gende Betrachtung zeigt. Bezeichnet man die Abweichungen der Lenkerstange in ihren Todtlagen von der Verticalen mit μ und ν, setzt also $C_1AO = \mu$ und $C_3AO = \nu$, so kann man mit großer Annäherung setzen:

$$\mu = \frac{C_0 O}{C_1 A} = \frac{e}{2(l+r)} \text{ und } \nu = \frac{C_0 O}{C_3 A} = \frac{e}{2(l-r)}.$$

Bei dem geringen Ausschlagswinkel β_1 des Balanciers kann man nun die Pfeilhöhe

$$e = \frac{C_1 C_0{}^2}{2a} = \frac{r^2}{2a}$$

annehmen, so daß man für die Winkel μ und ν erhält:

$$\mu = \frac{r^2}{4a(l+r)} \text{ und } \nu = \frac{r^2}{4a(l-r)}.$$

Für $\frac{r}{a} = {}^1/_3$ und $\frac{r}{l} = {}^1/_5$ hat man beispielsweise:

$$\mu = \frac{1}{72}, \text{ also } \mu^0 = \frac{180^0 \mu}{\pi} = 0^0\ 48'$$

und

$$\nu = \frac{1}{48}, \text{ also } \nu^0 = \frac{180^0 \nu}{\pi} = 1^0\ 12'.$$

Es sind folglich die Abstände der todten Punkte von einander

$$180 \pm (\nu - \mu) = 180^0\ 24' \text{ und } 179^0\ 36'.$$

Die Wege, welche der Balancier vermöge der kleinen Kurbeldrehungen μ und ν beschreibt, sind nach dem Vorstehenden daher

$$\sigma_1 = r\,(1 - \cos \mu) = r\,(1 - \cos 0^0\ 48') = 0{,}00010\ r$$

und

$$\sigma_2 = r\,(1 - \cos \nu) = r\,(1 = \cos 1^0\ 12') = 0{,}00022\ r.$$

Diese Größe und damit die durch die seitliche Lagerung der Kurbelwelle hervorgerufene Ungleichförmigkeit sind so gering, daß man sie außer Acht lassen kann.

§. 150. **Die Kurbel mit veränderlicher Stangenkraft.** Bei den bisherigen Ermittelungen ist immer eine constante Größe der auf die Stange oder den Kreuzkopf wirkenden Kolbenkraft Q vorausgesetzt worden, wie diese Annahme annähernd bei Wasserpumpen und solchen Dampfmaschinen zutreffend ist, bei denen der Dampf während des ganzen Kolbenlaufes zum Cylinder Zutritt hat. Wenn der Dampf jedoch vor Beendigung des Kolbenlaufes in einer gewissen Kolbenstellung jedesmal abgeschlossen wird, damit er durch seine Expansion eine fernere Wirkung ausübe, so wird von dem

Eintritte dieser Expansion an der Druck auf den Kolben sich vermindern, und man hat daher bei jeder Expansionsdampfmaschine zwei Perioden der Bewegung innerhalb jedes einzelnen Kolbenlaufes zu unterscheiden, welche dadurch von einander verschieden sind, daß die Kolbenkraft während der ersten oder Volldruckperiode constant, während der letzten oder Expansionsperiode variabel ist, wie schon in Theil II des Näheren aus einander gesetzt worden ist. Auch bei den Gebläsemaschinen, welche bei jedem Kolbenlaufe ein gewisses Volumen atmosphärischer Luft in einen Raum von größerer Pressung hineindrücken, finden zwei derartige verschiedene Bewegungsperioden statt, von denen die erste durch einen allmälig zunehmenden Widerstand charakterisirte als Compressionsperiode bezeichnet werden kann, auf welche die zweite Periode mit constantem Widerstande des Kolbens folgt. Für die Theorie der Kurbel macht es auch hier keinen Unterschied, ob die Stangenkraft wie bei den Dampfmaschinen treibend, oder wie bei den Pumpen widerstehend wirkt, nur werden in den beiden Fällen Maximal- und Minimalgeschwindigkeiten ihre Plätze vertauschen, indem in dem einen Falle eine Verzögerung eintritt, wo unter sonst gleichen Umständen der andere durch eine Beschleunigung der Bewegung gekennzeichnet ist. Bei der großen Bedeutung, welche die Expansion des Dampfes für die praktischen Ausführungen der gesammten Technik hat, soll im Folgenden die Untersuchung der Kurbelbewegung für eine Expansionsmaschine geführt werden, mit dem Expansionsverhältnisse ε, d. h. in deren Cylinder der abgesperrte Dampf sich auf das εfache seines Volumens ausdehnen kann. Ist daher wieder $2r$ der ganze Kolbenweg, so soll der Weg $\frac{2r}{\varepsilon}$ unter constanter Kolbenkraft und der Rest $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} 2r$ unter abnehmendem Drucke zurückgelegt werden. Ueber das Gesetz, nach welchem die Abnahme des Dampfdruckes bei erfolgender Expansion vor sich geht, ist im zweiten Theile ebenfalls ausführlicher gehandelt. Bei der folgenden Untersuchung soll die einfachere Voraussetzung gemacht werden, daß die Expansion entsprechend dem Mariotte'schen Gesetze vor sich gehe. Zwar drückt dieses Gesetz das Verhalten der Dämpfe nur annähernd aus, doch würde die Zugrundelegung schärferer Formeln, wie sie aus der mechanischen Wärmetheorie folgen, in dem vorliegenden Falle die Untersuchung nur unnöthig erschweren. Es möge mit Q wieder der auf den Kolben treibend wirkende Dampfdruck vor der Expansion bezeichnet werden, und sei hier der auf die Rückfläche des Kolbens wirkende Gegendruck, wie er dem atmosphärischen Drucke oder der Pressung im Condensator entspricht, mit R bezeichnet. Dieser Gegendruck R muß hier deswegen besonders in Rechnung gestellt werden, weil derselbe während des ganzen Kolbenlaufes constant ist. Bei den früheren Untersuchungen der Kurbelbewegung für constante Stangenkraft konnte eine solche besondere Einführung des Gegendruckes R unterbleiben, wenn man nur unter der Stangenkraft Q den Ueberdruck verstand, um welchen die Pressung auf die eine Kolbenfläche den Gegendruck der Rückfläche übersteigt. Zur Bestimmung der Umfangskraft P an der Kurbelwarze hat man wieder für den Beharrungszustand die mechanische Arbeit der Kraft P für eine halbe Umdrehung, also $P\pi r$ gleich der Arbeit der Kolbenkraft während eines einfachen Kolbenlaufes zu setzen. Die letztere Arbeit setzt sich zusammen aus den Arbeiten A_1 vor dem Beginne der Expansion, und A_2 während der Expansion, vermindert um die Arbeit A_3 des Gegendruckes. Man hat also, wenn $s_1 = 2r$ den ganzen Kolbenlauf, und $s' = \frac{2r}{\varepsilon}$ den Weg vor der Absperrung bedeutet, diese Leistung nach Thl. I, §. 415:

$$A_1 + A_2 - A_3 = Qs'\left(1 + log\, nat\, \frac{s_1}{s'}\right) - Rs_1$$

$$= Q\,\frac{2r}{\varepsilon}\,(1 + log\, nat\, \varepsilon) - R\,2r.$$

Durch Gleichsetzung dieses Werthes mit $P\pi r$ folgt daher

$$P = \frac{2}{\pi\,\varepsilon}\,(1 + log\, nat\, \varepsilon)\; Q - \frac{2}{\pi}\,R.$$

Bezeichnet man ferner den Winkel, um welchen die Kurbel vom äußeren oder inneren todten Punkte sich gedreht hat, wenn die Expansion beginnt mit α_ε, so hat man für denselben

$$s' = \frac{2r}{\varepsilon} = r\left(1 - cos\,\alpha_\varepsilon \mp \frac{r}{2l}\,sin^2\,\alpha_\varepsilon\right),$$

also ist:

$$cos\,\alpha_\varepsilon = 1 - \frac{2}{\varepsilon} \mp \frac{r}{2l}\,sin^2\alpha_\varepsilon.$$

Nun findet man für die Bewegung vor der Expansion wieder wie früher

$$L = m_1\,\frac{v^2 - v_1{}^2}{2} = (Q - R)\,r\left(1 - cos\,\alpha \mp \frac{r}{2l}\,sin^2\alpha\right) - P\,r\,\alpha,$$

woraus man erhält:

$$v = \sqrt{v_1{}^2 + 2\,\frac{Q - R}{m_1}\,r\left(1 - cos\,\alpha \mp \frac{r}{2l}\,sin^2\alpha\right) - \frac{2\,P\,r\,\alpha}{m_1}},$$

oder annähernd:

$$v = v_1\left\{1 + \frac{r}{m_1\,v_1{}^2}\left[(Q - R)\left(1 - cos\,\alpha \mp \frac{r}{2l}\,sin^2\,\alpha\right) - P\,\alpha\right]\right\}.$$

Um den Winkel α_1 zu finden, für welchen die Geschwindigkeit ein Minimum ist, hat man wieder

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0$$

zu setzen, und erhält dadurch:

$$(Q - R)\left(\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha\right) - P = 0,$$

oder

$$\sin \alpha = \frac{P}{Q - R} \pm \frac{r}{2l} \sin 2\alpha = \frac{P}{Q\left(1 - \frac{R}{Q}\right)} \pm \frac{r}{2l} \sin 2\alpha.$$

Setzt man hierin nach obiger Ermittelung

$$\frac{P}{Q} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1 + \log nat\, \varepsilon}{\varepsilon} - \frac{R}{Q}\right)$$

so erhält man:

$$\sin \alpha_1 = \frac{2}{\pi\left(1 - \frac{R}{Q}\right)}\left(\frac{1 + \log nat\, \varepsilon}{\varepsilon} - \frac{R}{Q}\right) \pm \frac{r}{2l} \sin 2\alpha_1.$$

Für einen beliebigen Drehungswinkel α, welcher größer als α_ε ist, also in die Expansionsperiode hineinfällt, bestimmt sich dagegen die Leistung der Kolbenkraft wie folgt. Der Dampf hat mit Volldruck auf dem Wege

$$s' = \frac{2r}{\varepsilon}$$

gewirkt, dann ist eine Volumenvergrößerung im Verhältnisse

$$r\left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha\right) \text{ zu } \frac{2r}{\varepsilon}$$

eingetreten, also hat man das entsprechende Expansionsverhältniß für den betrachteten Moment gleich

$$\frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha\right)$$

und somit die ganze Arbeit des Dampfdruckes auf die Vorderfläche des Kolbens gleich

$$A_1 = Q\,\frac{2r}{\varepsilon}\left[1 + \log nat\, \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha\right)\right].$$

Der Gegendruck R hat während dieser Zeit die Arbeit

$$R \cdot r\left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha\right)$$

verrichtet, und daher berechnet sich die gesammte auf Beschleunigung der Massen verwendete Arbeit für die Drehung um den Winkel α zu:

$$L = Q\,\frac{2r}{\varepsilon}\left[1 + log\,nat\,\frac{\varepsilon}{2}\left(1 - cos\,\alpha \mp \frac{r}{2l}\,sin^2\alpha\right)\right]$$
$$- Rr\left(1 - cos\,\alpha \mp \frac{r}{2l}\,sin^2\alpha\right) - Pr\alpha.$$

Man findet daher in ganz derselben Weise wie früher aus

$$L = m_1\,\frac{v^2 - v_1{}^2}{2},$$

für v den Ausdruck

$$v = v_1\left(1 + \frac{L}{m_1\,v_1{}^2}\right).$$

Um den Winkel α für die Maximalgeschwindigkeit zu vermitteln, hat man wieder $\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0$, d. h.:

$$Q\,\frac{2}{\varepsilon}\,\frac{sin\,\alpha \mp \frac{r}{2l}\,sin\,2\,\alpha}{1 - cos\,\alpha \mp \frac{r}{2l}\,sin^2\,\alpha} - R\left(sin\,\alpha \mp \frac{r}{2l}\,sin\,2\,\alpha\right) = P,$$

oder

$$\left(sin\,\alpha \mp \frac{r}{2l}\,sin\,2\,\alpha\right)\left(\frac{2}{\varepsilon}\,\frac{Q}{1 - cos\,\alpha \mp \frac{r}{2l} sin^2\,\alpha} - R\right) = P.$$

Dies läßt sich auch schreiben:

$$\frac{sin\,\alpha\left(1 \mp \frac{r}{l}\,cos\,\alpha\right)}{2\,sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1 \mp \frac{r}{l}\,cos^2\,\frac{\alpha}{2}\right)}\left[\frac{2}{\varepsilon}\,Q - 2\,R\,sin^2\,\frac{\alpha}{2}\left(1 \mp \frac{r}{l}\,cos^2\,\frac{\alpha}{2}\right)\right] = P,$$

oder

$$cotg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{\frac{2}{\varepsilon}\,Q\,\frac{1 \mp \frac{r}{l}\,cos\,\alpha}{1 \mp \frac{r}{l}\,cos^2\,\frac{\alpha}{2}} - 2\,R\,sin^2\,\frac{\alpha}{2}\left(1 \mp \frac{r}{l}\,cos\,\alpha\right)}$$

$$= \frac{P}{\frac{2}{\varepsilon}\,Q\left(1 \pm \frac{r}{l}\,sin^2\,\frac{\alpha}{2}\right) - 2\,R\,sin^2\,\frac{\alpha}{2}\left(1 \mp \frac{r}{l}\,cos\,\alpha\right)}.$$

Setzt man hierin noch für P seinen Werth

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1 + log\ nat\ \varepsilon}{\varepsilon} - \frac{R}{Q}\right) Q,$$

so erhält man schließlich:

$$cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + log\ nat\ \varepsilon - \frac{\varepsilon R}{Q}}{\pi \left[1 \pm \frac{r}{l} sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{\varepsilon R}{Q} sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 \mp \frac{r}{l} cos \alpha\right)\right]}.$$

Nimmt man für das Expansionsverhältniß ε den vortheilhaftesten Werth an, d. h. denjenigen, für welchen gegen Ende des Kolbenlaufes der Dampfdruck $\frac{Q}{\varepsilon}$ gerade bis auf den Gegendruck R herabgesunken ist, setzt man also $Q = \varepsilon R$, so nehmen die gefundenen Gleichungen für die Winkel α_1 und α_2 der Minimal- und Maximalgeschwindigkeiten nunmehr einfachere Form an und zwar für die kleinste Geschwindigkeit (vor der Expansion):

$$sin\ \alpha_1 = \frac{2\ log\ nat\ \varepsilon}{\pi\ (\varepsilon - 1)} \pm \frac{r}{2l} sin\ 2\ \alpha_1$$

und für die Maximalgeschwindigkeit:

$$cotg \frac{\alpha_2}{2} = \frac{log\ nat\ \varepsilon}{\pi\ cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 \pm \frac{2r}{l} sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Für diesen Fall erhält man die Umdrehungskraft

$$P = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 + log\,nat\ \varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right) Q = \frac{2}{\pi} \frac{Q}{\varepsilon} log\,nat\ \varepsilon = \frac{2}{\pi} R\ log\,nat\ \varepsilon,$$

und daher sind die eminenten Geschwindigkeiten:

$$v_{min} = v_1 \left\{1 + \left[(\varepsilon - 1) \left(1 - cos \alpha \mp \frac{r}{2l} sin^2 \alpha\right) \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2}{\pi} \alpha\ log\ nat\ \varepsilon\right] \frac{Q r}{\varepsilon\, m_1\, v_1{}^2}\right\}$$

und

$$v_{max} = v_1 \left\{1 + \left[1 + cos \alpha \pm \frac{r}{2l} sin^2 \alpha + 2\,log\,nat \left(1 - cos \alpha \mp \frac{r}{2l} sin^2 \alpha\right) \frac{\varepsilon}{2}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2}{\pi} \alpha\ log\ nat\ \varepsilon\right] \frac{Q r}{\varepsilon\, m_1\, v_1{}^2}\right\}.$$

Nimmt man wieder $\frac{r}{l} = 1/5$ und $\varepsilon = 2$ an, so erhält man aus

$$sin\, \alpha_1 = \frac{2\ log\ nat\ 2}{\pi} \pm 0{,}1\ sin\ 2\, \alpha_1$$

die Winkel

$\alpha_1 = 32^0\ 5^1/_2{}'$ für den Niedergang und
$(\alpha_1) = 21^0\ 50'$ für den Aufgang.

Durch Einführung dieser Werthe in die Gleichungen für L und v erhält man alsdann

$$v_{min} = \left(1 - 0{,}0613 \frac{Q r}{m_1 v_1^2}\right) v_1$$

und

$$(v_{min}) = \left(1 - 0{,}0667 \frac{Q r}{m_1 v_1^2}\right) v_1.$$

Für die Winkel α_2 der Maximalgeschwindigkeiten hat man dagegen

$$cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{log\ nat\ 2}{\pi \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 \pm 0{,}4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)},$$

welcher Gleichung die Winkel genügen:

$\alpha_2 = 116^0\ 32'$ für den Hingang der Kurbel und

$(\alpha_2) = 104^0\ 12'$ für den Rückgang.

Die entsprechenden Maximalgeschwindigkeiten sind

$$v_{max} = \left(1 + 0{,}1803 \frac{Q r}{m_1 v_1^2}\right) v_1$$

und

$$(v_{max}) = \left(1 + 0{,}2212 \frac{Q r}{m_1 v_1^2}\right) v_1.$$

Man hat daher den Ungleichförmigkeitsgrad

$$\delta = (0{,}2212 + 0{,}0667) \frac{Q r}{m_1 v_1^2} = 0{,}2879 \frac{Q r}{m_1 v_1^2}$$

oder, da

$$P = \frac{2 Q}{\pi \varepsilon} log\ nat\ \varepsilon = 0{,}22063\ Q$$

ist,

$$\delta = \frac{0{,}2879}{0{,}2206} \frac{P r}{m_1 v_1^2} = 1{,}305 \frac{P r}{m v_1^2}.$$

In der folgenden Tabelle sind unter Annahme von $l = 5 r$ für einige Expansionsverhältnisse die entsprechenden Ungleichförmigkeitsgrade angegeben.

Expansionsverhältniß ε	2	3	4	5	6
Ungleichförmigkeitsgrad δ	1,305	1,374	1,421	1,453	1,477 $\frac{P r}{m_1 v_1^2}$

§. 151. **Beschleunigungsdruck.** Bei der Uebertragung der auf den Kolben einer Dampfmaschine oder Pumpe wirkenden Kraft Q auf den Kurbelzapfen ist die Einwirkung der schwingenden Masse m_2 von wesentlichem Einflusse, wie aus der folgenden Betrachtung sich ergiebt. Denkt man sich eine Kurbel-