Temperatur der erhitzten Luft ist, noch im Verhältniss von 1 zu $(1 + \cdot 004\, T)$ vergrössert werden.

Benützt man einen Regulator von unveränderlichem Volumen (§. 488), so soll dieser 40 bis 60 Mal so gross sein als das Luftvolumen, welches derselbe in jeder Secunde aufzunehmen und abzugeben hat. (Ueber die Summe der Querschnitte sämmtlicher Düsenöffnungen findet man u. A. eine Tabelle in Redtenbacher's: „Resultate für den Maschinenbau", S. 309.)

Die Geschwindigkeit des Kolbens beträgt im Durchschnitt bei kleinen hölzernen Kastengebläsen 2·4 bis 3·2 und bei grösseren eisernen Cylindergebläsen 2·8 bis 3·8 Fuss (per Secunde).

Den Kolbenschub nimmt man bei Cylindergebläsen gleich dem Durchmesser des Cylinders und bei Kastengebläsen gleich $\frac{3}{4}$ von der Weite des Kastens.

Was den Luftbedarf eines Hochofens betrifft, so kann man diesen nach dem grössten horizontalen Durchmesser oder Querschnitt des Ofens bestimmen, und zwar beträgt diese Luftmenge im Durchschnitt für jeden Quadratfuss dieses grössten Querschnittes per Minute:

für Holzkohlenöfen 32 bis 40 und
„ Coaksöfen ..... 20 Kubikfuss.

Endlich beträgt die Pressung der Luft in der Windleitung in Quecksilberhöhen ausgedrückt sofort:

für leichte Kohlen aus Tannenholz	$\frac{3}{4}$	bis	1	Zoll,
„ Kohlen aus harzigem Holz	1	„	2	„
„ Kohlen aus hartem Holz	$1\frac{1}{2}$	„	$2\frac{1}{3}$	„
„ leichte Coaks	3	„	5	„
„ dichte Coaks	5	„	7	„

Von der geradlinigen Bewegung geworfener oder fallender Körper in widerstehenden Mitteln.

(§. 492.)

336. Sei der fallende Körper in Beziehung auf eine verticale Achse symmetrisch, so, dass dessen Schwerpunct oder Mittelpunct der Masse in dieser Achse liegt; in diesem Falle wird sowohl die Schwerkraft g in der einen, so wie die Resultirende R aus den partiellen Widerständen auf diesen Körper in der entgegengesetzten Richtung nach dieser Achse wirken.

Ist M die Masse des Körpers, also Mg dessen Gewicht (oder die durch die Schwere erzeugte bewegende Kraft), so ist $Mg - R$ die nach der Richtung der Bewegung wirksame bewegende, folglich (§. 186):

$$G = \frac{Mg - R}{M} = g - \frac{R}{M}$$

die beschleunigende Kraft.

Den hierüber angestellten Versuchen zufolge ist bei einer weder zu schnellen noch zu langsamen Bewegung der Widerstand R der Dichte des Mittels und dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, so, dass wenn ϱ die Dichte des Mittels, v die Geschwindigkeit des fallenden Körpers und a einen constanten Erfahrungscoefficienten bezeichnet, sofort:

$$R = a\varrho v^2$$

gesetzt werden kann.

Wird dieser Werth für R in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält man auch:

$$G = g - \frac{a\varrho v^2}{M} \ldots (1).$$

337. Es sei nun z. B., um einen speciellen Fall zu behandeln, der fallende Körper eine Kugel vom Halbmesser r und der Dichte δ, so ist ihre Masse $M = \frac{4}{3} r^3 \pi \delta$, folglich die der Schwere entgegenwirkende verzögernde Kraft des Mittels:

$$\frac{R}{M} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\varrho v^2}{r^3 \pi \delta} \ldots (2).$$

Da ferner, wie die Versuche zeigen, der Widerstand des Mittels (Luft, Wasser etc.) der Kugeloberfläche, also dem Quadrate des Halbmessers proportional ist, so kann man den obigen unbestimmten Coefficienten $a = br^2$ setzen, wobei b abermals eine noch näher zu bestimmende Constante bezeichnet. Dadurch erhält die vorige Relation (2) die Form:

$$\frac{R}{M} = \frac{3b}{4\pi} \cdot \frac{\varrho v^2}{r\delta},$$

oder wenn man $\frac{3b}{4\pi} = k$ setzt, auch:

$$\frac{R}{M} = \frac{k\varrho v^2}{r\delta} \ldots (2')$$

und da für dieselbe Kugel und dasselbe Mittel k, r, ϱ, δ constante Grössen sind, so kann man für den vorliegenden Fall passend

$$\frac{k\varrho}{r\delta} = \frac{g}{c^2} \ldots (m)$$

setzen, wodurch endlich

$$\frac{R}{M} = \frac{gv^2}{c^2} \ldots (3)$$

wird.

Um die Bedeutung der hier eingeführten Grösse c kennen zu lernen (die für jeden Werth von g constant ist), hat man für $c = v$ sofort $R = Mg$, d. h. c ist nichts anderes als jene Geschwindigkeit der fallenden Kugel, bei welcher der Widerstand des Mittels genau dem Gewichte der Kugel gleich ist; weil aber dann die Bewegung gleichförmig wird, so ist c zugleich auch die grösste Geschwindigkeit, welche die Kugel erreichen kann, oder es ist, mit anderen Worten, c die Grenze, welcher sich die Geschwindigkeit v ohne Ende nähert (wie sich weiter unten noch deutlicher ergeben wird).

338. Da man sich das Gewicht der Masse M im Schwerpunct oder Mittelpunct der Kugel vereint denken kann, so ist die Bewegung der Kugel durch jene ihres Mittelpunctes, mithin durch die Gleichung:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{R}{M} = g - \frac{gv^2}{c^2} \ldots (4)$$

bestimmt (Nr. **124**, Relat. (1)).

Aus dieser Gleichung folgt: $\frac{2g\,dt}{c} = \frac{dv}{c+v} + \frac{dv}{c-v}$ und wenn man integrirt:

$$\frac{2gt}{c} = logn.\,(c+v) - logn.\,(c-v) + C.$$

Bestimmt man die Constante C der Integration so, dass die Zeit t vom Beginne der Bewegung an gezählt, also für $t = 0$ auch $v = 0$ wird, so wird auch $C = 0$ und daher:

$$t = \frac{c}{2g}\,logn.\left(\frac{c+v}{c-v}\right) \ldots (5).$$

Aus dieser Gleichung erhält man ferner ohne Schwierigkeit, wenn man Kürze halber den Quotienten $\frac{gt}{c} = \alpha$ setzt:

$$v = \frac{c(e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} \ldots (6),$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ($= 2{\cdot}7182818$) ist.

Anmerkung. Aus der vorigen Relation (5) ergibt sich nun deutlich, dass für $v = c$ die Zeit $t = \infty$, dagegen für $v > c$ imaginär wird; es ist also für jeden endlichen Werth von t immer $v < c$, oder c der Grenzwerth für v. In der Wirklichkeit kann indess, wenn nur t schon hinreichend gross wird, die Bewegung als eine gleichförmige erscheinen.

339. Zur Bestimmung des Fallraumes s hat man, wegen $v = \frac{ds}{dt}$

(Nr. **120**), wenn man für v den vorigen Werth aus (6) und dabei statt $\alpha = \frac{g}{c} t$ Kürze halber $\alpha = \beta t$ setzt:

$$ds = \frac{c(e^{\beta t} - e^{-\beta t})}{(e^{\beta t} + e^{-\beta t})} dt.$$

Aus dieser Differentialgleichung folgt durch Integration, wenn man die unbestimmte Constante so bestimmt, dass für $t = 0$ auch $s = 0$ wird, wodurch diese den Werth $-\frac{c}{\beta}\, logn.\, 2$ erhält, sofort:

$$s = \frac{c}{\beta}\, logn.\, \tfrac{1}{2}(e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \ldots (7),$$

wobei, wie bemerkt, $\beta = \frac{g}{c}$ ist.

340. Um endlich eine Relation zwischen s und v zu erhalten, hat man allgemein (Nr. **124**, Gleich. (1)) für die beschleunigende Kraft G den Ausdruck $G = \frac{dv}{dt}$ oder, wegen $dt = \frac{ds}{v}$, auch $G = \frac{v\,dv}{ds}$; da nun hier (Relation (4)) $G = g - \frac{gv^2}{c^2}$ ist, so folgt durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke:

$$ds = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{2v\,dv}{c^2 - v^2}$$

und daraus, wenn man integrirt und die Constante der Bedingung gemäss bestimmt, dass für $v = 0$ auch $s = 0$ ist (wofür $C = \frac{c^2}{2g}\, logn.\, c^2$ wird) sofort:

$$s = \frac{c^2}{2g}\, logn. \left(\frac{c^2}{c^2 - v^2}\right) \ldots (8).$$

Endlich folgt auch umgekehrt aus dieser Gleichung ganz einfach die Relation:

$$v = c\sqrt{1 - e^{-\gamma s}} \ldots (9),$$

wenn man nämlich der Kürze wegen $\frac{2g}{c^2} = \gamma$ setzt, und wobei wieder e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Anmerkung. Obschon streng genommen nur für $t = \infty$ die Grösse $e^{-\alpha} = e^{-\beta t} = 0$, also (Relation (6)) $v = c$ und daher $G = g - \frac{gv^2}{c^2} = 0$, d. i. die Bewegung in eine gleichförmige übergeht, so nähert sich doch, wenn t hinreichend gross wird, die Geschwindigkeit v immer mehr der Grenze c und die Beschleunigung jener Null, d. h. je länger die Bewegung dauert, desto gleichförmiger wird dieselbe.

Auch lässt sich noch bemerken, dass wegen $c^2 = \frac{g r \delta}{k \varrho}$ (Nr. **337**, Relat. (m)) das Quadrat der Geschwindigkeit jener gleichförmigen Bewegung, welcher sich die variable der fallenden Kugel ohne Ende nähert, dem Halbmesser und der Dichte der Kugel direct und der Dichte des widerstehenden Mittels umgekehrt proportional ist; Folgerungen, welche durch directe Versuche vollkommen bestätigt werden.

Zur Uebung suche man die Werthe für v, s u. s. w. für den besondern oder gewöhnlich behandelten Fall, in welchem der Widerstand $R = 0$ (also $c = \infty$) ist, die Kugel also im leeren Raume fällt, aus den obigen Formeln (6), (7) etc. abzuleiten.

341. Was nun den Coefficienten k betrifft, so ist für die Kugel, wenn ihre Bewegung in der atmosphärischen Luft Statt findet, nach Duchemin (§. 494) $R = \frac{2}{5} k' A q' \frac{v^2}{2g}$, wobei nach seinen Versuchen $k' = 1{\cdot}2824$, $A = r^2 \pi$ die grösste Kreisfläche der Kugel, q' das Gewicht der kubischen Einheit Luft, also, wenn ϱ ihre Dichte ist, sofort (wegen $P = Mg = VDg$, §. 38) $q' = 1 \,.\, \varrho g$ und v die Geschwindigkeit der fallenden Kugel in irgend einem Augenblick bezeichnet, derart, dass wenn man diese Werthe substituirt und reducirt, sonach:

$$R = {\cdot}00826\, r^2 \pi \varrho g v^2$$

ist. (Vergleiche §. 494, Gleich. (2).)

Nun ist aber auch (Nr. **337**, Relat. (2')):

$$R = \frac{k \varrho v^2}{r \delta} M = \frac{k \varrho v^2}{r \delta} \,.\, \tfrac{4}{3} r^3 \pi \delta = \tfrac{4}{3} k \pi r^2 \varrho v^2,$$

folglich, wenn man diese beiden Ausdrücke einander gleich setzt und aus der entstehenden Gleichung k bestimmt, sofort:

$$k = \tfrac{3}{4} g \times {\cdot}00826 = {\cdot}19223,$$

wobei $g = 31{\cdot}03$ gesetzt wurde.

Beispiel 1. So ist für das in §. 494 behandelte Beispiel der in der atmosphärischen Luft fallenden gusseisernen Kugel, in welchem $r = {\cdot}15417$ (Fuss) und $\delta = 7{\cdot}2$ gesetzt wurde, wenn man zuerst oder vorläufig die Dichte der ruhigen Luft im gewöhnlichen Zustande in Rechnung bringt und dafür (auf die Dichte des Wassers bezogen) $\varrho = \frac{1}{850}$ setzt, sofort nach Relation (m) in Nr. **337** die grösste Geschwindigkeit oder vielmehr ihr Grenzwerth:

$$c = \sqrt{\frac{g \delta r}{k \varrho}} = \sqrt{\frac{31{\cdot}03 \times 7{\cdot}2 \times {\cdot}15417 \times 850}{{\cdot}19223}} = 390{\cdot}27,$$

d. i. nahe 390 Fuss. (Diese Zahl soll auch in §. 494 statt jener 370 stehen.)

Nimmt man jetzt, um den genauern Werth von c zu erhalten, nach der Bemerkung in §. 492 statt dem vorigen Werth von $\varrho = \frac{1}{850}$ jenen $\varrho' = \varrho\left(1 + \frac{390}{1317}\right) = \frac{1\cdot296128}{850}$, so wird:

$$c = \sqrt{\frac{31\cdot03 \times 7\cdot2 \times \cdot15417 \times 850}{\cdot19223 \times 1\cdot296128}} = 342\cdot8;$$

es ist also nahe genug 343 Fuss die Grenze, welcher sich die Geschwindigkeit der fallenden Kugel ohne Ende nähert.

Beispiel 2. Es soll für die nämliche Kugel sowohl die Fallzeit wie auch die Endgeschwindigkeit bestimmt werden, wenn diese von der Höhe des St. Stephansthurmes, dessen Höhe zu 72 Klafter angenommen, frei herabfällt.

Zur Bestimmung der Endgeschwindigkeit v hat man nach der Relat. (9) (Nr. **340**), wegen $\gamma = \frac{2g}{c^2}$, $g = 31\cdot03$, $c = 342\cdot8$, $s = 6 \times 72 = 432$ und $e = 2\cdot7182818$ zuerst $e^{-\frac{2gs}{c^2}} = \cdot79601$ und damit:

$$v = 342\cdot8\sqrt{1 - \cdot79601} = 342\cdot8\sqrt{\cdot20399},$$

d. i.

$$v = 154\cdot826 \text{ Fuss.}$$

Ferner ist nach Relat. (5) (Nr. **338**) wegen $c + v = 342\cdot8 + 154\cdot826 = 497\cdot626$ und $c - v = 342\cdot8 - 154\cdot826 = 187\cdot974$, so wie $logn.\ X = 2\cdot3026\ logv.\ X$, sofort:

$$t = \frac{342\cdot8}{62\cdot06} \times 2\cdot3026\ logv.\left(\frac{497\cdot626}{187\cdot974}\right) = 5\cdot3776,$$

also nahe genug $t = 5\cdot38$ Secunden.

Im luftleeren Raume würde diese Kugel die Endgeschwindigkeit $v' = 163\cdot73$ Fuss erlangt, und dazu die Zeit $t' = 5\cdot2767$ Secunden gebraucht haben; es ist also $v' - v = 8\cdot9$ Fuss und $t - t' = \frac{1}{10}$ Secunde.

Beispiel 3. In welcher Zeit erlangt eine hölzerne Kugel von der vorigen Grösse (3·7 Zoll Durchmesser) und dem specifischen Gewicht $= \cdot9$ unter den vorigen Bedingungen (d. i. bei demselben Barometer- und Thermometerstand und demselben Grad der Feuchtigkeit) beim freien Falle eine Geschwindigkeit von 130 Fuss und durch welche Höhe muss die Kugel dabei fallen?

Da diese Kugel 8 Mal leichter als die vorige eiserne ist (wegen $\frac{7\cdot2}{\cdot9} = 8$), so ist dafür $W = \frac{6\cdot228}{8} = \cdot7785$, und wegen $B = 1\cdot0493546$ sofort: $m = \cdot000056536$. Mit diesem Werthe und $v = 130$ folgt aus den obigen Formeln (13) und (14): $t = 9\cdot5988$ Secunden und $s = 887\cdot64$ Fuss.

Im luftleeren Raume würde die Kugel in dieser Zeit von nahe 9·6 Secunden eine Geschwindigkeit von 297·55 Fuss erlangt und dabei einen Weg von 1428 Fuss zurückgelegt haben, oder die Kugel würde diese gegebene Geschwindigkeit schon in Zeit von nahe 4·2 Secunden erlangt und dabei nur einen Weg von 272·58 Fuss zurückgelegt haben.

Anmerkung. Für Körper von einem geringen specifischen Gewichte und grossem Volumen muss auch noch der Umstand berücksichtigt werden, dass hinter den in einer Flüssigkeit sich bewegenden Körpern eine gewisse Menge dieser Flüssigkeit mit fortgerissen wird, welche z. B. bei kugelförmigen Körpern ·6 von dem Volumen des Körpers selbst ausmacht.

342. Um nun auch noch die Bewegung von vertical aufwärts steigenden Körpern in widerstehenden Mitteln kurz zu behandeln, so ist mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen dafür $-Mg-R$ die bewegende, folglich

$$G=-g-\frac{R}{M}\ldots(m')$$

die beschleunigende Kraft, oder es geht die Gleichung (4) in Nr. **338** für den jetzt zu behandelnden Fall über in jene:

$$\frac{dv}{dt}=-g-\frac{R}{M}=-g-\frac{gv^2}{c^2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber

$$\frac{g\,dt}{c}=-\frac{c\,dv}{c^2+v^2}$$

und wenn man diese Differentialgleichung integrirt und gleich die Constante der Integration so bestimmt, dass für $t=0$, $v=a$ wird, wenn nämlich a die Anfangsgeschwindigkeit des aufsteigenden Körpers ist, so erhält man:

$$t=\frac{c}{g}\left(arc\,tang.\frac{a}{c}-arc\,tang.\frac{v}{c}\right)\ldots(10).$$

343. Um aus dieser letztern Gleichung v durch t auszudrücken, setze man

$$arc\,tang.\frac{a}{c}=b \text{ und } arc\,tang.\frac{v}{c}=u\ldots(n),$$

so ist aus (10):

$$\frac{gt}{c}=b-u \text{ und daraus } u=b-\frac{gt}{c},$$

folglich (Comp. §. 22), wenn man Kürze halber $\frac{gt}{c}=z$ setzt:

$$tang.\,u=\frac{tang\,b-tang\,z}{1+tang\,b\;tang\,z}.$$

Nun ist (Relat. (n)) $tang.\,u=\frac{v}{c}$ und $tang.\,z=\frac{Sin\,z}{Cos\,z}$, mithin, wenn man diese Werthe substituirt und reducirt, sofort:

$$v=\frac{c\,(a\,Cos\,z-c\,Sin\,z)}{a\,Sin\,z+c\,Cos\,z}\ldots(11),$$

wobei, wie bemerkt, $z=\frac{gt}{c}$ ist.

344. Um ferner die Steighöhe s durch die Zeit t auszudrücken, hat man wegen $ds = v\,dt$, wenn man die vorige Gleichung (11) mit dt multiplicirt und dann integrirt (nachdem für z der Werth hergestellt worden):

$$s = c \cdot \frac{c}{g} \, logn. (a \, Sin \, z + c \, Cos \, z) + C$$

oder da für $t = 0$ (also auch $z = 0$) auch $s = 0$, daher $C = -\frac{c^2}{g} \, logn. \, c$ ist, auch:

$$s = \frac{c^2}{g} \, logn. \left(\frac{a}{c} \, Sin \, z + Cos \, z\right) \ldots (12),$$

wobei $z = \frac{gt}{c}$ ist.

345. Um endlich noch eine Relation zwischen s und v zu finden, benützen wir wieder, wie in Nr. **340**, die Gleichung $G = \frac{v\,dv}{ds}$ und setzen für G den obigen Werth (m'), d. i.

$$-g - \frac{R}{M} = -g - \frac{gv^2}{c^2}$$

so folgt: $$v\,dv = -\left(g + \frac{gv^2}{c^2}\right) ds = -g\left(\frac{c^2 + v^2}{c^2}\right) ds$$

oder $$2g\,ds = -\frac{2c^2 v\,dv}{c^2 + v^2}.$$

Diese Gleichung integrirt und die Constante so bestimmt, dass für $v = a$, $s = 0$ wird, erhält man ganz einfach:

$$s = \frac{c^2}{2g} \, logn. \left(\frac{c^2 + a^2}{c^2 + v^2}\right) \ldots (13).$$

346. Ist h die grösste Höhe, welche der Körper mit seiner Anfangsgeschwindigkeit $v = a$ erreichen kann, und T die hiezu nöthige Zeit, so hat man, da für diese Zeit T, $v = 0$ ist, aus den Relationen (11) und (13) beziehungsweise: $0 = a \, Cos \, z - c \, Sin \, z$, daraus $tang. \, z = \frac{a}{c}$, oder z, d. i. $\frac{gT}{c} = arc \, tang. \frac{a}{c}$, also:

$$T = \frac{c}{g} \, arc \, tang. \frac{a}{c} \ldots (14)$$

und $$h = \frac{c^2}{2g} \, logn. \left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) \ldots (15).$$

347. Auf dieser Höhe angekommen, fällt der Körper wieder zurück und erreicht an dem Puncte, von welchem er zu steigen begann, die Geschwindigkeit a' und braucht hiezu die Zeit T'.

Um aber a' und T' zu bestimmen, erhält man durch Gleichsetzung der Relationen (8) (in welcher $s=h$ und $v=a'$ zu setzen) und (15):

$$\frac{c^2}{2g}\,logn.\left(\frac{c^2}{c^2-a'^2}\right)=\frac{c^2}{2g}\,logn.\left(\frac{c^2+a^2}{c^2}\right) \text{ oder } \frac{c^2}{c^2-a'^2}=\frac{c^2+a^2}{c^2}$$

und daraus:

$$a'=\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}\ldots(16).$$

Diese Relation zeigt, dass immer $a'<a$ ist.

Zur Bestimmung von T' darf man nur in der Relation (5) (Nr. **338**) statt t und v beziehungsweise T' und a' setzen, und man erhält:

$$T'=\frac{c}{2g}\,logn.\left(\frac{c+a'}{c-a'}\right)=\frac{c}{g}\,logn.\sqrt{\frac{c+a'}{c-a'}},$$

oder wenn man für a' den Werth aus der vorigen Relation (16) setzt und gehörig reducirt, auch:

$$T'=\frac{c}{g}\,logn.\left(\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right)\ldots(17).$$

Bezeichnet daher Θ die ganze Zeit, welche der Körper braucht, um wieder bis zu dem Puncte des Aufsteigens zu kommen, so ist:

$$\Theta=T+T'=\frac{c}{g}\left[arc\ tang.\frac{a}{c}+logn.\left(\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right)\right]\ldots(18).$$

Anmerkung. Da man g und a als bekannt ansehen und Θ durch Versuche finden kann, so lässt sich diese Relation (18) zur Bestimmung der Constanten c für irgend einen in der Luft sich bewegenden Körper benützen.

Beispiel. Eine 4zöllige, 10 Pfund schwere eiserne Kugel wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 100 Fuss vertical aufwärts geworfen; es soll bei Voraussetzung des mittlern Zustandes der Luft sowohl die grösste Steighöhe als auch die Zeit gefunden werden, welche hiezu nöthig ist.

Sucht man zuerst wieder den Werth der Constanten c, so hat man wegen $r=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, $Mg=10$ und (wie in Nr. **341**) $k=\cdot 19223$, ferner $Mg=\frac{4}{3}r^3\pi\delta g=10$ oder $g\delta r=\frac{3}{4}\cdot\frac{10}{\pi r^2}$ und $\varrho=\frac{1}{850}$, also (Nr. **337**, Relat. (m)) wegen $c^2=\frac{g\delta r}{k\varrho}$ sofort:

$$c^2=\frac{30\times 36\times 850}{4\times 3\cdot 1416\times\cdot 19223}=380024,\ \text{also } c=616\cdot 46.$$

Nun ist (Relat. (15)) $h=\frac{c^2}{2g}\,2\cdot 3026\ logv.\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)$, mithin, wenn man die Werthe setzt und die Rechnung durchführt:

$$h=\frac{380024}{62\cdot 06}\,2\cdot 3026\ logv.\left(1+\frac{10000}{380024}\right)=159\cdot 05,$$

also genau genug $h=159$ Fuss.

Ferner ist nach Relat. (14):

$$T = \frac{616\cdot46}{31\cdot03}\, arc\ tang. \left(\frac{100}{616\cdot46}\right) = \frac{616\cdot46}{31\cdot03}\, arc\,(9^0\ 12'\ 50''\cdot06) = \frac{616\cdot46}{31\cdot03} \times \cdot160814$$

(wegen $tang.\ 9^0\ 12'\ 50''\cdot06 = \frac{100}{616\cdot46} = \cdot1622165$) oder endlich $T = 3\cdot1948$ oder nahe 3·2 Secunden.

Im leeren Raume wäre $h = 161\cdot3$ Fuss und $T = 3\cdot226$ Secunden, also die Steighöhe um $161\cdot3 - 159\cdot1 = 2\cdot2$ Fuss und die Steigzeit um $3\cdot226 - 3\cdot195 = \cdot031$ Secunden grösser.

348. Da man bei geringen Geschwindigkeiten den Versuchen zufolge den Widerstand des Mittels der 1. Potenz der Geschwindigkeit proportional annehmen kann, so hat man in dieser Voraussetzung (anstatt der Relat. (4) in Nr. **338**) $\frac{dv}{dt} = g - \frac{gv}{c}$ oder

$$\frac{g\,dt}{c} = \frac{dv}{c - v}.$$

Diese Gleichung integrirt und dabei die Constante so bestimmt, dass für $t = 0$ auch $v = 0$ ist, wodurch diese $= logn.\ c$ wird, erhält man:

$$t = \frac{c}{g}\, logn. \frac{c}{c - v} \ldots (1').$$

Aus dieser Gleichung folgt ferner, wenn man der Kürze wegen den Quotienten $\frac{g}{c} = \alpha$ setzt, $e^{\alpha t} = \frac{c}{c - v}$ und daraus:

$$v = c\,(1 - e^{-\alpha t}) \ldots (2'),$$

wobei wieder e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist. Wird diese Gleichung mit dt multiplicirt und dann integrirt, so erhält man, wegen $v\,dt = ds$, sofort:

$$s = \int c\,(1 - e^{-\alpha t}) = c\left(t + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right) = ct - \frac{c^2}{g} \cdot e^{-\alpha t} + C$$

und da für $t = 0$ auch $s = 0$ sein soll, also $C = \frac{c^2}{g}$ wird, auch:

$$s = ct - \frac{c^2}{g}(1 - e^{-\alpha t}) \ldots (3),$$

wobei $\alpha = \frac{g}{c}$ ist.

Anmerkung. Will man anstatt der in diesem Kapitel behandelten speciellen Fälle des Fallens und Steigens von Kugeln in der Luft sich die Aufgabe allgemein so stellen, dass man annimmt, es erhalte ein Körper durch einen Impuls (eine Impulsion Nr. **123**) irgend eine Anfangsgeschwindigkeit und werde dann von zwei Kräften, einer constanten und einer variablen, welch' letztere dem Quadrate der Geschwindigkeit direct proportional ist, getrieben; so fällt diese Aufgabe überhaupt mit der Bewegung der Projectile oder Geschosse in der Luft zusammen, für welche dann die constante Kraft die Schwere oder das eigene Gewicht des Projectils und die variable Kraft der Widerstand der Luft ist.

1. Fällt nun zuerst der Impuls (die Stoss- oder Wurfkraft) mit der constanten Kraft der Richtung nach zusammen, so entsteht nothwendig eine geradlinige Bewegung. Ist AB die betreffende gerade (verticale) Linie und sind N, M zwei Puncte derselben, in deren erstern sich der Schwerpunct des Körpers beim Beginn der Bewegung, im zweiten oder tiefer liegenden M dagegen nach Verlauf irgend einer Zeit t befindet; ist ferner a die Anfangsgeschwindigkeit desselben in N und v die Geschwindigkeit in M; ist P die constante und $R = Av^2$ die variable Kraft, so wie m die Masse des Körpers; so kann man sich ganz einfach der allgemeinen Bewegungsgleichungen (1) und (2) in 5. von Nr. **131** bedienen.

Die einzige hier nothwendige Gleichung ist daher wegen $X = P - Av^2$ sofort:

$$P - Av^2 = m\frac{dv}{dt},$$

und sie drückt aus, dass die Differenz zwischen der constanten und variablen Kraft dem Producte aus der Masse des Körpers in die Beschleunigung desselben gleich ist; dabei bezeichnet, wie man sieht, A den Widerstand für die Geschwindigkeit $v = 1$.

Ist, um die vorige Gleichung auf eine passendere Form zu bringen, c jene Geschwindigkeit, bei welcher der Widerstand Ac^2 genau gleich der Kraft P ist, so kann man A durch $\frac{P}{c^2}$, so wie die vorige Bewegungsgleichung durch jene:

$$P - \frac{P}{c^2}v^2 = m\frac{dv}{dt}$$

ersetzen. Dividirt man diese Gleichung durch m und setzt $\frac{P}{m} = p$, so ist einfacher:

$$p - pv^2 = \frac{dv}{dt} \ldots (\gamma),$$

woraus:

$$p\,dt = \frac{c^2 dv}{c^2 - v^2} = \frac{c}{2}\left(\frac{dv}{c+v} + \frac{dv}{c-v}\right),$$

oder wenn man integrirt und die Constante aus der Bedingung bestimmt, dass für $t = 0$, $v = a$ sein soll, sofort die Relation folgt:

$$pt = \tfrac{1}{2}c\ logn.\left(\frac{c-a}{c+a} \cdot \frac{c+v}{c-v}\right).$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $a = 0$, so ist:

$$pt = \tfrac{1}{2}c\ logn.\left(\frac{c+v}{c-v}\right),$$

analog der obigen Gleichung (5), wobei, wenn P das Gewicht des vertical abwärts geworfenen Körpers bezeichnet, sofort $\frac{P}{m} = p = g$ ist.

Die übrigen Relationen ergeben sich wie Oben.

2. Wirkt die constante oder bewegende Kraft in gerade entgegengesetzter Richtung des ursprünglichen Impulses (wie wenn das Projectil vertical aufwärts geschleudert wird), so verwandelt sich die obige Bewegungsgleichung (γ) in die folgende:

$$-p-pv^2=\frac{dv}{dt}$$

und man erhält daraus durch dieselbe Transformation:

$$p\,dt=-\frac{c^2\,dv}{c^2+v^2},$$

so wie durch Integration dieser Gleichung, unter der Bedingung, dass die Anfangsgeschwindigkeit gleich a (also für $t=0$, $v=a$) ist:

$$\frac{pt}{c}=arc\ tang.\frac{a}{c}-arc\ tang.\frac{v}{c}.$$

(Vergl. obige Relat. 10.)

Eben so können auch die weitern Relationen wie Oben gefunden werden.

3. Ist endlich die Richtung des Impulses (der Wurfkraft) gegen jene der constanten Kraft (also gegen eine Verticale) schief, so ist die Bewegung eine krummlinige, dabei aber offenbar die Curve eine ebene (sie liegt, wenn P die Schwerkraft, in einer verticalen Ebene).

Legt man durch den Anfangspunct der Bewegung ein rechtwinkeliges Achsensystem, und zwar die Achse der x nach horizontaler, jene der y nach verticaler Richtung aufwärts, in der betreffenden verticalen Ebene, wie in Nr. **126**, so erhält man hier, mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen, zwei Bewegungsgleichungen (aus den genannten allgemeinen Gleichungen in Nr. **131**), und zwar sind diese, wenn die Winkel, welche die Richtung des Widerstandes oder der variablen Kraft, welche mit jener des Impulses oder der Wurfkraft (zugleich Tangente der Trajectorie im Anfangspuncte) zusammenfällt, mit der Achse der x und y bildet, durch α, β bezeichnet werden, wodurch $Cos\,\alpha=\frac{dx}{ds}$ und $Cos\,\beta=\frac{dy}{ds}$ ist, sofort:

$$-\frac{P}{c^2}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot v^2=m\frac{d^2x}{dt^2}\text{ und }-P-\frac{P}{c^2}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot v^2=m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Dividirt man wieder durch m, und setzt wie oben $\frac{P}{m}=p$, bemerkt ferner, dass $v=\frac{ds}{dt}$ ist, so erhält man nach gehöriger Reduction die beiden Differentialgleichungen:

$$-\frac{p}{c^2}\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\text{ und }-p-\frac{p}{c^2}\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

In die weitere Behandlung dieser Gleichungen, welche sich übrigens unter keiner endlichen Form integriren lassen, können wir hier nicht eingehen und verweisen u. A. auf *Poisson, Traité de la Mécanique tom 1. p. 402* u. f.