

$$Rs = k. \qquad (113)$$

Die gerade Linie liegt in einer der Coordinaten-Ebene YZ parallelen Ebene. Wenn ihre Projection auf YZ mit OZ einen Winkel λ bildet, der eine positive trigonometrische Tangente hat, so ist sie die Tangente einer dem Cylinder aufgeschriebenen, rechtsgewundenen Schraubenlinie. Dann ist, in Folge der letzten Gleichung:

$$Rs = R \operatorname{tang} \lambda = k, \qquad (114)$$

der Parameter des Complexes, k, positiv. Wenn umgekehrt tang λ negativ ist, ist die gerade Linie Tangente einer demselben Cylinder aufgeschriebenen linksgewundenen Schraubenlinie, und dann ist der Parameter des Complexes, k, negativ. Aus der letzten Gleichung folgt aber, wenn wir in ihr für R beliebige positive Werthe setzen, dass alle Linien eines Complexes Tangenten rechtsgewundener Schraubenlinien sind, wenn eine Linie desselben eine rechtsgewundene Schraubenlinie berührt, so wie, dass alle Linien eines Complexes Tangenten linksgewundener Schraubenlinien sind, wenn eine Linie desselben eine linksgewundene Schraubenlinie berührt. Wir haben also zwei wesentlich verschiedene Arten der Complexe ersten Grades, die wir als rechtsgewundene und linksgewundene Complexe unterscheiden wollen.

Wir können einen Complex ersten Grades auffassen als die Gesammtheit der Tangenten von Schraubenlinien, welche Rotationscylindern aufgeschrieben sind, deren Axen mit der Axe des Complexes zusammenfallen und deren Kreisschnitte Radien haben, welche von 0 bis ∞ wachsen. Für denselben Complex sind alle Schraubenlinien gleich gewunden.

Die Höhe der Schraubengänge, h, ist für jeden Cylinder durch die Gleichung:

$$h = \frac{2\pi R}{\operatorname{tang} \lambda} \tag{115}$$

bestimmt. Eliminiren wir λ zwischen dieser Gleichung und der vorhergehenden, so kommt:

$$h \cdot k = 2\pi R^2, \tag{116}$$

das heisst: für jeden Cylinder ist das Product der Höhe des Schraubenganges in den Parameter des Complexes der doppelten Fläche seiner Kreisschnitte gleich.

48. Wenn wir einen Complex durch die allgemeine Gleichung:

$$Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F = 0$$

darstellen, so haben wir für den Parameter desselben:

$$k = \frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2}.$$

Der Complex ist also ein rechtsgewundener, wenn:

$$AD + BE + CF > 0, \tag{117}$$

er ist ein linksgewundener, wenn:

$$AD + BE + CF < 0. \tag{118}$$

Dem Uebergangsfalle

$$AD + BE + CF = 0 \tag{119}$$

entspricht, dass die Axe des Complexes von allen Linien desselben geschnitten wird (vergl. Nr. 45.).

In zwei conjugirten Complexen sind die Werthe der Constanten k gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen. Die Schraubenlinien beider Complexe sind entgegengesetzt gewunden. Wir können von zwei conjugirten Complexen, um der Anschauung zu Hülfe zu kommen, jeden als das Spiegelbild des anderen betrachten, wobei wir uns die Ebene des Spiegels senkrecht auf der gemeinsamen Axe der Complexe denken.

In jedem Puncte des Raumes schneiden sich zwei den beiden conjugirten Complexen angehörige, demselben Cylinder aufgeschriebene, entgegengesetzt gewundene Schraubenlinien. Die Tangenten der beiden Schraubenlinien in diesem Puncte sind durch denselben gehende Linien der beiden Complexe. Der Winkel, den sie mit einander bilden, ist $2(\pi - \lambda)$. Es ist aber:

$$\operatorname{tang}(\pi - \lambda) = \frac{R}{k}, \tag{120}$$

mithin die Tangente des Winkels, unter welchem die Linien der beiden Complexe sich schneiden:

$$\operatorname{tang} 2(\pi-\lambda)=\frac{2Rk}{k^2-R^2} \tag{121}$$

Dieser Durchschnittswinkel nimmt mit dem Abstande des Punctes von der Axe des Complexes zu. Er geht, wenn

$$k = R,$$

durch einen rechten Winkel hindurch, und wird, wenn R dann ferner noch wächst, immer grösser, für $R = \infty$ der Gränze π sich annähernd.

Durch jeden gegebenen Punct geht nur eine einzige Schraubenlinie eines Complexes. Die Tangente dieser Schraubenlinie in dem gegebenen Puncte ist eine Linie des Complexes und liegt demnach in der diesem Puncte entsprechenden Ebene. Durch eine zweite, durch den gegebenen Punct gehende, dem Complex angehörige gerade Linie ist diese Ebene vollkommen bestimmt. Eine solche finden wir in der consecutiven Tangente derselben Schraubenlinie. Die Ebene, welche die beiden Tangenten enthält, ist die Osculations-Ebene der Schraubenlinie in dem gegebenen Puncte.

Die Osculations-Ebene einer Complex-Schraubenlinie in einem ihrer Puncte ist die diesem Puncte entsprechende Ebene.

Die Bestätigung dieses Satzes finden wir darin, dass beide Ebenen einerseits durch die Tangente der Schraubenlinie in dem gegebenen Puncte, andererseits durch dasjenige Perpendikel, welches von diesem Puncte aus auf die Axe gefällt werden kann, gehen.

Wenn ein Punct auf einer von zwei zugeordneten Polaren fortrückt, so entspricht demselben in jeder Lage eine Schraubenlinie und eine Osculations-Ebene derselben, die fortwährend durch die andere Polare geht. Ist die gerade Linie die Seite eines Cylinders, dem Schraubenlinien des Complexes aufgeschrieben sind, mit andern Worten, ein Durchmesser des Complexes, so werden die entsprechenden Osculations-Ebenen unter sich parallel und sind dem Durchmesser zugeordnete Ebenen, in welchen die dem Durchmesser zugeordnete Polare unendlich weit liegt.*)

49. Ich schliesse diese Untersuchungen über Complexe ersten Grades mit einigen allgemeinen Bemerkungen.

So wie wir aus geraden Linien Polygone bilden können, deren Winkel-

*) Wir haben die Constanten in der allgemeinen Gleichung eines Complexes und demnach auch k immer reell genommen. Wenn wir aber mehrere Complexe zusammenstellen, verlangt die Allgemeinheit der Untersuchung, dass wir auch Complexe mit imaginären Constanten berücksichtigen.

puncte in einer gegebenen Ebene liegen, und körperliche Ecken, deren Ebenen durch einen gegebenen Punct gehen, so können wir auch aus Linien eines Complexes ersten Grades gleichzeitig räumliche Polygone und Polyeder bilden, welche sich entsprechen. Die Seiten des räumlichen Polygons sind Kanten des Polyeders. In den Winkelpuncten des Polygons schneiden sich zwei auf einander folgende Seiten desselben, die Ebene, welche durch zwei solche Seiten geht, ist die in dem Complexe dem Winkelpuncte entsprechende Ebene und eine Fläche des Polyeders. Die gegenseitigen Beziehungen zwischen Polygon und Polyeder sind die bereits in der Note zur 29. Nummer besprochenen.

Wir wollen ein räumliches Polygon, dessen Seiten Linien des Complexes sind, ein Complex-Polygon, das entsprechende Polyeder ein Complex-Polyeder nennen.

Um ein Complex-Polygon zu beschreiben, nehmen wir eine Linie des Complexes und auf ihr einen ersten Winkelpunct des Polygons an. Wie in der Ebene durch einen Punct unendlich viele Linien der Ebene gehen, so gehen auch im Complexe durch einen Punct unendlich viele Linien des Complexes. Auf einer durch den ersten Winkelpunct des Polygons gehenden Complex-Linie nehmen wir den zweiten Winkelpunct, auf einer durch diesen gehendenden Complexlinie den dritten an und so fort. Um das Polygon zu schliessen, legen wir durch den zuletzt bestimmten Punct die diesem Puncte in dem Complexe entsprechende Ebene. Dieselbe schneidet die erste Complex-Linie in einem Puncte. Die Linie, welche beide Puncte verbindet, ist eine Linie des Complexes und schliesst das Polygon. Ein Complex-Polyeder können wir aus dem entsprechenden Complex-Polygon ableiten, oder auch, in analoger Weise wie dieses, direct construiren. Zu diesem Ende betrachten wir eine gegebene Complex-Linie als Kante des Polyeders und legen durch diese Kante die erste Fläche desselben, durch eine beliebige Complex-Linie in dieser Ebene legen wir die zweite Fläche, durch eine beliebige Complex-Linie in der letzteren die dritte, und so fort. In der zuletzt bestimmten Polyederfläche bestimmen wir den, im Complexe, derselben entsprechenden Punct. Diejenige Ebene, welche durch diesen Punct und die erste Complex-Linie geht, schliesst das Polyeder.

Die Seiten eines Complex-Polygons sind gleich orientirt — das heisst, sie sind Tangenten gleichgewundener Schraubenlinien und das hat eine characteristische Aufeinanderfolge der Eckpuncte desselben zur Folge. Die

Flächen eines Complex-Polyeders, durch zwei orientirte Kanten desselben gehend, sind in gleichem Sinne gedreht. Polygone und Polyeder können wir, je nachdem sie rechts- oder linksgewundenen Complexen angehören, für sich selbst als rechts- oder linksgewundene bezeichnen. Das Spiegelbild — wir bedienen uns der früheren Anschauungsweise und nehmen wiederum die spiegelnde Fläche auf der Complex-Axe senkrecht — eines Complex-Polygons oder Complex-Polyeders gehört dem conjugirten Complexe an und ist entgegengesetzt gewunden.

50. Durch eine in der Ebene continuirlich sich bewegende gerade Linie wird eine ebene Curve umhüllt, durch eine gerade Linie, welche um einen ihrer Puncte sich dreht, eine Kegelfläche beschrieben. Durch eine continuirlich sich bewegende gerade Linie, die in allen ihren Lagen einem gegebenen Complexe angehört, wird eine räumliche Curve umhüllt, während von derselben gleichzeitig eine Abwickelungsfläche beschrieben wird. Jene bezeichnen wir als eine Curve, diese als eine Abwicklungsfläche des Complexes ersten Grades.

Wir können jeder gegebenen Fläche unendlich viele Curven in einem gegebenen Complexe aufschreiben. Durch jeden gegebenen Punct der gegebenen Fläche geht eine solche Complex-Curve. Die Tangente der Complex-Curve in diesem Puncte ist diejenige gerade Linie, in welcher die in dem Complexe dem gegebenen Puncte entsprechende Ebene und die Tangential-Ebene der Fläche in diesem Puncte sich schneiden.*)

Es gibt, um in einem Worte Alles zusammenzufassen, wie es eine Geometrie der Ebene gibt, auch eine Geometrie der Complexe ersten Grades.

---

*) Um die allgemeinen Betrachtungen des Textes durch ein einfaches Beispiel zu veranschaulichen, wollen wir als Oberfläche eine Kugel nehmen, deren Mittelpunct in die Axe des Complexes fällt, und deren Radius R ein beliebiger ist. Die dieser Kugel aufgeschriebenen Complex-Curven bilden ein System von Loxodromen, welche die Meridiane der Kugel unter einem Winkel λ schneiden, der durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{k}{R}$$

gegeben ist.