Zweiter Abschnitt.

D y n a m i k.

Von der gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung.

(§. 134.)

51. Beschreibt ein Punct bei irgend einer veränderlichen Bewegung während der Zeit t den Bogen $MN = s$ (Fig. 22), so stellt der Quotient $\frac{s}{t}$ die mittlere Geschwindigkeit vor, mit welcher dieser Bogen zurückgelegt würde; auch bezeichnet derselbe Quotient den Weg in der Zeiteinheit für den Fall, in welchem der Bogen s während der Zeit t mit gleichförmiger Bewegung beschrieben würde.

Läfst man nun t ohne Ende abnehmen, so nimmt auch s eben so ab und es nähert sich dabei dieser Quotient einer Grenze, welche nichts anders ist als die Geschwindigkeit des Beweglichen im Puncte M, so dafs wenn man diese Geschwindigkeit mit v bezeichnet, sofort

(α) $v = \frac{ds}{dt}$ ist.

Anmerkung 1. Diese Geschwindigkeit ist zugleich diejenige, mit welcher das Bewegliche von dem Puncte M aus gleichförmig (und nach der Tangente) fortgehen würde, wenn von diesem Puncte an jede Einwirkung auf das Bewegliche aufhörte. Zugleich folgt aus dieser Relation wegen $ds = v\,dt$ (vergleiche §. 129. Gleich. 1), dafs man jede wie immer geartete Bewegung während eines Zeitelementes als eine gleichförmige ansehen kann.

Anmerkung 2. Von der Richtigkeit der Relation (α) kann man sich auch auf folgende Weise überzeugen.

Hat der bewegliche Punct nach Verlauf der Zeit t den Weg s zurückgelegt und dabei die Geschwindigkeit v erlangt, so würde er, wenn von nun an jede Einwirkung auf ihn aufhörte, mit der Geschwindigkeit v gleichförmig fortgehen und also im nächstfolgenden Zeitelement dt den Weg $ds = v\,dt$ zurücklegen; da jedoch diese Einwirkung nicht aufhört, so wird streng genommen dieser Weg seyn (m) $ds = v\,dt + z$, wobei z jenen Antheil bezeichnet, welcher durch diese fortwährende Einwirkung der vorhandenen Kraft während der Zeit dt entsteht. Da aber keine wie immer geartete Kraft die Geschwindigkeit des Beweglichen in einer unendlich kleinen Zeit um eine endliche Gröfse verändern kann (indem dazu immer auch eine gewisse endliche Zeit erforderlich ist), so ist diese Änderung von v am Ende der Zeit dt sofort dv, und es ist offenbar $z < dv\,dt$, weil selbst wenn diese Änderung dv schon am Anfange des Zeitintervalles dt und nicht erst am Ende desselben eingetreten und durch diese Zeit dt constant geblieben wäre $z = dv\,dt$ seyn würde. Da nun aber auf diese Weise z in jedem Falle unendlich klein der 2ten Ordnung ist und daher gegen $v\,dt$ verschwindet, so ist in der That $ds = v\,dt$. *)

52. Die in §. 134 aufgestellte Gleichung $v = ct$ bezieht sich auf den Fall, in welchem eine constante Kraft auf den ruhenden Körper einwirkt; nimmt man dagegen den allgemeinern Fall an, in welchem sich der Körper oder materielle Punct bereits mit der Geschwindigkeit k gleichförmig und geradlinig fortbewegt, bevor die constante Kraft auf denselben einwirkt, so ist diese Geschwindigkeit am Ende der Zeit t (diese von dem Augenblicke der Einwirkung der Kraft an gezählt), je nachdem die Kraft in derselben oder entgegengesetzten Richtung der ursprünglichen Bewegung wirkt, beziehungsweise:

$$v = k + ct \;\ldots \quad (1)$$

oder $$v = k - ct \quad (1')$$

wobei der letztere Fall, in welchem auch v negativ werden kann (sobald nämlich $ct > k$ wird) in dem erstern begriffen ist, wenn man dafür c negativ nimmt. Die Bewegung ist nämlich im erstern Fall gleichförmig beschleunigt, im letztern gleichförmig verzögert.

53. Um nun aber auch den zurückgelegten Weg oder die Position zu bestimmen, welche ein mit gleichförmig veränderter Bewegung fortgehender materieller Punct in einem gewissen Augenblicke besitzt,

---

*) Um den Werth von z genauer kennen zu lernen, hat man wegen $s = f(t)$ sofort $s + ds = f(t + dt)$ oder nach dem Taylor'schen Theorem (Comp. §. 646) $s + ds = s + \frac{ds}{dt}\,dt + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{dt^2}{1\cdot 2} + \ldots$ oder mit Rücksicht auf die obige Gleich. $ds = v\,dt$ auch $ds = v\,dt + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}\,dt^2 +$ und mit Auslassung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung: $ds = v\,dt + \frac{1}{2}\,dv\,dt$, so dafs also, diese Gleich. mit der obigen (m) verglichen, $z = \frac{1}{2}\,dv\,dt$ gibt.

zähle man seinen Abstand auf der geraden Linie seines Weges von einem bestimmten Puncte A aus und bezeichne diesen am Ende der Zeit t mit x; so ist seine Geschwindigkeit in diesem Augenblicke (Gleich. α in **51.**) $=\frac{dx}{dt}$, folglich nach den beiden Gleichungen (1) (1') der vorigen Nummer $\frac{dx}{dt}=k\pm ct$ oder $dx=k\,dt\pm ct\,dt$, woraus man durch die Integration erhält: (2) . . . $x=C+kt\pm\frac{1}{2}ct^2$
dabei gilt von den doppelten Zeichen das obere für die gleichförmig beschleunigte, das untere für die gleichförmig verzögerte Bewegung.

Wird die Zeit von dem Augenblicke an gezählt, in welchem sich das Bewegliche im Puncte A befindet, so wird für $t=0$ auch $x=0$, folglich die Constante C der Integration ebenfalls Null, und daher

$$x=kt\pm\tfrac{1}{2}ct^2 \text{ (vergleiche §. 135).}$$

Beginnt die Bewegung von dem festen Puncte A ohne alle Geschwindigkeit, d. i. von der Ruhe aus, so ist $k=0$ und da für $t=0$ auch $x=0$ seyn mufs, so ist auch die Constante $C=0$ und sofort:

$$(3)\;.\;.\;.\quad x=\tfrac{1}{2}ct^2,$$

welches sofort die Gleichung (2) in §. 134 ist.

Anmerkung. Man nennt hier die Endgeschwindigkeit c nach der ersten Secunde, oder allgemeiner diese Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit die constante Beschleunigung, welche (wie aus den Gleichungen (1), (1') und (2) zu ersehen) sowohl positiv als negativ seyn kann (beschleunigte und verzögerte Bewegung) und die wir in der Regel durch den Buchstaben G bezeichnen werden.

Setzt man ferner, da die Anfangsgeschwindigkeit häufig mit v_0 bezeichnet wird v_0 statt k, x_0 für die Entfernung des materiellen Punctes im Anfangsaugenblicke (in welchem also seine Geschwindigkeit $=v_0$ ist) von einem festen Puncte seines geradlinigen Weges und sind v und x die analogen Gröfsen am Ende der Zeit t; so nehmen die obigen Gleichungen (1) und (2) auch die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} v=v_0+Gt \\ x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}Gt^2 \\ \text{woraus noch folgt: } \frac{dv}{dt}=G. \end{array}\right\}\;(4)$$

Mafs der constanten Kräfte.

(§. 136.)

54. Wirkt die constante Kraft P auf einen Körper von der Masse M, so kommt auf die Einheit der Masse die wirkende Kraft $\frac{P}{M}$. Ist eben so P' eine in die Masse M' wirkende constante Kraft, so entfällt davon auf die Einheit der Masse die Kraft $\frac{P'}{M'}$. Da sich nun diese beiden Körper oder Massen genau so, wie jeder ihrer einzelnen Theile bewegen, und die Geschwindigkeiten, welche gleiche Massen am Ende einer bestimmten Zeit erlangen, den Kräften proportional sind, welche sie erzeugen; so hat man, wenn diese Geschwindigkeiten mit v und v' bezeichnet werden, sofort:

$$v : v' = \frac{P}{M} : \frac{P'}{M'} \quad \text{oder} \quad P : P' = Mv : M'v'$$

d. h. zwei constante Kräfte verhalten sich wie die Grössen der Bewegungen, welche sie in einerlei Zeit hervorbringen. Nimmt man P' zur Einheit der constanten Kräfte, M' als Einheit der Massen und v' zur Einheit der Geschwindigkeit; so ist auch $P : 1 = Mv : 1$ oder $P = Mv$ (was auch aus $\frac{P}{P'} = \frac{M}{M'} \cdot \frac{v}{v'}$ folgt), d. h. jede constante Kraft wird gemessen durch die Gröfse der Bewegung, welche sie in der Zeiteinheit hervorbringt.

Anmerkung 1. Setzt man, wie es im §. 136 stillschweigend geschehen, gleiche Massen oder die Masse $= 1$ voraus, so wird die Kraft P blofs durch die Endgeschwindigkeit v gemessen, welche in der Masse während der Zeiteinheit erzeugt wird.

Anmerkung 2. Wie aus der Vergleichung mit §. 132 hervorgeht, so wird eine constante Kraft durch dieselbe Gröfse wie eine momentan wirkende Kraft gemessen. Es mufs übrigens hier bemerkt werden, dafs momentan wirkende oder sogenannte Stofs-Kräfte mehr in der Idee als in der Wirklichkeit bestehen, weil keine auch noch so grofse Kraft in einem untheilbaren Augenblick oder einer unendlich kleinen Zeit eine endliche Geschwindigkeit zu erzeugen im Stande ist; aus diesem Grunde werden auch in der neuern Zeit von den meisten Gelehrten mit Recht (da in der Natur alle Wirkungen stetig sind) keine Momentankräfte mehr angenommen, sondern nur beschleunigende Kräfte vorausgesetzt.

Da wir unter Kraft (als nothwendige aber auch hinreichende Ursache zur Abänderung der Geschwindigkeit eines materiellen Punctes der Gröfse oder Richtung nach) immer etwas dem Drucke Analoges verstehen, den wir auf einen Körper ausüben, um seine Bewegung zu veranlassen oder zu modificiren; so hat diese, wenn sie auf einen Körper einwirkt, nothwendiger Weise eine gewisse Dauer, während welcher sie jedoch ihre Intensität auch ändern kann.

Belanger nennt, wenn eine Kraft F von constanter Intensität während einer gewissen Zeit t wirkt, das Product Ft aus der Intensität der Kraft in ihre Wirkungsdauer die Impulsion dieser Kraft F in der Zeit t.

Hat die Kraft eine veränderliche Intensität, so ist ihre Impulsion während eines bestimmten Zeitraumes das Integral $\int F dt$ des Products aus der Kraft in das Differenzial der Zeit, zwischen den Grenzen jenes Zeitraumes genommen.

Diese Gröſse ist übrigens unabhängig von der Geschwindigkeit des Angriffspunctes der Kraft.

Um den Nutzen von der Einführung dieser Gröſse, welche man kurz den Impuls der Kraft F nennen kann, zu zeigen, so wirke eine constante Kraft F in eine dem Gewichte nach ausgedrückte Masse M; dann ist (§. 146) die constante Beschleunigung $G = \frac{F}{M} g$, wobei $g = 31$ Fuſs die Beschleunigung der Schwere ist. Wird dieser Werth in der ersten der Gleichungen (4) in Nr. 53. Anmerk. substituirt, so erhält man:

$$v = v_0 + \frac{F}{M} g t, \text{ woraus } \frac{M}{g} v - \frac{M}{g} v_0 = F t \text{ folgt.}$$

Da nun nach der neuern Art die Massen auszudrücken (§. 35 und die folgende Anmerk.) der Quotient $\frac{M}{g} = m$ nichts anderes als die träge Masse (vom Gewichte dabei abstrahirt) bezeichnet, so kann man sagen, daſs wenn sich ein materieller Punct von der Masse m durch die Einwirkung einer constanten Kraft geradlinig fortbewegt und man berechnet für zwei beliebige Augenblicke das Product aus seiner Masse in seine Geschwindigkeit (d. i. die Gröſse der Bewegung), so hat die Gröſse, um welche sich dieses Product während dieser Zeit ändert, erstlich dasselbe Zeichen wie die Kraft, und dann denselben numerischen Werth wie das Product aus der Kraft in die zwischen diesen beiden Augenblicken liegende Zeit, d. i. wie der vorhin sogenannte Impuls oder die Einwirkung der Kraft.

Hat z. B. eine 2pfündige Kanonenkugel durch die Einwirkung einer constanten Kraft während einer unbestimmten (allenfalls auſserordentlich kleinen) Zeit eine Geschwindigkeit von 1200 Fuss erlangt, so hat man nach der vorigen Gleichung, wegen $v_0 = 0$ (indem die Kraft F auf die ruhende Kugel wirken soll), $v = 1200$ und $\frac{M}{g} = \frac{2}{31}$ sofort $Ft = 77{\cdot}42$.

Je nachdem also die Wirkung oder der Impuls der Kraft 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ oder nur $\frac{1}{1000}$ Secunde gedauert hat, muſste die Intensität derselben 77·42, 774·2, 7742 oder 77420 Pfund gewesen seyn u. s. w.

Trifft diese Kugel mit der erlangten Geschwindigkeit auf einen andern Körper, welcher diese Geschwindigkeit vernichtet, indem er ihr eine constante Kraft entgegensezt, so gibt dieselbe Gleichung die Widerstands-Wirkung, wenn man $v = 0$, $v_0 = 1200$ und $\frac{M}{g} = \frac{2}{31}$ setzt, und zwar erhält man $Ft = -77{\cdot}42$. Dieses Product ist negativ, weil die Richtung der Kraft im entgegengesetzten Sinn der zu vernichtenden Geschwindigkeit v_0 ist.

Anmerkung 3. Es ist hier der Ort um noch einmal auf den Begriff der Masse eines Körpers und die Art sie in die Rechnung einzuführen zurückzukommen, und wir bemerken hierüber Folgendes:

Zwei materielle Puncte haben dieselbe Masse, wenn sie durch die Einwirkung von zwei ganz gleichen constanten Kräften eine und dieselbe Bewegung annehmen; erfordern sie aber zu dieser selben Bewegung verschiedene Kräfte, so sagt man, ihre Massen seyen diesen Kräften proportional.

Da die Masse eines Körpers nichts Anderes als die Summe der Massen aller materiellen Puncte ist, woraus der Körper besteht, so folgt, dafs die Worte Trägheit und Masse nicht dasselbe ausdrücken. In Folge der Trägheit ist eine Kraft erforderlich um einen Körper überhaupt in Bewegung zu setzen oder diese zu modificiren; zufolge der gröfseren oder geringeren Masse, die ein Körper besitzt, ist auch eine gröfsere oder geringere Kraft nöthig, um dem Körper eine bestimmte Bewegung mitzutheilen oder diese auf eine gewisse Weise zu modificiren; die Trägheit ist nämlich eine allen Körpern eigene oder gemeinschaftliche Eigenschaft, während die Masse eine jedem Körper eigenthümliche Gröfse ist.

Um die Massen als Gröfsen in die Rechnung bringen zu können mufs man irgend eine Masse zur Einheit wählen. Man ist jetzt so ziemlich allgemein mit den französischen Gelehrten darin übereingekommen, als Einheit jene Masse eines Körpers zu nehmen, welche auf einen einzigen Punct concentrirt die Einwirkung der Krafteinheit erfordern würde um während der Zeiteinheit, die Geschwindigkeitseinheit, d. i. die durch das Längenmafs ausgedrückte Geschwindigkeit zu erlangen.

Da nun das Gewicht eines Körpers für einen bestimmten Ort eine constante Kraft ist, und diese, wenn sie allein auf den Körper wirkt (dieser sich also im leeren Raume befindet) in demselben unter der Breite von Wien nach Verlauf einer Secunde die Geschwindigkeit von nahe $g = 31$ Fuss erzeugt; so bedarf es, wenn ein Körper nach Verlauf einer Secunde eine Geschwindigkeit von nur einen Fuss annehmen soll, einer constanten Kraft, welche gleich ist dem Gewichte dieses Körpers dividirt durch $g = 31$. (Es folgt nämlich aus der Formel (2) in §. 146, wenn man $G = 1$ setzt: $F = \frac{M}{g}$, wobei M das Gewicht des Körpers oder der Masse M bezeichnet.)

Hat also ein Körper im leeren Raume das Gewicht p und ist m dessen Masse, so ist nach dieser Übereinkunft $m = \frac{p}{g}$, d. h. die Masse eines Körpers ist numerisch ausgedrückt nichts anderes, als das Gewicht des Körpers dividirt durch die absolute Zahl g oder Beschleunigung der Schwere an dem betreffenden Ort der Erde. Für Wien ist $g = 31$ Fuss, für Paris 9·8088 Meter; im erstern Falle wird das Gewicht p in W. Pfunden, im letztern in Kilogrammen ausgedrückt.

Auf dasselbe Resultat kommt man auch, wenn man in der Proportion

(§. 146, G, G' statt v, v' gesetzt) $M : M' = \frac{F}{G} : \frac{F'}{G'}$ für $F' = 1$ $G' = 1$ sofort $M' = 1$ setzt; denn man hat dann: $M = \frac{F}{G}$ und da, wenn p das Gewicht des Körpers dessen Masse $= M$ ist bezeichnet, für $F = p$ sofort $G = g$ wird, auch $M = \frac{p}{g}$, wie vorhin.

Ausdruck für die veränderliche Kraft bei irgend einer geradlinigen Bewegung.

(§. 137.)

55. Wie aus der vorigen Nummer folgt, so kann eine constante Kraft durch die Gröfse der Bewegung gemessen werden, welche sie in der Zeiteinheit hervorbringt, wenn man dabei jene Kraft zur Einheit nimmt, welche in der Masseneinheit während der Zeiteinheit die Geschwindigkeit gleich Eins erzeugt. Um nun auch das Mafs einer variablen Kraft auf diesen Fall zurückzuführen, kommt es darauf an die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche sie in der Masse gleich Eins in der Zeiteinheit erzeugen würde, wenn sie jene Intensität constant beibehielte, welche sie in dem Augenblicke, den man eben betrachtet, besitzt.

Es sey nun bei irgend einer geradlinigen Bewegung eines mit der Masse gleich Eins behafteten Punctes, am Ende der von irgend einer Periode aus gezählten Zeit t der Abstand dieses Punctes vom Ursprung $= x$, die Geschwindigkeit $= v$ und die Intensität der variablen Kraft $= p$. Wäre p constant, so würde der Quotient $\frac{v}{t}$ die von p in der Zeiteinheit erzeugte Geschwindigkeit, folglich auch (**54.** Anmerk. 1) das Mafs der Kraft p seyn. Im gegenwärtigen Falle nimmt jedoch die Kraft p während der Zeit Δt um Δp und die Geschwindigkeit um Δv zu (oder ab, was hier ganz gleichgiltig ist) und diese Zunahme der Geschwindigkeit kann so angesehen werden, als wäre sie durch eine zwischen p und $p + \Delta p$ liegende Kraft hervorgebracht worden, welche während der Zeit Δt mit constanter Stärke gewirkt hat. Bezeichnet man diese Kraft durch p', so ist sofort $p' = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ und zwar für jeden auch noch so kleinen Werth der Zeit Δt.

Da sich aber p' ohne Ende der Kraft p nähert, wenn Δt ohne Ende abnimmt, indem sich dabei auch eben so Δp der Nulle nähert, so hat man, auf die Grenzen übergehend:

$$(1)\quad p=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

dabei hat p dasselbe Zeichen wie $\mathrm{d}v$, so dafs man diese Kraft als positiv oder negativ ansieht, je nachdem dieselbe die Geschwindigkeit v zu vermehren oder zu vermindern strebt; da ferner diese Geschwindigkeit (Gleich. 1, Nummer **51.**) $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ zu oder abnimmt, je nachdem die Bewegung im positiven oder negativen Sinne von x Statt findet, so ist auch die Kraft p positiv oder negativ, je nachdem sie im erstern oder letztern Sinne, d. i beschleunigend oder verzögernd wirkt.

Setzt man in der obigen Gleichung (1) für v den vorigen Werth, so erhält man auch:

$$(2)\quad p=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

56. Besitzt der bewegliche Punct statt der Masse 1 jene m, so wird, wenn die Bewegung mit der vorigen identisch ist, die entsprechende Kraft P durch $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ gemessen, weil sich in diesem Falle die Kräfte wie die Massen verhalten, also

$p:P=1:m$ Statt findet, oder $P=mp$ ist.

Man nennt gewöhnlich diese letztere Kraft P, welche auf eine beliebige Masse m wirkt und sofort durch $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ oder $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ gemessen wird, *bewegende* Kraft, während man die auf die Einheit der Masse wirkende Kraft p, welche nämlich durch $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ oder $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ gemessen wird, *beschleunigende* Kraft zu nennen pflegt.

So ist z. B. für einen frei fallenden Körper im luftleeren Raume die beschleunigende Kraft $p=g=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ (**54.** Anmerk. 1, und **55.** Gleich. 1) woraus $\mathrm{d}v=g\,\mathrm{d}t$ oder $v=gt$ (1) und wegen $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ auch $\mathrm{d}x=gt\,\mathrm{d}t$ und daher $x=\frac{1}{2}gt^2$ (2) folgt, welche Formeln (1) und (2) sofort mit jenen in §. 142 übereinstimmen. Zugleich folgt aus der letzten Gleichung (2) $g=\frac{2x}{t^2}$ . . (n) so, dafs also bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung *die beschleunigende Kraft auch dem doppelten Weg, dividirt durch das Quadrat der Zeit* gleich ist.

Fällt ein Körper von der Masse M frei herab, so ist $Mg=P$ (gleich dem Gewichte des Körpers) die *bewegende* Kraft.

Schief aufwärts geworfene Körper.

(§. 144.)

57. Wird ein schwerer Punct in der Richtung AT (Fig. 23) mit der Geschwindigkeit c aufwärts geworfen, so bleibt er, durch die Einwirkung der Schwere abwärts getrieben, fortwährend in der durch AT gelegten verticalen Ebene. Nimmt man daher eine in dieser Ebene durch den Punct A horizontale Gerade AX zur Abscissen- und die darauf perpendikuläre der Schwere entgegengesetzte Gerade AY zur Ordinatenachse, so wird die Lage des beweglichen Punctes durch die Coordinaten x, y bestimmt.

Die allgemeinen Gleichungen dieser Bewegung sind (vergleiche das Beispiel in der vorigen Nummer)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

woraus sofort folgt $\frac{dx}{dt} = C$ und $\frac{dy}{dt} = -gt + C'$.

Um die beiden Constanten C und C' zu bestimmen, setze man den Winkel $TAX = \alpha$, so sind die Seitengeschwindigkeiten von c für $t = 0$ (§. 138) $c' = c \, Cos \, \alpha$ nach AX und $c'' = c \, Sin \, \alpha$ nach AY und da die vorigen Quotienten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ nichts anderes als eben diese Seitengeschwindigkeiten nach einer beliebigen Zeit t sind (**51**. Gleich. a), so folgt $C = c' = c \, Cos \, \alpha$ und $C' = c'' = c \, Sin \, \alpha$, also ist

$$(h) \quad \frac{dx}{dt} = c \, Cos \, \alpha \text{ und } \frac{dy}{dt} = -gt + c \, Sin \, \alpha$$

oder auch $dx = c \, Cos \, \alpha \, dt$ und $dy = -gt \, dt + c \, Sin \, \alpha \, dt$

und wenn man neuerdings integrirt:

$$(i) \quad x = ct \, Cos \, \alpha \text{ und } y = ct \, Sin \, \alpha - \tfrac{1}{2} g t^2$$

wozu keine Constanten beizufügen oder diese gleich Null sind, weil für $t = 0$ sowohl $x = 0$ als auch $y = 0$ seyn mufs.

Eliminirt man endlich aus diesen beiden Gleichungen die Gröfse t, so erhält man als gesuchte Gleichung der Wurflinie oder Trajectorie:

$$y = x \, tang \, \alpha - \frac{g}{2c^2 \, Cos \, \alpha^2} x^2 \quad (1)$$

und zwar ist diefs die Gleichung einer gemeinen Parabel, bei welcher die Achse mit AY parallel, also vertical ist, die Gerade AT im Anfangspuncte A eine Tangente bildet (wegen $DE = 2DC$), der Parameter den Werth $\frac{2c^2}{g} Cos \, \alpha^2$, und der Scheitel C die Coordinaten:

$(w) \; . \; . \; AD = x' = \frac{c^2}{2g} Sin\, 2\alpha$ und $DC = y' = \frac{c^2}{2g} Sin\, \alpha^2$ besitzt; dabei ist noch $AB = 2x' = \frac{c^2}{g} Sin\, 2\alpha$ die Wurfweite, welchen Werth man auch aus der obigen Gleichung (1) als zweite Wurzel von x für $y = 0$ erhält.

Der Abstand der Directrix von der Abscissenachse AX ist $= DC + \frac{1}{4}$ Parameter $= \frac{c^2}{2g} Sin\, \alpha^2 + \frac{c^2}{2g} Cos\, \alpha^2 = \frac{c^2}{2g}$ folglich ist die Gleichung dieser Geraden:

$$y = \frac{c^2}{2g} \quad . \; (m)$$

und zwar ist diefs (§. 143) zugleich die Höhe, welche der schwere Punct erreichen würde, wenn er mit der anfänglichen Geschwindigkeit c vertical aufwärts geworfen würde.

Die Geschwindigkeit des Beweglichen ist am Ende der Zeit t sofort $v = \frac{ds}{dt}$, woraus $v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$ oder wenn man für dx und dy die durch Differenziation der Gleichungen (i) folgenden Werthe setzt und reducirt, auch

$$(k) \quad v^2 = c^2 - 2cgt\, Sin\, \alpha + g^2 t^2.$$

Für die Zeit, welche der bewegliche Punct braucht um in seiner Bahn bis zu einem Puncte M zu gelangen, dessen Abscisse $AP = x$ ist, folgt aus der ersten der Gleichungen (i) $t = \frac{x}{c\, Cos\, \alpha}$, folglich ist die Zeit nach welcher er im Puncte B anlangt, wegen $x = AB = \frac{c^2}{g} Sin\, 2\alpha$ $= \frac{2c^2}{g} Sin\, \alpha\, Cos\, \alpha$, sofort:

$$t = \frac{2c}{g} Sin\, \alpha;$$

daraus folgt $gt = 2c\, Sin\, \alpha$ und wenn man diese Gleichung mit der vorigen (k) verbindet, auch $v^2 = c^2$, zum Beweis, dafs die Geschwindigkeit des Mobilen im Puncte B wieder eben so grofs ist, als sie in dem Puncte A war.

Hat man es anstatt mit einem beweglichen Punct, mit einem Körper zu thun, so mufs man die Gleichungen der Bewegung auf dessen Schwerpunct beziehen.

Anmerkung. Das hier behandelte Problem eines im luftleeren Raume schief aufwärts geworfenen schweren Punctes oder Körpers gibt noch zu einigen anderen interessanten Untersuchungen Anlafs, welche wir hier kurz andeuten wollen.

1. Wird der Körper mit derselben Geschwindigkeit c jedoch nach und nach unter verschiedenen Neigungswinkeln α aufwärts geworfen, so entstehen als Wurflinien eben so viele verschiedene Parabeln, welche die nämliche Directrix besitzen (weil ihre Gleich. m vom Winkel α unabhängig ist). Die Scheitelpuncte dieser Parabeln werden durch die vorigen Gleichungen x', y' bestimmt, wenn man darin für α nach und nach die entsprechenden Werthe setzt. Eliminirt man daher aus diesen beiden genannten Gleichungen den Winkel α, so erhält man den geometrischen Ort (Lehrb Bd. II. S. 69, Comp. §. 403) aller dieser Scheitelpuncte. Durch diese Elimination entsteht aber die Gleichung

$$4y'^2 + x'^2 - \frac{2c^2}{g}y' = 0$$

welche sofort (Compend. §. 478) einer Ellipse angehört, deren kleine Achse in die Achse der y (d. i. in AY) und unterer Endpunct dieser Achse in den Ursprung A fällt. Die kleine Achse ist $= \frac{c^2}{2g}$ und die grofse ist doppelt so grofs d. i. $= \frac{c^2}{g}$.

2. Um die Curve zu finden, welche die vorhin genannten sämmtlichen Parabeln einhüllt, darf man nur aus der obigen Gleichung (1) $U = 0$ und ihrer nach α abgeleiteten oder derivirten $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0$ den Winkel α eliminiren. Man erhält zuerst aus der nach α differenziirten Gleich. (1) d. i. aus $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0$ sofort $tang\,\alpha = \frac{c^2}{gx}$ und damit aus (1) oder $U = 0$ selbst

$$y = \frac{c^2}{2g} - \frac{gx^2}{2c^2} \quad (n)$$

welches sofort die Gleichung der einhüllenden Curve ist. Bezeichnet man die zu c gehörige Geschwindigkeitshöhe durch h, so nimmt diese Gleichung wegen $h = \frac{c^2}{2g}$ auch die Form an:

$$x^2 = 4h(h - y)$$

und in dieser Form erkennt man sogleich die Gleichung einer Parabel deren Achse in jener AY und Scheitel nach der positiven Seite von y in den Abstand h vom Ursprung fällt. Der Parameter dieser Parabel hat den Werth $4h$ und die Abscissenachse wird in zwei Puncten geschnitten, wofür $x = -x = 2h$ ist, woraus noch folgt, dafs der Brennpunct dieser Curve mit dem Ursprung A zusammenfällt.

3. Soll der Neigungswinkel α so bestimmt werden, dafs der mit der Geschwindigkeit c geworfene Körper durch einen bestimmten Punct x', y' geht, so mufs man die Gleichung $y' = x'\,tang\,\alpha - \frac{g}{2c^2\,Cos\,\alpha^2}x'^2$ nach α auflösen, wodurch man erhält:

$$tang\,\alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{(c^4 - 2c^2gy' - g^2x'^2)}}{gx'};$$

ist nun $c^4 > 2c^2 g y' + g^2 x'^2$
so gibt es zwei Werthe von α, welche die Bedingung erfüllen;
ist $c^4 = 2c^2 g y' + g^2 x'^2$, so gibt es für α nur einen solchen Werth;
ist endlich $c^4 < 2c^2 g y' + g^2 x'^2$, so existirt für α gar kein solcher Werth.
Aus der vorletzten dieser Bedingungen folgt

$$y' = \frac{c^2}{2g} - \frac{g}{2c^2} x'^2$$

welche Gleichung mit der obigen (n) verglichen, sofort zeigt, daſs der gegebene Punct in der alle oben erwähnten Parabeln einhüllenden Curve oder Parabel liegen muſs, wenn die Aufgabe möglich seyn soll. Liegt der Punct innerhalb dieser Curve, so gibt es zwei, liegt er auſserhalb, so gibt es gar keine Auflösung dieses Problems.

Da für den ersten Fall, in welchem nämlich $c^4 = 2c^2 g y' + g^2 x'^2$ also nur eine Auflösung Statt findet, sofort $tang\, \alpha = \frac{c^2}{g x'}$ wird, so folgt, wenn man diesen Werth in der obigen Gleichung (1) und zugleich auch x', y' statt x, y setzt, für die entsprechende Parabel oder Wurflinie dieselbe Gleichung, welche man auch aus der Gleichung (n) erhält, wenn man darin x', y' statt x, y setzt; dieſs beweist, was sich auch von selbst versteht, daſs der Körper in diesem Falle so geworfen werden müsse, daſs er eine Parabel beschreibt, welche die oben gefundene einhüllende Curve in dem betreffenden Puncte x', y' berührt.

Bestimmung der Geschwindigkeit, welche ein in einer krummen Linie herabgehender schwerer Punct oder Körper erlangt.

(§. 149.)

58. Ist AMB (Fig. 24) eine in einer verticalen Ebene liegende Curve, über welche ein bloſs von der Schwere getriebener materieller Punct herabfällt, und nimmt man A als Ursprung des rechtwinkeligen Coordinatensystemes, in welchem die Verticale AC die Abscissenachse seyn soll, setzt für einen beliebigen Punct M der Curve $AP = x$, $PM = y$, Bog. $AM = s$, so wie $Pp = dx$, $mn = dy$, $Mm = ds$ und zieht endlich in diesem Puncte an die Curve die Tangente MT, wofür der Neigungswinkel mit der Ordinatenachse durch α bezeichnet werden soll; so hat man, wenn der schwere Punct, indem er von A bis M gekommen, die Geschwindigkeit v erlangt, und dazu die Zeit t gebraucht hat (**51.** Gleich. a) sofort $v = \frac{ds}{dt}$.

Da aber diese Geschwindigkeit bei dem weitern Fallen des Körpers durch den Bogen $Mm = ds$, wozu er die Zeit dt braucht um dv

zunimmt, und diese Zunahme durch das Herabgleiten des schweren Punctes über die schiefe Ebene MT während der Zeit dt entstanden ist; so hat man $dv = G\,dt$ oder wegen (§. 147, Gleich. 3′):

$$G = g\,Sin\,\alpha = g\,\frac{Mn}{Mm} = g\,\frac{dx}{ds} \text{ auch } dv = g\,\frac{dx}{ds}\,dt, \text{ oder } \frac{ds}{dt}\,dv = g\,dx,$$

d. i. $v\,dv = g\,dx$.

Wird diese letztere Gleichung integrirt, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}v^2 = gx \text{ oder } v^2 = 2gx \text{ d. i. } v = \sqrt{2gx} \; . \; . \; . \; (s)$$

wozu keine Constante kommt, weil (indem die Bewegung von A ausgeht) für $x = 0$ auch $v = 0$ seyn soll.

Aus dieser Gleichung folgt (vergl. §. 142, Form. 3), dafs der über die Curve AMB herabfallende schwere Punct oder Körper in was immer für einen Punct M der Curve dieselbe Geschwindigkeit erlangt, als wenn er durch die entsprechende Höhe AP (als Höhenunterschied zwischen den beiden Puncten A und M) frei gefallen wäre. Ist $AC = h$ und v' die Geschwindigkeit in B, so ist $v' = \sqrt{2gh}$.

Anmerkung. Einfacher gelangt man zu diesem Resultate nach dem in den Nrn. **55.** und **56.** Gesagten. Denn die beschleunigende Kraft nach Mm ist $g\,Sin\,\alpha = g\,\frac{dx}{ds}$, folglich (**55**, Gleich. 1) $g\,\frac{dx}{ds} = \frac{dv}{dt}$ oder $\frac{ds}{dt}\,dv = g\,dx$, d. i. $v\,dv = g\,dx$, woraus wieder $v^2 = 2gx$ folgt.

Schwingungsdauer des einfachen Pendels.

(§. 151.)

59. Um die Schwingungszeit eines einfachen Pendels, welches nur kleine Schwingungsbögen beschreibt, zu bestimmen, sey die Länge des Pendels $CA = r$ (Fig. 25), ABA' der dem Halbmesser r entsprechende, in einer verticalen Ebene liegende Kreisbogen, in welchem der schwere Punct A schwingt, C der Aufhängpunct des Pendels als Mittelpunct des Kreisbogens und $BD = a$ der dem Schwingungsbogen ABA' entsprechende Sinusversus. Nimmt man nun an, dafs der schwere Punct, welcher seine Bewegung in A beginnt, während der Zeit t bis M gekommen sey und hier die Geschwindigkeit v erlangt habe, so ist (**58.** Gleich. s) $v = \sqrt{(2g\,.\,DP)}$, oder wenn man die Abscissen auf dem verticalen Durchmesser CB von B aus zählt und für diesen Punct M die Abscisse $BP = x$ setzt, sofort $v = \sqrt{[2g(a - x)]}$.

Da aber auch (**51.** Gleich. α) $v = \frac{ds}{dt}$ oder $dt = \frac{ds}{v}$ und für den Kreis $ds = dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{r\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$ ist (wozu man $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung des Kreises $y=\sqrt{(2rx-x^2)}$ zu bestimmen hat); so hat man mit Rücksicht darauf, dafs wenn t zunimmt sofort x abnimmt, folglich dt und dx entgegengesetzte Zeichen erhalten müssen, auch

$$dt = \frac{-r\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}\cdot\sqrt{[2g(a-x)]}} = \frac{-r}{2\sqrt{rg}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}\;\sqrt{(1-\frac{x}{2r})}}$$

diese Gleichung von $x = BD = a$ bis $x = 0$ integrirt, gibt die halbe, d. i. die Schwingungszeit für den Bogen AMB und es ist, wenn man die Grenzen der Integration umkehrt, dagegen (Comp. § 834, Relat. 5.) das Zeichen ändert:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{2r}\right)}}.$$

oder wenn man, da sich die Integration nur durch eine unendliche Reihe ausführen läfst, den letzten Bruch in eine Reihe auflöst und

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{2r}\right)}} = \left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{2r}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2r}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{2r}\right)^3+$$

setzt, auch

$$t = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{2r}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2r}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{2r}\right)^3+\right]$$

durch Ausführung dieser Integration erhält man (Comp. S. 523)

$$t = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\pi\left[1+(\tfrac{1}{2})^2\left(\frac{a}{2r}\right)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{a}{2r}\right)^2+\left(\frac{1.3\,5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{a}{2r}\right)^3+\right]$$

wobei diese unendliche Reihe leicht fortzusetzen ist. Diese nach steigenden Potenzen von $\frac{a}{2r}$ fortlaufende Reihe convergirt aber um so mehr, je kleiner dieser Bruch, d. h. je kleiner bei einer bestimmten Länge des Pendels der Schwingungsbogen ABA' ist. Beträgt der diesen Bogen messende Winkel ACA' (die Amplitude der Oscillationen) nur einige Grade, so kann man sich für gewöhnlich schon mit dem ersten Gliede dieser Reihe begnügen, so, dafs wenn man die gesuchte Schwingungsdauer mit T bezeichnet, wegen $T = 2\,t$ sofort

$$T = \frac{r\pi}{\sqrt{rg}}$$ oder wenn man l statt r setzt

und reducirt auch: $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ wird, welche Schwingungsdauer sofort von der Höhe BD oder a unabhängig ist. Behält man dagegen von der unendlichen Reihe auch noch das zweite Glied bei, so wird diese Dauer von der Höhe a abhängig und man erhält

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{a}{8l}\right).$$

Da der Quotient $\frac{a}{l}$ nichts anderes als der Sinusversus des Elongationswinkels $ACB = \alpha$ für den Halbmesser $= 1$ nämlich $\frac{a}{l} = 1 - Cos\,\alpha = 2\,Sin^2\,\frac{1}{2}\,\alpha$ ist, so läfst sich der Fehler, welchen man begeht, wenn man bei irgend einem Gliede der obigen Reihe stehen bleibt, sehr leicht berechnen.

Bestimmung der Centrifugalkraft eines materiellen Punctes.

(§. 155.)

60. Ist ein materieller Punct, dessen Masse gleich 1 seyn soll, bei seiner Bewegung gezwungen den Kreis AMB vom Halbmesser $CA = r$ (Fig. 26) zu beschreiben, so läfst sich der Druck, welchen derselbe durch diese Bewegung auf die Curve ausübt (gleich der Centrifugalkraft) auf folgende Weise bestimmen.

Zerlegt man die auf den Punct A wirkende beschleunigende Kraft in zwei Seitenkräfte, die eine nach der Tangente AT, die andere nach der Normale AC des Kreises, so rührt die Bewegung der Projection des materiellen Punctes auf diese Normale lediglich von dieser letztgenannten Seitenkraft her. Sieht man aber diese Seitenkraft während einer unendlich kleinen Zeit dt (wie diefs immer erlaubt ist) sowohl in ihrer Gröfse als Richtung als constant an und ist während dieser Zeit $AM = ds$ der Weg des beweglichen Punctes und $AP = dx$ der Weg der Projection dieses Punctes auf die Normale; so ist nach der Theorie der gleichförmig beschleunigten Bewegung diese nach der Normale wirkende Kraft (**56.** Beispiel, Relation n) $f = \frac{2\,dx}{dt^2}$ oder da der Bogen $AM = ds$ mit dessen Sehne verwechselt werden darf und nach einem bekannten geometrischen Satze dann $dx = \frac{ds^2}{2r}$ ist, auch $f = \frac{1}{r}\frac{ds^2}{dt^2}$ oder wegen $\frac{ds}{dt} = v$, wo v die Geschwindigkeit des Beweglichen im Puncte A bezeichnet $f = \frac{v^2}{r} \ldots (n)$ welche Kraft (Centripedalkraft genannt) sofort der Centrifugalkraft oder dem Drucke gegen die Curve gleich und entgegengesetzt ist. Besitzt der bewegliche Punct die Masse m, so ist (**56.**) diese Kraft

$$F = mf = \frac{mv^2}{r}.$$

Bezeichnet M das Gewicht der Masse m, so kann man (§. 35, Anmerk.) $M = mg$ oder $m = \frac{M}{g}$ setzen, und dadurch wird auch

$$F = \frac{Mv^2}{rg} \text{ (vergl. §. 155. Gleich. I).}$$

Anmerkung. Ist w die Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Punctes, folglich $v = rw$, so erhält die Gleichung (n) auch die Form $f = rw^2 \ldots (m)$.

61. Beschreibt der materielle Punct überhaupt eine gegebene Curve im Raume, so seyen, um die Centrifugalkraft für diesen allgemeinen Fall zu bestimmen, $M_1 M$ und MM' (Fig. 27) zwei aufeinander folgende Elemente dieser Curve, D und D' ihre Halbirungspuncte und MT und $M'T'$ ihre Verlängerungen; so ist bekanntlich (Lehrbuch III. §. 97) TMT' die Krümmungsebene, so wie der Winkel TMT' der Winkel der Contingenz der Curve im Puncte M, und eine in dieser Ebene gezogene Gerade MO, welche den Winkel M_1MM' halbirt, fällt sofort mit dem entsprechenden Krümmungshalbmesser zusammen, so, dafs der Punct O den Mittelpunct der Krümmung dieser Curve im Puncte M darstellen kann. Setzt man das Curvenelement $M_1M = DD' = ds$, den unendlich kleinen Winkel $TMT' = \delta$, so wie den Krümmungshalbmesser $OM = \varsigma$; so ist wie bekannt $ds = \varsigma\delta$ (weil nämlich das Curvenelement DMD' als ein Kreisbogen vom Halbmesser OM angesehen werden kann, welchem der Mittelpunctswinkel $DOD' = TMT'$ entspricht) oder $\delta = \frac{ds}{\varsigma}$ (a)

Diefs vorausgesetzt, komme der materielle Punct nach Verlauf der Zeit t im Puncte M mit der Geschwindigkeit v an, so, dafs er also, wenn er ganz frei wäre in der Richtung MT mit derselben Geschwindigkeit fortginge (indem wir vor der Hand von allen Kräften, die auf diesen Punct einwirken können, abstrahiren); da dieser Punct jedoch nach der gemachten Voraussetzung die Curve $M_1MM'E$ zu beschreiben gezwungen ist, so ändert er im Puncte M seine Richtung von MT in MT'. Errichtet man in der genannten Krümmungsebene auf MT' das Perpendikel MN', so kann man die nach MT gerichtete Geschwindigkeit v in zwei aufeinander senkrechte Seitengeschwindigkeiten nach MT' und MN'

zerlegen, wovon die erstere also $= v\,Cos\,\delta$ und die letztere $= v\,Sin\,\delta$ seyn wird, und die Wirkung der Centripedalkraft f oder wenn man will der Curve, wird darin bestehen, diese letztere Geschwindigkeit aufzuheben, damit nur die erstere allein bestehen bleibt, oder mit andern Worten, die genannte der Centrifugalkraft gleiche und entgegengesetzte Kraft f mufs in dem materiellen Punct oder dem Beweglichen eine gleiche Geschwindigkeit $v\,Sin\,\delta$ und zwar nach entgegengesetzter Richtung von MN' erzeugen. Nimmt man nun an, dafs diese Kraft f diese Geschwindigkeit $v\,Sin\,\delta$ während der Zeit dt, als das Bewegliche das Bogenelement DMD' zurücklegt, in dem materiellen Puncte, dessen Masse $= 1$ seyn soll, hervorbringt; so wird diese beschleunigende Kraft (**56.**) durch diese während der unendlich kleinen Zeit dt erzeugten Geschwindigkeit $v\,Sin\,\delta$, dividirt durch die Zeit dt gemessen oder ausgedrückt, so, dafs man hat $f = \frac{v\,Sin\,\delta}{dt}$. Setzt man δ statt $Sin\,\delta$ (weil δ unendlich klein) und für δ den obigen Werth aus (a), so erhält man mit Rücksicht darauf, dafs (**51.**) $ds = v\,dt$ ist, auch $f = \frac{v^2}{\varsigma}$, oder wenn der bewegliche Punct die Masse m besitzt, für die Centrifugalkraft im Puncte M, welche sofort nach der Richtung MN wirksam ist:

$$F = \frac{mv^2}{\varsigma} = m\varsigma w^2 \;.\;.\; (i)$$

wenn nämlich w die Winkelgeschwindigkeit des Beweglichen im Puncte M ist.

Was die Geschwindigkeit $v\,Cos\,\delta$ betrifft, mit welcher das Bewegliche von M aus nach MM' in der Curve weiter geht, so bleibt diese wegen $Cos\,\delta = 1$, ungeändert $= v$.

Anmerkung 1. Wirken auf das Bewegliche eine oder mehrere Kräfte, so ändert sich die Geschwindigkeit v je nach der Gröfse der nach der Tangente der Curve zerlegten Seitenkraft; eben so bringt die in der Richtung der Normale wirksame Seitenkraft einen weitern Druck auf die Curve (welcher auch Statt fände, wenn der bewegliche Punct ruhte) hervor, den man zur Centrifugalkraft noch hinzufügen mufs.

Anmerkung 2. Zur Übung und um dem Anfänger überhaupt mehr Übersicht und Gewandtheit in der Bewegungslehre zu verschaffen, geben wir hier nach einigen vorausgeschickten allgemeinen Betrachtungen und Sätzen, noch eine weitere Entwicklungsart der Centrifugalkraft.

1. Bei der gleichförmigen Bewegung sind die Geschwindigkeiten den in gleichen Zeittheilchen zurückgelegten Räumen, diese letztern aber den bewegenden Kräften, folglich auch die Geschwindigkeiten diesen Kräften und umgekehrt proportional, so, dafs also bei dieser Bewegung

Kraft und Geschwindigkeit eines für das andere als Maſs dienen kann. Aus diesem Grunde lassen sich auch alle für die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte aufgestellten Regeln zugleich für die Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten anwenden.

2. Um die Gesetze der ungleichförmigen Bewegung auf jene der gleichförmigen zurückzuführen, kann man sich vorstellen, daſs bei der Bewegung eines Punctes, welcher von einer continuirlich fortwirkenden Kraft, wie es z. B. bei der Schwerkraft der Fall, getrieben wird, diese Kraft nicht ohne Unterbrechung oder continuirlich wirkt, sondern ihre Wirkungen durch unmerklich kleine Zeiten von einander getrennt sind. Diese Vorstellungsart, welche mit den Principien der Differenzialrechnung besser übereinstimmt, führt zu demselben Resultate wie die Annahme von dem Wirken ohne Unterbrechung; denn stellt man die Geschwindigkeiten eines von einer continuirlich wirkenden Kraft getriebenen Körpers durch die Ordinaten einer Curve vor, so verwandelt sich diese Curve im erstern Falle in ein Polygon von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten, welches sofort als mit der Curve zusammenfallend angesehen werden kann. Bezeichnet man daher mit $\mathrm{d}t$ die Dauer des unendlich kleinen Zeittheilchens, welche die successiven Wirkungen einer beliebigen bewegenden Kraft von einander trennt, so kann die Bewegung während dieser unendlich kleinen Zeit als gleichförmig angesehen werden, so, daſs wenn $\mathrm{d}s$ den in dieser Zeit zurückgelegten unendlich kleinen Raum bezeichnet, sofort $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ die entsprechende Geschwindigkeit ist. Denkt man sich also die Zeit t, während welcher die bewegende Kraft bei der ungleichförmigen Bewegung auf den beweglichen Körper wirkt, in unendlich viele, unendlich kleine Theile getheilt, so zerfällt diese Bewegung in unendlich viele gleichförmige Bewegungen, deren Geschwindigkeiten in den einzelnen Intervallen constant sind und nur von einem Intervalle zum andern variiren.

3. Was die sogenannte beschleunigende Kraft betrifft, welche diese eben betrachtete Bewegung erzeugt, so müssen, da ihre Wirkung die Bewegung continuirlich zu ändern strebt, ihr auch diese augenblicklichen Änderungen zum Maſse dienen.

Da man nun während des Zeitelementes $\mathrm{d}t$ die Wirkung der beschleunigenden Kraft P als constant ansehen kann, so wird, wenn $\mathrm{d}v$ die Zunahme der Geschwindigkeit am Ende der Zeit $\mathrm{d}t$ bezeichnet, sofort $\mathrm{d}v = P\,\mathrm{d}t$, also $P = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ und wegen $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ auch $P = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$.

Bei der ungleichförmigen Bewegung wird daher die beschleunigende Kraft durch den Quotienten aus dem Quadrate des als constant angenommenen Zeitelementes in das zweite Differenziale des Raumes gemessen. Zugleich läſst sich auf diese Kraft auch alles das anwenden, was bei der gleichförmigen Bewegung über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten gesagt wurde.

4. Wirken nun auf einen f r e i e n Punct M beliebig viele Kräfte, so kann man ihre Resultirende in drei aufeinander senkrechte Seitenkräfte X, Y, Z zerlegen, welche zu den drei rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z dieses Punctes beziehungsweise parallel sind. Da aber die Richtungen dieser drei Seitenkräfte X, Y, Z aufeinander senkrecht sind, so ist jede von ihnen von der Wirkung der beiden übrigen unabhängig und sie lassen sich daher nach der vorigen Relation auf folgende Weise ausdrücken:

$$X = \frac{d^2x}{dt^2},\ Y = \frac{d^2y}{dt^2},\ Z = \frac{d^2z}{dt^2} \ldots \quad (\alpha)$$

und diese Relationen bilden sofort die a l l g e m e i n e n G l e i c h u n g e n d e r B e w e g u n g d e s P u n c t e s M i m R a u m e.

Ist der Punct f r e i, so geben die ersten Integrale dieser Gleichungen in jedem Augenblicke die G e s c h w i n d i g k e i t e n, welche er nach den Coordinatenachsen besitzt, so wie die zweiten oder endlichen Integrale die Coordinaten x, y, z in Functionen der Zeit t. Eliminirt man t aus diesen Gleichungen, so bleiben zwischen diesen drei Variablen x, y, z zwei Gleichungen als G l e i c h u n g e n d e r C u r v e, welche der Punct M im Raume beschreibt; sie ist im Allgemeinen von d o p p e l t e r Krümmung und heifst Trajectorie des beweglichen Punctes oder Körpers.

Ist der Punct M n i c h t frei, sondern mufs er z. B. beständig auf einer gegebenen Fläche oder Curve bleiben, so eliminirt man mit Hilfe der Gleichungen dieser Fläche oder Curve aus den Gleichungen von x, y, z, welche aus der Integration der vorigen Gleichungen (α) entstehen, so viele Veränderliche als Gleichungen gegeben sind und erhält so für X, Y, Z die Bedingungsgleichungen, welche erfüllt werden müssen, wenn der bewegliche Punct den gegebenen Forderungen entsprechen soll.

5. Wir betrachten nun als erstes Beispiel der Anwendung dieser Sätze, die Bewegung eines materiellen Punctes, welcher blos von der S c h w e r k r a f t afficirt wird, und zwar in einem w i d e r s t e h e n d e n M i t t e l.

Es sey g die Intensität der Schwere und p der Widerstand des Mittels, welchen man als eine bewegende oder beschleunigende Kraft ansehen kann, die nach der Tangente MT (Fig. 28) der vom beweglichen Punct beschriebenen Curve gerichtet ist und im entgegengesetzten Sinne seiner Bewegung wirkt. Hat der bewegliche Punct durch irgend eine Kraft, die nicht mehr weiter in Betracht kommt, nach der Richtung AS die Geschwindigkeit c erhalten und legt man durch den Punct A als Ursprung der Coordinaten drei rechtwinkelige Achsen AX, AY, AZ so, dafs die Ebene der xy eine horizontale, folglich die Achse der z eine verticale und zwar der Schwere entgegengesetzte Lage erhält; so sind, wenn ds das Curvenelement bezeichnet, $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel, welche die Tangente MT beziehungsweise mit den Coordinatenachsen bildet, und die Kraft p gibt dann parallel zu diesen Achsen die Seitenkräfte $p\frac{dx}{ds},\ p\frac{dy}{ds},\ p\frac{dz}{ds}$.

Diese Kräfte streben ihrer Natur nach die Veränderlichen x, y, z zu vermindern, was bei z, da die Schwerkraft lediglich nach der Achse der z und zwar nach ZA wirkt, auch außerdem noch durch die Kraft g geschieht. Bezeichnen daher X, Y, Z die beschleunigenden (hier eigentlich verzögernden) Kräfte parallel zu den Coordinatenachsen x, y, z; so ist $X = -p\,\frac{dx}{ds}$, $Y = -p\,\frac{dy}{ds}$, $Z = -p\,\frac{dz}{ds} - g$ und die drei Gleichungen der Bewegung sind daher im vorliegenden Falle (4. Relat. α)

$$(\beta)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -p\,\frac{dx}{ds},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -p\,\frac{dy}{ds},\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -p\,\frac{dz}{dt} - g.$$

Multiplicirt man von diesen drei Gleichungen die erste mit dy, die zweite mit dx und zieht dann eine von der andern ab, so erhält man $\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt} = 0$ oder $d.\,\frac{dy}{dx} = 0$ und daraus durch Integration $\frac{dy}{dx} = m$ oder $dy = m\,dx$ und daraus durch abermaliges Integriren: $y = mx + n$, wo m und n zwei willkürliche Constanten sind, wovon jedoch, da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, $n = 0$ und daher $y = mx$ wird.

Dieser einer durch den Ursprung gehenden geraden Linie angehörenden Gleichung entspricht der Projection der Trajectorie auf die Ebene der xy, woraus sofort folgt, daſs diese Curve durchaus in einer verticalen Ebene liegt. Nimmt man zur Vereinfachung diese Ebene für die Ebene der xz, so wird $y = 0$ und die vorigen drei Gleichungen der Bewegung reduciren sich auf zwei und zwar sind diese, wenn man nach der üblichen Weise, den Widerstand des Mittels dem Quadrate der Geschwindigkeit des Beweglichen proportional annimmt und daher $p = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ setzt, wobei k ein von der Dichte des Mittels abhängiger Erfahrungscoeffizient ist, sofort:

$$(m)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k\,\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} \quad\text{und}\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -k\,\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dz}{dt} - g.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen läſst sich unmittelbar integriren und gibt, wie leicht zu sehen:

$$(n)\quad \frac{dx}{dt} = C\,.\,e^{-ks}$$

wobei die Constante C durch die Geschwindigkeit c, mit welcher der bewegliche Körper geworfen wird und den Winkel $SAB = \alpha$ der Richtung mit dem Horizont ausgedrückt werden kann; es ist nämlich für $s = 0$ (wie in 57. Gleich. h) $\frac{dx}{dt} = C = c\,Cos\,\alpha$.

Um auch die zweite dieser genannten Gleichungen zu integriren, setze man $dz = u\,dx$, wo u eine neue Unbekannte und zwar eine Function von x seyn soll. Diese Gleichung nach t differenzirt gibt: $\frac{d^2z}{dt^2} = u\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{du}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}$ und wenn man diesen Werth in die genannte zweite Gleichung substituirt und dabei die erste Gleichung (m) so wie jene $dz = u\,dx$ berücksichtiget und abkürzt, erhält man:

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{du}{dt} = -g.$$

Eliminirt man nun aus dieser und der obigen Gleichung (n) das Element dt, so erhält man, Kürze halber $-\frac{g}{2\,C^2} = a$ gesetzt:

$$\frac{du}{dx} = 2\,a\,.\,e^{2ks} \;\ldots\; (r)$$

Wird nun diese Gleichung integrirt, so erhält man den Werth von u als Function von x und wenn man diesen gefundenen Werth von u in die obige Gleichung $dz = u\,dx$ substituirt, so erhält man eine Gleichung des ersten Grades zwischen z und x ohne t, als Differenzialgleichung der gesuchten Trajectorie.

Setzt man als den einfachsten Fall den Widerstand des Mittels, also auch $k = 0$, so gibt die vorige Gleichung: $\frac{du}{dx} = 2\,a$, oder wenn man integrirt $u = 2\,a\,x + b$, wo b eine neue Constante bezeichnet.

Setzt man in diese Gleichung für u den aus der obigen Gleichung $dz = u\,dx$ folgenden Werth $\frac{dz}{dx}$ und integrirt abermals, so erhält man:

$$(1) \quad z = a\,x^2 + b\,x$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $z = 0$ seyn muſs. Diese Gleichung gehört aber einer gemeinen Parabel an, deren Achse mit der Achse der z parallel, also vertical ist, welche Curve auch in der That (wie wir bereits in **57.** gesehen) die Trajectorie des beweglichen Punctes bildet.

Was die beiden Constanten a, b betrifft, so ist nach Obigem $a = -\frac{g}{2\,C^2} = -\frac{g}{2\,c^2\,Cos\,\alpha^2}$ bereits bestimmt; um b zu bestimmen, hat man, wegen $u = \frac{dz}{dx} = tang\,.\,MTX$ für $x = 0$ sofort $u = tang\,\alpha$ und wenn man diese Werthe für x und u in der vorigen Gleichung $u = 2\,a\,x + b$ substituirt: $b = tang\,\alpha$. Mit diesen Werthen von a und b wird aber die Gleichung (1) mit jener (1) in **57.**, wie es seyn soll, vollkommen identisch.

Die Gleichung (n) gibt unter dieser Voraussetzung von $k = 0$ integrirt, $x = Ct$ (wozu keine Constante kommt, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ seyn soll) d. i. wegen $C = c\,Cos\,\alpha$,

$$x = c\,t\,Cos\,\alpha$$

und wenn man aus dieser und der Gleichung (1) x eliminirt und für a und b die Werthe setzt:

$$z = c\,t\,Sin\,\alpha - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen zeigt, daſs die Bewegung nach horizontaler Richtung gleichförmig ist, während aus der letztern folgt, dafs sich in verticaler Richtung der schwere Körper gerade so verhält, als wenn er mit der entsprechenden Seitengeschwindigkeit $c\,Sin\,\alpha$ vertical aufwärts geworfen würde.

6. Betrachten wir jetzt die Bewegung eines materiellen Punctes, welcher der Bedingung unterworfen ist, auf einer gegebenen Fläche oder Curve bleiben zu müssen, und bezeichnen wir den Widerstand, welchen er von Seiten der Fläche oder Curve in der Richtung der Normale erleidet, durch N, so kann man diesen Widerstand als eine Kraft ansehen und zu den übrigen beschleunigenden Kräften, welche auf den beweglichen Punct wirken, hinzufügen, um dadurch diesen Punct wie einen freien Punct behandeln zu können. Sind daher α, β, γ die Winkel, welche die erwähnte Normale mit den drei rechtwinkeligen Achsen bildet, so sind die Gleichungen der Bewegungen:

$$(a)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = X + N\,Cos\,\alpha,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\,Cos\,\beta,\quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\,Cos\,\gamma.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen beziehungsweise mit $2\,dx$, $2\,dy$, $2\,dz$, summirt sie dann und integrirt, so erhält man, wenn v die Geschwindigkeit des Beweglichen im Puncte x, y, z daher

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = v^2 \text{ ist:}$$

$$(b)\quad v^2 = C + 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + 2\int N(Cos\,\alpha\,dx + Cos\,\beta\,dy + Cos\,\gamma\,dz).$$

Ist aber $Z = 0$ die Gleichung der Fläche, auf welcher der bewegliche Punct zu bleiben gezwungen ist, so ist bekanntlich

$$Cos\,\alpha = V\left(\frac{dZ}{dx}\right),\quad Cos\,\beta = V\left(\frac{dZ}{dy}\right) \text{ und } Cos\,\gamma = V\left(\frac{dZ}{dz}\right)$$

wobei $V = \dfrac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{dZ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dz}\right)^2\right]}}$ ist. Aus diesen Gleichungen folgt, wegen $dZ = \left(\frac{dZ}{dx}\right)dx + \left(\frac{dZ}{dy}\right)dy + \left(\frac{dZ}{dz}\right)dz$ sofort

$$Cos\,\alpha\,dx + Cos\,\beta\,dy + Cos\,\gamma\,dz = V\,dZ = 0$$

womit sich die vorige Gleichung auf die folgende einfachere

$$v^2 = C + 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

reducirt, in welcher also die Unbekannte N nicht mehr erscheint. Aus dieser Gleichung folgt nun, dafs wenn die beschleunigenden Kräfte nicht Null sind, die Geschwindigkeit v variabel sey und von der Fläche oder Curve abhängt, auf welcher der bewegliche Punct bleiben mufs.

Bestimmt man nun den Druck N, welchen der bewegliche Punct auf die Fläche oder Curve ausübt und zwar als einfachsten Fall unter der Voraussetzung, dafs keine beschleunigenden Kräfte auf ihn einwirken, so wird nach der vorigen Gleichung (wegen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$) die Geschwindigkeit v, und wegen $ds = v\,dt$ auch das Curvenelement ds constant.

Die obigen drei Gleichungen der Bewegung (a) gehen dadurch, wenn man zugleich für dt sienen Werth $\frac{ds}{v}$ setzt, über in die folgenden:

$$v^2 \frac{d^2x}{ds^2} = N \operatorname{Cos} \alpha, \quad v^2 \frac{d^2y}{ds^2} = N \operatorname{Cos} \beta, \quad v^2 \frac{d^2z}{ds^2} = N \operatorname{Cos} \gamma$$

und daraus folgt, wenn man diese Gleichungen quadrirt und addirt (wegen $\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \beta^2 + \operatorname{Cos} \gamma^2 = 1$):

$$N = \frac{v^2 \sqrt{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]}}{ds^2}$$

Ist aber ς der Krümmungshalbmesser der betreffenden Curve, welche der bewegliche Punct beschreibt, oder auf welcher er bleiben mufs, so ist bekanntlich unter der Voraussetzung, dafs ds constant:

$$\varsigma = \frac{ds^2}{\sqrt{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]}}$$

folglich auch $\qquad N = \frac{v^2}{\varsigma}$

welcher Werth aber zugleich der Centrifugalkraft des materiellen Punctes von der Masse $= 1$ angehört, wie wir diefs bereits oben auf einem andern Weg gefunden haben.

Mufs der Punct anstatt auf einer gegebenen Curve auf einer krummen Fläche bleiben, so ist die Centrifugalkraft, wie aus der vorigen Gleichung hervorgeht, gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit des materiellen Punctes dividirt durch den Krümmungshalbmesser der Trajectorie; da aber die Ebene, in welcher der Krümmungskreis liegt, d. h. die Krümmungsebene beständig oder überall auf der gegebenen Fläche perpendikulär steht, welche Eigenschaft im Allgemeinen der zwischen zwei Puncten der Oberfläche möglichen kürzesten Linie zukömmt; so beschreibt dieser Punct oder das Mobile zugleich diese kürzeste Linie, eine Eigenschaft, welche dem sogenannten Principe der kleinsten Wirkung entspricht.

Um die Centrifugalkraft mit der Schwerkraft zu vergleichen, so sey h die zu v gehörige Geschwindigkeitshöhe, also $h = \frac{v^2}{2g}$; so ist die Centrifugalkraft eines an einem Faden von der Länge r befestigten materiellen Punctes von der Masse $= 1$, welcher im Kreise mit der Geschwindigkeit v herum geschwungen wird:

$$f = \frac{v^2}{r} = g \frac{2h}{r} \quad \text{oder} \quad \frac{f}{g} = \frac{2h}{r}.$$

Für $h = \frac{1}{2} r$ wird $f = g$ also die Centrifugalkraft gleich der Schwere, d. h. wenn die Geschwindigkeit des am Faden befestigten und in einem horizontalen Kreise herumgeschwungenen Körpers so grofs ist, als wenn er durch den halben Halbmesser des Kreises frei herabgefallen wäre, so erleidet der Faden durch die Centrifugalkraft dieselbe Spannung als wenn der Körper am Faden vertical aufgehängt würde.

Dasselbe folgt auch nach unserer gewöhnlichen Bezeichnung der Centrifugalkraft, d. i. aus (§. 155, Gl. 1) $F = \frac{Mv^2}{rg} = \frac{2 Mhg}{rg} = M \frac{2h}{r}$ woraus für $h = \frac{1}{2} r$ ebenfalls wieder $F = M$ folgt, wobei M das Gewicht der Masse bezeichnet.

7. Betrachtet man endlich die Körper, deren Bewegung untersucht wird, als materielle Puncte, so bildet ganz einfach der Quotient aus der in einer gegebenen Zeit erzeugten Geschwindigkeit dividirt durch diese Zeit das Maſs der bewegenden Kraft. Um aber Kräfte mit einander zu vergleichen, die auf verschiedene Körper wirken, muſs man auch auf die Massen dieser Körper Rücksicht nehmen, und in diesem Falle dient bei der gleichförmigen Bewegung (§. 132) das Product aus der Masse des Körpers in seine Geschwindigkeit, d. i. die Gröſse der Bewegung, dagegen bei der ungleichförmigen Bewegung das Product aus der Masse in den Quotienten, welcher entsteht, wenn man die in dem Elemente der Zeit erlangte unendlich kleine Geschwindigkeit durch dieses Zeitelement dividirt, als Maſs der bewegenden Kraft (Nr. 55).

Betrachtet man ein System von Körpern oder materiellen Puncten, welche auf irgend eine Weise mit einander verbunden sind, im Zustande der Bewegung, so ist klar, daſs die Bewegung jedes einzelnen Körpers das Resultat seyn muſs aus der auf ihn einwirkenden Kraft und der Reaction der übrigen Körper des Systems, welche auf ihn Statt findet. Daraus folgt aber, daſs keiner dieser Körper im Allgemeinen jene Bewegung annehmen wird, die er vermöge des ursprünglich erhaltenen Impulses und der ihn treibenden beschleunigenden Kräfte angenommen hätte, wenn er frei wäre. Um nun diese von dem Systeme, wovon er einen Theil ausmacht herrührende Veränderung in der Bewegung zu bestimmen, und die wirklich Statt findende Bewegung zu erhalten, hat *D'Alembert* ein allgemeines Bewegungsprincip aufgestellt, mittelst welchem man im Stande seyn sollte alle auf die Bewegung sich beziehenden Aufgaben in Gleichungen zu bringen oder auf Aufgaben der Statik zurückzuführen. Dieses Princip ist folgendes:

„Theilt man den Körpern eines Systemes Bewegungen mit, welche durch „ihre gegenseitigen Verbindungen modificirt werden, so kann man diese „Bewegungen so ansehen als beständen sie aus denjenigen, welche die „Körper wirklich annehmen und aus andern Bewegungen, welche vernichtet „werden; diese letztern Bewegungen müssen daher so beschaffen seyn, „daſs wenn die Körper des Systemes von diesen allein afficirt würden, „diese sofort im Gleichgewichte wären.“

Dieses *D'Alembert*'sche Princip gilt sowohl für momentan, als continuirlich wirkende Kräfte; da jedoch die Bestimmung der Kräfte, welche vernichtet werden und für sich im Gleichgewicht stehen müssen, oft sehr weitläufig und schwierig wird; so wurde dieses Princip später modificirt und in folgender Weise ausgesprochen:

„Gibt man jedem Körper eines Systemes eine Bewegung, die derjenigen, „welche er annehmen muſs, gleich, aber direct entgegengesetzt ist, so wird „das ganze System ruhen; diese Bewegungen vernichten daher diejenigen,

„welche die Körper angenommen hätten, wenn sie frei gewesen wären, „folglich mufs zwischen diesen verschiedenen Bewegungen oder den sie „erzeugenden Kräften Gleichgewicht vorhanden seyn.“

Es seyen nun m, m', m'' . . die Massen der verschiedenen Körper eines solchen Systemes, x, y, z, x', y', z' . . die rechtwinkeligen Coordinaten ihrer Schwerpuncte nach Verlauf der Zeit t, und X, Y, Z, X', Y', Z' . . die auf die Masseneinheit der Körper m, m' . . nach den Richtungen der Coordinatenachsen (d. i. mit diesen parallel) wirkenden beschleunigenden Kräfte, folglich mX, mY, mZ, $m'X'$, $m'Y'$, $m'Z'$ u. s. w. die bewegenden Kräfte, welche beziehungsweise die Körper m, m' u. s. w. nach den genannten Richtungen treiben; endlich soll das Element der Zeit dt als constant angesehen werden. Diefs vorausgesetzt sind die den Körper m am Ende des folgenden Zeitelementes nach den Richtungen der Coordinatenachsen afficirenden Geschwindigkeiten $= \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, folglich (Nr. 56) die ihn nach diesen Richtungen treibenden bewegenden Kräfte $= m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$. Diese Kräfte gehen im nächstfolgenden Zeitelemente wegen der Wirkung der beschleunigenden Kräfte über in $m\frac{dx}{dt} + mX\,dt$, $m\frac{dy}{dt} + mY\,dt$, $m\frac{dz}{dt} + mZ\,dt$ (weil wenn $X = \frac{dv}{dt}$ gesetzt wird, $X\,dt = dv$ die Zunahme der Geschwindigkeit während der Zeit dt bezeichnet, daher die beschleunigende Kraft $\frac{dx}{dt}$ in $\frac{dx}{dt} + X\,dt$ übergeht). Die wirklichen Zunahmen aber, welche die Geschwindigkeiten des Körpers m parallel zu den Coordinatenachsen zufolge seiner Verbindung mit den übrigen Körpern des Systemes erhalten und auf deren Bestimmung es hier eigentlich ankommt, sind $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt}$, folglich die wirklichen bewegenden Kräfte, welche den Körper m am Ende der Zeit dt nach den genannten Richtungen treiben:

$$m\frac{dx}{dt} + m\frac{d^2x}{dt}, \quad m\frac{dy}{dt} + m\frac{d^2y}{dt}, \quad m\frac{dz}{dt} + m\frac{d^2z}{dt}.$$

Bringt man also diese mit den drei vorigen Kräften auf den Körper m in direct entgegengesetzter Richtung an, so bleiben für die auf diesen Körper wirkenden bewegenden Kräfte:

$$m\left(X\,dt - \frac{d^2x}{dt}\right), \quad m\left(Y\,dt - \frac{d^2y}{dt}\right), \quad m\left(Z\,dt - \frac{d^2z}{dt}\right) \qquad (a)$$

Um die ähnlichen Ausdrücke für die übrigen Körper m', m'' . . des Systemes zu erhalten, darf man die Buchstaben m, x, y, z, X, Y, Z dieses Ausdruckes (a) nur mit einem, zwei u. s. w. Accente versehen.

Da nun aber dem *D'Alembert*'schen Principe zufolge das System unter der vereinten Wirkung dieser Kräfte im Gleichgewichte seyn mufs, so braucht man in den allgemeinen Gleichungen (s) von Nr. 21, (Anmerk. 2) nur statt der Seitenkräfte $P\,Cos\,\alpha$, $P\,Cos\,\beta$, $P\,Cos\,\gamma$ beziehungsweise die vorigen Kräfte (a) zu substituiren. Man erhält dadurch:

$$\Sigma\, m\left(X\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t}\right) = 0, \text{ oder}$$

$$(t)\quad\left\{\begin{aligned}
&\Sigma\,(mX) = \Sigma\left(m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right) \text{ und eben so}\\
&\Sigma\,(mY) = \Sigma\left(m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\\
&\Sigma\,(mZ) = \Sigma\left(m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right), \text{ ferner}\\
&\Sigma\,(m\,[Xy - Yx]) = \Sigma\left(m\left[\frac{y\,\mathrm{d}^2x - x\,\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right]\right)\\
&\Sigma\,(m\,[Xz - Zx]) = \Sigma\left(m\left[\frac{x\,\mathrm{d}^2z - z\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right]\right)\\
&\Sigma\,(m\,[Yz - Zy]) = \Sigma\left(m\left[\frac{y\,\mathrm{d}^2z - z\,\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right]\right)
\end{aligned}\right.$$

diefs sind sonach die Gleichungen der Bewegung für ein beliebiges freies System von Körpern m, m', m'' . . Wäre einer dieser Körper gezwungen auf einer gegebenen Fläche oder Curve zu bleiben, so müfste man den auf ihn wirkenden Kräften noch den Widerstand (als neue Kraft) hinzufügen, welchen der Körper von der Fläche oder Curve erleidet, um dann auch diesen Körper wieder als völlig frei betrachten zu können. (Eine specielle Anwendung des *D'Alembert*'schen Principes oder Lehrsatzes
170 kommt in Nr. 169 mit weiteren Erläuterungen vor.)

Diese 6 Gleichungen enthalten mehrere allgemeine Bewegungsgesetze oder Lehrsätze, wovon wir hier jedoch nur einen der wichtigsten anführen wollen.

8. Sind nämlich nach Verlauf der Zeit t, diese vom Augenblicke an gezählt als die Bewegung beginnt, x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunctes des Systems der Körper oder materiellen Puncte m, m'.. so ist (Nr. 33.)

$$x_1\,\Sigma\,(m) = \Sigma\,(mx),\quad y_1\,\Sigma\,(m) = \Sigma\,(my),\quad z_1\,\Sigma\,(m) = \Sigma\,(mz)$$

und wenn man diese Gleichungen zweimal nach t differenziirt:

$$\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}\,\Sigma\,(m) = \Sigma\left(m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right),\quad \frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t^2}\,\Sigma\,(m) = \Sigma\left(m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\mathrm{d}t^2}\,\Sigma\,(m) = \Sigma\left(m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

Setzt man diese Werthe in die drei ersten der vorigen Gleichungen (t), so erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}\,\Sigma\,(m) = \Sigma\,(mX),\quad \frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t^2}\,\Sigma\,(m) = \Sigma\,(mY),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\mathrm{d}t^2}\,\Sigma\,(m) = \Sigma\,(mZ),$$

diese Gleichungen zeigen, dafs die Bewegung des Schwerpunctes eines freien Systemes von materiellen Puncten oder Körpern im Raume genau so Statt findet, als wenn die sämmtlichen Massen m, m'.. in diesem Puncte vereinigt und alle ihre bewegenden Kräfte durch parallele Verschiebungen ihrer Richtungen auf diesen Punct angebracht wären.

Da nun auf diese Weise alle jene Kräfte, deren Componenten oder Seitenkräfte (parallel mit den Achsen) einander gleich und entgegengesetzt sind, aus den Differenzialgleichungen dieser Bewegung hinausfallen, dieser Fall aber dann eintritt, wenn die bewegenden Kräfte keine äufseren sind, sondern aus den wechselseitigen Wirkungen entstehen, welche die materiellen Puncte des Systemes aufeinander ausüben, indem sich diese nach dem allgemeinen Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, wenn diese Kräfte auf den Schwerpunct des Systems übertragen werden, zu zwei und zwei aufheben; so bewegt sich, sobald auf die materiellen Puncte des gänzlich freien Systemes aufser ihrer eigenen gegenseitigen Einwirkung (durch Anziehung oder Abstofsung) keine anderen Kräfte wirken, der Schwerpunct desselben gleichförmig und geradlinig und behält beständig die anfängliche Richtung und Geschwindigkeit bei, wefshalb man diesen Lehrsatz das Princip von der Erhaltung der Schwerpuncts-Bewegung genannt hat.

9. Um von diesem wichtigen Satze ein einfaches Beispiel zu geben, wollen wir die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes zweier Kugeln betrachten, welche aufeinander stofsen.

Es seyen am Ende der Zeit t x und x' die Abstände ihrer Mittelpuncte von einem festen Punct der Geraden, auf welcher sich die Kugeln m und m' bewegen, so wie x_1 (in demselben Augenblicke) der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunctes dieser Körper von demselben Puncte; so hat man (Nr. 33):

$$(m + m')\, x_1 = m\, x + m'\, x'$$

oder wenn man nach t differenziirt:

$$(m + m') \frac{dx_1}{dt} = m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} \dots \quad (\alpha)$$

wodurch die den Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dx'}{dt}$ der beiden Kugeln entsprechende Geschwindigkeit $\frac{dx_1}{dt}$ des Schwerpunctes gegeben ist.

Nun hat man aber vor dem Stofs (§. 199) $\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{dx'}{dt} = v'$, und nach dem Stofs, wenn die Kugeln unelastisch sind $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = V$, und wenn sie vollkommen elastisch sind: $\frac{dx}{dt} = 2V - v$, $\frac{dx'}{dt} = 2V - v'$ (§. 202). Es ist also die Geschwindigkeit des Schwerpunctes vor dem Stofs, wenn man in die Gleichung (α) substituirt:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

und nach dem Stofs, mit Rücksicht auf die Relation von $V = \dfrac{mv + m'v'}{m + m'}$

für beide Fälle (wenn man wieder in (α) gehörig substituirt):

$$\frac{dx_1}{dt} = V = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

welches genau derselbe Werth wie vor dem Stofse ist; der Stofs dieser beiden Körper ändert also durchaus nichts in der Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunctes (da er sich überdiefs auch auf der ursprünglichen Geraden fortbewegt).

10. Sind die mit den Massen m, m', m'' . . behafteten materiellen Puncte in Bewegung, so seyen für einen bestimmten Augenblick x, x', x''. . ihre Abscissen auf eine beliebige Achse bezogen und X die Abscisse des Schwerpunctes dieses System für denselben Augenblick; so ist (Nr. 33) $(m + m' + ..) X = mx + m'x' + ..$ d. h. $X\Sigma(m) = \Sigma(mx)$. Während des folgenden Zeitelementes dt nehmen die Abscissen um dx dx' . . . dX zu und man hat $\dfrac{dX}{dt}\,\Sigma(m) = \Sigma\left(m\dfrac{dx}{dt}\right)$, ($u$), d. h. die auf eine Achse projicirte Gröfse der Bewegung der Gesammtmasse des Systems, diese im Schwerpunct desselben vereinigt gedacht, ist gleich der Summe der Bewegungsgröfsen sämmtlicher einzelner Massen projicirt auf die nämliche Achse. Zwei ähnliche Gleichungen mit (u) erhält man auch für die beiden übrigen Coordinatenachsen. Ist V die Geschwindigkeit des Schwerpunctes und v, v' . . jene der Puncte m, m' . . so kann man, wenn V_x die Projection der Geschwindigkeit auf die Achse der x bezeichnet und damit analog auch die übrigen Projectionen bezeichnet werden, diese Gleichungen so schreiben:

$$V_x\,\Sigma(m) = \Sigma(mv_x),\quad V_y\,\Sigma(m) = \Sigma(mv_y),\quad V_z\,\Sigma(m) = \Sigma(mv_z).$$

Bestimmung der Centrifugalkraft eines Körpers.

(§. 156.)

62. Handelt es sich nicht blofs um einen materiellen Punct, sondern um einen Körper von endlicher Ausdehnung, so sey zuerst NS (Fig. 29) irgend eine ebene Fläche von der Gröfse F, über welche die Masse M gleichförmig vertheilt ist und welche sich um einen in ihrer Ebene liegenden Punct A oder um eine auf dieser Ebene in A perpendikuläre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit w umdreht.

Betrachtet man bei dieser Umdrehung einen Punct M dieser Fläche, wofür die in derselben Ebene angenommenen rechtwinkeligen Coordinaten $AP = x$, $AQ = y$ sind und die entsprechende Fläche $\mathrm{d}F$ für die Masse $\mathrm{d}M$ und umgekehrt gesetzt werden kann; so erhält man für die Centrifugalkraft $\mathrm{d}R$ des materiellen Punctes $\mathrm{d}M$ (wenn man nämlich diese Kraft für die ganze Fläche oder Masse mit R bezeichnet) nach §. 155:
$\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}F \,.\, z^2 w^2}{z} = z w^2 \mathrm{d}F$, wenn man nämlich den Abstand $AM = z$ setzt.

Zerlegt man diese, nach AM wirksame Kraft, in zwei nach den rechtwinkeligen Achsen AX, AY wirkende Seitenkräfte $\mathrm{d}P$ und $\mathrm{d}Q$, so wird $\mathrm{d}P = \mathrm{d}R \,.\, \frac{x}{z}$ und $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}R \,.\, \frac{y}{z}$ oder:

$$\mathrm{d}P = w^2 x \,\mathrm{d}F \text{ und } \mathrm{d}Q = w^2 y \,\mathrm{d}F;$$

diese Gleichungen integrirt geben:

$$P = w^2 \int x \,\mathrm{d}F \text{ und } Q = w^2 \int y \,\mathrm{d}F,$$

oder wenn X und Y die Coordinaten des Schwerpunctes dieser Fläche F sind (man sehe die Relationen I in Nr. **22.**):

$$P = w^2 X F \text{ und } Q = w^2 Y F.$$

Da nun R die Mittelkraft aus diesen beiden Seitenkräften seyn soll, so folgt, wenn man auch gleich die Masse M statt der Fläche F setzt:

$$R = \sqrt{(P^2 + Q^2)} = w^2 M \sqrt{(X^2 + Y^2)} = w^2 M r, \ldots \quad (\alpha)$$

wenn man nämlich den Abstand des Schwerpunctes O dieser Fläche oder Masse von A d. i. $AO = r$ setzt; es ist also die gesuchte Centrifugalkraft für diese Fläche, über welche die Masse M gleichförmig vertheilt ist:

$$R = \frac{M (r w)^2}{r} = \frac{M v^2}{r},$$

wenn man nämlich die Geschwindigkeit des Schwerpunctes $r w = v$ setzt. Diese nach AO wirksame Centrifugalkraft ist also eben so groſs, als ob die gesammte Masse M im Schwerpuncte dieser Fläche NS vereinigt und die Kraft selbst in diesem Puncte O angebracht wäre.

63. Dreht sich ein Körper MN (Fig. 30) um die Gerade AB als Achse, so theile man denselben in unendlich dünne parallele Schichten, welche auf der Achse AB perpendikulär stehen; so erhält man nach der vorigen Nr. eben so viele, in den Schwerpuncten o, o', o'' . . dieser Schichten perpendikulär auf die Umdrehungsachse AB wirksame Centrifugalkräfte, wovon jede (Gleich. α) dem Producte aus der Masse der betreffenden Schichte in den Abstand $a\,o$ ihres Schwerpunctes o von $A\,B$ und das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit gleich ist. Da aber diese Kräfte im Allgemeinen nicht zu einander parallel seyn (d. i. nicht in einer einzigen durch $A\,B$ gehenden Ebene liegen) werden, so können diese nach Umständen eine einzige Resultirende haben, oder sich auf zwei Kräfte (§. 21) oder auf eine Resultirende gleich Null reduciren, in welch letzterem Falle diese Kräfte auf die Umdrehungsachse $A\,B$ keinerlei Druck oder Zug ausüben.

64. Liegen dagegen die sämmtlichen Schwerpuncte o, o' .. dieser dünnen Schichten in einer einzigen Geraden $D\,E$, welche mit der Umdrehungsachse $A\,B$ parallel läuft, und von ihr den Abstand r besitzt; so haben auch alle die einzelnen Schwerpuncte einerlei Abstände von dieser Achse und zwar ebenfalls $= r$. Die einzelnen Centrifugalkräfte werden untereinander parallel und liegen sämmtlich in der durch $D\,E$ und $A\,B$ gedachten Ebene, so dafs demnach ihre Resultirende, indem die einzelnen Kräfte den Massen, also auch den Gewichten der betreffenden Schichten proportional sind, durch den Schwerpunct des ganzen Körpers $M\,N$ geht und ihre Gröfse gleich der Summe dieser parallelen Kräfte, d. i. $R = m\,r\,w^2 + m'\,r\,w^2 + .. = (m + m' + ...)\,r\,w^2$ ist, wenn nämlich m, m', m'' . die Massen der einzelnen Schichten und w die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Achse $A\,B$ bezeichnen; setzt man daher $m + m' + m'' + .. = M$ als Masse des ganzen Körpers, so ist dessen Centrifugalkraft:

$$R = M\,r\,w^2 = \frac{M\,v^2}{r} \quad (\text{für } v = r\,w)$$

genau eben so grofs und wirkt auf dieselbe Weise, als ob die gesammte Masse des Körpers in dessen Schwerpunct vereinigt wäre.

Anmerkung. Dieser hier erwähnte einfache Fall findet namentlich bei der Kugel, dem Cylinder, geraden Prisma, Kegel und überhaupt allen Rotationskörpern Statt, bei welchen die Achse mit der Umdrehungsachse parallel ist. Da für $r = 0$ auch $R = 0$ wird, so folgt, dafs wenn in diesen genannten Fällen die Achse des Körpers zugleich die Rotationsachse ist, diese letztere keinen Druck oder Zug durch die Centrifugalkraft erleide.

Ist bei einer Kugel, welche sich während der Zeit t einmal um ihre Achse dreht, r der Abstand irgend eines Punctes von dieser Achse, so ist dessen Geschwindigkeit $= \frac{2\,r\,\pi}{t}$ und Centrifugalkraft $= \frac{4\,r^2\,\pi^2}{r\,t^2} = \frac{4\,r\,\pi^2}{t^2}$ nämlich seinem Abstande von der Achse proportional.

Da unterm Aequator unserer Erde die Schwere und Centrifugalkraft einander gerade entgegen wirken, so hat dort die Schwere einen Werth, welcher jenem gleich wäre, wenn die Rotation der Erde nicht bestünde, vermindert um die Centrifugalkraft. Abstrahirt man von den geringen Veränderungen der Schwere in den verschiedenen Breiten, so kann man diese unterm Aequator $= g$ setzen, und wenn man ihre Intensität, in der Voraussetzung dafs keine Achsendrehung der Erde Statt fände, durch G bezeichnet, so ist nach dem Vorigen:

$$g = G - \frac{4 r \pi^2}{t^2}.$$

Da nun aber für den Aequator in runder Zahl $2 r \pi = 40000000$ Meter und $t = 86164$ Secunden beträgt, so ist wegen $g = 9{\cdot}808$ M. sehr nahe $\frac{4 r \pi^2}{g t^2} = \frac{1}{289}$, folglich

$$g = G - \frac{g}{289} \quad \text{oder auch nahe} \quad g = G\left(1 - \frac{1}{289}\right)$$

so, dafs also die Schwerkraft dort um den 289sten Theil ihres Werthes vermindert wird. Da aber 289 das Quadrat von 17 und die Centrifugalkraft dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so folgt, dafs wenn die Rotationsgeschwindigkeit unserer Erde beiläufig 17 Mal gröfser wäre, die Schwere unterm Aequator gleich Null seyn würde.

Von dem Momente der Trägheit.

(§. 159.)

65. Wir haben bereits in der Einleitung (§. 2, 6.) bemerkt, dafs man das Streben der Materie, in dem Zustande der Ruhe oder Bewegung zu verharren, Trägheit nennt, und diese mufs sofort als ein Naturgesetz oder als erstes Gesetz der Bewegung der Körper betrachtet werden. Diese Trägheit ist auch die Ursache, dafs man, um einen auf einer horizontalen Ebene liegenden Körper, selbst wenn er weder von der Reibung, noch einem sonstigen Widerstand zurückgehalten würde, auf dieser Ebene fort zu bewegen, einer gewissen Anstrengung bedarf, eine Anstrengung oder Kraft, welche bei einerlei Geschwindigkeit in dem Mafse gröfser wird, als die Masse des Körpers zunimmt.

Bringt man zwischen dem Körper M (Fig. 31) und der ziehenden Kraft P, welche wir zuerst als eine constante ansehen wollen und etwa in einem Gewichte bestehen kann, eine Spiralfeder ab an, so wird sich diese während der Bewegung der Masse M, welche unter den gemachten Voraussetzuugen eine gleichförmig beschleunigende seyn wird, bis zu einem gewissen Grade ausdehnen und in diesem Zustande des Gleichgewichtes, so lange die Bewegung dauert, permanent verharren; hieraus folgt also, dafs die Feder durch die blofse Trägheit der Masse des Körpers M in der Richtung von a gegen c mit derselben Stärke zurückgehalten, als durch die Kraft P von b gegen d gezogen wird. Die Wirkung oder Action, welche an dem einen Ende b der Feder ausgeübt wird und die Beschleunigung der Masse M hervorbringt, ist daher immer von einer gleichen und entgegengesetzten Gegenwirkung oder Reaction an dem andern, mit dem Körper verbundenen Ende a derselben begleitet, und da die Feder in diesem Zustande des Gleichgewichtes wie von zwei gleichen entgegengesetzt wirkenden Kräften gezogen wird, so hat man wohl auch diese von a nach c Statt findende Reaction, obwohl nicht ganz richtig, Kraft der Trägheit genannt.

Alle Erfahrungen und Versuche beweisen, dafs bei allen durch constante Kräfte erzeugten Bewegungen, Action und Reaction beständig einander gleich sind, und da man auch eine veränderliche Kraft während einer unendlich kleinen Zeit als constant ansehen kann, so gilt diese Eigenschaft in der Mechanik als ein allgemeines Gesetz, so, dafs so oft ein materieller Punct auf einen andern eine Wirkung oder Action ausübt und erzeugt, dieser letztere immer auch auf den erstern eine gleiche und entgegengesetzte Wirkung oder Reaction hervorbringt, dergestalt, dafs wenn diese Puncte auf eine unveränderliche Weise miteinander verbunden wären, sich diese beiden Wirkungen vollkommen aufheben oder zerstören würden.

Drückt man z. B. mit dem Finger einen Körper, zieht man einen Körper mittelst eines Fadens, oder stöfst diesen mittelst einer Stange; so empfindet man einen Druck, Zug oder Stofs nach entgegensetzter Richtung von ganz gleicher Gröfse oder Stärke.

Durch diese Reaction oder den Widerstand, welchen ein freier Körper jener Kraft entgegensetzt, welche in ihm Bewegung erzeugen oder zerstören will und welche sofort dieser Kraft oder ihrer Wirkung selbst gleich ist, wird zugleich die Trägheit der Masse oder Materie dieses Körpers gemessen. Man weifs, dafs dieser Widerstand mit der Masse und der Geschwindigkeit zunimmt, welche in der Masse erzeugt oder zerstört werden soll. Hängt man z. B. einen Körper vertical an eine Federwage, so wird diese im Stande der Ruhe das Gewicht des Körpers anzeigen; hebt man dagegen die Wage sammt dem daran hängenden Körper mit einer gewissen Geschwindigkeit in die Höhe, so wird sich die Feder, in Folge des Widerstandes, welchen die Trägheit der Masse oder Materie des Körpers dieser Bewegung entgegensetzt, noch weiter biegen, oder der Zeiger gleichsam ein noch gröfseres Gewicht anzeigen. Bleibt bei dieser Bewegung die einmal erlangte Geschwindigkeit constant, so nimmt die Feder oder der Zeiger wieder genau jenen Stand ein, welcher anfangs im

Stande der Ruhe Statt fand und dem Gewichte des Körpers entspricht; nimmt dagegen die Geschwindigkeit ab, so geht der Zeiger noch weiter zurück und zeigt dabei sogar ein kleineres Gewicht als im Stande der Ruhe an.

Befestigt man an einen undehnbaren Faden, dessen Masse man vernachlässigen kann und wovon der eine Endpunct fest gemacht ist, einen materiellen Punct m, setzt diesen in Bewegung und überläfst ihn blofs der Kraft, welche der gespannte Faden von der Länge r auf ihn ausübt (so, dafs also auch von der Schwere abgesehen wird), so bewegt sich dieser Punct gleichförmig im Kreise mit der Geschwindigkeit v und es ist (Nr. 61, Gl. i) $\frac{mv^2}{r}$ die Intensität der Kraft, mit welcher der Faden auf ihn wirkt.

In Folge nun dieses Principes oder allgemeinen Naturgesetzes (dafs jede Wirkung von einer gleichen Gegenwirkung begleitet ist), übt dieser Körper oder materielle Punct auch seinerseits auf den Faden und also auch auf den festen Mittelpunct des Kreises eine Kraft von derselben Intensität $\frac{mv^2}{r}$ aus, deren Richtung aber entgegengesetzt (d. i. vom Mittelpuncte gegen die Peripherie) ist.

Man kann überhaupt alle Körper als Aggregate von materiellen Puncten ansehen, auf welche fortwährend zwei Arten von Kräften in Thätigkeit sind, und zwar sind diese entweder äufsere (wie z. B. die Schwere), oder innere, und diese letztern bestehen in den wechselseitigen Wirkungen, welche die materiellen Puncte des Körpers oder Systemes selbst aufeinander ausüben. Empfängt nämlich eines dieser Elemente, dessen Masse wir mit m bezeichnen wollen, eine Kraftäufserung von Seite eines andern Elementes von der Masse m' und bezeichnen wir diese Kraft durch p, so empfängt eben so das Element m' von jenem m eine Kraft p' und das Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung besteht nun in Folgendem:

1) Die Richtungen dieser beiden Kräfte liegen in der Geraden, welche die beiden Elemente verbindet.
2) Beide Kräfte haben die nämliche Intensität, und
3) sie sind dem Sinne nach einander entgegengesetzt, wirken also beide anziehend oder beide abstofsend.

Obschon von den Gesetzen dieser innern Kräfte nichts weiter bekannt ist als die erwähnte Gleichheit der wechselseitigen Wirkungen, so kann man sich über die Art, wie die Elemente der Körper aufeinander wirken, gleichwohl eine ziemlich klare Vorstellung machen, wenn man die von mehreren Gelehrten aufgestellte Hypothese zu Hilfe nimmt. Nach dieser erstreckt sich das Gesetz der allgemeinen Gravitation auch auf die kleinsten Theile der Materie, so, dafs sich diese um so stärker anziehen, je näher sie sich kommen; aufserdem aber besteht (nach dieser Hypothese) zwischen zwei benachbarten Massentheilchen eine abstofsende Kraft, welche von der Wärme oder von ähnlichen Ursachen abhängt und welche sich mit der Entfernung ändert, jedoch nach einem andern Gesetze als die Gravitation.

Demnach wäre jede von den beiden genannten Kräften p und p' die Differenz oder Resultante zweier Kräfte, nämlich 1) der wechselseitigen Gravitation zwischen den beiden Elementen m und m', dann 2) der wechselseitigen Abstofsung in Folge von Ursachen, welche der Wärme analog sind.

Diese Resultante würde anziehend, abstofsend oder null seyn, je nachdem die Intensität der erstern Kraft gröfser, kleiner, oder gleich der Intensität der letztern wäre.

66. Dehnt man die in §. 159 in Beziehung auf einen materiellen Punct gegebene Definition auf einen Körper von was immer für Dimensionen aus, so versteht man unter dem Moment der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf irgend eine Gerade als Umdrehungsachse, die Summe der Producte der Massen aller einzelnen Elemente des Körpers in die Quadrate ihrer Abstände von dieser Geraden. Bezieht man die Lage des Körpers, dessen Masse $= M$ seyn soll, auf drei rechtwinkelige Achsen und nimmt die Umdrehungsachse für die Achse der z, so ist das Moment der Trägheit in Bezug auf diese Achse:

$$\mu = \int (x^2 + y^2)\, dM$$

wobei dM die Masse des Elementes oder materiellen Punctes bezeichnet, dessen Coordinaten x, y, z sind, und wobei sich das Integrale auf die gesammte Masse M erstreckt. Auf gleiche Weise bezeichnen die Ausdrücke:

$$\int (x^2 + z^2)\, dM \text{ und } \int (y^2 + z^2)\, dM$$

die Trägheitsmomente dieses Körpers in Beziehung auf die Achsen der y und x.

67. Kennt man das Moment der Trägheit eines Körpers in Bezug auf irgend eine Achse, so kann man dasselbe leicht auch für jede andere, mit der erstern parallele Achse finden.

Denn nimmt man die erstere Achse oder Gerade zur Achse der z und legt durch diese und die mit ihr parallele Gerade oder neue Achse die Ebene der xz, setzt den Abstand dieser beiden Geraden $= a$, die Masse des Körpers $= M$ und bezeichnet das Moment der Trägheit desselben in Bezug auf die Achse der z durch $\mathfrak{M}$, so wie in Beziehung auf die neue, mit dieser parallelen Achse durch $\mathfrak{M}'$; so ist, wie leicht zu sehen (da man in dem Ausdrucke von $\mathfrak{M} = \int (x^2 + y^2)\, dM$, $x - a$ statt x setzen muſs):

$$\mathfrak{M}' = \int [(x-a)^2 + y^2]\, dM = \int (x^2 + y^2)\, dM + a^2 \int dM - 2a \int x\, dM$$

d. i. $$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Ma^2 - 2a \int x\, dM,$$

oder wenn X die Abscisse des Schwerpunctes des Körpers bezeichnet, also (Nr. **33.**) $XM = \int x\, dM$ ist, auch

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Ma^2 - 2aXM.$$

Liegt der Schwerpunct in der Achse der z selbst, so ist $X = 0$ und (1) $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Ma^2$, oder, wenn man, da das Moment der Trägheit immer diese Form annimmt, $\mathfrak{M} = Mk^2$ setzt, auch $\mathfrak{M}' = M(k^2 + a^2)$ . . (2) (Vergleiche §. 161, Gleich. 1).

Anmerkung. Hieraus folgt, daſs das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct gehende Achse kleiner, als in Beziehung auf jede andere mit ihr parallele Achse ist.

68. Um das Moment der Trägheit einer materiellen geraden Linie AB (Fig. 32) zu finden, welche sich um ihren Endpunct A dreht, sey ihre Länge $AB = l$ und die gleich vertheilte Masse, welche also dieser Länge proportional ist (so daſs in der Rechnung, wie bei der Bestimmung des Schwerpunctes, eines für das andere genommen werden kann) $= M$; nimmt man ferner in dieser Geraden in dem Abstande $AM = x$ ein Element derselben $Mm = dx$, so kann man dieses für das Element der Masse dM setzen und man hat für das Moment der Trägheit $d\mathfrak{M}$ dieses materiellen Punctes nach §. 159, Relat. 2:

$d\mathfrak{M} = x^2\, dx$, folglich $\mathfrak{M} = \int_0^l x^2\, dx = \frac{1}{3} l^3 = \frac{1}{3} l \,.\, l^2 = \frac{1}{3} M l^2$

(§. 162, Gleich. 1).

Anmerkung. Will man nicht unmittelbar statt der Länge der Linie ihre Masse setzen, so sey m die auf die Längeneinheit kommende Masse, also $M = ml$ und $dM = m\, dx$; dann ist:

$$d\mathfrak{M} = x^2\, dM = mx^2\, dx \text{ und } \mathfrak{M} = m\int_0^l x^2\, dx = \tfrac{1}{3} ml \,.\, l^2$$

d. i. $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} Ml^2$, wie zuvor.

Auf dieselbe Weise könnte man auch bei allen folgenden Ableitungen verfahren, wo wir uns des einfacheren Vorganges bedienen und die auf die Längen- oder Flächeneinheit kommende Masse m, welche am Ende der Rechnung ohnehin wieder hinausfällt, überall auslassen werden.

69. Um das Moment der Trägheit eines **Rechteckes** AD (Fig. 33) zu finden, welches sich um ihren Mittel- oder Schwerpunct O oder eine durch O gehende auf der Ebene des Rechteckes perpendikuläre Achse dreht und dessen Masse $= M$ seyn soll, setze man die beiden Seiten $AB = a$, $BD = b$ und ziehe damit parallel durch den Punct O die Coordinatenachsen der x und y. Zieht man mit dieser letztern parallel in den Abständen $OP = x$ und $Pp = \mathrm{d}x$ die beiden Geraden von der Länge BD, so schliefsen diese ein Rechteck $b\,\mathrm{d}x$ ein, welches ein Element des Rechteckes, also auch dessen Masse M bildet, so, dafs man (mit der in der vorigen Anmerkung erwähnten Abkürzung) $\mathrm{d}M = b\,\mathrm{d}x$ setzen kann. Schneidet man aber auf diesem unendlich schmalen Streifen, indem man in den Abständen $PM = y$ und $Mm = \mathrm{d}y$ mit der Achse der x zwei Parallele zieht, selbst wieder ein Element ab, so bildet dieses neue Rechteck $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ das Differenzial von der vorigen Masse $\mathrm{d}M$, oder es ist $\mathrm{d}^2M = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Da nun aber dieses Element als ein materieller Punct zu betrachten ist, welcher vom Drehungspuncte den Abstand OM hat, wofür $OM^2 = x^2 + y^2$ ist; so hat man nach dem ersten Satze (§. 159, Gl. 2) für dessen Moment der Trägheit, welches, wenn man jenes des Rechteckes AD mit $\mathfrak{M}$, folglich jenes des Rechteckes EF mit $\mathrm{d}\mathfrak{M}$ bezeichnet, durch $\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathfrak{M}) = \mathrm{d}^2\mathfrak{M}$ ausgedrückt werden mufs, sofort $\mathrm{d}^2\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Wird dieser Ausdruck zwei Mal und zwar, da x und y von einander unabhängig sind, einmal nach y (wobei x als constant) und einmal nach x (wobei y als constant zu nehmen ist) beziehungsweise innerhalb der Grenzen von $-\frac{1}{2}b$ bis $+\frac{1}{2}b$ und $-\frac{1}{2}a$ bis $+\frac{1}{2}a$ oder einfacher von 0 bis $\frac{1}{2}b$ und 0 bis $\frac{1}{2}a$ integrirt und im letztern Falle jedes Integrale 2 Mal genommen, so erhält man, da die Ordnung der Integration (Comp. §. 838) willkürlich ist:

$$\mathfrak{M} = 4\int_0^{\frac{1}{2}a}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}b}(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y$$

durch die Ausführung dieser Integration erhält man zuerst

$$\mathfrak{M} = 4\int_0^{\frac{1}{2}a}\mathrm{d}x\,(\tfrac{1}{2}b\,x^2 + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}b^3) = 2\,b\int_0^{\frac{1}{2}a}\mathrm{d}x\,(x^2 + \tfrac{1}{12}b^2), \text{ ferner}$$

$$\mathfrak{M} = 2\,b\,(\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}a^3 + \tfrac{1}{2}a\cdot\tfrac{1}{12}b^2) = a\,b\,(\tfrac{1}{12}a^2 + \tfrac{1}{12}b^2)$$

oder wenn man wieder für die Fläche ab die Masse M setzt, auch

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

(vergl. §. 163, Gleich. 1).

Anmerkung 1. Dafs dieselbe Formel zugleich auch für das Moment der Trägheit eines senkrechten Parallelopipedes gilt, das sich um seine geometrische Achse dreht und für welches das vorige Rechteck AD einen auf dieser durch O gehenden Achse senkrechten Querschnitt bezeichnet, wenn man dabei nur unter dem Factor M die Masse des Parallelopipedes versteht, ist bereits in der Anmerkung zu §. 163 erwähnt. Ist nämlich l die Länge oder Höhe des Parallelopipedes und nimmt man die Umdrehungsachse zur Achse der z, so ist, wenn man aufser den vorigen mit den Achsen der x und y parallel geführten Schnitten (hier Ebenen, welche mit jenen der xz und yz parallel sind), auch noch mit der Ebene der xy (wofür man die untere Grundfläche AD des Körpers nehmen kann) in den Abständen z und $z + dz$ parallele Schnitte führt und dadurch das Körperelement $d^3 M = dx\, dy\, dz$, ferner damit

$$d^3\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz, \text{ also nach Obigem}$$

$$\mathfrak{M} = \int_0^l dz \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} dx \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} (x^2 + y^2)\, dy = \frac{ab}{12} \int_0^l (a^2 + b^2)\, dz = \frac{1}{12} abl\, (a^2 + b^2)$$

oder wegen $abl = M$ sofort wieder $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$.

Beinahe noch einfacher ist die Ableitung für den Fall, dafs sich das rechtwinkelige Parallelopiped, dessen drei zusammenstofsende Seiten a, b, c und Dichte oder Masse der cubischen Einheit $= m$ seyn soll, um die eine Seite oder Kante z. B. um jene c dreht.

Nimmt man nämlich diese drei genannten Seiten für die Achsen der x, y, z, theilt jede dieser Seiten in unendlich viele unendlich kleine Theile und legt durch alle Theilungspuncte Ebenen, welche mit den Seitenflächen des Parallelopipedes parallel laufen (jene durch die in der Kante c liegenden Puncte gelegten Ebenen nämlich parallel mit der Seitenfläche ab oder Ebene der xy u. s. w.), so theilen diese drei Reihen von Ebenen das Parallelopiped in lauter unendlich kleine Theile, wovon jener, welcher den Coordinaten x, y, z entspricht, das Volumen $dx\, dy\, dz$, also die Masse $m\, dx\, dy\, dz$ hat, so, dafs wenn M die Masse des Parallelopipedes bezeichnet, sofort $d^3 M = m\, dx\, dy\, dz$ ist. Das Moment der Trägheit dieses Körpers ist daher in Beziehung auf jene Kante, welche man zur Achse der z genommen hat:

$$\mathfrak{M} = m \iiint (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = m \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x^2 + y^2)\, dz$$
$$= \tfrac{1}{3} m\, abc\, (a^2 + b^2)$$

oder, wegen $m\, abc = M$, auch $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2)$.

Anmerkung 2. Nimmt man den Umdrehungspunct A für das Rechteck BE (Fig. 34) oder Umdrehungsachse für das rechtwinkelige Parallelopiped von den Grundflächen BE aufserhalb an, und setzt auf zwei mit BC und BD parallele Achsen AX, AY bezogen, die Abscissen $AP = a$, $AP' = a'$ und Ordinaten $AQ = b$, $AQ' = b'$, wodurch die beiden Seiten

$BC = a' - a$ und $BD = b' - b$ werden; so erhält man nach dem Satze in §. 161 (Gleich. 1) für das Moment der Trägheit auf diesen Punct A oder einer mit der vorigen durch den Schwerpunct O gehenden parallele Achse bezogen, wegen $AO^2 = \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+b'}{2}\right)^2$:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} M[(a'-a)^2 + (b'-b)^2] + \tfrac{1}{4} M[(a+a')^2 + (b+b')^2]$$

oder wenn man entwickelt und reducirt:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} M(a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + aa' + bb').$$

70. Um das Moment der Trägheit eines rechtwinkeligen Dreieckes ABC (Fig. 35) zu finden, welches sich um eine durch den Winkelpunct A (des rechten Winkels) auf der Ebene ABC perpendikulären Achse umdreht, seyen die beiden Catheten $AB = a$ und $AC = b$. Zieht man in dem Abstande $AP = x$ mit AC parallel die Ordinate $PN = y'$ und nimmt darauf in den Abstand $PM = y$ den Punct M, läſst x um dx und y um dy zunehmen, um das Flächenelement $dx\,dy$ zu erhalten, welches vom Punct A den Abstand AM besitzt, wofür $AM^2 = x^2 + y^2$; so hat man wieder wie vorhin:

$$d^2\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\,dx\,dy \quad \text{oder} \quad \mathfrak{M} = \int_0^a dx \int_0^{y'} (x^2 + y^2)\,dy$$

wobei jedoch y' von x abhängig und zwar wegen $a : b = (a - x) : y'$ sofort $y' = \frac{b}{a}(a - x)$ ist. Führt man die Integration aus, so erhält man zuerst

$$\mathfrak{M} = \int_0^a dx\,(x^2 y' + \tfrac{1}{3} y'^3)$$

und wenn man für y' den Werth setzt, integrirt und reducirt:

$$\mathfrak{M} = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2) \quad \text{oder wegen} \quad M = \tfrac{1}{2} ab \quad \text{auch:}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6} M(a^2 + b^2)$$

(vergl. §. 161, Gl. 1).

71. Zur Bestimmung des Momentes der Trägheit eines gleichschenkeligen Dreieckes ABC (Fig. 36), welches sich um eine durch den der Basis gegenüberliegenden Winkelpunct C gehende, auf der Dreieckebene perpendikuläre Achse dreht (oder eines senkrechten Prismas, welches dieses Dreieck zur Grundfläche hat), sey die Basis $AB = 2a$ und das auf dieselbe aus C gefällte Perpendikel $CD = h$. Nimmt man auf diesem $CP = x$ und zieht durch den Punct P mit AB die Parallele $NN' = 2y'$, ferner auf dieser $PM = y$ und läſst wieder x um dx und y um dy zunehmen, um durch die diesen Puncten entsprechenden, mit AB und CD Parallelen, das Flächenelement $dx\,dy$ zu erhalten, welches dem d^2M entspricht; so hat man wieder genau wie vorhin:

$$d^2\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\,dx\,dy \quad \text{oder} \quad \mathfrak{M} = \int_0^h dx \int_{-y'}^{y'} (x^2 + y^2)\,dy$$

$$= 2\int_0^h dx \int_0^{y'} (x^2 + y^2)\,dy = 2\int_0^h dx\,(x^2 y' + \tfrac{1}{3} y'^3)$$

oder wegen $y' = \frac{a}{h}\,x$ (aus $x : y' = h : a$) auch:

$$\mathfrak{M} = 2\int_0^h \frac{a}{h}\,dx\,(x^3 + \tfrac{1}{3}\frac{a^2}{h^2}\,x^3) = \frac{2a}{h}\left(\frac{h^4}{4} + \frac{a^2 h^2}{12}\right) = \tfrac{1}{6}ah(a^2 + 3h^2)$$

oder endlich wegen $ah = M$, auch:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6}M(a^2 + 3h^2).$$

Will man die Seite $AC = BC = d$ hineinbringen, so ist wegen $a^2 = d^2 - h^2$ auch $\mathfrak{M} = \frac{1}{6}M(d^2 + 2h^2) = M\left(\frac{d^2}{6} + \frac{h^2}{3}\right)$ (vergleiche §. 165).

72. Um das Moment der Trägheit eines geraden Cylinders von kreisförmiger Basis zu bestimmen, welcher sich um seine geometrische Achse umdreht, sey AB (Fig. 37) eine unendlich dünne, auf der Achse senkrechte Schichte des Cylinders, dabei dessen Halbmesser $CA = r$, Länge $= l$ und Masse $= M$. Zieht man in dieser Kreisfläche (oder eigentlich unendlich dünnen Kreisscheibe) von der Masse $m = dM$ mit den Halbmessern $CP = x$ und $Cp = x + dx$ aus dem Mittelpuncte C die concentrischen Kreise, so schliefsen diese ein unendlich schmales Kreisband ein, dessen Fläche $= (x + dx)^2\,\pi - x^2\,\pi = 2x\pi\,dx + \pi\,dx^2 = 2x\pi\,dx$ (also eben so grofs wie das Rechteck von der Basis des Umfanges $2x\pi$ und der Höhe dx) ist und welche sofort das Element der Masse dm darstellt. Ist μ das Moment der Trägheit dieser Schichte AB, also $d\mu$ jenes des schmalen Kreisbandes, so ist nach der Grundformel: $d\mu = 2\pi x\,dx \,.\, x^2 = 2\pi x^3\,dx$

folglich: $\mu = 2\pi \int_0^r x^3\,dx = 2\pi \,.\, \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2} r^2 \pi \,.\, r^2 = \frac{1}{2} m r^2$, weil die Masse m der Kreisfläche $r^2\pi$ proportional ist. Besteht nun aber der Cylinder aus n solchen Schichten (wobei n unendlich grofs) so ist auch wegen $n\mu = \frac{1}{2} n m r^2$, und $n\mu = \mathfrak{M}$, so wie $nm = M$ sofort das Moment der Trägheit des Cylinders: $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} M r^2$ (welcher Ausdruck sich nämlich wieder in nichts von jenem $\mu = \frac{1}{2} m r^2$ der Kreisfläche, als in der Bedeutung der Factoren M und m unterscheidet).

Oder es ist, wenn dz die Dicke dieser Schichte oder Cylinderelementes bezeichnet, auf den Cylinder bezogen $\mu = d\mathfrak{M}$ und $m = r^2 \pi \, dz = dM$, folglich $d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} r^4 \pi \, dz$ und daraus:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} r^4 \pi \int_0^l dz = \tfrac{1}{2} r^2 \pi \, l \, . \, r^2 = \tfrac{1}{2} M r^2.$$

Oder noch einfacher für $m = dM$ sofort $d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} r^2 \, dM$ also $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} M r^2$. (Vergl. §. 167, Gleich. 1).

73. Ist der Cylinder hohl und sind R und r der äufsere und innere Halbmesser desselben, so darf man das obige Integral nur anstatt von o bis r hier von r bis R nehmen; dadurch erhält man:

$$\mu = 2 \pi \int_r^R x^3 \, dx = \frac{2\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$$

oder da man $(R^2 - r^2)\pi$ für die Masse m der unendlich dünnen Schichte nehmen kann, auch $\mu = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$. Ist wieder $\mathfrak{M}$ das Moment der Trägheit des Cylinders, so wie M dessen Masse, so ist nach dem vorigen eben so:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} M (R^2 + r^2).$$

(§. 168, Gleich. 2).

Anmerkung. Setzt man für einen Radkranz die Breite des Kranzes (in der Richtung des Radhalbmessers) $= a$ und dessen Dicke (in der Richtung der Achse) $= b$, so wie den mittlern Radhalbmesser $= R'$; so ist wegen $R' = \frac{R + r}{2}$ und $R - r = a$, also $R^2 - r^2 = 2 R' a$ und

$R^2 + r^2 = a^2 + 2 R r = a^2 + 2 R'^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + 2 R'^2$, wenn man diese Werthe in die obige Formel $\mathfrak{M} = \frac{b\pi}{2} (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$ substituirt und reducirt, sofort das Moment der Trägheit dieses Radkranzes:

$$\mathfrak{M} = 2 R' a b \pi \left(\frac{a^2}{4} + R'^2 \right)$$

oder wenn, wie es z. B. bei allen Schwungrädern der Fall, $a < \frac{1}{5} R'$ also $\frac{a^2}{4} < \frac{1}{100} R'^2$ ist, für die Anwendung immer genau genug:

$$\mathfrak{M} = 2 \pi R'^3 a b.$$

74. Um sogleich allgemein das Moment der Trägheit für alle durch Rotation erzeugten Körper zu bestimmen, drehe sich die von der Curve NN' (Fig. 38) und den beiden rechtwinkeligen Ordinaten QN, $Q'N'$ begrenzte Ebene QN' um die Abscissenachse

AX; so entsteht ein Körper, dessen Masse wir mit M bezeichnen, und für welchen wir das Moment der Trägheit $\mathfrak{M}$ in Beziehung auf diese Achse AX bestimmen wollen.

Setzt man $AQ = a$, $AQ' = a'$ und zieht zu den Abscissen $AP = x$ und $Ap = x + \mathrm{d}x$ die Ordinaten PM und pm, nimmt auf diesen $Pn = y$, $nn' = \mathrm{d}y$ und zieht durch n und n' mit der Abscissenachse die Parallelen; so erhält man das Flächenelement $nr = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, welches bei seiner Umdrehung um AX einen Körper, d. i. einen Kreisring erzeugt, welcher $= 2\,y\,\pi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ ist und sofort das zweite Differenzial des Volumens, also auch (nach unserer Annahme) der Masse des Körpers bildet, so, dafs also $\mathrm{d}^2M = 2\,\pi\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ist. Für dieses Massenelement ist aber das Moment der Trägheit $\mathrm{d}^2\mathfrak{M} = y^2\,\mathrm{d}^2M = 2\,\pi\,y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ und wenn man zweimal integrirt und die von x abhängige Ordinate $PM = y'$ setzt:

$$\mathfrak{M} = 2\,\pi\int_a^{a'}\mathrm{d}x\int_0^{y'} y^3\,\mathrm{d}y = 2\,\pi\int_a^{a'}\tfrac{1}{4}\,y'^4\,\mathrm{d}x \quad \text{d. i.}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\,\pi\int_a^{a'} y'^4\,\mathrm{d}x \;\ldots\; (\alpha)$$

wobei diese zweite Integration erst dann ausgeführt werden kann, wenn die Natur der Curve NN' d. i. ihre Gleichung $y' = f(x)$ bekannt ist.

Beispiele.

75. Dreht sich anstatt der Curve eine mit AX parallele Gerade, welche von AX den Abstand r hat, um diese Achse, und setzt man $a = 0$, $a' = l$ gleich der Länge des dadurch erzeugten Cylinders; so wird wegen $y' = r$ sofort:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\,\pi\int_0^{l} r^4\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,r^2\,\pi\,l\,.\,r^2 = \tfrac{1}{2}\,M\,r^2$$

indem man für das Volumen des Cylinders dessen Masse setzt. (Vergl. Nr. **72.**)

76. Geht die Gerade AB (Fig. 39) durch den Ursprung und ist $CB = r$ der Halbmesser und $AC = h$ die Höhe des erzeugten geraden Kegels, so ist wegen $x : y' = h : r$ sofort $y' = \frac{r}{h}\,x$, folglich:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\,\pi\int_0^{h}\frac{r^4}{h^4}\,x^4\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,\pi\,\frac{r^4}{h^4}\,.\,\frac{h^5}{5} = \tfrac{1}{10}\,r^4\,\pi\,h$$

oder wegen $M = \frac{1}{3}\,r^2\,\pi\,h$ auch $\mathfrak{M} = \frac{3}{10}\,M\,r^2$.

77. Ist die Curve eine Ellipse von den Halbachsen a und b, welche sich um die grofse Achse $2a$ umdreht, so erhält man wegen $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ (die Abscissen vom Mittelpunct aus gezählt, Comp. §. 457.) für das Moment der Trägheit des elliptischen Sphäroides (nach der obigen Formel (α) in **74.**):

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi \int_{-a}^{a} \frac{b^4}{a^4}\, dx\,(a^2 - x^2)^2 = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\pi \frac{b^4}{a^4} \int_0^a dx\,(a^4 - 2a^2x^2 + x^4)$$

$$= \pi \frac{b^4}{a^4}\left(a^5 - \frac{2a^5}{3} + \frac{a^5}{5}\right) = \frac{8}{15}\pi a b^4.$$

Nun ist aber das Volumen dieses Körpers, wofür wir wieder die Masse setzen, oder (Comp. §. 866) $M = \frac{4}{3} a b^2 \pi$, folglich auch:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5} M b^2.$$

78. Bei der Umdrehung der Ellipse um die kleine Achse wird eben so, wenn wieder M die Masse des dadurch entstehenden Ellipsoides bezeichnet:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5} M a^2.$$

79. Geht die Ellipse in einen Kreis vom Halbmesser $a = b = r$ über, so hat man für die Kugel, welche sich um einen Durchmesser dreht, aus beiden vorigen Formeln:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5} M r^2.$$

(Vergl. §. 169, Gleich. 2).

Ist die Curve eine Parabel und dreht sich diese um ihre geometrische Achse AC (Fig. 40), so wird wenn man $AC = h$ und $CB = r$ setzt, wegen $y'^2 = px$ und (Comp. §. 866) $M = \frac{1}{2} r^2 \pi h = \frac{1}{2}\pi p h^2$ (wegen $r^2 = ph$) wenn h die Höhe des entstehenden Paraboloides ist:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^h p^2 x^2\, dx = \tfrac{1}{2}\pi p^2 \frac{h^3}{3}$$

oder auch $$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} M p h = \tfrac{1}{3} M r^2.$$

80. Dreht sich die von dem Kreisbogen AN (Fig. 41) begrenzte Fläche ANB um die (in der Richtung des Durchmessers liegende) Achse AB, so entsteht ein Kugelsegment mit einer Grundfläche $NAN'B$ von der Höhe AB. Setzt man den Halbmesser des Kreises (gleich dem Kugelhalbmesser) $= r$, und $AB = a$ (gleich der Höhe des Kugelsegmentes) so folgt aus der Formel (α) in **74.** wegen $y'^2 = 2rx - x^2$:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^a dx\,(2\,r\,x - x^2)^2 = \tfrac{1}{2}\,a^3\pi\,(\tfrac{4}{3}\,r^2 - a\,r + \tfrac{1}{5}\,a^2)$$
$$= \tfrac{1}{30}\,a^3\pi\,(20\,r^2 - 15\,a\,r + 3\,a^2)$$

oder wenn man die Masse M des Segmentes dem Volumen gleich setzt, also:

$$M = \tfrac{1}{2}\,B\,N^2\,\pi\,.\,a + \tfrac{1}{6}\,a^3\,\pi = \tfrac{1}{2}\,a\,\pi\,(2\,r\,a - a^2) + \tfrac{1}{6}\,a^3\,\pi = \frac{a^2\pi}{3}\,(3\,r - a)$$

setzt und diese in den vorigen Ausdruck einführt, auch:

$$\mathfrak{M} = \frac{a\,M}{10\,(3\,r - a)}\,(20\,r^2 - 15\,a\,r + 3\,a^2)\;.\;.\quad (c)$$

Ist dagegen m die Masse der cubischen Einheit, also $M = \frac{a^2\pi}{3}\,(3\,r - a)\,m$, so ist endlich auch:

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi}{30}\,a^3\,m\,(20\,r^2 - 15\,a\,r + 3\,a^2)\;.\;.\quad (d)$$

(vergl. §. 169, Gleich. 1).

81. Besteht eine Pendellinse aus zwei solchen Kugelsegmenten, deren Grundflächen aufeinander liegen und sich decken, so ist ihr Moment der Trägheit in Bezug auf ihre geometrische Achse AB (Fig. 42) genau durch die vorige Formel (c) ausgedrückt, wenn M die Masse der Linse bedeutet. Bringt man statt dem Kugelhalbmesser r den Halbmesser $CN = \rho$ der Grundflächen der beiden Segmente in diese Formel (c); so erhält man wegen $\rho^2 = 2\,r\,a - a^2$ sofort $r = \frac{a^2 + \rho^2}{2\,a}$ und damit nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{10}\left(\frac{a^4 + 5\,a^2\rho^2 + 10\,\rho^4}{a^2 + 3\,\rho^2}\right)\;.\;.\quad (e)$$

Anmerkung. Ist die Linse, wie gewöhnlich nach der Richtung NN' durchbohrt, um die cylindrische Pendelstange, welche in der Regel aus einem andern Materiale als die Linse besteht, durchschieben zu können; so muſs man von dem vorigen Werthe noch das Moment der Trägheit dieser Bohrung (den hohlen Cylinder als massiv gedacht) abziehen. (Man sehe Nr. 83. Anmerk.)

82. Um endlich noch das Moment der Trägheit eines gewöhnlichen Cylinders zu finden, welcher sich um eine Achse dreht, die durch den Schwerpunct des Cylinders geht und auf dessen geometrischer Achse perpendikulär steht, nehme man die geometrische Achse des Cylinders für die Achse der z, den Ursprung A der drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen im Schwerpunct des Cylinders, so wie die Umdrehungsachse für die Achse der y; so ist, wenn man den Cylinder in den Entfernungen von $AC = z$ (Fig. 43) und $z + dz$ durch zwei Ebenen parallel mit der Ebene der xy durchschneidet, die unendlich dünne Kreisscheibe, welche man dadurch erhält, ein Element des Cylinders und $= dM$, wenn M wieder die Masse des Cylinders, dessen Halbmesser $= r$ und Länge $= l$ seyn soll, bezeichnet. Sind BB' und DD' die Durchschnitte der Ebenen der xz und yz mit dieser Kreisscheibe von der Dicke dz und legt man in den Entfernungen $CP = x$ und $x + dx$ wieder zwei Ebenen und zwar parallel mit der Ebene der yz; so erhält man aus dieser Kreisscheibe als Element derselben das Parallelopiped von der Grundfläche $dx\,dz$ und Länge $mm' = 2y$, wenn man nämlich die der Abscisse $CP = x$ entsprechende Ordinate des Kreises $Pm' = Pm = y$ setzt. Da nun dieses Körperelement (gleichsam eine materielle gerade Linie) $d^2M = 2y\,dx\,dz$ von der Umdrehungsachse YY' den Abstand u hat, wofür $u^2 = x^2 + z^2$ ist, so hat man, wenn $\mathfrak{M}$ das Moment der Trägheit des Cylinders, folglich $d\mathfrak{M}$ jenes der Kreisscheibe und endlich $d^2\mathfrak{M}$ jenes des unendlich dünnen Prismas bezeichnet, nach der Grundformel sofort: $d^2\mathfrak{M} = 2y\,dx\,dz(x^2 + z^2)$, folglich wenn man zweimal innerhalb der gehörigen Grenzen integrirt:

$$\mathfrak{M} = 2\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} dz \int_{-r}^{+r} y(x^2 + z^2)\,dx = 8\int_0^{\frac{1}{2}l} dz \int_0^r y(x^2 + z^2)\,dx.$$

Wegen $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ wird

$$\int_0^r y(x^2 + z^2)\,dx = \int_0^r x^2\,dx\sqrt{(r^2 - x^2)} + z^2\int_0^r dx\sqrt{(r^2 - x^2)}$$

und da (Lehrb. Bd. III S. 336, Beispiel 4)

$$\int x^2\,dx\sqrt{(r^2 - x^2)} = \tfrac{1}{4}(x^3 - \tfrac{1}{2}r^2 x)\sqrt{(r^2 - x^2)} + \tfrac{1}{8}r^4\,arc\,Sin\frac{x}{r}$$

ferner (S. 339) $\int dx\sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{1}{2}r^2\,arc\,Sin\frac{x}{r}$, so ist innerhalb der angezeigten Grenzen

$$\int_0^r y(x^2 + z^2)\,dx = \tfrac{1}{8}r^4.\frac{\pi}{2} + z^2.\tfrac{1}{2}r^2\frac{\pi}{2} = \frac{r^4\pi}{16} + \frac{r^2\pi}{4}z^2,$$

folglich wenn man diesen Werth für das zweite Integral substituirt:

$$\mathfrak{M} = 8\int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{r^2\pi}{4}\left(\frac{r^2}{4} + z^2\right)dz = 2r^2\pi\int_0^{\frac{1}{2}l}\left(\frac{r^2}{4} + z^2\right)dz$$

$$= 2r^2\pi\left(\frac{r^2 l}{8} + \frac{l^3}{24}\right)$$

oder wegen $M = r^2\pi l$ endlich:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(3r^2 + l^2)\,.\,.\quad (f)$$

83. Schwingt eine cylindrische Pendelstange vom Halbmesser r und der Länge l um ihr oberes Ende, so ist ihr Moment der Trägheit (§. 161, Gleich. 1):

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(3r^2 + l^2) + M.\tfrac{1}{4}l^2 = \frac{M}{12}(3r^2 + 4l^2)$$

oder auch $$\mathfrak{M} = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right).$$

Anmerkung. Das in Nr. **81** bemerkte Moment der Trägheit der Bohrung der Pendellinse, welches von dem dortigen Ausdrucke (e) abzuziehen kommt, wäre also nach der vorigen Formel (f) wegen $l = NN' = 2\rho$ (Fig. 42) sofort $\mathfrak{M}' = \frac{M'}{12}(3r^2 + 4\rho^2) = M'\left(\frac{r^2}{4} + \frac{\rho^2}{3}\right)$ so, daſs also das eigentliche Moment der Trägheit der in **81.** betrachteten Pendellinse auf ihre geometrische Achse bezogen $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$ wäre, wobei $\mathfrak{M}$ den genannten Werth in (f) besitzt. Steht endlich der Mittelpunct oder die geometrische Achse der Linse von der mit ihr parallelen Schwingungsachse um die Gröſse δ ab, so muſs man statt $\mathfrak{M}''$ setzen:

$$\mathfrak{M}'' + (M - M')\delta^2 = \mathfrak{M}'' + M''\delta^2$$

wobei M die Masse der massiven, nicht durchbohrten Linse und M' die durch das Ausbohren wegfallende Masse, also M'' die wirkliche Masse der Linse bezeichnet.

Theorie der Kurbel in Verbindung mit dem Schwungrade.

(§. 188 — §. 192.)

84. Ist $CA = r$ (Fig. 44) die Höhe des Kurbelkniees, also $ABA'B'$ jener Kreis, welchen die Kurbelwarze beschreibt, d. i. der Kurbelkreis, M die nach dem Moment der Trägheit (§. 159, Gl. 3) auf den Kurbelkreis reducirte Masse, Q jene Last, welche auf den Kurbelkreis aufgewunden, den Widerstand vorstellt, welcher durch die Umdrehung der Kurbel überwunden werden soll, so wie endlich P die constante Kraft, welche, indem sie dabei beständig mit dem Durchmesser AA' parallel wirkt, die Kurbelwarze M hin und her schiebt um die Kurbel umzudrehen; so ist, wenn die Kurbelwarze nach M gekommen, und dafür der Winkel $ACM = \alpha$ ist, die aus der Zerlegung der Kraft P in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte abgeleitete Tangentialkraft $p = P \sin\alpha$. Da aber diese veränderliche Kraft p während die Warze um einen unendlich kleinen Bogen fortschreitet, d. i. α um $d\alpha$ zunimmt, als constant angesehen werden kann, so ist ihre Wirkung dw oder Arbeit während ihres Fortschreitens um $r\,d\alpha$, nach §. 174:

$$dw = p\,r\,d\alpha = P\,r\,Sin\,\alpha\,d\alpha.$$

Da aber während dieser Zeit die Last Q um den Weg $r\,d\alpha$ gehoben wird, so ist gleichzeitig ihre Wirkung, oder wenn man will die geleistete Arbeit: $dw' = Q\,r\,d\alpha$

und da der Überschufs dieser beiden Wirkungen $dw - dw'$ auf Beschleunigung oder Verzögerung der Masse M verwendet wird, je nachdem $dw \gtrless dw'$, der letztere Fall aber immer in dem erstern begriffen ist (und durch das Zeichen dieser Differenz ausgedrückt wird); so ist also, während die Kurbelwarze von dem Puncte M um einen unendlich kleinen Bogen fortgeht, die auf Beschleunigung der Masse M verwendete Arbeit:

$$dW = dw - dw' = P\,r\,Sin\,\alpha\,d\alpha - Q\,r\,d\alpha.$$

Aus dieser Differenzialgleichung folgt durch Integration ganz einfach: $W = r(P\,Sinv.\,\alpha - Q\,\alpha) + C \ldots \quad (a)$

wo C die willkürliche Constante bezeichnet, die wir weiter unten bestimmen werden.

85. Soll die Kurbel bei ihrer Bewegung in den Beharrungsstand kommen, d. h. eine gewisse Gleichförmigkeit erlangen, wodurch ihre mittlere Geschwindigkeit endlich constant wird; so mufs zwischen der Kraft P und der Last Q ein bestimmtes Verhältniss Statt finden, welches wir ganz einfach aus der Betrachtung finden, dafs die Warze im Beharrungsstand an den beiden Endpuncten irgend eines, z. B. des Durchmessers AA', einerlei Geschwindigkeit besitzen müsse, weil, wenn diese durch die Bewegung im obern Halbkreis ABA' hervorgebracht, in $A' \gtrless A$ wäre, aus gleichem Grunde diese Geschwindigkeit durch die Bewegung im untern Halbkreis $A'B'A$ erzeugt, in $A \gtrless A'$, dann wieder in $A' \gtrless A$ u. s. w., die Kurbelwarze also entweder fortwährend beschleunigt oder verzögert würde, was gegen die Voraussetzung des Beharrungsstandes ist. Da also, während die Kurbelwarze den Halbkreis ABA' zurücklegt, wobei der Weg der Kraft $= AA' = 2r$ und jener der Last $=$ Bog. $ABA' = r\pi$ ist, die Wirkung oder Arbeit von Seite der Kraft P jener der Last Q gleich seyn mufs (weil jeder Überschufs Beschleunigung oder Verzögerung der Masse M, also auch der Kurbelwarze hervorbringt); so hat man:

$$P.2r = Q.r\pi \quad \text{und daraus} \quad P:Q = \pi:2 \quad \text{oder} \quad Q = \frac{2}{\pi}P. \quad (m)$$

Diese für den Beharrungsstand der Kurbelbewegung nothwendige Relation zwischen P und Q erhält man auch, wie es seyn soll, aus der obigen Gleichung (a), wenn man in dieser gleichzeitig $\alpha = 180^0$

und $W = 0$ setzt (wobei, da für diesen Fall die Wirkung W von A aus zählt, auch $C = 0$ ist).

Setzt man daher diesen Werth von Q aus der Gleichung (m) in die obige Gleichung (a), so erhält man für die Wirkung auf Beschleunigung der Masse M:

$$W = r P \left(Sinv. \, \alpha - \frac{2 \alpha}{\pi} \right) + C \;.\;. \quad (b)$$

86. Diese zur Beschleunigung, oder überhaupt zur Geschwindigkeitsänderung der Masse M nöthige Arbeit oder Wirkung W läfst sich aber auch nach §. 186 durch die sogenannte lebendige Kraft ausdrücken. Nimmt man nämlich an, dafs die Kurbelwarze, sobald der Beharrungsstand eingetreten ist, im Puncte A (also auch in A') die constante Geschwindigkeit c, dagegen im Puncte M die veränderliche Geschwindigkeit v besitze; so ist, wenn h und z die Geschwindigkeitshöhen zu c und v bezeichnen (also $h = \frac{c^2}{2g}$, $z = \frac{v^2}{2g}$ ist) die nöthige Wirkung, um in der Masse M die Geschwindigkeit v zu erzeugen:

$$W = M z,$$

folglich ist, wenn man diesen Werth dem obigen in (b) gleich setzt:

$$M z = r P \left(Sinv. \, \alpha - \frac{2 \alpha}{\pi} \right) + C$$

wobei jetzt auch die noch unbestimmte Constante C bestimmt werden kann, indem man nur berücksichtigen darf, dafs für $\alpha = 0$ die Variable z in h übergehen mufs; dadurch erhält man $C = M h$ und daher die vollständige Gleichung:

$$M z = M h + r P \left(Sinv. \, \alpha - \frac{2 \alpha}{\pi} \right) \;.\;.\;. \quad (c)$$

Anmerkung Diese Gleichung erhält man auch, wenn man in den obigen Relationen (a) oder (b) die Constante ausläfst d. i. gleich Null setzt, indem für $\alpha = 0$ auch $W = 0$ ist, und berücksichtiget, dafs die Masse M, während die Kurbelwarze den Weg AM zurücklegt, von der Geschwindigkeit c auf jene v gebracht werden mufs, wozu (§. 186, Gleich. 1) die Arbeit $M(z - h)$ nothwendig, also $M(z - h) = r P \left(Sinv \, \alpha - \frac{2 \alpha}{\pi} \right)$ ist.

87. Da die Tangentialkraft $p = P \, Sin \, \alpha$ von Null (im Puncte A) bis P (im Puncte B) allmählig oder continuirlich zunimmt und vermöge der Relation (m) (in **85.**) $P > Q$ ist, so mufs es zwischen $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ (welche Werthe den genannten beiden Puncten A und B entsprechen) einen Werth α' geben, wofür $p = P \, Sin \, \alpha' = Q$, d. h. wenn

$ACD = \alpha'$ ist, so muſs im Puncte D die Tangentialkraft p eben so groſs als die Last Q seyn, und da es im obern Halbkreis ABA' noch einen zweiten Punct D' von gleicher Beschaffenheit gibt (wofür nämlich W. $A'CD' = 180^0 - \alpha'$ ist), ferner im untern Halbkreis $A'B'A$ zwei ähnliche Puncte E und E' vorkommen (wofür man nur $D'C$ und DC verlängern darf); so folgt, daſs während die Kurbelwarze den Kurbelkreis einmal durchläuft, die auf Umdrehung wirklich verwendete Kraft, d. i. die Tangentialkraft p viermal und zwar in den Puncten D, D', E', E, der gerade entgegenwirkenden Last Q gleich, dagegen von E bis D und von D' bis E' kleiner, dann von D bis D' und von E' bis E gröſser als diese Last Q ist; hieraus folgt aber ferner, daſs die Bewegung der Kurbelwarze durch die Bögen ED und $D'E'$ gar nicht Statt finden könnte, wenn dieſs nicht auf Kosten der mit ihr oder dem Kurbelkreis verbundenen Masse M, welche durch den Überschuſs der Kraft p über Q, durch die Bögen DD' und $E'E$ beschleunigt wird, geschähe, wodurch jedoch die Masse verzögert wird. Betrachtet man daher, da sich im untern Halbkreis dasselbe wiederholt, nur die Bewegung im obern Halbkreis, so folgt, daſs die Masse, also auch die Kurbelwarze, von A bis D verzögert, und von D bis D' beschleunigt wird, so daſs in D die kleinste, und in D' die gröſste Geschwindigkeit eintritt. Diese bemerkenswerthen Puncte D und D' bestimmen sich aber aus der Gleichung $P \, Sin\, \alpha' = Q$, woraus: $Sin\, \alpha' = \frac{Q}{P} = \frac{2}{\pi}$ (wegen Relation m) folgt, und wobei der spitze Winkel $\alpha' = ACD$ und der stumpfe $\alpha'' = 180^0 - \alpha' = ACD'$ ist.

Bestimmt man aber aus dieser Gleichung $Sin\, \alpha' = \frac{2}{\pi}$ den Winkel α', so findet man $\alpha' = 39^0 32' 25'' =$ W. ACD, folglich $\alpha'' =$ W. $ACD' = 180^0 - 39^0 32' 25'' = 140^0 27' 35''$.

Anmerkung 1. Diese beiden Winkel α' und α'', welche beziehungsweise der kleinsten und gröſsten Geschwindigkeit v der Kurbelwarze, folglich auch der kleinsten und gröſsten Geschwindigkeitshöhe z entsprechen, findet man auch ganz einfach aus der Gleichung (c) in 86. nach den bekannten Regeln für das Maximum und Minimum. Denn es folgt daraus:

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{rP}{M}\left(Sin\, \alpha - \frac{2}{\pi}\right) = 0 \text{ oder } Sin\, \alpha = \frac{2}{\pi},$$

und zwar erhält man für α zwei Werthe, den einen $\alpha' < 90^0$ und den zweiten $\alpha'' = 180 - \alpha' > 90^0$.

Da der zweite Differentialquotient $\frac{d^2z}{d\alpha^2} = \frac{rP}{M} Cos\, \alpha$, für den erstern

Werth oder $\alpha = \alpha'$ positiv, dagegen für $\alpha = \alpha''$ negativ wird, so folgt in der That wie vorhin, dafs im 1ten Quadranten, und zwar für $\alpha' = 39^0\ 32'\ 25''$ das Minimum, und im 2ten Quadranten, für $\alpha'' = 180^0 - \alpha'$ das Maximum der Geschwindigkeit der Kurbel Statt findet.

Anmerkung 2. Schwieriger, und von der Auflösung einer Gleichung des vierten Grades abhängig, wird die Bestimmung dieser beiden Winkel, wenn man aufser der auf den Kurbelkreis reducirten Masse M auch noch annimmt, dafs mit der Schubstange MP ebenfalls eine Masse verbunden ist; bezeichnet man diese nämlich mit M', so mufs man, da die Geschwindigkeit der Kurbelwarze im Puncte M parallel mit dem Durchmesser AA' (welches auch die Geschwindigkeit der Masse M') $v_1 = v\, Sin\, \alpha$, also die auf den Kurbelkreis reducirte Masse m wegen $m v^2 = M' v_1^2$ (§. 159, Anm.) $= M' \frac{v_1^2}{v^2} = M' Sin\, \alpha^2$ ist, im ersten Theil der Gleichung (c) in **86.** statt Mz setzen $(M + M' Sin\, \alpha^2)\, z$.

Übrigens kann man in der Anwendung überall diese Masse M' (welche dahin wirkt den Winkel α' zu vergröfsern) unberücksichtigt und die bisherige einfachere Voraussetzung gelten lassen.

88. Bezeichnet man die in den Puncten D und D' Statt findende kleinste und gröfste Geschwindigkeit der Kurbelwarze mit c' und c'', so wie die zugehörigen Geschwindigkeitshöhen mit h' und h''; so erhält man aus der Gleichung (c) in **86.**:

$$M h'' = M h + r P \left(Sinv.\, \alpha'' - \frac{2\, \alpha''}{\pi} \right)$$

und
$$M h' = M h + r P \left(Sinv.\, \alpha' - \frac{2\, \alpha'}{\pi} \right)$$

folglich wenn man subtrahirt und statt *Sinv.*, $1 - Cos.$ setzt:

$$M (h'' - h') = r P \left[Cos\, \alpha' - Cos\, \alpha'' - \frac{2}{\pi} (\alpha'' - \alpha') \right]$$

oder wegen $Cos\, \alpha'' = Cos\, (180^0 - \alpha') = -\, Cos\, \alpha'$ und $\alpha'' = \pi - \alpha'$

auch
$$M (h'' - h') = 2\, r P \left(Cos\, \alpha' + \frac{2\, \alpha'}{\pi} - 1 \right)$$

und wenn man für α' den oben gefundenen Werth von $39^0\ 32'\ 25''$ setzt und reducirt, auch $M (h'' - h') = \cdot 42103\, r P$, woraus sofort

$$M = \frac{\cdot 42103\, r P}{h'' - h'} = \frac{\cdot 84206\, r g P}{c''^2 - c'^2}$$

folgt (vergl. §. 192, Gleich. 1).

Von dem Stofse *unelastischer* Körper.

(§. 199.)

89. Sind m und m' die Massen zweier homogener unelastischer Kugeln, deren Mittelpuncte sich auf einer geraden Linie nach einerlei Richtung mit den Geschwindigkeiten c und c' bewegen und wobei, wenn m' die vorausgehende Kugel, $c > c'$ ist, folglich durch das Einholen ein gerader centraler Stofs entsteht; so stelle man sich vor, dafs durch das Auf- oder Gegeneinanderwirken dieser beiden Massen (Action und Reaction) während des Stofses, in Folge welcher die vorausgehende Kugel beschleunigt und die nachfolgende verzögert wird, diefs durch eine zwischen beide wirkende beschleunigende Kraft geschieht, die also beim Beginn des Stofses ihren gröfsten Werth und in dem Augenblicke als der Stofs vollendet ist, beide Massen also einerlei Geschwindigkeit haben, Null ist. Hat nun diese variable Kraft nach Verlauf der Zeit t, diese von dem Augenblicke an gezählt als der Stofs beginnt, den Werth p, so kann man diesen wie bekannt, während des darauf folgenden Zeitelementes dt als constant ansehen und da, wenn die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln m, m' nach Verlauf dieser genannten Zeit t, v und v' sind, während dieser Zeit dt die Geschwindigkeit v' um dv' zu-, dagegen jene v um dv abnimmt; so hat man nach den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten oder verzögernden Beweguug (§. 134, Gleich. 1 und §. 146, Gleich. 2) $dv' = \frac{p}{m'} g\, dt$ und

$dv = -\frac{p}{m} g\, dt$, oder da p eine gewisse, wenn uns auch unbekannte Function der von 0 bis t' wachsenden Zeit t ist, wenn man nämlich annimmt, dafs der Stofs in der Zeit t' (welche, wenn auch noch so klein, doch kein untheilbarer Augenblick ist) vollendet sey, also $p = \varphi(t)$ gesetzt werden kann, auch:

$$dv' = \frac{g}{m'} \varphi(t)\, dt \text{ und } dv = -\frac{g}{m} \varphi(t).dt$$

Durch Integration dieser beiden Gleichungen folgt, wenn man $\int \varphi(t)\, dt = \varphi'(t)$ setzt, wo $\varphi'(t)$ eine neue, ebenfalls unbekannte Function von t ist:

$$v' = \frac{g}{m'} \varphi'(t) + C \text{ und } v = C' - \frac{g}{m} \varphi'(t).$$

Um die Constanten C und C' der Integrationen zu bestimmen bemerke man, dafs für $t=0$, was wir durch t_0 anzeigen wollen, sofort $v'=c'$ und $v=c$ seyn mufs; hieraus folgt daher:

$$C=c'-\frac{g}{m'}\varphi'(t_0) \text{ und } C'=c+\frac{g}{m}\varphi'(t_0),$$

so, dafs also, wenn man diese Werthe substituirt, die vorigen Ausdrücke übergehen in:

$$v'=c'+\frac{g}{m'}[\varphi'(t)-\varphi'(t_0)] \text{ und}$$

$$v=c+\frac{g}{m}[\varphi'(t_0)-\varphi'(t)].$$

Ist nun C die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stofs, welche also nach unserer Voraussetzung nach Verlauf der Zeit t' eintritt, so darf man in den vorigen Relationen nur $t=t'$ und $v=v'=C$ setzen und man erhält:

$$C=c'+\frac{g}{m'}[\varphi'(t')-\varphi'(t_0)]$$

$$C=c+\frac{g}{m}[\varphi'(t_0)-\varphi'(t')]$$

oder auch $\quad m'C=m'c'+g\varphi'(t')-g\varphi'(t_0)$

und $\quad mC=mc+g\varphi'(t_0)-g\varphi'(t').$

Werden diese beiden Gleichungen addirt, so erhält man endlich:

$$(m+m')C=mc+m'c'$$

und daraus $\quad C=\dfrac{mc+m'c'}{m+m'}.$

(Vergleiche §. 199, Gleich. 1.)

Anmerkung. Der in §. 201 gefundene Verlust an lebendiger Kraft, welcher durch den Stofs unelastischer Körper entsteht und mit Beibehaltung der hier gewählten Bezeichnung durch $m(c-C)^2+m'(C-c')^2$, nämlich so ausgedrückt werden kann, dafs man sagt, dieser Verlust sey der Summe der lebendigen Kräfte gleich, welche den Geschwindigkeitsänderungen beider Massen m und m' entspricht, bildet in der Wesenheit den *Carnot*'schen Lehrsatz. Bezieht man diesen auf ein ganzes System von unelastischen Körpern, in welchem sich ein plötzlicher Stofs ereignet und setzt man die Geschwindigkeit eines Theilchens von der Masse m vor dem Stofs $=V$ und nach dem Stofs in derselben Richtung $=v$; so ist $V-v$ die durch den Stofs verlorne Geschwindigkeit oder überhaupt (da diese Differenz auch negativ seyn kann) die dadurch herbeigeführte Geschwindigkeitsänderung, und $m(V-v)^2$ die dieser Geschwindigkeitsänderung entsprechende lebendige Kraft. Nimmt man nun diese lebendige Kraft für alle Theilchen des Systemes, so ist nach diesem Lehrsatze, der Verlust an lebendiger Kraft, welchen das ganze System durch den Stofs erlitten hat, gleich $\Sigma m(V-v)^2$ .. (1)

Ändert aber irgend ein Massentheilchen m nicht blofs wie es hier vorausgesetzt wurde seine Geschwindigkeit, sondern überdiefs noch nach dem Stofse seine Richtung, so seyen X, Y, Z die durch Zerlegung der Geschwindigkeit V nach den drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen entstehenden Seitengeschwindigkeiten dieses Theilchens m vor, so wie x, y, z jene nach dem Stofse; so ist der durch den Stofs herbeigeführte Verlust an lebendiger Kraft gleich

$$\Sigma m[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2] \;.. \quad (2)$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit V vor dem Stofse, und α', β', γ' jene, welche die Richtung der Geschwindigkeit v nach dem Stofse mit den Achsen der x, y, z bilden, so wie φ der Winkel dieser beiden Richtungen gegeneinander; so ist wegen $X=V\,Cos\,\alpha$, $Y=V\,Cos\,\beta$, $Z=V\,Cos\,\gamma$, $x=v\,Cos\,\alpha'$, $y=v\,Cos\,\beta'$, $z=v\,Cos\,\gamma'$, sofort $(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=V^2+v^2-2Vv(Cos\,\alpha\,Cos\,\alpha'+Cos\,\beta\,Cos\,\beta'+Cos\,\gamma\,Cos\,\gamma')=V^2+v^2-2Vv\,Cos\,\varphi$.

Ändert sich die Richtung nach dem Stofse nicht, so wird $\varphi=0$ und der vorige Verlust ist $=V^2+v^2-2Vv=(V-v)^2$, wie es seyn soll.

Reibung an den Zähnen der Räder.

(§. 234.)

90. Die in §. 234 aufgestellte Formel (1) für die Reibung der Zähne läfst sich auch auf folgende Weise ableiten.

Es seyen $CA=R$ und $cA=r$ (Fig. 45) die Halbmesser der primitiven Kreise der beiden ineinander greifenden Räder und die Berührung der beiden Zähne NB und nB, welche im Puncte A begonnen, sey bereits bis zu einem Punct B fortgerückt, wofür $ACB=\alpha$ und $AcB=\alpha'$ die Mittelpunctswinkel seyn sollen. Bei dem weitern unendlich wenigen Fortrücken der Räder nimmt α um $d\alpha$ und α' um $d\alpha'$ zu, wobei der Berührungspunct B des Zahnes BN den Kreisbogen $BB'=CB\,d\alpha$ und des Zahnes Bn den Kreisbogen $BB''=cB\,d\alpha'$ beschreibt.

Da man während dieser unendlich kleinen Bewegung die Lage der gemeinschaftlichen Tangente DE als unverändert ansehen kann, so gleitet der Punct B des Zahnes BN auf dieser Tangente von B nach b, und des Zahnes Bn von B nach b', so dafs der ganze Weg des Gleitens $s=Bb+Bb'=BB'\,Cos\;B'Bb+BB''\,Cos.\,B''Bb'=CB.d\alpha.Cos\,B'Bb+cB.d\alpha'.Cos\,B''Bb'$ ist.

Sind aber CD und cd perpendikulär auf dieser Tangente DE, so ist W. $B'Bb$ = W. BCD und W. $B''Bb'$ = W. Bcd, folglich:

$$CB \,.\, Cos\, B'Bb = CB \,.\, Cos.\, BCD = CD$$

und $$cB \,.\, Cos\, B''Bb' = cB \,.\, Cos\, Bcd = cd;$$

es ist daher auch, wenn man diese Perpendikel $CD = a$ und $cd = a'$ setzt: $$s = a\,\mathrm{d}\alpha + a'\,\mathrm{d}\alpha'.$$

Ist ferner die vom Puncte A aus gezählte gemeinschaftliche Normale $AB = N$, so ist auch, wenn man W. $CED = \beta$ setzt:

$$a = CD = N + R\,Sin\,\beta \text{ und } a' = cd = N - r\,Sin\,\beta, \text{ folglich}$$

auch $$s = N\,\mathrm{d}\alpha + R\,Sin\,\beta\,\mathrm{d}\alpha + N\,\mathrm{d}\alpha' - r\,Sin\,\beta\,\mathrm{d}\alpha' \quad \text{d. i.}$$

$$s = N(\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\alpha') + (R\,\mathrm{d}\alpha - r\,\mathrm{d}\alpha')\,Sin\,\beta.$$

Nun sind aber $R\,\mathrm{d}\alpha$ und $r\,\mathrm{d}\alpha'$ die Bögen oder Wege, welche der Punct A auf den primitiven Kreisen in derselben Zeit ($\mathrm{d}t$) zurücklegt, und da diese bei einer richtigen Verzahnung (§. 207) gleich seyn müssen, so ist $R\,\mathrm{d}\alpha = r\,\mathrm{d}\alpha'$ und daher $s = N(\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\alpha')$ oder wegen $\mathrm{d}\alpha = \frac{r}{R}\,\mathrm{d}\alpha'$ auch $s = N\frac{(R+r)}{R}\,\mathrm{d}\alpha'$.

Ist nun Q der zwischen den Zähnen Statt findende Normaldruck und f der Reibungscoeffizient, so ist die auf Reibung verwendete Arbeit oder unendlich kleine Wirkung:

$$\mathrm{d}W = fQs = fQN\frac{(R+r)}{R}\,\mathrm{d}\alpha', \text{ also } W = f\frac{(R+r)}{R}\int QN\,\mathrm{d}\alpha'.$$

Ist ferner P die nöthige Tangentialkraft (am Umfang der primitiven Kreise) um den Widerstand der Reibung zu überwinden und S ihr Weg während der Drehung des Rades c um den Winkel α', so ist auch

$$W = PS, \text{ folglich } PS = f\frac{R+r}{R}\int_0^{\alpha'} QN\,\mathrm{d}\alpha' \ldots \quad (1)$$

als allgemeine Gleichung.

91. Geht nun die gemeinschaftliche Tangente, wie es z. B. bei der Epicycloiden-Verzahnung der Fall ist, durch den Mittelpunct c (Fig. 46), so wird $\beta = \alpha'$, $AB = N = r\,Sin\,\alpha'$, und da, wenn P' die nöthige Tangentialkraft am Umfang der primitiven Kreise bezeichnet, um die Räder ohne Rücksicht auf die Reibung umzudrehen, $P' = Q\,Cos\,\alpha'$ ist, sofort $Q = \frac{P'}{Cos\,\alpha'}$ (wenn man nämlich den in der Richtung BA wirksamen Normaldruck Q in die zwei aufeinander senkrechten Seitenkräfte nach AR, welcher Kraft jene P' gleich seyn mufs, und AS zerlegt denkt). Diese Werthe in die vorige Gleichung (1) substituirt geben:

$$PS = f\frac{R+r}{R}\int_0^{\alpha'} P'r\,\frac{Sin\,\alpha'}{Cos\,\alpha'}\,d\alpha' = ..P'r\int_0^{\alpha'}\alpha'\,d\alpha' = fP'r\,\frac{(R+r)}{R}\cdot\frac{\alpha'^2}{2},$$

wenn man nämlich, was bei den hier vorkommenden kleinen Werthen von α' immer erlaubt ist, α' statt $tang\,\alpha'$ setzt.

Ist endlich b die Theilung oder Schrift der Räder, so findet der Angriff des Zahnes des treibenden Rades nach der Regel während des Bogens $b = r\alpha'$ Statt, woraus $\alpha' = \frac{b}{r}$, folglich die ganze Wirkung, wofür auch $S = b$ zu setzen ist:

$$Pb = fP'\,\frac{(R+r)}{Rr}\,\frac{b^2}{2} \text{ d. i. } P = \tfrac{1}{2} fP'b\,\frac{(R+r)}{Rr}.$$

Sind aber m und m' die Anzahl der Zähne in den beiden Rädern C und c so ist (§. 216) $b = \frac{2R\pi}{m} = \frac{2r\pi}{m'}$, folglich:

$\frac{R+r}{Rr}\,b = 2\pi\left(\frac{m+m'}{mm'}\right)$ und daher endlich:

$$P = f\pi P'\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right).$$

Reibung eines Cylinders auf seiner Grundfläche.

(§. 235.)

92. Ist $CA = r$ (Fig. 37) der Halbmesser der Grundfläche des Cylinders, auf welche der Normaldruck Q Statt findet und welche zugleich die reibende Fläche seyn soll; so ziehe man aus ihrem Mittelpuncte C mit den Halbmessern $CP = x$ und $Cp = x + dx$ die beiden concentrischen Kreise, welche sofort die Fläche $2x\pi\,dx$ einschliefsen. Da der Druck Q über die ganze Kreisfläche gleichförmig vertheilt ist, so kommt davon auf dieses unendlich schmale Kreisband der Theil dQ, welcher sich aus der Proportion $dQ : Q = 2x\pi\,dx : r^2\pi$ bestimmen läfst, und zwar folgt daraus $dQ = \frac{2Q}{r^2}\,x\,dx$. Der Betrag der Reibung ist daher, wenn f den Reibungscoeffizienten bezeichnet, $f dQ$, so wie das statische Moment der Reibung in Beziehung auf die Umdrehungsachse $dS = x\,.\,f dQ = \frac{2Q}{r^2}\,f x^2\,dx$, woraus $S = \frac{2Q}{r^2}\,f\int_0^r x^2\,dx = \frac{2}{3} r f Q$ für das Moment der ganzen Reibung folgt, gerade so, als fände der Widerstand der Reibung fQ lediglich auf der Peripherie des Kreises vom Halbmesser $\frac{2}{3} r$ Statt.

Ist daher P' die am Umfange des Cylinders nöthige Kraft, um diese Reibung zu überwinden oder mit ihr im Gleichgewichte zu stehen, so ist auch $P'r = S = \frac{2}{3} r f Q$, folglich:

$$P' = \tfrac{2}{3} f Q.$$

(Vergl §. ~~226~~ 236, Gleich. 1).

Anmerkung. Obschon die nachstehende Aufgabe streng genommen nicht hieher, sondern etwa erst zu §. 238 gehört, so wollen wir dieselbe doch gleich hier mit aufnehmen, da sie in den Zusätzen des Compendiums (2te Auflage) ausgelassen wurde.

Aufgabe. Wenn bei der *Atwood*'schen Fallmaschine der Halbmesser der Rolle $= R$, jener der Zapfen an der Achse $= r$ und das Gewicht der Rolle $= q$ ist, wenn ferner die beiden an dem Faden, dessen Gewicht vernachlässigt werden kann, befestigten Gewichte x und y sind, wobei $x > y$ seyn soll; so ist die Frage, wie grofs die Zapfenreibung während der Bewegung der Gewichte und der Rolle ist.

Auflösung. Um zuerst den Druck auf die Zapfen zu finden, welcher von den beiden Gewichten herrührt, denke man sich den Faden an einer beliebigen Stelle, z. B. auf der Seite, an welcher das herabgehende Gewicht x hängt, zerschnitten und an den beiden getrennten Endpuncten eine Kraft p angebracht, welche der frühern Spannung des Fadens (die sofort bestimmt werden mufs) gleich ist und daher genau den ursprünglichen Zustand, welcher während der Bewegung Statt findet, wieder herstellt.

Nun ist für das herabgehende Gewicht x sowohl die Kraft, welcher die Kraft p entgegenwirkt, als auch zugleich die bewegte Masse, also ihre Beschleunigung (§. 146) $G = \frac{x - p}{x} g$. Eben so ist für das steigende Gewicht y die Beschleunigung $G' = \frac{p - y}{y} g$, folglich da hier $G = G'$ ist, sofort $\frac{x - p}{x} = \frac{p - y}{y}$, oder $p = \frac{2xy}{x + y}$, mithin der gesuchte Druck auf den Zapfen $2p = \frac{4xy}{x + y}$.

Wäre also z. B. $x = 15$ und $y = 10$ Loth, so wäre dieser Druck $2p = \frac{600}{25} = 24$ Loth, also weder $10 + 10 = 20$, noch $10 + 15 = 25$ Loth, wie man vielleicht glauben könnte.

Der Gesammtdruck auf die Zapfen ist daher $Q = 2p + q$ und demnach die am Umfange der Rolle nöthige Kraft, welche mit der Zapfenreibung im Gleichgewichte steht:

$$p = \frac{r}{R} f(2p + q),$$

wenn nämlich f wieder den betreffenden Reibungscoeffizienten bezeichnet.

Reibung eines Seiles über einen ruhenden Cylinder.

(§. 240.)

93. Ist das Seil, woran die Last Q hängt, um den Bogen $AM = r\alpha$ (Fig. 47) geschlagen, und steht die Kraft P mit dieser Last und der zwischen dem Seil und dem genannten Bogenstück des Cylinders C vom Halbmesser r im Gleichgewichte, d. h. kann die Kraft P, wenn die Bewegung eingeleitet ist, die Last Q heraufziehen; so muſs durch Vergröſserung des Winkels α um $d\alpha$, wegen der vermehrten, auf dem Bogenstück $Mm = r\,d\alpha$ Statt findenden Reibung, auch die Kraft P um dP vermehrt werden, um das Gleichgewicht zwischen der Last Q und der Reibung über dem Bogen AMm wieder herzustellen, so, daſs also dP die Reibung über den unendlich kleinen Bogen Mm überwindet.

Um diese Reibung zu finden, muſs man zuerst den Normaldruck des Seiles gegen den Bogen Mm bestimmen. Dazu denke man sich die im Puncte M in der Richtung MA Statt findende Spannung durch eine nach der Tangente MT wirkende Kraft $= P$ ersetzt, so, daſs der Stand des Gleichgewichtes nicht gestört wird, wenn an dem über dem Bogen Mm gelegten Seil nach den Richtungen der Tangenten MT und mt die Kräfte P und $P + dP$ wirkend gedacht werden. Da aber $P + dP = P$ ist, so wirken auf den Punct N nach den genannten Richtungen zwei gleiche Kräfte P und erzeugen daher eine nach dem Mittelpuncte C gerichtete, d. i. den Winkel $MCm = d\alpha$ halbirende Resultirende R, welche sich einfach nach Nr. **10.**, d. i. wenn man Kürze halber $W.\,MNC = W.\,mNC = \varphi$ setzt, aus der Proportion $R : P = Sin\,2\varphi : Sin\,\varphi = 2\,Cos\,\varphi : 1$ oder wegen $\varphi = 90^0 - \frac{1}{2}d\alpha$ aus $R : P = 2\,Sin\,\frac{1}{2}d\alpha : 1$ bestimmen läſst; es ist nämlich, wegen $Sin\,\frac{1}{2}d\alpha = \frac{1}{2}d\alpha$, sofort $R = P\,d\alpha$.

Da nun diese Kraft R den gesuchten Normaldruck des Seiles gegen den Bogen Mm vorstellt, so ist, wenn f den betreffenden Reibungscoeffizienten bezeichnet, $fR = fP\,d\alpha$ der Betrag der Reibung, folglich $dP = fP\,d\alpha$.

Aus dieser Differentialgleichung folgt durch Absonderung:

$$\frac{dP}{P} = f\,d\alpha \text{ und durch Integration: } logn.\,P = f\alpha + C.$$

Um die willkürliche Constante C zu bestimmen, bemerke man, daſs für $\alpha = 0$ sofort $P = Q$ seyn muſs; dieſs gibt $logn.\,Q = C$, folglich wenn dieser Werth für C substituirt wird:

$$logn.\,P - logn.\,Q = f\alpha \text{ oder } logn.\,\frac{P}{Q} = f\alpha$$

und wenn man von den Logarithmen auf die Zahlen selbst übergeht, auch: $\frac{P}{Q} = e^{f\alpha}$ oder $P = Q\,e^{f\alpha}$,

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist.

(Vergl. §. 240, Gleich. 1).

Relative Festigkeit.

(§. 255.)

94. Es sey $C'N$ (Fig. 48) ein an dem einen Ende B eingemauerter, und am andern Ende A mit dem Gewichte Q belasteter horizontaler Balken von der Länge $AB = l$ und dem beliebigen, jedoch durchaus gleichen Querschnitt $acbc'$; dabei sey $DEFG$ die neutrale, d. h. jene horizontale Schichte, in welcher die Fasern weder ausgedehnt, noch zusammengedrückt werden, in welcher also die Gleichgewichtsachse ab eines jeden Querschnittes $acbc'$ liegt und welche den Balken in zwei, obschon nicht immer gleiche Hälften theilt, in deren obern die Fasern ausgedehnt, in der untern aber zusammengedrückt werden.

In einem beliebigen, auf der Achse AB senkrechten Querschnitt $acbc'$, welcher vom Aufhängpunct A den Abstand $AO = z$ haben mag, nehme man die durch den Punct O auf der Gleichgewichtsachse ab perpendikuläre Gerade cOc' zur Abscissenachse und O zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten der Umfangscurve $acbc'a$, setze also für einen beliebigen Punct M derselben $OP = x$ und $PM = y$. Nimmt man $Pn = dx$ und zieht durch n die Ordinate nm, so ist die Fläche des unendlich schmalen Rechteckes $Mn = y\,dx$ und man kann annehmen, dafs die Fasern dieses Rechteckes in diesem Querschnitte, oder in einer unendlich dünnen Scheibe fd (Fig. 49) von der Dicke $OO' = dz$, alle gleich viel, nämlich um Pr ausgedehnt werden, so dafs die Fasern in dieser Schichte Mn von der Länge $P'r$ in jene $P'P$ übergehen, während diese Ausdehnung in derselben Schichte in den weiter gegen B zu liegenden Querschnitten allmählig zunimmt, also nur für eine unendlich kleine Distanz $OO' = dz$ als gleichbleibend angesehen werden kann.

Ist nun der Widerstand, welchen die in dieser von der Gleichgewichtsachse ab um x abstehende Schichte liegenden Fasern, der durch die Biegung des Balkens bewirkten Ausdehnung Pr entgegen setzen, auf die Flächeneinheit bezogen $= p''$, für die oberste Faser bei c desselben Querschnittes $a\,c\,b\,c' = p'$, so wie endlich dieser obersten Faser, jedoch am letzten, d. i. von A am weitesten abstehenden Querschnitte $DCEC'$, nämlich bei $C = p$; so hat man, da sich diese Widerstände innerhalb der Elasticitätsgrenze wie die Stärke der Spannungen, und diese wieder wie die bewirkten Ausdehnungen verhalten, sofort (Fig. 49) $p'' : p' = Pr : cd = OP : Oc$, oder wenn man die Höhe $Oc = h$ setzt. $p'' : p' = x : h$; ferner ist $p' : p = z : l$ (weil das stat. Moment der Spannkraft, also auch die Ausdehnung bei derselben Faser von A gegen B wie AO zunimmt, und bei nur geringen Biegungen l ohne Fehler für den senkrechten Abstand des Punctes A von der Ebene MN genommen werden kann), folglich, wenn man beide Proportionen zusammensetzt,

$p'' : p = z\,x : h\,l$, woraus $p'' = p\,\frac{z\,x}{h\,l}$ folgt.

Die vorhin genannte, im Querschnitte $a\,c\,b\,c'$ liegende unendlich dünne Schichte Mn vom Querschnitt $y\,dx$, widersteht also der Ausdehnung mit der Gröfse $p''.\,y\,dx = p\,\frac{z\,x}{h\,l}\,y\,dx$ . . . (r) und es ist das statische Moment dieses Widerstandes in Beziehung auf die Achse ab sofort $x . p\,\frac{z\,x}{h\,l}\,y\,dx = p\,\frac{z}{h\,l}\,y\,x^2\,dx$, folglich die Summe dieser Momente für alle im Querschnitt Oca liegenden Fasern $= \int_0^h \frac{p\,z}{h\,l}\,y\,x^2\,dx$, wobei z von x unabhängig, dagegen y irgend eine von der Natur der krummen Linie aMc abhängige Function von x, z. B. $y = f(x)$ ist

95. Auf ganz gleiche Weise würde man für die Summe der Momente der Widerstände der Fasern im Querschnitte Ocb den Ausdruck $\int_0^h \frac{p\,z}{h\,l}\,y'\,x^2\,dx$ erhalten, wobei $y' = f'(x)$ die Gleichung der Curve $bM'c$ wäre. Die Summe dieser beiden Integralausdrücke gäbe dann das Gesammtmoment für die obere Fläche $a\,c\,b$, in welcher nämlich die Fasern ausgedehnt werden. Da aber für die gewöhnlich vorkommenden und hier zu betrachtenden Fälle die beiden Curvenäste aMc und $bM'c$ gegen Oc symmetrisch sind, folglich die obere Umfangscurve $aMcM'b$ in derselben Gleichung $y = f(x)$ enthalten ist; so werden diese beiden Integrale einander gleich und man hat sonach für das Gesammt-Moment M des Widerstandes der ausgedehnten Fasern:

$$M = \frac{2\,p\,z}{h\,l} \int_0^h y\,x^2\,dx \quad . \; . \; . \quad (\alpha)$$

96. Da man, was auch durch Versuche bestätigt wird, annehmen kann, dafs innerhalb der Elasticitätsgrenze für das Zusammendrücken der Fasern dieselben Gesetze, wie für ihre Ausdehnung gelten; so erhält man genau eben so für das Gesammt-Moment M' des durch das Zusammendrücken der Fasern in der untern Hälfte des Querschnittes $a\,c'\,b$ erzeugten Widerstandes:

$$M' = \frac{2p'z}{hl}\int_0^{h'} y'\,x^2\,\mathrm{d}x \;.\;.\;.\;\; (5)$$

wenn $O\,c' = h'$, ferner $y' = f'(x)$ die Gleichung der Curve $a\,c'\,b$, und p' den auf die Flächeneinheit bezogenen Widerstand der zusammengedrückten Fasern an der Stelle C', d. i. in der Entfernung $B\,C' = h'$ von der neutralen Achse bezeichnet.

97. Da nun sowohl die Ausdehnung der Fasern in der obern Hälfte des Querschnittes $a\,c\,b\,c'$ (d. i. der unendlich dünnen Scheibe $l\,d$, Fig. 49) als auch die Zusammendrückung derselben in der untern Hälfte $a\,c'\,b$ durch die Last Q bewirkt wird, so mufs auch für den Stand des Gleichgewichtes dessen statisches Moment $Q\,z$ der Summe der beiden Momente $M + M'$ gleich seyn, so, dafs also, wenn man gleich mit z abkürzt, sofort:

$$Q = \frac{2p}{hl}\int_0^{h} y\,x^2\,\mathrm{d}x + \frac{2p'}{h'l}\int_0^{h'} y'\,x^2\,\mathrm{d}x$$

oder, wenn man, was für geringe Biegungen den Versuchen zu Folge der Fall ist, für einerlei Ausdehnung und Zusammendrückung die Repulsionskraft der Cohäsionskraft, also $\frac{p'}{h'} = \frac{p}{h}$ setzt, auch:

$$Q = \frac{2p}{hl}\left[\int_0^{h} y\,x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^{h'} y'\,x^2\,\mathrm{d}x\right] \;.\;.\;\; (A)$$

Wird, wie bei den meisten vorkommenden Fällen, die Umfangscurve $a\,c\,b\,c'\,a$ durch die Achsen $c\,c'$ und $a\,b$ in vier symmetrische Theile getheilt, so ist $y' = y$ und $h' = h$ zu setzen, wodurch sich die vorige Gleichung auf die einfachere

$$Q = \frac{4p}{hl}\int_0^{h} y\,x^2\,\mathrm{d}x \;.\;.\;.\;\; (1)$$

reducirt.

Anmerkung 1. Wäre zwar nicht, wie angenommen wurde, der Curvenast $b\,M'\,c$ mit jenem $a\,M\,c$ symmetrisch, also nicht $MM' = 2y$, liefse sich aber dennoch diese Doppelordinate $MM' = Y$ durch eine einzige Gleichung $Y = f(x)$ ausdrücken; so ginge diese Gleichung (1) über in:

$$Q = \frac{2p}{hl} \int_0^h Y x^2 \, dx \quad (2)$$

Anmerkung 2. Aus dem obigen Differentialausdruck (r) folgt, dafs die Summe der Widerstände, welche durch die Ausdehnung aller der in dem obern Querschnitt DCE auslaufenden Fasern erzeugt werden, $= \frac{p}{h} \int_0^h xy \, dx$ ist. Eben so wird der durch die Zusammendrückung der unterhalb der neutralen Schichte DG liegenden Fasern erzeugte Widerstand durch $\frac{p'}{h'} \int_0^{h'} xy' \, dx$ ausgedrückt. Da nun aber, wenn die Fasern in der neutralen Schichte AB (Fig. 49) wirklich weder ausgedehnt noch verkürzt werden sollen, der Punct B (gleichsam als Stützpunct des Winkelhebels $ABCC'$), welcher von den zuerst genannten Widerständen s, s'.. nach einer und von den letztern t, t'.. nach der entgegengesetzten Richtung verschoben werden will, also unbeweglich bleiben mufs, damit auf die neutrale Schichte weder ein Zug noch ein Druck entsteht; so müssen die erstern Widerstände den letztern gleich seyn, d. i. es mufs die Gleichung Statt finden (wenn man mit $\frac{p}{h} = \frac{p'}{h'}$ abkürzt):

$$\int_0^h xy \, dx = \int_0^{h'} xy' \, dx \ . \ . \ . \quad (a)$$

welche Bedingungsgleichung die Lage der neutralen Achse DE (Fig. 48) festsetzt und mit Rücksicht auf die erste Gleichung II, in Nr. 26. sofort zeigt, dafs diese Achse durch den Schwerpunct des Querschnittes $DCEC'$ geht.

Zu diesem Ergebnifs gelangt man auch durch folgende Betrachtung. Der Widerstand, welchen jede Faser oder Fiber durch ihre Ausdehnung oder Zusammendrückung erzeugt, ist sowohl ihrem Querschnitt, als auch der entsprechenden Ausdehnung und Verkürzung, folglich zusammengenommen dem Producte aus dem unendlich kleinen Querschnitt der Faser in ihrem Abstand von der neutralen Achse proportional. Alle diese Widerstände wirken aber, bei einer nur geringen Biegung des Balkens, nach horizontalen, folglich parallelen Richtungen, daher ist ihre Resultirende der Summe der Producte jedes Elementes der Fläche des Querschnittes der Bruchebene in dessen betreffendem Abstande von der neutralen Achse, d. h. dem Producte aus der ganzen Querschnittsfläche in den Abstand ihres Schwerpunctes von dieser Achse, proportional. Da nun aber die aus der Biegung hervorgehende Bewegung nur nach der Richtung der Kraft Q und keinesweges nach einer darauf senkrechten, d. i. horizontalen Richtung Statt finden kann, so mufs diese Resultirende von selbst Null werden, diese also durch den Schwerpunct der Querschnittsfläche gehen*).

---

*) Wir hielten es für nöthig, diese Thatsache, dafs die neutrale Achse durch den Schwerpunct des Querschnittes gehen müsse, vollkommen klar

98. Setzt man nun in dieser Formel (1) für p diejenige Zahl m, welche das kleinste Gewicht, bei welchem ein Prisma des betreffenden Körpers vom Querschnitt $= 1$ zerrissen wird, ausdrückt, d. i. die absolute Festigkeit des betreffenden Körpers; so bezeichnet Q die kleinste Last, welche den Balken an der Wurzel, d. i. am Querschnitt $DCEC'$ abzubrechen im Stande ist, d. i. dessen relative Festigkeit, weil, sobald die oberste Faser an der Stelle C abgerissen ist, auch alle folgenden tiefer liegenden Fasern abreissen und der Balken an dieser Stelle brechen mufs.

Setzt man dagegen für p jene Zahl, welche das gröfste Gewicht ausdrückt, bei welchem die nach ihrer Länge gespannten Fasern noch keine bleibende Ausdehnung erhalten; so bezeichnet auch Q diejenige Last, welche der Balken unter diesen Umständen noch mit Sicherheit tragen kann, d. i. dessen Tragvermögen.

99. Ist nun, um auf einige specielle Fälle überzugehen, der Querschnitt des Balkens (Fig. 50) ein Rechteck von der Breite $ab = b$ und Höhe $cc' = h$, wo von diesen beiden Dimensionen die erstere die horizontale, also die letztere die verticale Lage haben soll; so mufs man in der allgemeinen Gleichung (1) $y = \frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}h$ statt h setzen; dadurch erhält man für die relative Festigkeit dieses Balkens, $p = m$ gesetzt:

$$Q = \frac{4mb}{hl}\int_0^{\frac{1}{2}h} x^2\,dx = \frac{4mb}{hl}\cdot\frac{1}{3}\frac{h^3}{8}$$

$$\text{d. i.} \quad Q = \frac{1}{6}m\frac{bh^2}{l}.$$

(Vergleiche §. 255, Gleich. 1)

Anmerkung. Hätte der vorige Balken eine solche Lage, dafs in dessen Querschnitt die eine Diagonale AB (Fig. 51) horizontal zu liegen kommt, so sey $AB = a$ und das darauf gefällte Perpendikel $CD = c$, so wie $Dr = x$ und die zugehörige, mit AB parallele Doppelordinate $mn = Y$ Diefs vorausgesetzt hat man nach der Gleichung (2) in Nr. 97. (Anmerk. 1)

$$Q = \frac{2p}{cl}\int_0^c Yx^2\,dx$$

---

zu machen, weil wir uns selbst hierüber in einer im J. 1839 herausgegebenen Abhandlung über die relative Festigkeit im Irrthume befanden und eine andere Hypothese aufstellten, welche mit Recht von dem Herrn k. preufs. Commissionsrath und Professor *A. Brix*, in seiner gediegenen Abhandluug über den Widerstand prismatischer Körper gegen Biegung, im J. 1844 angefochten werden konnte.

oder wegen $(c-x):c = Y:a$, woraus $Y = f(x) = \frac{a}{c}(c-x)$ folgt,

auch: $$Q = \frac{2p}{cl}\cdot\frac{a}{c}\int_0^c x^2 dx\,(c-x) = \tfrac{1}{6}\,p\,\frac{ac^2}{l}.$$

100. Ist der Querschnitt eine Ellipse von den Hauptachsen $2a$ und $2b$, wovon die erstere als grösere AA' (Fig. 52) horizontal liegen soll; so ist in der Formel (1), weil die Abscissen x auf der kleinen Achse BB' gezählt werden (Comp. §. 457) $y = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2-x^2)}$ und $h = b$ zu setzen. Dadurch erhält man für die relative Festigkeit eines solchen Balkens, $p = m$ gesetzt:

$$Q = \frac{4ma}{blb}\int_0^b x^2 dx\sqrt{(b^2-x^2)}$$

oder wegen (Comp. §. 796, Lehrb. III. S. 336, Beisp. 4.):

$$\int x^2 dx\sqrt{(b^2-x^2)} = \tfrac{1}{4}(x^3 - \tfrac{1}{2}b^2x)\sqrt{(b^2-x^2)} + \tfrac{1}{8}b^4 \, arc\, Sin\,\frac{x}{b}$$

also $\int_0^b x^2 dx\sqrt{(b^2-x^2)} = \frac{1}{8}b^4\, arc\, Sin\, 1 = \frac{1}{8}b^4.\frac{\pi}{2}$ sofort:

$$Q = \tfrac{1}{4}m\pi\frac{ab^2}{l}.$$

Wechseln die Achsen ihre Lage, so wird $Q = \frac{1}{4}m\pi\frac{a^2b}{l}$.

101. Geht die Ellipse in einen Kreis vom Halbmesser r über, so erhält man für die Festigkeit des vollen oder massiven Cylinders, wenn man in den beiden vorigen Formeln $a = b = r$ setzt:

$$Q = \tfrac{1}{4}m\pi\frac{r^3}{l}.$$

(Vergleiche §. 256, Gleich. 3.)

102. Sind für einen hohlen Cylinder R und r der äufsere und innere Halbmesser und m, m' die absoluten Festigkeiten der Fasern oder Fibern in den Puncten A und a (Fig. 53); so ist nach der vorigen Formel die Festigkeit des äufsern Cylinders $Q' = \frac{1}{4}m\pi\frac{R^3}{l}$ und des innern, diesen als massiv gedacht $Q'' = \frac{1}{4}m'\pi\frac{r^3}{l}$, oder wegen: $m':m = r:R$, woraus $m' = \frac{r}{R}m$ folgt, auch $Q'' = \frac{1}{4}m\pi\frac{r^4}{lR}$, folglich ist die Festigkeit des hohlen Cylinders:

$$Q = Q' - Q'' = \tfrac{1}{4} m \pi \frac{(R^4 - r^4)}{R l}$$

(Vergleiche §. 256, Gleich. 4.)

103. Um aus einem runden Baum den stärksten vierkantigen Balken zu hauen, sey, um hierzu den Querschnitt des Balkens zu finden, der Kreis C vom Halbmesser $CA = r$ (Fig. 54) der Querschnitt des gegebenen Baumes und $ADBE$ der gesuchte rechteckige Querschnitt des Balkens, in welchem $AD = x$ die Breite und $BD = y$ die Höhe seyn soll. In der hochkantigen, als der stärkern Lage, ist die relative Festigkeit des Balkens (Nr. **99.**):

$$z = \tfrac{1}{6} m \frac{x y^2}{l} = A x y^2,$$

wenn man den constanten Factor $\frac{1}{6} \frac{m}{l} = A$ setzt.

Da aber der W. ADB ein Rechter, also $x^2 + y^2 = 4 r^2$, folglich $y^2 = 4 r^2 - x^2$ ist, so hat man auch $z = A x (4 r^2 - x^2)$, und daraus nach der bekannten Regel:

$$\frac{dz}{dx} = 4 A r^2 - 3 A x^2 = 0$$

d. i. $x = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$, wofür z in der That ein Maximum wird, weil mit diesem Werthe der zweite Differentialquotient negativ ausfällt.

Wird dieser Werth von x in dem Ausdrucke $y^2 = 4 r^2 - x^2$ substituirt und dann reducirt, so wird $y = \frac{2}{3} r \sqrt{6}$, folglich ist: $x : y = \frac{2}{3} r \sqrt{3} : \frac{2}{3} r \sqrt{6} = 1 : \sqrt{2}$.

Theilt man den Durchmesser AB in drei gleiche Theile und errichtet darauf in den Theilungspuncten F und G die Perpendikel FD und GE, so darf man nur die Verbindungslinien AD, DB, BE, AE ziehen, um das gesuchte Rechteck zu erhalten; denn es ist:

$AD^2 = AF . AB = \frac{2}{3} r . 2 r = \frac{4}{3} r^2 = x^2$ und

$BD^2 = BF . BA = \frac{4r}{3} . 2 r = \frac{8}{3} r^2 = y^2$.

Anmerkung. Diese gröfste Festigkeit des vierkantigen Balkens ist $z = \frac{1}{6} m \frac{x y^2}{l} = \frac{8}{9} \frac{m}{l} \frac{r^3}{\sqrt{3}}$, so wie jene des Balkens, dessen Querschnitt das in den Kreis C eingeschriebene Quadrat ist, $z' = \frac{1}{6} m . \frac{2 r^3 \sqrt{2}}{l} = \frac{1}{3} \frac{m}{l} r^3 \sqrt{2}$; da man endlich für die Festigkeit des runden Baumes selbst: $Q = \frac{1}{4} m \pi \frac{r^3}{l} = \frac{3{\cdot}1416}{4} \frac{m}{l} r^3$ hat, so erhält man durch Vergleichung dieser drei Ausdrücke die genäherten Werthe $z' : z : Q = {\cdot}4714 : {\cdot}5132 : {\cdot}7854$.

104. Um von den vielerlei Querschnitten, welche im Bau- und Maschinenwesen noch angewendet werden, wenigstens einen zu behandeln, wollen wir die Festigkeit eines Tragbalken bestimmen, dessen Querschnitt die in Fig. 55 dargestellte, d. i. die sogenannte doppelte ⊤ Form hat und bei welchem also die neutrale Achse mn wieder in der halben Höhe liegt. Ist Q' die relative Festigkeit für den vollen rechteckigen Querschnitt $ABCD$, und q jene für das Rechteck $abcd$, dieses als voll gedacht; so ist die Festigkeit für den gesuchten Querschnitt:

$$Q = Q' - 2q \quad . \; . \; . \quad (m)$$

Nun ist aber, bei den cotirten Bezeichnungen in Fig. 55, wenn man Kürze halber $\frac{1}{6}\frac{m}{l} = A$ setzt, $Q' = Abh^2$ und $q = \frac{1}{6}\frac{m'}{l}\frac{(b-b')}{2}h'^2$ oder wegen $m' : m = \frac{h'}{2} : \frac{h}{2}$, woraus $m' = \frac{h'}{h}m$ folgt, auch: $q = \frac{A}{2}\frac{h'}{h}(b-b')h'^2$; werden diese Werthe in der Gleichung (m) substituirt, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$Q = \frac{A}{h}\left[b'h'^3 + b(h^3 - h'^3)\right] = \frac{A}{h}\left[bh^3 - b''h'^3\right],$$

wenn man nämlich $ab + a'b' = b - b' = b''$ setzt.

Anmerkung. Dieselbe Formel drückt auch, wie leicht zu sehen, die Festigkeit für die in Fig. 56 und Fig. 57 angegebenen und cotirten Querschnitte aus.

105. Um endlich auch noch einen Querschnitt zu betrachten, welcher durch die neutrale Achse in zwei unsymmetrische Theile getheilt wird, nehmen wir ein dreiseitiges Prisma von den Grundflächen ABC (Fig. 58), wobei die Basis des Dreieckes $AB = b$ horizontal, und die Höhe desselben $CF = a$ vertical seyn soll.

Liegt, wie in Fig. 58, die Spitze C des Dreieckes nach abwärts, und ist O der Schwerpunct desselben, also (Nr. **97.**, Anmerk 2) DE die neutrale Achse, und setzt man $OP = x$, $PM = y$; so ist wegen $OF = \frac{1}{3}a = h$ und $OC = \frac{2}{3}a = h'$, sofort $\frac{b}{2} : y = a : \frac{2}{3}a + x$ und $\frac{b}{2} : y' = a : \frac{2}{3}a - x$, folglich $y = \frac{b}{2a}(\frac{2}{3}a + x)$ und $y' = \frac{b}{2a}(\frac{2}{3}a - x)$

also
$$\int_0^h y x^2 \, dx = \frac{b}{2a}\int_0^{\frac{1}{3}a} x^2 \, dx \left(\tfrac{2}{3}a + x\right) =$$
$$\frac{b}{2a}\left(\frac{2a^4}{3 \times 81} + \frac{a^4}{4 \times 81}\right) = \frac{11\,ba^3}{1944}$$

und $$\int_0^{h'} y' x^2 dx = \frac{b}{2a}\int_0^{\frac{2}{3}a} x^2 dx\,(\tfrac{2}{3}a - x) =$$

$$\frac{b}{2a}\left(\frac{16a^4}{3\times 81} - \frac{16a^4}{4\times 81}\right) = \frac{16ba^3}{1944};$$

werden endlich diese Werthe in der Gleichung (A) von Nr. **97** substituirt, so erhält man:

$$Q = \frac{6p}{al}\left(\frac{11ba^3}{1944} + \frac{16ba^3}{1944}\right)$$

oder reducirt: $$Q = \frac{81}{972}p\frac{ba^2}{l} = \tfrac{1}{12}m\frac{ba^2}{l},$$

wenn man nämlich wieder m statt p setzt.

106. Hat die Grund- oder Bruchfläche dieses Prisma die in Fig. 59 angezeigte, nämlich die umgekehrte Lage, oder die Spitze C nach aufwärts gekehrt; so findet man eben so, wegen $h = \frac{2}{3}a$ und $h' = \frac{1}{3}a$:

$$Q' = \frac{3p}{al}\left(\frac{16ba^3}{1944} + \frac{11ba^3}{1944}\right) \text{ d. i.}$$

$$Q' = \frac{81}{1944}p\frac{ba^2}{l} = \tfrac{1}{24}m\frac{ba^2}{l}$$

so, dafs also $Q' = \frac{1}{2}Q$ oder $Q' : Q = 1 : 2$ Statt findet, d. h. das Prisma hat in der erstern Lage (Fig. 58) noch ein Mal so viel Festigkeit als in der letztern (Fig. 59), weil dabei die neutrale Achse im erstern Falle in demselben Verhältnifs höher gegen die oberste Schichte zu liegen kommt, als in der letztern.

Anmerkung. Die Festigkeit eines gleichen Prisma vom rechteckigen Querschnitt von der Breite b und Höhe a ist (Nr. **99**):

$$Q'' = \tfrac{1}{6}p\frac{ba^2}{l}, \text{ folglich } Q : Q'' = \tfrac{1}{12} : \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2} : 1;$$

in demselben Verhältnifs stehen aber auch die beiden Querschnitte dieser Balken oder Prismen.

Übrigens ist auch leicht zu sehen (wenn man die Gleich. 2 in Nr. **96**, Anmerk. 1 anwendet), dafs die vorigen Ausdrücke dieselben bleiben, wenn auch das Dreieck ABC nicht gleichschenkelig, sondern nur $AB = b$ und $CF = a$ ist.

107. Schlufsbemerkung. Versteht man unter dem Brechungsmoment die Summe der statischen Momente aller Spannungen und Pressungen, die in einem Querschnitte des Balkens oder Stabes im Augenblicke des Bruches Statt finden, und bezeichnet man dieses Moment durch mE, wo m die auf 1 Quadratzoll bezogene gröfste

Spannkraft, welche dabei vorkommt (theoretisch die absolute Festigkeit), oder (§. 260) der sogenannte Brechungscoeffizient, folglich E das Brechungsmoment für $m = 1$ ist; so hat man, wenn das Gewicht des Balkens dabei vernachlässigt werden darf: $mE = Ql$ (sonst, §. 255, Gleich. 1′, $mE = Ql + \frac{1}{2}Gl$). Diefs vorausgesetzt ist E der in den vorhergehenden Nrn. von den Querschnittsdimensionen des Balkens abhängige Ausdruck, und zwar ist für den rechteckigen Querschnitt in Fig. 50, $E = \frac{1}{6}bh^2$; für ein Quadrat von der Seite a (als Querschnitt) $E = \frac{1}{6}a^3$; für einen Kreis vom Halbmesser r, oder Durchmesser d: $E = \frac{1}{4}\pi r^3 = \frac{1}{32}\pi d^3$; für eine Ellipse, deren grofse Achse $= h$ vertical und kleine Achse $= b$ horizontal ist: $E = \frac{1}{32}\pi b h^2$; für ein Dreieck, dessen Basis $= b$ horizontal nach oben gekehrt, und Höhe $= h$ vertical ist: $E = \frac{1}{12}bh^2$; für dasselbe Dreieck in der umgekehrten Lage: $E = \frac{1}{24}bh^2$; für einen Kreisring (immer als Querschnitt des Körpers zu verstehen) dessen äusserer und innerer Durchmesser d und d' sind: $E = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{1}{d}(d^4 - d'^4)$; für einen elliptischen Ring (als Querschnitt eines hohlen elliptischen Cylinders) wobei h, h' die beiden grofsen, und b, b' die kleinen Achsen bezeichnen und wobei h vertical ist: $E = \frac{1}{32}\pi \cdot \frac{1}{h}(bh^3 - b'h'^3)$ u. s. w. (Man s. *S. Redtenbacher's* Resultate für den Maschinenbau Taf. V.).

Auch beziehen sich diese Werthe nicht blofs auf den entferntesten $DCEC'$, sondern auf jeden Querschnitt $acbc'$ (Fig. 48) des prismatischen Körpers, wenn man nur in dem Festigkeitsmomente Pl statt $l = AB$, den betreffenden Abstand $z = AO$ setzt.

Hat endlich der Balken keine horizontale Lage, sondern bildet er mit dem Horizonte den Winkel α, so mufs man, wenn die Last Q fortwährend nach lothrechter Richtung wirkt, in allen vorhergehenden Ausdrücken $Q\,Cos\,\alpha$ statt Q setzen.

Anmerkung. Die in §. 262 angegebenen Regeln zur Berechnung der Stärke der Wellzapfen, lassen sich noch dadurch vereinfachen, dafs man die Länge der Zapfen als eine durch die Erfahrung gegebene Function des Durchmessers desselben annimmt und in Rechnung bringt.

Ist nämlich d der Durchmesser und l die Länge eines solchen Zapfens in W. Zollen ausgedrückt, so wie P der in Pfunden dargestellte Druck auf denselben, so wie m der Brechungscoeffizient; so hat man (§. 262) $\frac{1}{16}\pi m d^3 = Pl$ und da man im Durchschnitt $l = 1{\cdot}5d$ setzen kann, auch $\frac{1}{16}\pi m d^3 = 1{\cdot}5Pd$, woraus

$$d^2 = \frac{24P}{\pi m} \text{ folgt.}$$

Da man nun für Gufseisen $m = 30000$ Pf. als Mittelwerth setzen kann, so erhält man, da die Zapfen nur mit dem 10ten Theil ihrer relativen Festigkeit in Anspruch genommen werden sollen, folglich $m = 3000$ gesetzt wird, $d = \cdot 05 \sqrt{P}$, oder wenn man P in W. Centner ausdrückt, für gufseiserne Zapfen:

$$(\alpha) \quad d = \cdot 5 \sqrt{P}.$$

Da man übrigens in der Praxis dünne Zapfen im Verhältnifs zum Durchmesser länger als dicke macht, so kann man sich zur Bestimmung der Länge der Zapfen auch der Formel bedienen:

$$(\beta) \quad l = \cdot 33 + 1\cdot 21\, d.$$

Für schmiedeiserne Zapfen kann man setzen:

$$(\alpha') \quad d = \cdot 33 \sqrt{P} \text{ und ebenfalls}$$

$$(\beta') \quad l = \cdot 33 + 1\cdot 21\, d.$$

Für die im Beispiele des §. 262 angeführten gufseisernen Zapfen der Wasserradswelle, würde wegen $P = 25$ Centner nach den beiden erstern Formeln (α) und (β) der Durchmesser $d = 2\cdot 5$, und die Länge $l = 3\cdot 4$ Zoll.

Körper von gleichem Widerstande.

(§. 259.)

108. Soll der, an dem einen Ende horizontal eingemauerte, an dem andern Ende belastete Balken, Querschnitte von durchaus gleicher Breite $CD = AB = b$ (Fig. 60) erhalten, so sey $CE = h$ die verticale Höhe des in der Ebene der Mauer liegenden Querschnittes, wofür wieder $AC = l$ seyn soll, und $PM = y$ jene des Querschnittes PM', wofür $AP = x$ ist; so ist die Festigkeit des Balkens in Beziehung auf den Querschnitt ED (Nr. **99**) (α) . . $Q = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{l}$ und in Bezug auf den Querschnitt MP': $Q' = \frac{1}{6} m \frac{b y^2}{x}$. Da nun aber beide Festigkeiten gleich grofs seyn sollen, so hat man $Q' = Q$ oder $\frac{y^2}{x} = \frac{h^2}{l}$ und daraus $y^2 = \frac{h^2}{l} x$ als Gleichung der Begrenzungscurve AME oder $BM'F$, welche sofort eine gemeine Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{l}$ ist, deren Scheitel in A und Achse in AC liegt.

Anmerkung. Der Parameter $\frac{h^2}{l}$ läfst sich, wenn m, Q und b gegeben sind, aus der vorigen Gleichung (α), aus welcher $\frac{h^2}{l} = \frac{6\,Q}{m\,b}$ folgt, bestimmen.

Da die Seitenfläche $ACEM = \frac{2}{3} AC.CE$, dagegen wenn die Querschnitte alle gleich sind und dieselbe Höhe CE haben, $= AC.CE$ ist; so erspart man durch diese, gegen das freie Ende zu abnehmenden Höhen, wobei die gekrümmte Fläche sowohl (wie in der Zeichnung) unten, als auch oben liegen kann, bei derselben Festigkeit des Balkens $\frac{1}{3}$ am Materiale.

109. Sollen dagegen die nach dem freien Ende zu abnehmenden Querschnitte, Rechtecke von durchaus gleicher Höhe $MN = CE = h$ (Fig. 61) bilden; so sey wieder $CD = b$ und $AG = l$, so wie für $AP = x$ die Breite des Rechteckes $MM' = y$, so ist wie vorhin $\frac{1}{6} m \frac{bh^2}{l} = \frac{1}{6} m \frac{yh^2}{x}$ oder $\frac{b}{l} = \frac{y}{x}$ d. i. $y = \frac{b}{l} x$ oder auch $\frac{1}{2} y = \frac{\frac{1}{2} b}{l} x$, woraus sofort folgt, dafs die horizontalen Flächen gleichschenkelige Dreiecke ACD von der Basis $CD = b$ und Höhe $AG = l$ seyn müssen.

Anmerkung. Da die Fläche eines solchen Dreieckes $= \frac{1}{2} bl$ nur halb so grofs als die des Rechteckes bl ist; so erspart man bei dieser Form des Körpers bei gleicher Festigkeit das halbe Material, also noch mehr als im vorigen Falle.

110. Sollen die Querschnitte für den Fall bestimmt werden, dafs die Last P über die ganze Länge gleich vertheilt ist, so sey, wenn der Balken durchaus einerlei Breite $CD = PP' = b$ (Fig. 62) haben soll, $AC = l$, $CE = h$, $AP = x$ und $PM = y$, so wie das Gewicht, womit bei der Breite b die Längeneinheit belastet ist $= q$; so kommt auf die Länge AC die Last $Q = lq$ und auf jene AP die Last xq, folglich ist mit Rücksicht auf den durch die Gleichung (2) in §. 255 ausgedrückten Satz, die Festigkeit des rechteckigen Querschnittes PM' sofort $\frac{1}{2} qx = \frac{1}{6} m \frac{by^2}{x}$, so wie jenes CF, $\frac{1}{2} ql = \frac{1}{6} m \frac{bh^2}{l}$, welcher Ausdruck von selbst aus dem vorigen folgt, wenn man $x = l$ und $y = h$ setzt. Der letztere Ausdruck gibt $h = l \sqrt{\frac{3q}{mb}}$ und der erstere $y^2 = \frac{3q}{mb} x^2$ oder $y = \frac{h}{l} x$, so dafs also AME eine gerade Linie oder die untere Fläche BE des Prisma eine Ebene bildet.

111. Ist der Balken in diesem Falle blofs durch sein eigenes Gewicht belastet, so sey wieder (Fig. 63) $CD = PQ = b$, $CE = DF = h$, $AC = l$ und für den verticalen Querschnitt PN, $AP = x$ und $PM = y$, so wie für jenen $P'N'$, welcher zwischen dem vorigen und AB liegen soll, $AP' = x'$ und $P'M' = y'$, außerdem sey für einen diesem unendlich nahe liegenden Schnitt $P'p = dx'$, so wie γ das Gewicht der cubischen Einheit des Balkens. Dieß vorausgesetzt ist das Gewicht des Elementes $pN' = \gamma\, b\, y'\, dx'$ und dessen statisches Moment gegen den Querschnitt $PN = \gamma\, b\, y'\, dx'\,(x - x')$, folglich die Summe der stat. Momente aller dieser in dem Körper APN vorhandenen Elemente, d. i. des Gewichtes dieses Körpers $= \gamma\, b \int_0^x y'\, dx'\,(x - x')$.

Soll aber ein in A oder AB aufgehängtes Gewicht P gegen diesen Querschnitt PN' dieselbe Wirkung hervorbringen, so muß

$$Px = \gamma\, b \int_0^x y'\, dx'\,(x - x') \text{ oder wegen (Nr. 99) } Px = \tfrac{1}{6} m\, b\, y^2$$

und wenn man Kürze halber $\frac{1}{6}\frac{m}{\gamma} = A$ setzt, auch:

$$\int_0^x y'\, dx'\,(x - x') = A\, y^2 \quad . \; . \; . \quad (n) \text{ seyn.}$$

Um nun aus dieser Bedingung die Gleichung $y = f(x)$ oder $y' = f(x')$ der Curve AME zu finden, wollen wir diese Gleichung (n) zwei Mal nach x differenziiren; dadurch entsteht zuerst $y'\, dx'\,(x - x') = A\, d.y^2$ und dann $y'\, dx'\, dx = A\, d^2.y^2$, oder wenn man x' in x, also auch y' in y übergehen läßt: $y\, dx^2 = A\, d^2 y^2$, woraus $\frac{d^2.y^2}{dx^2} = \frac{y}{A}$ und wenn man diese Differenzialgleichung zweimal integrirt: $y = \frac{x^2}{12A}$ folgt. Diese Gleichung, welche, wenn für A der Werth hergestellt wird, die Form $x^2 = \frac{2m}{\gamma} y$ annimmt, gehört aber einer gemeinen Parabel AME vom Parameter $\frac{2m}{\gamma}$ an, deren Achse in der durch A gehenden lothrechten Linie, und Scheitel in A liegt.

112. Um ferner auch noch den Fall zu behandeln, in welchem der Körper horizontal an beiden Enden A, B (Fig. 64) frei aufliegt und in irgend einem Puncte D mit dem Gewichte Q belastet ist, sey, um wieder die Querschnitte von gleicher Festigkeit unter der Voraussetzung zu finden, daß sie Rechtecke von einerlei Breite b bilden, $AB = l$, $AD = a$, $BD = l - a = a'$, $DC = h$, so wie für einen zwischen A und C liegenden Punct M der gesuchten Curve, $AP = x$ und $PM = y$; so ist der vom Gewichte Q auf den Punct P

ausgeübte Druck q, wegen $q(l-x)=Q\,a'$ sofort $q=\frac{Q\,a'}{l-x}$, und da die Festigkeit des Querschnittes PM nach Gleich. (5) §. 257 $q=\frac{1}{6}\,m\,b\,y^2\,\frac{l}{x\,(l-x)}$ ist, so folgt, wenn man diese beiden Werthe einander gleich setzt, $y^2=\frac{6\,Q\,a'}{m\,b\,l}\,x$, oder da $Q=\frac{1}{6}\,m\,b\,h^2\,\frac{l}{a\,a'}$, also $\frac{6Q\,'}{m\,b}=\frac{h^2}{a}$ ist, auch:
$$y^2=\frac{h^2}{a}\,x,$$
als Gleichung der Begrenzungscurve AMC und zwar einer Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{a}$, deren Scheitel in A und Achse in AB liegt.

Auf ganz gleiche Weise findet man auch für die Begrenzungscurve $BM'C$ eine Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{a'}$, deren Scheitel in B und Achse wieder in AB liegt.

Ist die Last in der halben Länge von AB angebracht, so erhalten beide Parabeln denselben Parameter $\frac{2\,h^2}{l}$ und dabei gegen h eine symmetrische Lage.

113. Ist endlich in diesem letztern Falle die Last Q nicht an einem einzigen Punct angebracht, sondern über die Länge gleichförmig vertheilt; so sey wieder b die Breite der Rechtecke, $l=AB$ die Entfernung der beiden Stützen, $\frac{1}{2}l=a$ und die bei dieser Breite b auf die Längeneinheit kommende Belastung $=q$; dann wird jede der beiden Stützen A, B mit dem Gewichte $a\,q$ gedrückt und jede Hälfte des Körpers von gleichem Widerstande, wie jene ACD (Fig. 65), befindet sich in derselben Lage, als wenn sie im Querschnitt CD befestigt, im Puncte A mit der Kraft $a\,q$ vertical aufwärts gezogen und mit dem über AC gleich vertheilten Gewichte $a\,q$ belastet wäre.

Ist aber $CD=h$ die Höhe des Körpers in der Mitte, dagegen für $CP=x$ jene $PM=y$; so ist in Beziehung auf den durch PM gehenden Querschnitt das statische Moment der in A aufwärts wirkenden Kraft $a\,q$ gleich $a\,q\,(a-x)$ und das statische Moment der über AP gleich vertheilten Last $(a-x)\,q$ gleich $\frac{1}{2}(a-x)\,q\times(a-x)=\frac{1}{2}q\,(a-x)^2$, also die Differenz beider Momente $a\,q(a-x)-\frac{1}{2}\,q(a-x)^2=\frac{1}{2}\,q\,(a^2-x^2)$, mit welchem der Bruch in PM bewirkt werden muſs. Nun ist dieses Moment aber auch $\frac{1}{6}\,m\,b\,y^2$, folglich

$$\tfrac{1}{6} m b y^2 = \tfrac{1}{2} q (a^2 - x^2) \text{ woraus } y^2 = \frac{3q}{mb}(a^2 - x^2)$$

oder wegen (für den mittlern Querschnitt CD) $\frac{1}{2} a q = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{a}$,

woraus $\frac{3q}{mb} = \frac{h^2}{a^2}$ folgt, auch $y^2 = \frac{h^2}{a^2}(a^2 - x^2)$,

als Gleichung der Begrenzungscurve AMB, welche sofort eine (halbe) Ellipse von den Achsen $2a = l$ und $2h = 2a\sqrt{\frac{3q}{mb}}$ st, deren grofse Achse $2a$ in AB liegt.

Biegungswiderstand prismatischer Körper.

(§. 264.)

114. Ist wieder, mit Beibehaltung der Bezeichnung in Nr. **94**, GD (Fig. 48) der an dem einen Ende unbeweglich befestigte oder eingemauerte und an dem andern Ende mit dem Gewichte Q belastete prismatische Körper und dadurch in demselben eine Biegung entstanden, welche noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt; so sey um einen Ausdruck für den Widerstand der Biegung zu finden AOB (Fig. 49) die neutrale Schichte, darauf $AO = z$, $OO' = \mathrm{d}z$ und $AB = l$, ferner wieder $BC = h$ und die Spannung der obersten Faser in $d = p'$ und in $C = p$. Zieht man in den Puncten O und O' die Normalen Oc', $O'f$ der Curve AOB und verlängert diese bis zu ihrem Durchschnittspunct J, so bildet dieser den Mittelpunct des Krümmungskreises für das Curvenelement OO', wofür $JO = JO' = \rho$ der Krümmungshalbmesser ist.

Die ursprüngliche, vor der Biegung bestandene Länge der obersten Faser in dem Körperelement fd ist $ed = \mathrm{d}z$, dagegen nach der Biegung $ec = \mathrm{d}z + \Delta\mathrm{d}z$, wobei die bewirkte, nach unserer Annahme innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Ausdehnung $cd = \Delta\mathrm{d}z$, durch die in §. 252 Gleich. (1) ausgedrückte Relation $\Delta\mathrm{d}z = \frac{p'\mathrm{d}z}{M}$ oder wegen $p' : p = z : l$ woraus $p' = \frac{p}{l} z$ folgt, durch $\Delta\mathrm{d}z = \frac{p}{lM} z\mathrm{d}z \,.. (a)$ ausgedrückt wird, wobei M den Elasticitätsmodul des Balkens bezeichnet.

Da die Bogenelemente OO' und cd als gerade Linie zu nehmen sind, so geben die beiden ähnlichen Dreiecke OJO' und cOd die Proportion $dO : dc = O'J : OO'$ d. i. $h : \Delta\mathrm{d}z = \rho : \mathrm{d}z$, so, dafs also, wenn man für Δdz den Werth aus der vorigen Gleichung (*a*) setzt, $h\,dz = \frac{p}{Ml}\rho\,z\,dz$ oder $\rho = \frac{Mhl}{pz} \ldots$ (*b*) wird.

Bei der gemachten Voraussetzung ist aber, wenn man Kürze halber den doppelten Integralausdruck in (*A*) Nr. **97**, d. i.

$2\int_0^h y\,x^2\,dx + 2\int_0^{h'} y'\,x^2\,dx = X$ setzt, sofort $Q = \frac{pX}{hl}$, also $p = \frac{Qhl}{X}$, und wenn man diesen Werth für p in der vorigen Gleichung (*b*) substituirt, auch:

$$\rho = \frac{MX}{Qz} \ldots \quad (c)$$

woraus man für das statische Moment der Kraft oder des Gewichtes Q in Beziehung auf den Querschnitt $a\,c\,b\,c'$ (Fig. 48) oder $d\,d'$ (Fig. 49) erhält:

$$Qz = \frac{MX}{\rho} \ldots \quad (1)$$

wenn man nämlich dabei das Gewicht des Körpers aufser Acht läfst.

Anmerkung 1. Da nach der obigen Proportion $p' : p = z : l$, $pz = p'l$ ist, so folgt aus der vorigen Gleichung (*b*), wenn man diesen Werth substituirt: $p' = \frac{Mh}{\rho}$, woraus sofort folgt, dafs die Spannung der Fasern im Querschnitte dd' dem entsprechenden Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional ist.

Anmerkung 2. Übereinstimmend mit der Bemerkung in Nr. **107**, wo das Product $mE = Ql$ das Brechungsmoment genannt wurde, wenn m den Brechungscoeffizienten, oder die im Augenblicke des Bruches Statt findende gröfste Spannung auf 1 Quadratzoll Querschnitt bezeichnet, eben so nennt man auch mE das Elasticitätsmoment eines Querschnitts, d. h. die Summe der statischen Momente aller Spannungen und Pressungen, welche in einem Querschnitt eines Stabes in Folge einer Biegung desselben entstehen, wenn man unter m die auf 1 Quadratzoll bezogene gröfste Spannung, welche bei der Biegung in dem betreffenden Querschnitt vorkommt, versteht (so, dafs also hier für m nur ein gewisser Bruchtheil, für Maschinenconstructionen in der Regel der 10te Theil von dem Werthe m in der erstern Bedeutung, d. i. vom Brechungscoeffizienten zu nehmen ist).

Bezeichnet man nämlich das Elasticitätsmoment irgend eines Querschnittes durch M, so ist:

$$(\gamma) \ldots M = mE$$

wobei auch $mE = Pl$ ist und E die den verschiedenen Querschnitten entsprechenden (in Nr. **107** angegebenen) Werthe besitzt.

115. Da der Zähler MX des vorigen Bruches, welcher lediglich von der physischen Beschaffenheit (wegen M) und der Form des Querschnittes des prismatischen Körpers (wegen X) abhängt, für einen gegebenen prismatischen Körper constant ist, so folgt, dafs der auf den Querschnitt dd' (Fig. 49) sich beziehende Krümmnngshalbmesser ρ genau in demselben Verhältnifs abnimmt, in welchem die Entfernung z des betreffenden Querschnittes vom freien Ende A zunimmt, so dafs also ρ im Querschnitte CC', nämlich für $z = l$ seinen kleinsten Werth erreicht hat, also die Krümmung und Spannung der Fasern an dieser Stelle am gröfsten ist. (Siehe Anmerk. 1. zu Nr. **114.**)

Das genannte Product MX, welches sofort für alle Querschnitte des Körpers oder Balkens constant ist, wird nach Einigen das Biegungsmoment, nach Andern die relative Elasticität des Balkens genannt; wir wollen die erstere Benennung beibehalten und dieses Moment durchaus mit E' bezeichnen. Diefs vorausgesetzt, geht die vorige Gleichung (1) über in folgende:

$$Qz = \frac{E'}{\rho} \quad . \; . \quad (2)$$

116. Eine Vergleichung des Biegungsmomentes $E' = MX$ mit dem Momente der relativen Festigkeit (A) in Nr. **97.**, d. i. mit Qz oder $Ql = \frac{p}{h} X$ zeigt, dafs man in diesem Festigkeitsmoment nur M statt p setzen und mit dem Abstand h der obersten oder am stärksten gespannten Fasern multipliciren darf, um für alle Querschnitte des Balkens das Biegungsmoment E' zu erhalten; es ist nämlich durchaus: $E' = MhE$ (γ). Da wir in Nr. **107** das Festigkeitsmoment durch pE oder mE ausgedrückt und dort auch für verschiedene Querschnitte die Werthe von E angegeben haben, so erhält man am einfachsten die Werthe E' aus diesen letztern mE durch das eben angegebene Verfahren. Man findet so ganz einfach für einen rechteckigen Querschnitt, wobei b die Breite und h die Höhe ist, $E' = \frac{1}{6} M b h^2 \times \frac{1}{2} h = \frac{1}{12} M b h^3$; für einen quadratförmigen Querschnitt von der Seite a, $E' = \frac{1}{12} M a^4$; für einen kreisförmigen Querschnitt vom Halbmesser r oder Durchmesser d, $E' = \frac{1}{4} \pi M r^4 = \frac{1}{64} \pi M d^4$; für einen hohlen Cylinder von den Halbmessern r und r', oder Durchmessern d und d', $E' = \frac{1}{4} \pi M (r^4 - r'^4) = \frac{1}{64} \pi M (d^4 - d'^4)$; für einen dreieckigen Querschnitt in der Lage Fig. 58, wo $AB = b$, $CF = h$ ist, $E' = \frac{1}{12} M b h^2 \times \frac{1}{3} h = \frac{1}{36} M b h^3$ und in der umgekehrten Lage (Fig. 59) $E' = \frac{1}{24} M b h^2 \times \frac{2}{3} h = \frac{1}{36} M b h^3$, also in beiden Lagen gleich grofs; endlich ist für einen elliptischen Querschnitt von den Hauptachsen $2a$ und $2b$, wenn die erstere oder gröſsere vertical steht, $E' = \frac{1}{4}\pi M a^3 b$, und wenn diese Achse horizontal liegt, $E = \frac{1}{4}\pi M a b^3$.

Anmerkung. Da nach Gleichung (2) (in der vorigen Nr.) das Biegungsmoment E' den Widerstand darstellt, welchen der Körper einer durch die Last Q bewirkten Biegung entgegensetzt, also zugleich auch einen Begriff von der Steifigkeit des Körpers gibt; so kann man durch Vergleichung dieser Werthe von E' bestimmen, welche Querschnittsformen, bei demselben Aufwande an Materiale vortheilhafter sind. So verhält sich, um nur ein Beispiel anzuführen, die Steifigkeit des Balkens von rechteckigem Querschnitt, in der hochkantigen Lage, zu jener des Balkens mit dreieckigem Querschnitte, die Spitze auf- oder abwärts gekehrt $E : e = \frac{1}{12} M b h^3 : \frac{1}{36} M b h^3 = 3 : 1$, während sich bei einerlei Länge ihre kubischen Inhalte wie $bh = \frac{1}{2} bh = 2 : 1$ verhalten; obschon also der parallelopipedische Balken doppelt so viel Materiale als der dreikantige besitzt, so ist er dafür nicht bloſs 2, sondern 3 Mal so steif als der dreikantige Balken, so, daſs die Anwendung dieses letzteren in dieser Hinsicht nichts weniger als vortheilhaft wäre.

Ferner folgt aus diesen Werthen von E', daſs die Steifheit parallelopipedischer Balken wie die Breite und der Cubus der Höhe zunimmt; daſs diese bei Cylindern wie die vierte Potenz der Halb- oder Durchmesser wächst u. s. w.

Interessant ist die Vergleichung zwischen Röhren und massiven Cylindern von einerlei Materiale, welche dem Studirenden selbst überlassen bleibt. *Buchanan* gibt für hohle guſseiserne Wellen als das zweckmäſsigste Verhältniſs zwischen dem innern und äuſsern Halbmesser jenes von $3 : 4$, *Tredgold* nimmt die Wandstärke zu $\frac{3}{10}$ des äuſsern Halbmessers an; im erstern Falle findet man bei gleichem Materialeaufwand, daſs die hohle Welle beinahe $3\frac{3}{5}$ Mal so viele Steifigkeit als die volle Welle besitzt; im letztern Falle beinahe 3 Mal so viel u. s. w.

117. Geht in besondern Fällen, wie z. B. wenn der Querschnitt eines Körpers aus mehreren einzelnen getrennten Theilen besteht, die neutrale Achse ab (Fig. 48) nicht durch den Schwerpunct O des Querschnittes $acbc'$ (obschon sie immer noch durch den Schwerpunct des Gesammtquerschnittes geht), sondern liegt diese in AB (Fig. 66), wobei der Normalabstand von ab, d. i. $OC = e$ seyn soll, und bezeichnet man das Biegungsmoment des Querschnittes $acbc'$ in Beziehung auf die Achse ab mit μ, dagegen auf die Achse AB mit μ'; so muſs man, um aus $\mu = MX$, μ' zu finden, in dem Integralausdruck $X = 2\left[\int_0^h y x^2 dx + \int_0^{h'} y' x^2 dx\right]$ in dem ersten Integrale statt x setzen $x - e$ und in dem zweiten statt x setzen $e - (-x) = e + x$; dadurch erhält man:

$$\mu' = M.2\left[\int_0^h y(x-e)^2\,dx + \int_0^{h'} y'(x+e)^2\,dx\right]$$

$$= M\left\{2\left[\int_0^h y\,x^2\,dx + \int_0^{h'} y'\,x^2\,dx\right] - 4e\int_0^h y\,x\,dx\right.$$

e^2 $$\left. + 4e\int_0^{h'} y'\,x\,dx + e^2\left[2\int_0^h y\,dx + 2\int_0^{h'} y'\,dx\right]\right\}$$

oder wegen der Bedingungsgleichung (a) in Nr. **97**, Anmerk. 2, und wenn man die Fläche des Querschnittes $acbc' = F$ setzt, auch $\mu' = MX + Me^2F$, oder:

$$\mu' = \mu + MFe^2 \quad (\alpha) \quad \text{oder} \quad \mu = \mu' - MFe^2 \;.\;. \quad (\beta)$$

Hieraus folgt zugleich, dafs das Biegungsmoment eines Körpers in Beziehung auf dessen neutrale Achse (wegen $e = o$) am kleinsten sey.

Anmerkung 1. Der durch die Gleichung (β) ausgedrückte Satz kann dazu benützt werden, das Biegungsmoment eines Körpers in Beziehung auf seine neutrale Achse (deren Bestimmung oft sehr schwierig ist) zu bestimmen, wenn dasselbe bezüglich einer andern Achse bekannt oder leichter zu finden ist.

1) Nehmen wir z. B. das Biegungsmoment des dreiseitigen Prisma in der Lage Fig. 59 in Beziehung auf die durch C gehende Achse, wobei also $CF = h$, $CO = \frac{2}{3}h$ und $AB = b$ ist; so hat man $X = \int_0^h Y dx . x^2$ oder wegen $Y : b = x : h$, woraus $Y = \frac{b}{h}x$ folgt, auch $X = \frac{b}{h}\int_0^h x^3 dx = \frac{1}{4}bh^3$; es ist daher $\mu' = MX = \frac{1}{4}Mbh^3$ und zufolge der obigen Relation (β):

$$E' = \mu = \tfrac{1}{4}Mbh^3 - M.\tfrac{1}{2}bh.\tfrac{4}{9}h^2 = Mbh^3\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{9}\right) = \tfrac{1}{36}Mbh^3,$$

wie früher.

2) So findet man ferner z. B. das Biegungsmoment eines Halbkreises $ACDB$ (Fig. 67) als Querschnitt eines halben Cylinders, indem man dasselbe zuerst in Beziehung auf den Durchmesser AB als Achse bestimmt und dieses dann nach der Formel (β) in Bezug auf die neutrale, mit AB parallele Achse ab ausdrückt.

Es ist aber das erstere Moment die Hälfte von jenem des ganzen Kreises oder (Nr. **116**) $\mu' = \frac{1}{8}\pi Mr^4$, ferner $F = \frac{1}{2}r^2\pi$ und wenn O der Schwerpunct der halben Kreisfläche ist, (§. 50) $e = \frac{4r}{3\pi}$, folglich nach (β): $E' = \mu = \frac{1}{8}\pi Mr^4 - M.\frac{1}{2}r^2\pi.\frac{16r^2}{9\pi^2} = \frac{9\pi^2 - 64}{72\pi}Mr^4$ oder nahe

$E' = \cdot 110\, M r^4$, dabei ist es gleichgiltig, ob der Punct D des Kreisbogens unterhalb AB (wie in der Zeichnung) oder oberhalb AB liegt.

3) Um das Biegungsmoment des in Fig. 68 dargestellten, gegen die neutrale Achse mn symmetrischen Querschnittes zu finden, darf man nur von dem Momente des ganzen als voll gedachten Rechteckes $b'h$, jenes der vier hohlen Rechtecke $\frac{1}{4}(b'-b)(h-h')$, deren neutrale Achsen von jener mn um die Gröfse $\frac{1}{4}(h+h')$ abstehen, abziehen; dadurch erhält man: $E' = \frac{1}{12} b' h^3 - \frac{1}{48}(b'-b)(h-h')^3 - \frac{1}{16}(b'-b)(h-h')(h+h')^2$, oder nach gehöriger Entwicklung und Reduction:

$$E' = \tfrac{1}{12} M [b h^3 + (b'-b) h'^3].$$

4) Um endlich noch das Biegungsmoment E' des $\top$ förmigen Querschnittes in Fig. 68′ zu finden, wobei aufser der in der Figur ersichtlichen Bezeichnung $ab + a'b' = b'$ seyn soll, hat man zuerst Alles auf die Achse AB bezogen, das Moment des ganzen, voll genommenen Rechteckes bh d. i. (Relat. α) $\quad \mu' = \frac{1}{12} M b h^3 + M . b h \, \frac{1}{4} h^2 = \frac{1}{3} M b h^3$;
eben so ist das Moment der beiden hierzu fehlenden Rechtecke $= \frac{1}{3} M b' h'^3$, also das Moment des $\top$ förmigen Querschnittes in Beziehung auf die Achse AB: $\quad \mu' = \frac{1}{3} M (b h^3 - b' h'^3)$.

Um nun auf die neutrale, durch den Schwerpunct O gehende Achse überzugehen, hat man $F = bh - b'h'$ und $Fe = b(h-h')\dfrac{(h+h')}{2} + (b-b')h'\dfrac{h'}{2} = \dfrac{b h^2 - b' h'^2}{2}$, folglich $e = \dfrac{b h^2 - b' h'^2}{2(bh - b'h')}$, demnach nach der obigen Formel (β):

$$\mu' = E' = \tfrac{1}{3} M (b h^3 - b' h'^3) - \tfrac{1}{4} M \frac{(b h^2 - b' h'^2)^2}{bh - b'h'}$$

$$= \tfrac{1}{12} M \frac{(b h^2 - b' h'^2)^2 - 4 b b' h h' (h-h')^2}{bh - b'h'}.$$

Anmerkung 2. Ist das Biegungsmoment eines Körpers $E' = MX$ bekannt, so läfst sich auch daraus leicht die relative Festigkeit und das Tragvermögen bestimmen. Es ist nämlich, wie man leicht sieht, die Festigkeit $Ql = \dfrac{m}{Mh} E'$ und das Tragvermögen $Ql = \dfrac{m'}{Mh} E'$, wenn m die Spannung der äufsersten, von der neutralen Schichte um h abstehenden Fasern im Augenblicke des Zerreifsens (die absolute Festigkeit) und m' die Spannung dieser Fasern in dem Augenblicke, als ihre Ausdehnung die Elasticitätsgrenze erreicht hat, bezeichnet. Ist diese Ausdehnung $= \lambda$ und die Spannkraft in diesem Augenblicke $= m'$; so ist (§. 252) $\lambda = \dfrac{l m'}{M}$ also $m' = \dfrac{M\lambda}{l}$.

Bestimmung des Moduls der Elasticität M.

118. Um zu zeigen wie man den Modul der Elasticität für die verschiedenen biegsamen Körper durch Versuche findet, setzen wir wieder den Fall, daſs der Balken $C'N$ (Fig. 48 und Fig. 49) an dem einen Ende eingemauert und an dem andern belastet sey, wodurch er eine Biegung annehmen soll, welche jedenfalls noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt. Es sey nun AMB (Fig. 69) die Curve, welche die neutrale Faserschichte dabei annimmt, und für einen beliebigem Punct M derselben die horizontale Abscisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$, der Krümmungshalbmesser $= \rho$ und der Winkel, welchen die an M gezogene Tangente mit der Abscissenachse bildet $= \alpha$; so ist unter der Voraussetzung einer nur geringen Biegung, wie sie auch wirklich in der Praxis vorkommt, die Länge der Horizontalprojection $AP = AM$ und $AC = AMB = l$, so wie (Nr. **115**, Gleich. 2) $\rho\, Q\, x = E'$ . . (n) (wenn man nämlich das eigene Gewicht des Körpers vernachlässigt).

Um jedoch den Krümmungshalbmesser ρ durch eine leichter meſsbare Gröſse, und zwar durch die im Anfangspuncte A Statt findende Senkung, Biegung oder den Pfeil $A'A = BC$, den wir durch δ bezeichnen wollen, zu ersetzen, hat man (Comp. §. 710)

$\rho = -\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}$ oder da für kleine Biegungen:

$\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha$ so klein ist, daſs man die zweite Potenz davon gegen die Einheit auslassen darf, auch $\rho = -\frac{dx^2}{d^2y}$, folglich ist, wenn man diesen Werth für ρ in der vorigen Gleichung substituirt: $Q\,x\,\frac{dx^2}{d^2y} = -E'$,

oder $$(a) \;.\;.\; \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q}{E'}\,x,$$

d. i. $d.\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{Q}{E'}\,x\,dx$, weil dx constant ist.

Diese Gleichung integrirt, gibt $\frac{dy}{dx} = C - \frac{Q}{E'}\frac{x^2}{2}$.

Um die Constante C zu bestimmen, bemerke man, daſs für $x = l$ die Ordinate y am gröſsten wird, oder was zu demselben Schlusse führt, die Tangente in B mit der Abscissenachse parallel läuft, so, daſs für diesen Werth von x der Quotient $\frac{dy}{dx} = 0$ wird; dieſs gibt:

$0 = C - \frac{Q}{E'}\frac{l^2}{2}$ woraus $C = \frac{Q}{E'}\frac{l^2}{2}$ und mit diesem Werthe:

$(r)\;\; \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2E'}(l^2 - x^2)$ oder $dy = \frac{Q}{2E'}(l^2 - x^2)\,dx$ folgt.

Wird diese letztere Gleichung abermals integrirt, so erhält man:

$$(s) \quad y = \frac{Q}{2E'}\left(l^2 x - \frac{x^3}{3}\right)$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ seyn mufs. Setzt man in dieser letzten Gleichung $x = l$, so geht dafür y in δ über und man hat:

$$(t) \quad \delta = \tfrac{1}{3}\frac{Q l^3}{E'}.$$

Setzt man endlich für E' den Werth MX (Nr. **116**) und bestimmt M, so hat man für den Modul der Elasticität:

$$(u) \quad M = \tfrac{1}{3}\frac{Q l^3}{\delta X}$$

wobei die lediglich von der Form und Gröfse des Querschnittes abhängige Gröfse $X = \frac{E'}{M}$ in Nr. **116** für die wichtigsten Fälle angegeben ist.

Ist z. B. der Querschnitt ein Rechteck von der Breite b und Höhe h, so ist $X = \frac{1}{12} b h^3$, folglich nach (u):

$$M = \tfrac{1}{3}\frac{Q l^3}{\delta} \cdot \frac{12}{b h^3} = 4 Q \frac{l^3}{\delta b h^3}$$

(Vergl. §. 264 Gleich. 3.)

Wäre dabei umgekehrt M bekannt und die Biegung δ zu bestimmen, so wäre aus dieser letztern Gleichung $\delta = \frac{4 Q l^3}{M b h^3}$ (Gleich. 2) so wie endlich bei diesem Querschnitte, die am freien Ende A aufzuhängende Last Q, welche die Biegung δ hervorbringt, aus der Gleichung

$$Q = \frac{\delta M b h^3}{4 l^3} \quad \text{(Gleich. 1)}$$

zu bestimmen wäre.

Auf dieselbe Weise erhält man die, jedem andern bisher behandelten Querschnitte, entsprechenden Gleichungen für M, δ und Q.

119. Soll das eigene Gewicht G des Balkens oder Prisma mit berücksichtigt werden, so mufs man, da das Stück $AP = x$ das Gewicht $G\frac{x}{l}$ hat und auf den Querschnitt in M das statische Moment $\frac{1}{2} G \frac{x}{l} . x = \frac{1}{2} G \frac{x^2}{l}$ ausübt, in der obigen Gleichung (n) (vorige Nr.) statt $Q x$ setzen $Q x + P x^2$, wenn man nämlich indefs $\frac{G}{2l} = P$ setzt. Dadurch erhält man bei dem nämlichen Verfahren wie vorhin, ohne Schwierigkeit: $$y = \frac{l^2}{E'}\left(\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{1}{3}Pl\right)x - \frac{1}{12\,E'}\left(2\,Q\,x^3 + P\,x^4\right)$$

und daraus, wenn man gleichzeitig $x = l$ und $y = \delta$ setzt und den Werth von P wieder herstellt:

$$\delta = \frac{l^3}{E'}\left(\tfrac{1}{3}Q + \tfrac{1}{8}G\right) \;.\;.\; (f)$$

Ist $G = 0$, so geht dieser Werth von δ in den obigen (t) über. Ist aber $Q = 0$, so erhält man für die Biegung, welche das eigene Gewicht des Stabes oder eine über die ganze Länge desselben gleich vertheilte Last G hervorbringt: $\delta' = \frac{1}{8}\,\frac{G\,l^3}{E'}$.

Ist also die Last Q einmal am freien Ende angebracht, und das zweite Mal über die ganze Länge gleichförmig vertheilt, so verhalten sich die entstehenden Biegungen $\delta : \delta' = \frac{1}{3} : \frac{1}{8} = 8 : 3 = 1 : \frac{3}{8}$.

Anmerkung 1. Die vorige Formel (f) d. i. $\delta = \frac{l^3}{3\,E'}\left(Q + \frac{3}{8}G\right)$ mit der obigen (t) d. i. mit $\delta = \frac{Q\,l^3}{3\,E'}$ verglichen, zeigt, dafs das eigene Gewicht des Stabes so wirkt, als ob $\frac{3}{8}$ davon am freien Ende aufgehangen wäre.

Anmerkung 2. Die obige Gleichung (r) gibt $tang\,\alpha = \frac{Q}{2\,E'}\left(l^2 - x^2\right)$ und für den Anfangspunct A, wegen $x = 0$ sofort $tang\,\alpha = \frac{Q\,l^2}{2\,E'} = \frac{3\,\delta}{2\,l}$ (wegen Gleich. t). Endlich stellt die Relation (s) die Gleichung der Curve AMB vor, welche man die elastische Linie nennt, ihre stärkste Krümmung findet in B statt, wofür der Krümmungshalbmesser $\rho = \frac{E'}{Q\,l}$ ist.

120. Wirkt die am freien Ende des biegsamen oder elastischen Stabes angebrachte Kraft Q wie in Fig. 70 aufwärts, so ändert sich in der Gleichung (s) der Curve gar nichts, dagegen mufs in jener (f), in welcher das Gewicht des Stabes berücksichtigt ist, dieses negativ genommen werden, so dafs man für die Biegung den Ausdruck erhält:

$$\delta = \frac{l^3}{24\,E'}\left(8\,Q - 3\,G\right) \;.\;.\; (f').$$

Liegt nun ein Balken oder ein Stab horizontal auf beiden Enden frei auf, wie in Fig. 71, und wird dieser in der Mitte mit dem Gewichte Q belastet, so bringt dieses im Verein mit dem eigenen Gewichte eine Biegung δ hervor, die sich (stets unter der Voraussetzung, das die

Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt) auf folgende Weise bestimmen läfst.

Ist q der Druck, welchen jede der beiden Stützen erleidet und G' das Gewicht von der halben Länge l' des Stabes, so befindet sich jede solche Hälfte, wie z. B. jene ACD, in derselben Lage, als wenn diese in CD eingemauert und am freien Ende A durch eine Kraft q vertical aufwärts gezogen würde; es ist daher nach der vorigen Formel (f') die

Biegung: $$\delta = \frac{l'}{24\,E'}(8\,q - 3\,G')$$

oder wegen $l' = \frac{1}{2}l$ (wenn $AB = l$), $q = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}G$ und $G' = \frac{1}{2}G$, wenn nämlich wieder G das Gewicht des ganzen Balkens bezeichnet, nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$\delta = \frac{l^3}{48\,E'}(Q + \tfrac{5}{8}G) \quad . \quad (i)$$

Dieser Ausdruck zeigt, dafs eine über die ganze Länge gleichförmig vertheilte Last G gerade so wirkt, als ob an dem gewichtslosen Stabe in der Mitte ein Gewicht von $\frac{5}{8}G$ angehängt würde.

Da diese Formel für die practische Bestimmung des Elasticitätsmoduls am bequemsten ist, wobei gewöhnlich Prismen von rechteckigen Querschnitten benützt werden, wofür also (Nr. **116**) $E' = \frac{1}{12}M\,b\,h^3$ ist; so hat man ganz einfach daraus, wenn h vertical, also b horizontal

ist: $$M = \frac{l^3}{4\,\delta\,b\,h^3}(Q + \tfrac{5}{8}G) \quad . \quad . \quad (k)$$

Anmerkung 1. Liegt das Prisma, wie vorhin, auf den beiden um $AB = l$ voneinander entfernten Stützen, frei auf, und wird dieses nicht in der Mitte, sondern in dem Puncte F (Fig. 71') mit dem Gewichte Q belastet und setzt man $AD = BD = a$, $DE = z$, $EF = \delta$, so wie für die Curve AMF, $AP = x$, $PM = y$ und für jene $BM'F$, $BP' = x$, $P'M' = y$; so ist der Druck auf die Stütze A, $p = \frac{1}{2}Q\,\dfrac{(a+z)}{a}$ und jener auf die Stütze B, $p' = \frac{1}{2}Q\,\dfrac{(a-z)}{a}$ und die beiden Theile AF und BF des Prisma befinden sich in derselben Lage, als ob sie in F eingemauert und beziehungsweise durch die Kräfte p und p' senkrecht aufwärts gezogen würden.

Mit Vernachlässigung des eigenen Gewichtes hat man daher nach der Relation (a) in Nr. **118** für den Theil AMF:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{E'}\,x \text{ oder durch Integration } \frac{dy}{dx} = C - \frac{p}{E'}\frac{x^2}{2} \; .$$

Setzt man zur Bestimmung der Constanten C den Winkel, welchen die im Puncte F an die Curve gezogene Tangente mit der Horizontalen AB bildet $= \alpha$, so wird für $x = AE = a - z$ der Quotient $\dfrac{dy}{dx} = tang\,\alpha$, daher ist

$$tang\,\alpha = C - \frac{p}{E'}\frac{(a-z)^2}{2} \quad \text{oder} \quad C = \frac{p}{2E'}(a-z)^2 + tang\,\alpha\ , \text{ folglich}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2E'}\left[(a-z)^2 - x^2\right] + tang\,\alpha.$$

Durch weitere Integration erhält man aus dieser Gleichung:

$$y = \frac{p}{2E'}\left[(a-z)^2 x - \frac{x^3}{3}\right] + x\,tang\,\alpha.$$

Da nun für $x = AE = (a-z)$ die Ordinate $y = \delta$ werden mufs, so hat man:

$$\delta = \tfrac{1}{3}\frac{p}{E'}(a-z)^3 + (a-z)\,tang\,\alpha,$$

Genau auf dieselbe Weise erhält man für die Curve $BM'F$ die Gleichung

$$y = \frac{p'}{2E'}\left[(a+z)^2 x - \frac{x^3}{3}\right] - x\,tang\,\alpha \quad \text{und}$$

$$\delta' = \tfrac{1}{3}\frac{p'}{E'}(a+z)^3 - (a+z)\,tang\,\alpha.$$

Da nun $\delta' = \delta$ ist, so erhält man durch Gleichsetzung dieser Ausdrücke und wenn man zugleich für p und p' die Werthe setzt:

$$\tfrac{1}{6}Q\frac{(a+z)}{aE'}(a-z)^3 + (a-z)\,tang\,\alpha = \tfrac{1}{6}Q\frac{(a-z)}{aE'}(a+z)^3 - (a+z)\,tang\,\alpha.$$

Aus dieser Gleichung folgt $tang\,\alpha = \frac{1}{3}\frac{Q}{aE'}z(a^2 - z^2)$ und damit aus einer der beiden vorigen Gleichungen:

$$\delta = \frac{Q}{6aE'}(a^2 - z^2)^2 \quad \text{oder wegen } a = \tfrac{1}{2}l \text{ auch}$$

$$\delta = \frac{Q}{3lE'}(\tfrac{1}{4}l^2 - z^2)^2\ . \ . \quad (m)$$

Für $z = 0$ erhält man $\delta = \frac{Ql^3}{48E'}$, übereinstimmend mit dem Ausdrucke in (i), wie es seyn soll.

Bezeichnet man die in F aufgehängte Last durch $2Q$ und setzt die Entfernung $AB = 2l$, so wird

$$EF = \delta = \tfrac{1}{3}\frac{Q}{lE'}(l^2 - z^2)^2$$

oder für $AE = a$ und $BE = a'$ auch $\delta = \frac{2}{3}\frac{Q}{E'}\frac{a^2a'^2}{a+a'}$.

So wäre z. B. für ein hochkantig gelegtes Prisma von rechteckigem Querschnitt, dessen Dimensionen b und h sind und wobei $h > b$, wegen (Nr. **116**) $E' = \frac{1}{12}Mbh^3$, sofort $\delta = 8\frac{Q}{Mbh^3}\frac{a^2a'^2}{a+a'}$ oder wenn man die ganze aufgehängte Last mit Q bezeichnet; $\delta = \frac{4Q}{Mbh^3}\frac{a^2a'^2}{a+a'}$.

Für $a = a' = \frac{1}{2}l$ erhält man, übereinstimmend mit der Relation (k):

$$\delta = \frac{Ql^3}{4Mbh^3}.$$

Anmerkung 2. Soll also ein als gewichtlos gedachter, an beiden Enden horizontal frei aufliegender Balken durch das Aufhängen eines Gewichtes Q in seiner halben Länge um eben so viel, als durch das Auflegen einer über die ganze Länge gleich vertheilten Last Q' gebogen werden, so muſs $Q : Q' = 5 : 8$ Statt finden.

Anmerkung 3. Nimmt, wenn man zu dem Gewichte Q noch jenes q hinzulegt, die Senkung oder der Pfeil δ um δ' zu, so hat man nach der vorigen Formel (k) $\delta = \frac{l^3}{4 M b h^3}(Q + \frac{5}{8} G)$ und

$\delta + \delta' = \frac{l^3}{4 M b h^3}(Q + q + \frac{5}{8} G)$, folglich ist, wenn man subtrahirt

$\delta' = \frac{q l^3}{4 M b h^3}$ und daraus:

$$M = \frac{q l^3}{4 \delta' b h^3}$$

ein Ausdruck, welcher oft bei practischen Versuchen bequemer als der vorige (k) ist.

Rückwirkende Festigkeit.

(§. 269.)

121. Es sey AE (Fig. 72) ein mit seinem untern Ende BE auf einer festen horizontalen Ebene sich frei stützender Stab oder Balken, dessen oberes, in derselben Verticalen AB liegendes Ende mit dem Gewichte Q belastet ist und dadurch die Ausbiegung ACB der neutralen Schichte hervorbringt; übrigens soll diese Belastung wieder innerhalb der Elasticitätsgrenze liegen, d. h. nur so groſs seyn, daſs bei ihrer Wegnahme die im Stabe entstandene Biegung wieder gänzlich verschwindet. Dieſs vorausgesetzt, seyen für irgend einen Punct M der Curve ACB, $AP = x$ und $PM = y$ die rechtwinkeligen Coordinaten, so wie für den Halbirungspunct C, $AD = \frac{1}{2} l$ und $DC = \delta$, so daſs also δ die gröſste Ordinate oder die Biegung bezeichnet.

Da nun dieser Fall mit jenem in Nr. **118** behandelten, in welchem der Stab horizontal an dem einen Ende befestigt und am andern vertical belastet, ganz analog ist, mit dem einzigen Unterschiede, daſs dort das statische Moment der Last in Beziehung auf den Querschnitt in $M = Q x$ ist, während es hier durch $Q y$ ausgedrückt wird, hat man, ohne dieselbe Entwicklung von vorne zu wiederholen, wenn man in der Gleichung (a), Nr. **118**, $Q y$ statt $Q x$ setzt, sofort:

$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{Q y}{E'}$ oder wenn man mit dy multiplicirt:

$\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{Q}{E'}\,y\,\mathrm{d}y$, und da d$x$ constant ist: $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}.\left(\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right) = -\frac{Q}{E'}.\frac{1}{2}\,\mathrm{d}.y^2$

folglich ist, wenn man integrirt: $\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} = C - \frac{Q}{E'}\,y^2$.

Da für $y=\delta$ der Quotient $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ ist, so hat man zur Bestimmung der Constanten C die Bedingungsgleichungen $o = C - \frac{Q}{E'}\,\delta^2$, woraus $C = \frac{Q}{E'}\,\delta^2$ folgt, so dafs

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{Q}{E'}\,(\delta^2 - y^2) \text{ wird.}$$

Aus dieser Gleichung folgt ferner $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\sqrt{\frac{Q}{E'}}\,.\sqrt{(\delta^2 - y^2)}$ oder $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\delta^2 - y^2)}} = \mathrm{d}x\sqrt{\frac{Q}{E'}}$, so dafs man durch Integration derselben erhält:

$$(1)\quad arc\,Sin\left(\frac{y}{\delta}\right) = x\sqrt{\frac{Q}{E'}},$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x=0$ auch $y=0$ seyn mufs.

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

$$(2)\quad y = \delta\,Sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{E'}}\right)$$

und da für $x = l$ abermals $y = 0$ ist, auch $0 = \delta\,Sin\left(l\sqrt{\frac{Q}{E'}}\right)$, woraus, da δ von Null verschieden, $Sin\left(l\sqrt{\frac{Q}{E'}}\right) = 0$ oder $l\sqrt{\frac{Q}{E'}} = n\,\pi$ ist, wobei $n = 1, 2$ . . d. i. jede ganze Zahl bezeichnet.

Aus dieser letzten Gleichung folgt endlich:

$$Q = \frac{n^2\,\pi^2\,E'}{l^2} \quad . \; . \quad (3)$$

als diejenige Last, welche in dem Stabe oder Prisma die Biegung hervorbringt.

Endlich nimmt die Gleichung (2) der Curve, wenn man für Q den eben gefundenen Werth aus (3) substituirt, auch die Form an:

$$y = \delta\,Sin.\,\frac{n\,\pi}{l}\,x \quad . \; . \quad (4)$$

Anmerkung. Da in der vorigen Gleichung (3) der Pfeil δ gar nicht vorkömmt, so ist diefs ein Beweis, dafs die Last Q mit jeder Biegung (wobei δ gröfser oder kleiner seyn kann) des Stabes im Gleichgewichte steht, was sich daraus erklärt, dafs das statische Moment von Q eben so wie der Pfeil δ zunimmt. Dieselbe Last Q ist daher auch hinreichend um den Stab selbst abzubrechen.

122. Setzt man als einfachsten Fall in den obigen Formeln (3) und (4) $n = 1$, welchem Falle die Curve in Fig. 73 entspricht; so wird dafür: (5) $Q = \frac{\pi^2}{l^2} E'$ und $y = \delta\, Sin \frac{\pi}{l} x$ . . . (6)

Für $n = 2$, welchem Falle die Curve in Fig. 74 entspricht, wobei diese nämlich in der Mitte C der Verticalen AB festgehalten wird, hat man: $Q = \frac{4\pi^2}{l^2} E'$ und $y = \delta\, Sin. \frac{2\pi}{l} x$ u. s. w.

Ist nun der Querschnitt des Stabes oder Prisma ein Rechteck von den Seiten b und h, wobei die letztere die kleinere seyn soll, nach welcher also (Fig. 72) die Ausbiegung (wie bei einem Bret von der Breite b und Dicke h) Statt findet; so ist (Nr. **116**) $E' = \frac{1}{12} M b h^3$ und daher, wenn man diesen Werth in der vorigen Gleichung (5) substituirt:

$$Q = \pi^2 M \frac{b h^3}{12 l^2} \quad \text{(Vergl. §. 270, Gleich. 1)}$$

Ist der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, also $E' = \frac{1}{4}\pi M r^4$; so ist $Q = \pi^3 M \frac{r^4}{4 l^2}$.

Eben so ist für einen hohlen Cylinder von den Halbmessern R und r, wegen $E' = \frac{1}{4}\pi M (R^4 - r^4)$ sofort $Q = \pi^3 M \left(\frac{R^4 - r^4}{4 l^2}\right)$ (Vergl. §. 270.)

Anmerkung 1. Läfst man die Entfernung der beiden Puncte AB der Verticalen ADB (Fig. 72) nicht auch zugleich (wie es für geringe Biegungen immer zulässig ist) für die Länge der Curve ACB gelten; so sey diese Länge $= l$, während $AB = a$ seyn soll. Dann folgt aus der vorigen Gleichung (6) $\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{a}\delta\, Cos \frac{\pi}{a} x$, und es ist $ds = dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} =$

$$dx\left(1 + \frac{\pi^2}{a^2}\delta^2 Coz^2 \frac{\pi}{a} x\right)^{\frac{1}{2}} = dx\left(1 + \tfrac{1}{2}\pi^2 \frac{\delta^2}{a^2} Cos^2 \frac{\pi}{a} x\right) = dx\left(1 + \tfrac{1}{2}\pi^2 \frac{\delta^2}{a^2}\right)$$

wenn man nämlich die 4ten und höhern Potenzen des sehr kleinen Bruches $\frac{\delta}{a}$ ausläfst und für den Cosinus das 1ste Glied der entsprechenden Reihe nimmt.

Es ist also $l = \int_0^a ds = \int_0^a dx\left(1 + \frac{1}{2}\pi^2 \frac{\delta^2}{a^2}\right)$

d. i. $l = a\left(1 + \frac{1}{2}\pi^2 \frac{\delta^2}{a^2}\right)$ und daraus $\delta = \frac{1}{\pi}\sqrt{[2a(l-a)]}$ (*Poisson* und *Navier* haben hier, wohl nur in Folge eines Rechnungsfehlers, in beiden Formeln statt der Ziffer 2 jene 4.)

Anmerkung 2. Ist der Stab AB (Fig. 75) an seinem untern Ende B befestigt, so geht sein oberer Endpunct A durch die Belastung Q aus der

Verticalen BE heraus und man findet für die entsprechende Curve AMB, wenn wieder ihre Länge $AMB = l$, $AP = x$, $PM = y$ und $BD = \delta$ ist, da sich im Gange der Entwicklung in Nr. **121** bis zur Gleichung (2), die auch hier noch gilt, dadurch nichts ändert, ebenfalls wieder:

$$y = \delta \, Sin \left(x \sqrt{\frac{Q}{E'}} \right).$$

Da aber für $x = l$ (wenn man nämlich wieder für geringe Biegungen $AMB = AD$ se zt) $y = \delta$ seyn muſs, so folgt aus dieser Gleichung $Sin\left(x \sqrt{\frac{Q}{E'}} \right) = 1$ also, wenn man für n die kleinste Zahl nimmt, welche dieser Bedingung Genüge leistet, $l \sqrt{\frac{Q}{E'}} = \frac{\pi}{2}$, woraus sofort

$$Q = \left(\frac{\pi}{2\,l} \right)^2 E'$$

folgt. Wird $\frac{1}{2} l$ statt l gesetzt, so geht dieser Ausdruck, wie es seyn soll, in den obigen (5) über.

Torsionsfestigkeit.

(§. 272.)

123. Es sey $CO = l$ die Länge des an dem Ende DE (Fig. 76) unveränderlich befestigten prismatischen Körpers und $CF = R$ die Länge des am andern, freien Ende senkrecht auf der Achse CO stehenden Hebelarmes, an welchen die Kraft P normal wirkt und dadurch in Folge der entstehenden Verdrehung der Fasern, den Durchmesser AB in die Lage $A'B'$, jenen ab in die Lage $a'b'$ u. s. w. bringt, jenen DE des letzten, am befestigten Ende befindlichen Querschnitte aber unverrückt läſst, wodurch also die an der Oberfläche liegende Faser DaA die Lage $Da'A'$ annimmt.

Setzt man den Drehungswinkel im ersten Querschnitt (vom freien Ende aus gezählt) $ACA' = i$, jenen im Querschnitt $adbd'$ dessen Abstand $Oc = x$ seyn mag $aca' = i'$, so ist der Natur der Sache nach $i' < i$, so zwar, daſs der Winkel i' dem Abstande x proportional oder $i' : i = x : l$, also $i' = \frac{x}{l} i$ ist. Läſst man x in $x + n$ übergehen, wobei n jede beliebige auch noch so kleine Gröſse bezeichnen kann, und denkt sich in dieser Entfernung von O ebenfalls einen Querschnitt (immer normal auf die Achse OC), in welchem der entsprechende Drehungswinkel $= i''$ seyn soll; so hat man eben so $i'' = \frac{x+n}{l} i$, folglich ist die Differenz $i'' - i' = \frac{n}{l} i$.

Bezeichnet man nun in irgend einem Querschnitt $a\,d\;b\,d$ (Fig. 77), welcher von dem befestigten Ende um x absteht, den Winkel $a\,c\,M$ des an irgend einen Punct M der Umfangscurve gezogenen Radiusvector $c\,M$ durch α, nimmt auf $c\,M$ in der Entfernung $c\,m = u$ einen Punct m und läſst sowohl α um $\mathrm{d}\alpha$ als auch u um $\mathrm{d}u$ zunehmen; so erhält man ein Flächenelement dieses Querschnittes $m\,n' = u\,\mathrm{d}\alpha\,.\,\mathrm{d}u$, dessen Torsionswiderstand sich nunmehr leicht ausdrücken läſst. Bezeichnet nämlich p den Torsionswiderstand auf die Flächeneinheit bezogen und zwar in den Abstand $= 1$ von der Achse $O\,C$, und berücksichtiget man, daſs zwei Elemente, welche in zwei aufeinander folgenden Querschnitten des Prisma vor der Torsion einander gegenüber standen, sich dann um eine Gröſse verschoben haben, welche 1stens dem Abstand dieser Elemente von der Achse, und 2tens der Differenz der betreffenden Drehungswinkel i' und i'' proportional ist; so läſst sich der Torsionswiderstand des genannten Elementes durch $p\,.\,u\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u\,.\,u\,.\frac{n}{l}\,i = \frac{p\,n}{l}\,u^2\,i\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u$, oder wenn man den unbestimmten constanten Factor $p\,n = N$ setzt, wo N ein von der Natur und Beschaffenheit des Körpers abhängiger Erfahrungscoeffizient ist, durch $\frac{N}{l}\,i\,u^2\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u$ ausdrücken, dessen statisches Moment sofort $= \frac{N}{l}\,u^3\,i\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u$ ist.

Da endlich das statische Moment des Widerstandes in irgend einem Querschnitte, dem statischen Momente der Kraft P gleich seyn muſs, so hat man, wenn noch $u = f(\alpha)$ die **Polargleichung** der Umfangscurve $a\,M\,d'$ (Fig. 77) ist, sofort:

$$(1)\qquad P\,R = \frac{N\,i}{l}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha\int_0^{f(\alpha)}u^3\,\mathrm{d}u = \frac{N\,i}{4\,l}\int_0^{2\pi}f(\alpha)^4\,\mathrm{d}\alpha$$

124. Ist der Querschnitt ein **Kreis** vom Halbmesser r, so ist $f(\alpha) = u = r$, folglich $P\,R = \frac{N\,i}{4\,l}\int_0^{2\pi} r^4\,\mathrm{d}\alpha = \frac{N\,i}{4\,l}\,2\,\pi\,r^4$ d. i.

$P\,R = \frac{1}{2}\,N\,\pi\,\frac{i}{l}\,r^4$ (Vergl. §. 272, Gl. 1.)

Will man den Torsionswinkel i in Gradmaſs ausgedrückt in diese Formel bringen, so muſs man $i = \frac{\pi}{180^0}\,i^0$ setzen, dadurch erhält man auch, wenn man zugleich das statische Moment $P\,R = M$ setzt:

$$(2)\qquad M = \frac{N\,\pi^2\,r^4}{360^0\,l}\,i^0$$

bezeichnet man das statische Moment der Kraft, welches einen cylindrischen Stab vom Querschnitt $=1$ Qudratzoll und der Länge $=1$ Zoll um 360 Grad zu drehen vermag, durch M', so ist nach dieser letzten Formel wegen $r^2\pi=1$, also $r^4=\frac{1}{\pi^2}$, $l=1$ und $i^0=360^0$ sofort $M'=N$, wodurch also die Bedeutung der unbestimmten Gröfse N gegeben ist.

Aus der vorigen Gleichung (2) erhält man für den Torsionswinkel den Ausdruck:

$$(a) \quad . \quad i^0=\frac{M}{N}.l.\frac{360^0}{r^4\pi^2}.$$

Anmerkung. Man nennt die obige Gröfse N, deren Bedeutung wir eben kennen gelernt haben, auch den Modul der Elasticität der Materialien zur Berechnung der Torsion von prismatischen oder cylindrischen Stäben und ist mit dem in §. 272 sogenannten Torsionscoefficienten w gleichbedeutend. Nach der Theorie und der Voraussetzung von vollkommen homogenen Körpern, steht dieser Modul mit jenem M der Elasticität (§. 252) in einem solchen Zusammenhange, dafs $N=\frac{2}{5}M$ ist.

Auch ist, wie man sieht, N das statische Moment der Kraft, welche den cylindrischen Schaft von 1 Quadratzoll Querschnitt und 1 Zoll Länge, um 360^0 zu drehen vermag.

125. Ist der Querschnitt ein Quadrat von der Seite $DE=a$ (Fig. 78), so setze man für den Radiusvector $CM=u$, W. $FCM=\alpha$ und $AM=x$; dann ist $u=\frac{x}{Cos\,\alpha}=f(\alpha)$ und man mufs für das Dreieck ACD das obige Integral (1) von $\alpha=\frac{\pi}{4}$ bis $\alpha=\frac{\pi}{2}$ nehmen; da man jedoch dadurch auf den Bruch $\frac{0}{0}$ kommt, so kann man, da die beiden Dreiecke ACD und FCD einander vollkommen gleich sind, dieses Integral auch von $\alpha=0$ bis $\alpha=\frac{\pi}{4}$ nehmen, für welche Werthe nämlich beziehungsweise $x=0$ und $x=\frac{a}{2}$ wird. Diefs vorausgesetzt, hat man für den ganzen Querschnitt des Qudrates, da er aus 8 solchen Dreiecken wie ACD besteht, nach der obigen Formel (1):

$$PR=\frac{Ni}{4\,l}\,8\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^4\,\frac{d\alpha}{Cos^4\alpha}$$

oder da $\int\frac{d\alpha}{Cos^4\alpha}=\frac{Sin\,\alpha}{3\,Cos^3\alpha}+\frac{2\,Sin\,\alpha}{3\,Cos\,\alpha}$ (Comp. §. 820), folglich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\alpha}{Cos^4\,\alpha} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{3},$$

und innerhalb dieser Grenzen $x = \frac{a}{2}$ ist, auch:

$$PR = \frac{2Ni}{l} \cdot \frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^4 \quad \text{d. i.} \quad PR = \tfrac{1}{6} N \frac{i}{l} a^4$$

(Vergleiche §. 272, Gleich. 3.)

Nach dem Vorgange in der vorigen Nr. wird auch:

$$M = \tfrac{1}{6} N \frac{\pi}{180^0} \frac{a^4}{l} i^0 \quad \text{und daraus der Torsionswinkel}$$

$$i^0 = 6 \frac{M}{N} l \frac{180^0}{\pi\, a^4}.$$

126. Ist der Querschnitt ein Rechteck von den Seiten a und b, so findet *Cauchy* nach einer weitläufigen Entwicklung (*Exercices de mathématiques 4^e année. pag. 59*):

$$PR = \tfrac{1}{3} N \frac{i}{l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \quad \text{oder nach dem vorigen Vorgange}$$

$$M = \tfrac{1}{3} N \frac{\pi}{180^0} \frac{i^0}{l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \quad \text{woraus der Torsionswinkel}$$

$$i^0 = 3 \frac{M}{N} l \frac{180^0}{\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \quad \text{folgt.}$$

Anmerkung. Da man den Modul N nur wieder durch eigene Versuche unabhängig von jenen für den Modul der Elasticität in Nr. **118** u. s. w. bestimmen muſs, so hat man, wenn hier $M = PR$ fortwährend das stat. Moment der Kraft P bezeichnet und die Torsion nicht über die Elasticitätsgrenze ausgedehnt wird, aus den vorigen Formeln:

Bei einem kreisförmigen Querschnitt vom Halbmesser r:

$$N = M. \frac{l}{\pi^2 r^4} \cdot \frac{360^0}{i^0}.$$

Bei einem quadratischen Querschnitt von der Seite a:

$$N = 6\,M. \frac{l}{\pi\, a^4} \cdot \frac{180^0}{i^0}.$$

Bei einem rechteckigen Querschnitt von den Seiten a und b:

$$N = 3\,M. \frac{l}{\pi} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \cdot \frac{180^0}{i^0}.$$

127. Um endlich auch noch den durch Torsion erzeugten Bruch zu behandeln, sey T der Torsionswiderstand der Flächeneinheit im Augenblicke des Bruches oder als die Fasern zerreiſsen, so wie v der gröſste Werth des Radiusvectors u in der Querschnittsfläche des Prisma; so ist $\frac{u}{v} T$ der Torsionswiderstand im Augenblicke des Bruches für die Flächeneinheit jener Puncte des Querschnittes, welche von der Achse des Prisma um die Gröfse u abstehen, und daher mit Beibehaltung der Bezeichnung in Nr. **123**, auch $T\frac{u^2}{v}\,d\alpha\,du$ der Widerstand eines Elementes des Querschnittes, so wie für das Gleichgewicht

$$PR=\frac{T}{v}\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{f(\alpha)}u^3\,du=\frac{T}{4v}\int_0^{2\pi}f(\alpha)^4\,d\alpha$$

so, dafs man also, wie die Vergleichung mit der Formel (1) in Nr. **123** zeigt, in den in Nr. **124** weiter gefundenen Ausdrücken nur (β) . . $\frac{T}{v}$ statt $\frac{Ni}{l}$ setzen darf, um für das betreffende Prisma das Moment des Torsionswiderstandes im Augenblicke des Bruches zu erhalten.

So ist also, wenn der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r oder Durchmesser d ist, dieses Widerstandsmoment gegen den Bruch, wegen $v=r$:

$$PR=\tfrac{1}{2}\frac{T}{r}\pi r^4=\tfrac{1}{2}\pi T r^3=\frac{\pi}{16}Td^3$$

Für einen quadratischen Querschnitt von der Seite a, wegen $v=\frac{a}{2}\sqrt{2}$:

$$PR=\tfrac{1}{3}T\frac{a^3}{\sqrt{2}}.$$

Für einen rechteckigen Querschnitt von den Seiten a und b findet *Navier*:

$$PR=\tfrac{1}{3}T\frac{a^2b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

Anmerkung. Wie man sieht, hat die Länge des Prisma auf den Widerstand gegen den Bruch durch Torsion keinen Einflufs und diese influirt nur in so ferne, als je gröfser diese ist, auch der Torsionswinkel, welcher dem Bruche entspricht, um so gröfser seyn mufs.

128. Da die Transmissionswellen und Drehungsachsen häufig nur auf Torsion in Anspruch genommen werden, so wollen wir ihre Stärke hier noch näher untersuchen.

Ist P die Kraft in Pfunden, welche auf die Welle drehend einwirkt, R der Hebelarm in Zollen, an welchem die Kraft P angebracht ist, d der Durchmesser der Welle ebenfalls in Zollen, und i der Torsionswinkel in Gradmafs; so ist nach der vorigen Nr.

$$PR=\tfrac{1}{16}\pi T d^3 \quad\text{und daraus}\quad d^3=\frac{16}{\pi T}PR$$

wobei der Werth des Coeffizienten T aus der Tabelle des Comp. auf S. 610 zu nehmen ist. Für gufseiserne Wellen ist aber nach dieser

Tabelle $T = 37170$ und für Schmiedeisen 55750. Sollen nun diese Wellen, wenn sie bloſs durch Menschenkräfte in Bewegung gesetzt, nur etwa mit $\frac{1}{20}$ in Anspruch genommen werden, wenn das Materiale Guſseisen ist; so hat man aus der vorigen Gleichung, wegen $T = 1860$ sofort:

$$(a) \quad d = \cdot 14 \sqrt[3]{PR}.$$

Läſst man dieselbe Formel zugleich auch für schmiedeiserne Wellen gelten, so würden diese beiläufig nur mit $\frac{1}{30}$ ihrer Torsionsfestigkeit in Anspruch genommen.

Es ist ferner nach der Relation (a) in Nr. **124** der Torsionswinkel in Graden, d. i. $\quad i^0 = 16 \frac{PR}{N} l. \frac{360}{\pi^2 d^4}$

oder wegen $\quad PR = \frac{d^3}{(\cdot 14)^3} = \frac{d^3}{\cdot 002744}$ (aus der vorigen Gleich.) und $N = 4956000$ für Guſs- und $N = 7434000$ für Schmiedeisen (Compend. S. 610).

$$\text{für Gußeisen} \quad i^0 = \tfrac{1}{23} \frac{l}{d}$$

$$\text{„ Schmiedeisen} \quad i^0 = \tfrac{1}{35} \frac{l}{d}$$

wobei l die Länge der Welle, ebenfalls in Zollen ausgedrückt, bezeichnet.

Da man ferner bei Wellen, welche nicht durch Menschenkräfte, sondern durch andere Motoren bewegt werden, von der Torsionsfestigkeit einen noch kleineren Bruchtheil in Anspruch nimmt; so construirt man bei solider Ausführung die eisernen Wellen nach der Formel (wobei wieder R in Zollen zu nehmen ist):

$$(b) \; . \; . \quad d = \cdot 166 \sqrt[3]{PR}$$

oder wenn die Welle N Pferdekräfte zu übertragen hat und per Minute n Umdrehungen macht, wegen

$$2 \frac{R}{12} \pi . \frac{n}{60} . P = 430\, N, \text{ woraus } PR = \frac{360 \times 430}{\pi} \frac{N}{n} \text{ folgt,}$$

auch nahe genug:

$$(c) \; . \; . \quad d = 6 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \; *)$$

dabei sind diese Wellen mit $\frac{1}{33 \cdot 6}$ oder mit $\frac{1}{50}$ in Anspruch genommen, je nachdem das Materiale Guſs- oder Schmiedeisen ist.

---

*) Nach der Regel von *Buchanan* wird (vergl. §. 274) $d = 5 \cdot 4 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$.

Der Torsionswinkel ist in diesen beiden Fällen beziehungsweise:

$$i^0 = \tfrac{1}{39}\frac{l}{d} \text{ und } i^0 = \tfrac{1}{58}\frac{l}{d}.$$

Anmerkung Wird eine Welle nicht blofs auf Torsion, sondern zugleich auf Biegung in Anspruch genommen, so berechnet man wohl auch den Wellendurchmesser zuerst nach der vorigen Formel (c) blofs für die Torsion, und bringt dann eine ringförmige oder eine Verstärkung durch 4 Längennerven an, welche für sich allein im Stande ist, der Biegung gehörigen Widerstand zu leisten.

Ist nämlich M das Elasticitätsmoment, welchem der betreffende Querschnitt der Welle (indem z. B. an dieser Stelle ein Rad aufgekeilt wird) ausgesetzt ist, m die auf 1 Qudratzoll bezogene gröfste Spannung, welche bei der Biegung in diesem Querschnitte vorkommt, und E der den Dimensionen desselben entsprechende Ausdruck; so ist (Nr. **114**, Anmerk. 2) $M = Pl = mE$, folglich, wenn die Verstärkung ringförmig seyn soll, in welchem Falle daher ein hohler Cylinder zu bestimmen, dessen innerer Durchmesser d ist, und äufserer $= D$ seyn soll, wegen (Nr. **107**)

$$E = \frac{\pi}{32}\frac{1}{D}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32}(D^3 - d^3)$$ wenn man nämlich, was dabei erlaubt ist, d^3 statt $\frac{d^4}{D}$ setzt, sofort:

$$M = \frac{m\pi}{32}(D^3 - d^3),$$ daraus folgt aber

$$D = \sqrt[3]{\left[d^3 + \frac{32\,M}{m\,\pi}\right]}$$

wobei man d früher aus der obigen Relation (c) bestimmt hat.

Eben so erhält man für eine Verstärkung durch 4 Längennerven, wegen (Nr. **107**) $E = \frac{1}{6}\frac{b}{h}(h^3 - d^3)$ auch

$$M = \frac{m\,b}{6\,h}(h^3 - d^3)$$ und daraus

entweder $$h = \sqrt[3]{\left[d^3 + \frac{6\,M}{m}\frac{h}{b}\right]}$$

oder $$b = \frac{6\,Mh}{m(h^3 - d^3)}$$

je nachdem man, wenn $\frac{h}{b}$ angenommen wird, h sucht, oder wenn h angenommen wird, b bestimmen will.

Was endlich die Stärke der Wellen-Kupplungen betrifft, so ist, wenn d den Durchmesser des Zapfens oder Halses der getriebenen Welle und d' jenen des Kopfes bezeichnet, nach Nr. **127** das Widerstandsmoment eines Cylinders gegen das Abwinden vom Durchmesser d sofort $\frac{1}{16}\pi T d^3$ und vom Durchmesser d': $\frac{1}{16}\pi T d'^3$. Nun mufs theoretisch genommen

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{16}\pi T d'^3 = \tfrac{1}{16}\pi T d^3$$ seyn,

aus welcher Relation sofort:

$$d' = d\sqrt[3]{2} = 1{\cdot}26\,d$$

folgt, welcher Werth auch mit der Erfahrung gut übereinstimmt, wenn man d aus der obigen Formel (c) bestimmt, d. i.

$$d = 6\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

setzt.

Die über den Kopf der Welle zu schiebende Hülse, welche in zweifacher Weise, einmal durch den Kopf der Welle selbst, und dann noch durch den eingetriebenen Keil in Anspruch genommen wird, erhält, wenn man die best ausgeführten Kupplungen (wobei das Materiale Gufseisen ist) dabei zum Muster nimmt, nach *Redtenbacher*'s Angaben folgende Dimensionen:

Metalldicke	der Kupplungshülse		$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}d$
Äufserer Durchmesser	„	„	$D = 1 + 1{\cdot}92\,d$
Länge	„	„	$l = 2{\cdot}7 + 1{\cdot}9\,d$
Breite des Keils	„	„	$b = {\cdot}9\,\delta$
Dicke „ „	„	„	$= \frac{1}{2}b.$

Die zur Ausdehnung, Zusammendrückung, Biegung und Drehung prismatischer Körper nöthige Arbeit oder Wirkungsgröfse der hierzu nöthigen Kraft.

129. Ist l die Länge, a der Querschnitt und V das Volumen eines prismatischen Stabes, welcher durch die von Null an allmählig zunehmende Kraft P der Länge nach ausgedehnt wird; so hat man, wenn M den Modul der Elasticität und e die jedem Werthe von P entsprechende Ausdehnung bezeichnet, nach §. 252 $e = \frac{Pl}{Ma}$.

Trägt man die Werthe von P auf AB (Fig. 79) als Abscissen, und die entsprechenden Werthe von e als rechtwinkelige Ordinaten auf, so liegen ihre Endpuncte M in einer geraden Linie, so, dafs wenn $BC = e'$ die gröfste Ordinate, d. h. die Ausdehnung des Prisma im Augenblick des Zerreifsens bezeichnet, AB sofort die Kraft P vorstellt, welche das Abreifsen bewirkt; dann ist aber $\frac{P}{a} = m$ die absolute Festigkeit dieses Stabes und $e' = \frac{ml}{M}$.

Da nun die Wirkung W oder Arbeit dieser Kraft durch die Fläche des Dreieckes ABC ausgedrückt wird, so hat man:

$$W = \tfrac{1}{2}AB\,.\,BC = \tfrac{1}{2}Pe' = \tfrac{1}{2}P\frac{m}{M}l = \tfrac{1}{2}\frac{P}{a}\cdot\frac{m}{M}al$$

d. i. $W = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}V$ Pfundzoll, wenn man den Zoll zur Längeneinheit und das Pfund zur Gewichtseinheit nimmt.

Ist das Prisma an einem Ende eingemauert und bringt die allmählig bis zum Bruche des Körpers wachsende Kraft P, am freien Ende angebracht, die Biegung δ hervor; so ist wieder die Arbeitsgröfse oder Wirkung wie vorhin $W = \frac{1}{2} P \delta$.

Nun ist aber Nr. **118**, Gleich. (t) $\delta = \frac{1}{3} \frac{P l^3}{E'}$, folglich:

$W = \frac{1}{6} \frac{P^2 l^3}{E'}$, oder wegen $P l = m' E$ (Nr. **107**) und $E' = M h E$ (Nr. **116**, Gleich. γ), wo M den Elasticitätsmodul, h den Abstand der neutralen Schichte von der am stärksten ausgedehnten Faser und m' die auf 1 Quadratzoll bezogene stärkste Spannung, welche in dem Stabe vorkommt (d. i. den Brechungscoeffizienten) bezeichnet, auch:

$$W = \frac{1}{6} \frac{m'^2 E^2 l}{E'} = \frac{1}{6} \frac{m'^2}{M} \frac{E}{h} l,$$

wobei E die vom Querschnitt des Prisma abhängigen in Nr. **107** angegebenen Werthe hat.

Ist der Querschnitt ein Rechteck von den Seiten b und h, so ist, es mag b oder h vertical stehen (im erstern Fall ist für h, $\frac{1}{2} b$, im letztern $\frac{1}{2} h$ in der vorigen Formel zu setzen), wegen $V = b h l$ sofort:

$$W = \frac{1}{18} \frac{m'^2}{M} V.$$

Ist der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, so ist, wegen $h = r$ und $V = r^2 \pi l$:

$$W = \frac{1}{24} \frac{m'^2}{M} V.$$

Für einen elliptischen Stab ist (in jeder Lage) wegen $h = a$ oder b, wenn diefs die Halbachsen sind, und $V = a b \pi l$:

$$W = \frac{1}{24} \frac{m'^2}{M} V.$$

Für ein dreiseitiges Prisma, die Kante mag oben oder unten liegen (wegen $h = \frac{2}{3} h$ oder $\frac{1}{3} h$ und $V = \frac{1}{2} b h$): $= \frac{1}{2} b \, h \, l$

$$W = \frac{1}{12} \frac{m'^2}{M} V.$$

Anmerkung. Man überzeugt sich leicht, dafs dieselben Ausdrücke auch für jenen Fall gelten, in welchem die Prismen an beiden Enden frei aufliegen und in der Mitte oder einem sonstigen, zwischen den Stützen liegenden Punct durch die Kraft P abgebrochen werden.

130. Endlich hat man bei der Torsionsfestigkeit für einen Cylinder vom Halbmesser r und der Länge l, also $V = r^2 \pi l$ nach Nr. **124**: $PR = \frac{1}{2} N \pi \frac{i}{l} r^4$ und Nr. **127**, Relat. (β) $\frac{T}{r} = \frac{Ni}{l}$.

Nun ist aber hier die Arbeits- oder Wirkungsgröſse $W = \frac{1}{2} PRi$, daher, wenn man substituirt auch:

$$W = \tfrac{1}{4} N \pi \frac{i^2}{l} r^4 = \tfrac{1}{4} N \frac{T^2}{N^2} r^2 \pi l \quad \text{d. i.}$$

$$W = \tfrac{1}{4} \frac{T^2}{N} V.$$

Für quadratische und rechteckige Stäbe findet man eben so einfach: $W = \frac{1}{6} \frac{T^2}{N} V.$

131. Schluſsbemerkung. Wie aus dem Ausdrucke in Nr. **129**, welcher sowohl für die Ausdehnung als Zusammendrückung gilt, hervor geht, ist die Arbeit, welche erforderlich ist, um das Prisma bis zum Abreiſsen auszudehnen, proportional, 1stens dem Quadrat der absoluten Festigkeit, 2tens dem Volumen und 3tens umgekehrt dem Modul der Elasticität. Bei gleichen Volumen hängt daher die Widerstandsfähigkeit verschiedener Materialien von dem Quotienten $\frac{m^2}{M}$, für dieselben Materialien aber vom Volumen ab.

Aus derselben Nr folgt, daſs die Widerstandsfähigkeit gegen die Wirkung zum Biegen der Prismen von verschiedenen Materialien und einerlei Volumen dem Quotienten $\frac{m'^2}{M}$, wo m' den Brechungscoeffizienten bezeichnet, und bei einerlei Materiale, wieder dem Volumen proportional sey,

Endlich folgt aus Nr. **130**, daſs die Widerstandsfähigkeit der Prismen (von einfacher Form) gegen die Arbeit oder Wirkung, welche zum Abwinden derselben angewendet wird, bei gleichem Volumen und verschiedenen Materialien dem Quotienten $\frac{T^2}{N}$, wo T den Torsionswiderstand der Flächeneinheit, im Augenblicke als die Fasern zerreiſsen, und N den Modul der Elasticität zur Berechnung der Torsion (oder den specifischen Torsionswiderstand) bezeichnen, dagegen bei einerlei Materiale und verschiedenen Volumen, dem Volumen, ohne Rücksicht auf die einzelnen Dimensionen, proportional ist.

So stellt sich z. B. nach der auf S. 610 befindlichen Tabelle des Comp., in welcher die von Prof. *F. Redtenbacher* in seinen „Resultaten für den

Maschinenbau« zusammengestellten Zahlenwerthe zum Grunde gelegt wurden, die Widerstandsfähigkeit des Gufseisens gegen die Wirkungsgröfse zum Abreifsen, Abbrechen und Abdrehen beziehungsweise wie 12·4 bis 21 : 112 : 279 heraus, so dafs dieser letztere Widerstand wenigstens 13 Mal so grofs als der erstere ist.

Die hier bezeichneten Quotienten $\frac{m^2}{M}$, $\frac{m'^2}{M}$ und $\frac{T^2}{N}$ sind für den Maschinenbau deshalb von grofser Wichtigkeit, weil sie zugleich die Widerstandsfähigkeit der verschiedenen Maschinentheile gegen die Einwirkung von lebendigen Kräften angeben.

Soll, um z. B. einen Gebrauch der Formel $W = \frac{1}{4}\frac{T^2}{N} V$ (Nr. **130**) zu zeigen, eine Transmissionswelle ein Schwungrad erhalten, dessen Schwungring die Masse Q und die Geschwindigkeit v, folglich die lebendige Kraft $\frac{Q v^2}{2g}$ hat, so mufs, damit die Welle diese lebendige Kraft in sich aufnehmen kann ohne zu brechen

$$\frac{1}{4}\frac{T^2}{N} V > \frac{Q v^2}{2g},$$

also für das Volumen der Welle

$$V > 2\frac{N}{T^2}\frac{Q}{g} v^2 \text{ seyn.}$$

Nimmt man für $\frac{T^2}{N}$ die betreffende Zahl aus der erwähnten Tabelle, so mufs man, da dabei der Zoll als Längeneinheit zum Grunde liegt, auch die Geschwindigkeit v in Zollen ausdrücken und $g = 31 \times 12 = 372$ Zoll setzen.

(Mehreres sehe man in *Redtenbacher*'s „Resultate für den Maschinenbau.“)

Dicke der Gefäfswände.

(§. 275.)

132. Ist $AB = 2r$ (Fig 80) der lichte Durchmesser einer cylindrischen Röhre von der Länge l und einer im Vergleich zu r sehr dünnen Wand δ, so wie q der auf die Flächeneinheit bezogene radiale Druck auf die innere Wand; so nehme man als einfachste Hypothese an, dafs diese Röhre endlich nach dem Durchmesser AB in zwei Theile zerrissen werde. Diefs vorausgesetzt, zerlege man zur Bestimmung der Kräfte, welche diese Trennung bewirken, die auf irgend einen Punct M des innern Umfanges eines Querschnittes nach dem Radius CM, welcher mit AB den Winkel $ACM = \alpha$ bilden mag, wirkende Kraft q in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte p, p', wovon die erstere senkrecht auf AB, die letztere daher damit parallel ist; so hat man $p = q \, Sin \, \alpha$ und $p' = q \, Cos \, \alpha$. Läfst man α um $d\alpha$ zunehmen, so ist der auf den unendlich schmalen, parallel mit der Achse laufenden Streifen, dessen Fläche $= l \, r \, d\alpha$ ist, senkrecht gegen AB ausgeübte Druck $= l \, r \, d\alpha \, . \, q \, Sin \, \alpha$, folglich der gesammte Druck auf die halbe innere Cylinderfläche $= r \, l \, q \int_0^\pi Sin \, \alpha \, d\alpha = 2 \, r \, l \, q$, gerade so grofs, als ob die Kraft senkrecht auf die diametrale Ebene des innern Cylinders, als Projection der hohlen Cylinderfläche, auf diese Ebene wirksam wäre.

Eben so grofs ist auch der in derselben Richtung, senkrecht gegen AB auf die zweite Hälfte ANB der Cylinderfläche wirksame, dem vorigen entgegengesetzte Druck, welcher mit dem erstern zusammen die Trennung oder das Zerreifsen bewirkt.

Was die parallel mit AB wirksamen Kräfte p' betrifft, so heben sich diese wieder in den zwei Halbcylindern, welche durch einen auf AB senkrechten Durchmesser, oder einer durch diesen und die Achse gelegten Ebene getrennt werden, gegenseitig auf und haben auf das Zerreifsen des Cylinders nach der angenommenen Richtung keinen Einflufs.

Ist nun m die absolute Festigkeit des Materiales, woraus der hohle Cylinder oder die Röhre besteht, so hat man, da durch die angenommene Trennung die Fläche $2 \, l \, \delta$ abgerissen werden mufs, für das Gleichgewicht die Relation $2 \, l \, \delta \, . \, m = 2 \, r \, l \, q \; . \, . \; (\alpha)$ und daraus die W a n d d i c k e, bei welcher die Röhre eben noch zerreifst:

$$\delta = \frac{r \, q}{m} \quad (1)$$

(Vergleiche §. 276, Gleich. 1.)

Anmerkung. Um die Röhre nach einem Querschnitt s e n k r e c h t a u f d i e A c h s e abzureifsen, darf blofs $\delta = \frac{r \, q}{2 \, m}$ seyn. Auch ist ein Längenrifs nach einer andern als der diametralen Ebene unter einerlei Umständen deshalb nicht möglich, weil diese Ebenen kleiner als die Diametrale sind, also die Projection des Druckes in demselben Verhältnifs kleiner ist.

133. Ist $AC = BC = r$ (Fig. 81) der innere Halbmesser einer h o h l e n K u g e l und nimmt man, mit Beibehaltung aller übrigen Bezeichnungen der vorigen Nr., an, dafs die Kugel nach der diametralen Ebene $ADBE$ abreifst oder in zwei Halbkugeln getrennt wird; so hat man für die auf einen dem Winkel α entsprechenden Parallelkreis senkrecht gegen diese Ebene $ADBE$ gerichteten Seitenkräfte auf die Flächeneinheit bezogen, den Ausdruck $q \, Sin \, \alpha$, folglich ist der auf die unendlich schmale Zone $2\,y\,\pi\,.\,r\,\mathrm{d}\alpha$, welche entsteht, wenn man durch den Punct m, wofür $Mm = \mathrm{d}\alpha$ einen zweiten Parallelkreis legt, nach der Richtung senkrecht auf $ADBE$ ausgeübte Druck $= 2\,y\,\pi\,r\,\mathrm{d}\alpha . q\,Sin\alpha = 2\,r\,\pi\,q\,y\,Sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$ oder wegen $y = PM = r\,Cos\,\alpha$ auch $= 2\,r^2\,\pi\,q\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha\,\mathrm{d}\alpha$. Es ist daher der gesammte auf die Halbkugel $ADBEF$ senkrecht gegen die genannte Ebene $ADBE$ ausgeübte Druck $= 2\,r^2\,\pi\,q \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha\,\mathrm{d}\alpha$, oder wegen $\int Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}\,Sin^2\,\alpha$, auch $= 2\,r^2\,\pi\,q\,.\,\frac{1}{2} = r^2\,\pi\,q$, d. h. gerade so grofs, als ob der Druck q senkrecht gegen die Projection der halben Kugelfläche, d. i. der Kreisfläche $ADBE$ Statt fände.

Da nun nach der angenommenen Hypothese ein Streifen oder eine Fläche $2\,r\,\pi\,\delta$ abgerissen wird, so mufs $2\,r\,\pi\,\delta\,m = r^2\,\pi\,q$, also

$$\delta = \frac{1}{2}\,\frac{r\,q}{m} \quad (2)$$

seyn.

134. Ist die Gefäfswand bedeutend d i c k e r, so ist die Spannung an der äufsern Umfangsschichte des hohlen Cylinders nicht mehr, wie vorhin stillschweigend vorausgesetzt wurde, jener der innern Wand gleich, sondern kleiner als diese. Um die Rechnung für diesen Fall durchzuführen, sey $Ca = r$ der innere, und $CA = R$ (Fig. 82) der äufsere Halbmesser des hohlen Cylinders von der Länge l. Nimmt man $CP = x$ und $Cp = x + \mathrm{d}x$ und zieht mit diesen Halbmessern die concentrischen Kreise, so bildet der dadurch entstehende unendlich schmale Ring den Querschnitt eines hohlen Cylinders vom Halbmesser x und der Wanddicke $\mathrm{d}x$, auf welche die obige Relation (α) (Nr. **132**) d. i. $m\,\delta = r\,q$ mit aller Strenge anwendbar und sofort:

$$(\alpha)\;.\;.\;m'\,\mathrm{d}x = q'\,x$$

ist, wo m' die absolute Festigkeit für diesen unendlich dünnen Cylinder und q' den Druck auf die innere Fläche per Flächeneinheit bezeichnet.

Dehnt sich nun r durch den Druck auf die innere Wand um Δr, und, weil sich dieser Druck durch das Aufeinanderwirken der concentrischen Ringe oder Schichten nach aufsen zu fortpflanzt, x und Δx aus, so mufs, da das zwischen a und P liegende Kreisband nach der Ausdehnung dieselbe Breite $x - r$ wie vor der Ausdehnung behält (so wie diefs auch bei einem geraden Stab der Fall ist, welcher seiner Länge nach innerhalb der Elasticitätsgrenze ausgedehnt wird) sofort:

$$(x^2 - r^2)\,\pi = [(x + \Delta x)^2 - (r + \Delta r)^2]\,\pi$$

oder, wenn man die 2te Potenz von $\varDelta x$ und $\varDelta r$ ausläfst,

$$\varDelta x = \frac{r \, \Delta r}{x} \ldots (n)$$

seyn.

Ist ferner m die auf die Flächeneinheit bezogene, auf die innere, dem Halbmesser r entsprechende Cylinderwand Statt findende Spannung und m' jene, welche dem Halbmesser x entspricht; so hat man, wenn man Kürze halber $2 \, r \, \pi = \lambda$ und $2 \, x \, \pi = \lambda'$ setzt, nach der Relation (1) in §. 252) für die Ausdehnung der betreffenden concentrischen unendlich dünnen Schichten:

$$\varDelta \lambda = \frac{m \lambda}{M} \quad \text{und} \quad \varDelta \lambda' = \frac{m' \lambda'}{M}$$

wobei M den Modul der Elasticität bezeichnet; also auch:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} : \frac{\Delta \lambda'}{\lambda'} = m : m' \ . \ . \quad (s)$$

Nach der Ausdehnung ist $\lambda + \varDelta \lambda = 2 \, (r + \varDelta r) \, \pi$ und $\lambda' + \varDelta \lambda' = 2 \, (x + \varDelta x) \, \pi$ folglich $\varDelta \lambda = 2 \, \pi \, \varDelta r$ und $\varDelta \lambda' = 2 \, \pi \, \varDelta x$, oder: $\dfrac{\Delta \lambda}{\lambda} = \dfrac{2 \pi \Delta r}{2 r \pi} = \dfrac{\Delta r}{r}$ und $\dfrac{\Delta \lambda'}{\lambda'} = \dfrac{2 \pi \Delta x}{2 \pi x} = \dfrac{\Delta x}{x}$.

Die Vergleichung dieser Quotienten mit den vorigen in (s) gibt daher

$$m : m' = \frac{\Delta r}{r} : \frac{\Delta x}{x}$$

oder mit Rücksicht auf die Relation (n) auch:

$$m : m' = \frac{\Delta r}{r} : \frac{r \, \Delta r}{x^2} = x^2 : r^2,$$

woraus sofort $\quad m' = \dfrac{r^2}{x^2} \, m \quad$ folgt.

Setzt man nun diesen Werth für m' in die obige Gleichung (a), so erhält man $\dfrac{r^2 m}{x^2} \, \mathrm{d}x = q' \, x = q \, r$, weil für $x = r$, $q' = q$ wird.

Der erste Theil gibt, wegen $\displaystyle\int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{R - r}{R r} = \frac{\delta}{R r}$, wenn wieder δ die Dicke der Gefäfswand bezeichnet, sofort:

$$r^2 \, m \, \frac{\delta}{R r} = q \, r \quad \text{d. i.} \quad \delta = \frac{R q}{m}$$

welcher Ausdruck jenem (1) in Nr. **132** bis auf den einzigen Umstand gleich ist, dafs R statt r vorkömmt.

Um auch hier wieder den innern Halbmesser r in die Formel zu bringen, hat man wegen $R = r + \delta$ sofort $m \, \delta = r q + q \, \delta$ und daraus:

$$\delta = \frac{r q}{m - q} \ . \ . \quad (3)$$

Auf gleiche Weise findet man auch für die hohle Kugel:

$$\delta = \tfrac{1}{2} \frac{rq}{m-q} \; . \; . \quad (4)$$

Anmerkung 1. Wie aus diesen Formeln (3) und (4) hervorgeht, so muſs q, d. i. der innere Druck auf 1 Quadratzoll Fläche, immer kleiner als die absolute Festigkeit m seyn, weil sonst δ unendlich oder negativ würde, zum Beweis, daſs das Gefäſs bei gar keiner möglichen Wanddicke dem innern Drucke widerstehen kann. Nimmt man z. B. die absolute Festigkeit des Guſseisens mit 15000 Pf. in Rechnung und gestattet, weil man in den obigen Formeln für m immer einen aliquoten Theil der absoluten Festigkeit setzen muſs, daſs z. B. bei einer hydraulischen Presse der Preſscylinder mit seiner halben Festigkeit in Anspruch genommen werden darf, setzt also $m = \frac{15000}{2} = 7500$ und wie es für solche Preſscylinder üblich ist, $\delta = r$; so erhält man aus der Formel (3) für den gröſsten Druck q, welcher im Preſscylinder noch Statt finden darf: $m - q = q$, d. i. $q = \frac{m}{2} = 3750$ Pf. auf den Quadratzoll, d. i. einen Druck von 294 Atmosphären. Für $m = \frac{12000}{2}$ würde $q = 235$ Atmosphären betragen dürfen, u. s. w. fort.

Anmerkung 2. Setzt man in der Formel (1) Nr. 132 nach der Bemerkung in §. 277, $r = \frac{1}{2}d$ und $q = 12{\cdot}75\,n$, so wie $m = 12750$ (als beiläufig der 4te Theil der absoluten Festigkeit des Schmiedeisens); so erhält man mit Hinzufügung der additionellen Stärke ·114 für die Wanddicke der Röhren aus Eisenblech, die dort angegebene Formel:

$$e = {\cdot}0005\,nd + {\cdot}114.$$

Geht man von dieser Formel auf die Blechdicke cylinderischer Dampfkessel über und nimmt die absolute Dampfspannung im Kessel mit n, also die wirksame (da 1 Atmosphäre durch den Gegendruck aufgehoben wird) mit $n - 1$ Atmosph. in Rechnung, so wie die vorige Zahl m, wegen der Abweichung des Kessels von der genauen Cylinderform, ferner weil derselbe nicht aus einem einzigen Stück besteht, dem Feuer ausgesetzt ist u. s. w., nur mit dem 3·6ten Theil, setzt nämlich $m = \frac{12750}{3{\cdot}6} = 3542$; so erhält man die in §. 502 für die Blechdicke solcher Dampfkessel angeführte Formel:

$$e = {\cdot}0018\,(n-1)\,D + {\cdot}114$$

in Zollen, wobei auch der Kesseldurchmesser D in W. Zollen auszudrücken ist.

Da man bei Niederdruck-Kesseln auch ebene Seitenwände hat, so sey, um dafür die Blechdicke wenigstens nach einer genäherten Hypothese zu bestimmen, l die Länge, b die Breite und e die Dicke einer rechteckigen Platte, welche an ihren vier Seitenkanten befestigt ist. Der auf die Flächeneinheit Statt findende Druck sey wieder $= q$, also der Druck auf die ganze Platte $= b\,l\,q$; die beiden schmäleren Seiten b sollen dadurch den Druck P und die beiden längern l jenen Q zu erleiden haben.

Dieſs vorausgesetzt hat man für die Biegung oder den Pfeil δ nach Nr. 120, Gleich. (i):

$$\delta = \frac{5}{8} \cdot \frac{P l^3}{48 E'} = \frac{5}{8} \cdot \frac{Q b^3}{48 E'}$$

so, dafs also $P l^3 = Q b^3$ und wegen $P + Q = b l q$ sofort:

$$P = \frac{l b^4 q}{b^3 + l^3} \quad \text{und} \quad Q = \frac{b l^4 q}{b^3 + l^3} \text{ ist.}$$

Soll die Platte in der Mitte der Länge nach (parallel mit der Dimension l) zerreifsen oder brechen, so mufs (§. 257, Anmerk. 1, oder in der auf S. 101 angezogenen Abhandlung — Jahrb. des polyt. Inst. Bd XX. — §. 72) $Q b = \frac{16}{6} m l e^2$, und wenn diese in der halben Länge l parallel mit der Dimension b brechen soll, $P l = \frac{16}{6} m b e^2$, oder wenn man für Q und P die vorigen Werthe setzt und abkürzt, beziehungsweise:

$$m e^2 = \frac{3}{8} \frac{b^2 l^3 q}{b^3 + l^3} \quad \text{und} \quad m e^2 = \frac{3}{8} \frac{l^2 b^3 q}{b^3 + l^3} \text{ seyn.}$$

Aus der erstern dieser beiden Relationen (welche einen gröfsern Werth von e fordert) erhält man für die gesuchte Blechdicke dieser Tafel oder Platte:

$$e = \sqrt{\left(\frac{3}{8} \frac{q}{m} \frac{b^2 l^3}{b^3 + l^3}\right)}$$

Setzt man z. B. $q = \frac{1}{2} \times 12{\cdot}75 = 6{\cdot}38$, $l = 2b = 4' = 48''$ und für Eisenblech wieder nur $m = 3540$; so wird:

$$e = \sqrt{\left[\frac{3}{8} \cdot \frac{6{\cdot}38}{3540} \cdot \frac{8}{9} (24)^2\right]} = \sqrt{{\cdot}1153} = {\cdot}34 \text{ Zoll}$$

oder 4 Linien für die Dicke jener Bleche, welche unmittelbar dem Feuer ausgesetzt sind, während die übrigen etwas schwächer gehalten werden können.

Eine weitere Ausführung der Stärke der Kesselwände, so wie auch der Feuerröhren folgt in Nr. 272 u. f.