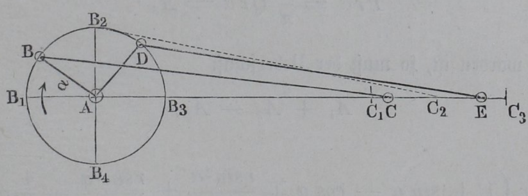
§. 146. **Die doppelte Kurbel.** Man wendet in vielen Fällen bei Dampfmaschinen, bei solchen mit Vorwärts- und Rückwärtsgang fast immer, zwei Kurbeln auf einer gemeinschaftlichen Welle an, und pflegt dann diese Kurbeln um 90^0 gegen einander zu versetzen. Bei einer solchen Anordnung sind eigentliche todte Punkte des Systems nicht vorhanden, indem die Todtlagen der einen Kurbel zwischen diejenigen der anderen hineinfallen, es ist daher durch die Kolbendrucke auch in jeder beliebigen Kurbelstellung ein Antrieb nach der Kurbelwelle ermöglicht, was bei einer einfachen Kurbel in den Todtlagen nicht der Fall ist. Aus diesem Grunde wendet man Doppelkurbeln fast immer bei Dampfmaschinen an, welche, wie Locomotiv- und Dampfschiffsmaschinen, von jeder Stellung aus sowohl vorwärts als rückwärts sich bequem müssen in Gang setzen lassen. Auch bei Pumpen und ähnlichen Maschinen, bei welchen der Antrieb von der Kurbelwelle ausgeht, wird die Doppelkurbel zuweilen, doch vergleichsweise nur selten, zur Anwendung gebracht.

Um die Theorie der Doppelkurbel zu entwickeln, soll wieder vorausgesetzt werden, daß die Kurbelwelle von den Kolbenkräften in Umdrehung gesetzt werde. Es bedeute wieder P die constante Widerstandskraft an der Kurbelwelle in einem Abstande r gleich dem Arme jeder der beiden gleich langen Kurbeln, und Q sei der constante Druck an jedem der beiden Kolben, m_1 sei die rotirende auf die Kurbelwarzen reducirte Masse und m_2 die Masse, welche mit jedem Kreuzkopfe verbunden zu denken ist. Die Massen der Lenkerstangen mögen in der in §. 143 angegebenen Art, nämlich zu $^1/_3$ auf die Kurbelzapfen und zu $^2/_3$ auf die Kreuzköpfe, vertheilt gedacht werden und diese Antheile in m_1 und m_2 inbegriffen sein. Die Kurbeln sollen, wie fast immer der Fall ist, um $BAD = 90^0$, Fig. 565, gegen einander ver-

Fig. 565.



setzt sein. Zunächst hat man wieder für den eingetretenen Beharrungszustand der Bewegung die mechanischen Arbeiten $P \,.\, 2\pi r$ und $2 \,.\, Q\, 4\, r$ gleichzusetzen, woraus man jetzt

$$P = \frac{4}{\pi}\, Q$$

erhält. Denkt man wieder die Kurbelwelle um einen beliebigen Winkel α, von der äußeren Todtlage AB_1 ausgehend, gedreht, so daß die Kurbel B von B_1 nach B und diejenige D von B_2 nach D gelangt, so hat sich der Kreuzkopf C um das Stück

$$s_1 = C_1 C = r\,(1 - \cos\alpha) \mp \frac{r^2 \sin^2\alpha}{2\,l}$$

bewegt, während der Kreuzkopf E aus der Stellung C_2 in diejenige E gelangt ist, also den Weg

$$s_2 = C_1 E - C_1 C_2 = r\,[1 - \cos(90^0 + \alpha)] \mp \frac{r^2 \sin^2(90^0 + \alpha)}{2\,l}$$

$$- \left[r\,(1 - \cos 90^0) \mp \frac{r^2 \sin^2 90^0}{2\,l}\right] = r \sin\alpha \pm \frac{r^2}{2\,l}\,(1 - \cos^2\alpha)$$

$$= r\left(\sin\alpha \pm \frac{r}{2\,l} \sin^2\alpha\right)$$

zurückgelegt hat.

Für die von beiden Stangen verrichtete mechanische Arbeit hat man daher den Ausdruck

$$A_1 + A_2 = Q s_1 + Q s_2$$

$$= Q r \left(1 + \sin\alpha - \cos\alpha \mp \frac{r \sin^2\alpha}{2\,l} \pm \frac{r \sin^2\alpha}{2\,l}\right),$$

in welchem Ausdrucke das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem die betreffende Kurbel im Hingange oder Hergange befindlich ist.

Da während dieser Bewegung von der Kurbelwelle die mechanische Arbeit

$$P r \alpha = \frac{4}{\pi}\, Q r \alpha = A_3$$

verrichtet worden ist, so muß der Ueberschuß

$$A_1 + A_2 - A_3,$$

d. h. also

$$Q r \left(1 + \sin\alpha - \cos\alpha \mp \frac{r \sin^2\alpha}{2\,l} \pm \frac{r \sin^2\alpha}{2\,l} - \frac{4}{\pi}\,\alpha\right)$$

von den Massen als lebendige Kraft aufgenommen oder abgegeben sein. — Die von der Masse m_1 der Kurbelwelle bei dem Uebergange aus der Geschwindigkeit v_1 in B_1 in die Geschwindigkeit v in B aufgenommene Arbeit ist wieder

$$L_1 = m_1\, \frac{v^2 - {v_1}^2}{2},$$

und ebenso bestimmt sich wie bei der einfachen Kurbel die von der Masse m_2 des Kreuzkopfes C aufgenommene Arbeitsleistung für die Aenderung der Geschwindigkeit Null im todten Punkte in diejenige

$$c = v \left(\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2 \alpha \right)$$

in der Stellung B zu

$$L_2 = m_2 \left(\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2 \alpha \right)^2 \frac{v^2}{2}.$$

Dagegen hat die Masse m_2 des zweiten Kreuzkopfes E, welche zu Anfang der betrachteten Bewegung in C_2 stehend die Geschwindigkeit

$$v_1 \left(\sin 90^0 \mp \frac{r}{2l} \sin 180^0 \right) = v_1$$

hatte, nunmehr die Geschwindigkeit

$$v \left[\sin (90^0 + \alpha) \mp \frac{r}{2l} \sin 2 (90^0 + \alpha) \right] = v \left(\cos \alpha \pm \frac{r}{2l} \sin 2 \alpha \right)$$

erlangt, so daß der Zuwachs an Massenarbeit

$$L_3 = m_2 \left(\cos \alpha \pm \frac{r}{2l} \sin 2 \alpha \right)^2 \frac{v^2}{2} - m_2 \frac{{v_1}^2}{2}$$

beträgt. Vernachlässigt man in den Ausdrücken für L_2 und L_3 alle höheren Potenzen von $\frac{r}{2l}$ als kleine Größen, so läßt sich setzen:

$$L_2 = m_2 \left(\sin^2 \alpha \mp \frac{r}{l} \sin \alpha \sin 2 \alpha \right) \frac{v^2}{2}$$

und

$$L_3 = m_2 \left(\cos^2 \alpha \pm \frac{r}{l} \cos \alpha \sin 2 \alpha \right) \frac{v^2}{2} - m_2 \frac{{v_1}^2}{2},$$

woraus also

$$L_1 + L_2 + L_3$$

$$= m_1 \frac{v^2 - {v_1}^2}{2} + m_2 \frac{v^2 - {v_1}^2}{2} + m_2 \frac{r}{l} (\mp \sin \alpha \pm \cos \alpha) \sin 2 \alpha \frac{v^2}{2}$$

folgt. Bei der Kleinheit von m_2 gegen m_1 und von r gegen l kann man das letzte Glied in diesem Ausdrucke vernachlässigen und erhält daher einfacher:

$$L_1 + L_2 + L_3 = (m_1 + m_2) \frac{v^2 - {v_1}^2}{2}.$$

Setzt man diesen Zuwachs an Massenarbeit gleich der von den äußeren Kräften geleisteten Arbeit $A_1 + A_2 - A_3$, so wird:

$$(m_1 + m_2)\,\frac{v^2 - v_1{}^2}{2}$$

$$= Q r \left(1 + \sin\alpha - \cos\alpha \mp \frac{r \sin^2\alpha}{2 l} \pm \frac{r \sin^2\alpha}{2 l} - \frac{4}{\pi}\,\alpha\right),$$

woraus man schließlich für die Geschwindigkeit v der Kurbelwarzen den Ausdruck erhält:

$$v = \sqrt{v_1{}^2 + \frac{2\,Q r}{m_1 + m_2}\left(1 + \sin\alpha - \cos\alpha \mp \frac{r}{2l}\sin^2\alpha \pm \frac{r}{2l}\sin^2\alpha - \frac{4}{\pi}\alpha\right)}.$$

Unter Vernachlässigung der mit $\frac{r}{2l}$ behafteten Glieder, d. h. unter Voraussetzung von unendlich langen Lenkerstangen und für große Massen kann man auch schreiben:

$$v = v_1 \left[1 + \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1{}^2}\left(1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \frac{4}{\pi}\,\alpha\right)\right].$$

Für diesen Fall sehr langer Lenkerstangen erhält man daher die größten, bezw. kleinsten Geschwindigkeiten durch Differentiation aus

$$\cos\alpha + \sin\alpha - \frac{4}{\pi} = 0,$$

oder

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\,\alpha;$$

d. i.

$$\sin 2\,\alpha = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1 = 0{,}6211.$$

Dieser Gleichung entsprechen die beiden Complementswinkel

$$\alpha_1 = 19^0\ 12' \text{ und } \alpha_2 = 70^0\ 48'.$$

Es ist nach dem Früheren nun klar, daß dem Winkel $\alpha_1 = 19^0\ 12'$ die kleinste und dem Winkel $\alpha_2 = 70^0\ 48'$ die größte Geschwindigkeit entspricht, wenn, wie hier angenommen, der Antrieb von den Kolbenstangen ausgeht. Bei der Bewegung von Pumpen durch die Kurbelwelle würde das Gegentheil stattfinden. Diese ausgezeichneten Geschwindigkeiten selbst erhält man durch Einsetzung der gefundenen Werthe für α_1 und α_2 zu:

$$v_{min} = v_1 \left(1 - 0{,}0422\,\frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1{}^2}\right)$$

und

$$v_{max} = v_1 \left(1 + 0{,}0422 \frac{Qr}{(m_1 + m_2)\, v_1{}^2}\right).$$

Es ist übrigens leicht zu erkennen, daß die hier gefundenen Beziehungen für jeden der vier Quadranten gelten, sobald man nur den Winkel α innerhalb der Grenzen 0 und 90^0 wählt, und ihn stets von dem Anfangspunkte B_1, B_2, B_3 und B_4 in dem Sinne der Bewegung angetragen denkt, denn in diesem Falle ist die Arbeit $A_1 + A_2$ der beiden Kreuzköpfe stets durch

$$Qr\,(1 + \sin\alpha - \cos\alpha)$$

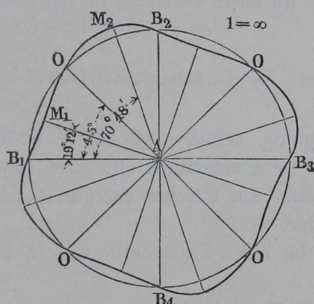
wie oben ausgedrückt. Ebenso ist die von den Massen aufgenommene mechanische Arbeit dann immer genügend genau

$$L = (m_1 + m_2)\, \frac{v_1{}^2 - v^2}{2},$$

unter v_1 die Geschwindigkeit im Anfangspunkte des betreffenden Quadranten verstanden.

Man erkennt hieraus, daß unter der gemachten Voraussetzung $\frac{r}{l} = 0$ die Bewegung der Kurbel aus vier ganz gleichen Perioden besteht, welche je einem Quadranten entsprechen, und daß in jedem Quadranten sowohl eine maxi-

Fig. 566.



male wie eine minimale Geschwindigkeit von dem oben berechneten Betrage vorkommt. Es folgt ferner aus der obigen Formel für v, daß sowohl für

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^0,$$

wie auch für

$$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^0$$

die Geschwindigkeit $v = v_1$ wird, man hat daher nicht nur in den Grenzpunkten der Quadranten, sondern auch in deren Mitten, also überhaupt in Abständen von 45^0 dieselbe Geschwindigkeit v_1 wie in den todten Punkten. Man kann auch hier die Geschwindigkeit in diesen Punkten v_1 gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit v_0 nehmen, um so mehr, als die maximale Geschwindigkeit v_{max} jene Geschwindigkeit v_1 genau um denselben Betrag übersteigt, um welchen v_{min} darunter bleibt. Wenn man daher in Fig. 566 (a. v. S.) wieder die Kurbelgeschwindigkeiten proportional den Radien auf den Kurbelstellungen angetragen denkt, so ergiebt die wellenförmige Curve $B_1 O B_2 \ldots$ ein anschauliches Bild von den regelmäßigen Schwankungen der Geschwindigkeit. Dabei sind die Winkel $B_1 A M_1 = 19^0 12'$ und $B_1 A M_2 = 70^0 48'$ wie oben berechnet worden.

§. 147. **Einfluss der Länge der Schubstangen.** Die Geschwindigkeitsverhältnisse der Kurbelwelle stellen sich indessen wesentlich anders dar, wenn die Lenkerstangen eine endliche Länge haben, und soll dieser Fall hier untersucht werden, unter der Voraussetzung, daß $\frac{r}{l}$ einen Werth zwischen $^1/_4$ und $^1/_6$ habe. Unter dieser Voraussetzung muß auf die allgemeine Gleichung

$$A = A_1 + A_2 - A_3 = L_1 + L_2 + L_3$$

zurückgegriffen werden. In dieser Gleichung ist, wie oben gezeigt wurde, annähernd

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = (m_1 + m_2) \frac{v^2 - v_1^2}{2}$$

für alle Quadranten gültig, vorausgesetzt, daß v_1 die Kurbelgeschwindigkeit in dem Anfangspunkte des Quadranten, also gleich derjenigen in bezw. B_1, B_2, B_3 und B_4 bedeutet. Die Arbeiten dagegen A sind für die verschiedenen Quadranten verschieden.

Für die Bewegung im ersten Quadranten von B_1 bis B_2 ist die Arbeit

$$A = A_1 + A_2 - A_3$$

ausgedrückt durch

$$Q r \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \frac{4}{\pi} \alpha\right),$$

da die beiden Glieder $\frac{r}{2l} \sin^2 \alpha$ sich fortheben. Man kommt daher hier auf dieselbe Formel für v wie für den Fall unendlich langer Lenkerstangen, nämlich