

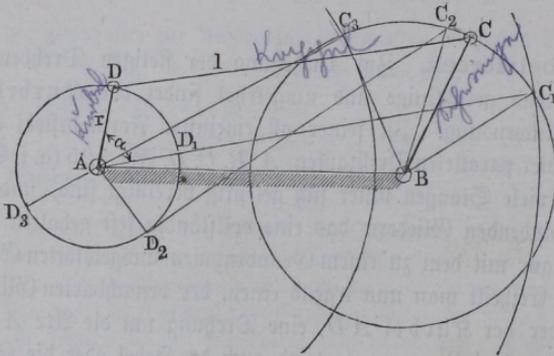
Sechstes Capitel.

Das Kurbelgetriebe.

Das Kurbelviereck. Zur Umsetzung der stetigen Drehbewegung in §. 135. eine wiederkehrend geradlinige und umgekehrt findet das Kurbelgetriebe die häufigste Anwendung. In seiner allgemeinsten Form besteht ein solches Getriebe aus vier parallelen Drehzapfen, A, B, C, D , Fig. 525 (a. f. S.), welche durch eben so viele Stangen unter sich gelenkig vereinigt sind, und von welchen vier verbindenden Gliedern das eine vollständig fest gehalten wird, wie dies in der Figur mit dem zu einem Grundrahmen ausgebildeten Gliede AB der Fall ist. Ertheilt man nun irgend einem der benachbarten Glieder, z. B. dem Hebel oder der Kurbel AD , eine Drehung um die Ase A um einen gewissen Winkel $DAD_1 = \alpha$, so wird auch der Hebel oder die Schwinge BC vermittelst der Schubstange DC um die Ase B gedreht werden, und zwar um einen Winkel CBC_1 , dessen Größe aus den geometrischen Verhältnissen des Vierecks $ABCD$ sich ergibt. Während hierbei die beiden dem fest gehaltenen Theile AB benachbarten Glieder reine Drehungen um ihre Endzapfen empfangen, wird die Schubstange DC eine zusammengesetztere Bewegung annehmen, über deren Charakter schon in der Einleitung §. 8 Näheres mitgetheilt wurde. Das hier angegebene Getriebe bezeichnet Reuleaux mit dem Namen des Kurbelvierecks, und man pflegt speciell die rotirenden Hebel AD und BC Kurbeln und die verbindende Stange DC die Kurbelstange, Lenkerstange, Pläuel- oder Koppelstange zu nennen. Meist giebt man den Namen Kurbel auch nur demjenigen Hebel, welcher wie hier AD vollständig um seine Ase rotiren kann, während man solche Hebel, welche wie BC nur oscillirende Bewegungen machen, als Schwingen bezeichnet. Es ergibt sich aus der Betrachtung der Figur, daß bei einer Umdrehung der Kurbel AD die letztere in AD_1 in eine Lage geräth, in welcher sie mit

der Schubstange $D_1 C_1$ in eine und dieselbe Gerade fällt, und findet man die zugehörige Lage C_1 einfach dadurch, daß man um A einen Kreisbogen mit einem Halbmesser gleich $DC + AD = l + r$ beschreibt. Dieser Punkt C_1 giebt dann die äußerste Lage für das Ende der Schwinge BC , indem bei einer weiteren Drehung der Kurbel nach D_2 und D_3 der Hebel BC aus der Lage C_1 zurückkehrend durch C_2 in eine andere Lage C_3 gelangt, welche mit A und D_3 ebenfalls in gerader Linie liegt. Dieser Punkt C_3 , welcher den Ausschlag der Schwinge DC nach der anderen Seite hin begrenzt, ergibt sich in dem Durchschnitte des Kreises C mit einem um A mit dem Halbmesser $AC_3 = DC - AD = l - r$ beschriebenen Kreise. Man erkennt hieraus, daß bei einer ganzen Umdrehung der Kurbel AD die Schwinge BC eine hin- und hergehende Bewegung um den Winkel $C_1 BC_3$ macht. Die beiden Endpunkte C_1 und C_3 des dabei beschriebenen Bogens

Fig. 525.



heißen Wendepunkte der Schwinge, da in ihnen die Bewegung ihren Sinn wechselt. Die diesen Wendepunkten entsprechenden Lagen D_1 und D_3 der Kurbelwarze nennt man dagegen die *Todtpunkte* der Kurbel, weil in diesen Lagen eine Bewegung der Kurbel vermöge einer von der Schwinge BC ausgehenden Einwirkung nicht möglich ist.

Um das Verhältniß der Geschwindigkeiten der beiden Kurbeln AD und BC für jeden Augenblick zu beurtheilen, kann man folgende Betrachtung anstellen. Denkt man sich dem Getriebe, Fig. 526, von welchem wieder AB festgehalten sei, in irgend einer Stellung $ABCD$ eine sehr kleine Bewegung ertheilt, vermöge welcher AD um das Winkелеlement $d\alpha$ und BC um dasjenige $d\beta$ gedreht wird, so hat man die gleichzeitige Bewegung der Kuppelstange DC für dieses Zeitelement als eine unendlich kleine Drehung um das Momentancentrum oder den Pol aufzufassen. Der letztere ist offenbar im Durchschnittspunkte P der beiden Kurbelrichtungen DA und CB zu finden. Setzt man daher die Polabstände der Punkte D und C beziehungsweise

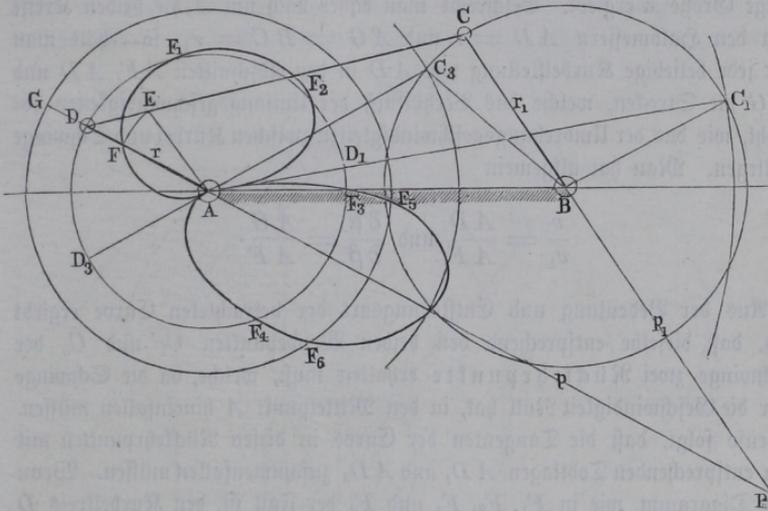
$DP = p$ und $CP = p_1$, und bezeichnet $\partial \omega$ den Betrag der Momentandrehung um P , so hat man für die elementaren Wege v und v_1 der Punkte D und C die Ausdrücke

$$v = DP \cdot \partial \omega = p \partial \omega; \quad v_1 = CP \cdot \partial \omega = p_1 \partial \omega.$$

Da diese Wege nun auch durch

$$v = r \partial \alpha \text{ und } v_1 = r_1 \partial \beta$$

Fig. 526.



gegeben sind, unter r und r_1 die Kurbellängen AD und BC verstanden, so folgt aus diesen Beziehungen einfach

$$\frac{v}{v_1} = \frac{r \partial \alpha}{r_1 \partial \beta} = \frac{p}{p_1}.$$

Um diesen Ausdruck durch die Construction anschaulich zu machen, denke man von A aus die Gerade AE parallel zu der zugehörigen Lage BC der Schwinge gezogen, so ergibt sich

$$DP : CP = DA : EA,$$

d. h. wenn die Länge EA mit x bezeichnet wird:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{r}{x}.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes erhält man daher:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{r}{x} \text{ und } \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = \frac{r_1}{x}.$$

Diese Ausdrücke gestatten, durch ein sehr einfaches Diagramm das Verhältniß der Geschwindigkeiten beider Kurbeln für jeden Augenblick der Bewegung zu veranschaulichen. Trägt man nämlich die Strecke $AE = x = r \frac{p_1}{p}$ von A aus auf der Kurbelrichtung gleich AF an, und denkt diese

Construction für alle einzelnen Kurbelstellungen wiederholt, so legen die Punkte F eine Curve fest von solcher Beschaffenheit, daß für jede beliebige Kurbelstellung die in diese Kurbelrichtung fallende Sehne dieser Curve die obige Größe x ergibt. Beschreibt man daher noch um A die beiden Kreise mit den Halbmessern $AD = r$ und $AG = BC = r_1$, so erhält man für jede beliebige Kurbelstellung wie AD in den Abschnitten AF , AD und AG die Strecken, welche das Verhältniß der Umfangsgeschwindigkeiten sowohl, wie das der Umdrehungsgeschwindigkeiten zwischen Kurbel und Schwinge festlegen. Man hat allgemein

$$\frac{v}{v_1} = \frac{AD}{AF} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = \frac{AG}{AF}.$$

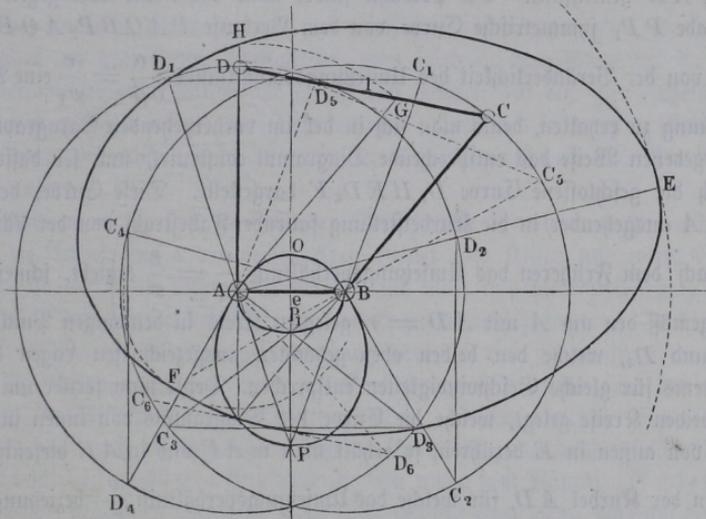
Aus der Bedeutung und Entstehungsart der betrachteten Curve ergibt sich, daß dieselbe entsprechend den beiden Wendepunkten C_1 und C_3 der Schwinge zwei Rückkehrpunkte erhalten muß, welche, da die Schwinge hier die Geschwindigkeit Null hat, in den Mittelpunkt A hineinfallen müssen. Ebenso folgt, daß die Tangenten der Curve in diesen Rückkehrpunkten mit den entsprechenden Todtlagen AD_1 und AD_3 zusammenfallen müssen. Wenn das Diagramm, wie in F_1, F_2, F_3 und F_4 der Fall ist, den Kurbelkreis D schneidet, so ist damit ausgesprochen, daß in den zugehörigen Lagen der Kurbel die Umfangsgeschwindigkeiten v und v_1 gleich groß sind, und dasselbe gilt hinsichtlich der Winkelgeschwindigkeiten $\partial \alpha$ und $\partial \beta$ in Bezug auf diejenigen Punkte, in denen wie in F_5 und F_6 die Curve den Kreis G durchschneidet. Kreise endlich, welche um A mit solchem Halbmesser beschrieben werden, daß sie das Diagramm zwischen F_1 und F_2 , sowie zwischen F_3 und F_6 berühren, bestimmen durch ihre Berührungspunkte diejenigen Kurbellagen, denen ein Maximum der Geschwindigkeit der Schwinge bei gleichmäßiger Umdrehung der Kurbel entspricht. Diese Beziehungen gelten ganz allgemein sowohl für eine gleichförmige wie auch für eine ungleichförmige Drehung einer Kurbel.

Das Kurbelviereck findet bei der Construction der Maschinen mannichfaltige Verwendung und es sind bereits in dem dritten Capitel bei Gelegenheit der Geradföhrungen mehrfach Beispiele davon besprochen worden. Der Lemniscatenlenker, Fig. 381, z. B. sowie die Evans'sche Föhrung, Fig. 356, sind im Wesentlichen Kurbelvierecke. Die analytische Untersuchung des all-

gemeinen Falles führt zu großen Weitläufigkeiten, ohne für die Praxis von entsprechendem Interesse zu sein, es mögen daher im Folgenden die besonders häufigen Ausführungsarten näher erörtert werden.

Kurbelkuppelung. Man wendet das Gelenkviereck häufig an, um §. 136. von einer rotirenden Axe eine andere damit parallele Axe gleichfalls in Umdrehung zu setzen, und giebt zu diesem Behufe den beiden Axen A und B , Fig. 527, zwei Hebel oder Kurbeln AD und BC von in der Regel gleicher Länge r . Die Axenentfernung $AB = e$ und die Kuppelstange $DC = l$ müssen dabei von solchen Längen gewählt werden, daß Wendepunkte nicht

Fig. 527.



aufzutreten, um eine stetige Umdrehung beider Axen zu ermöglichen. Aus der Figur erkennt man, daß, wenn bei einer vorausgesetzten Umdrehung der Axe A der Zapfen D nach einander in die Lagen D_1, D, D_2, D_3, D_4 gelangt, der Zapfen C vermöge der Kuppelstange die Stellungen C_1, C, C_2, C_3, C_4 einnimmt, die Uebertragung der Drehung von A auf B daher gesichert ist. Auch erkennt man, daß bei geeigneter Wahl der Längen l und e Todtpunkte der Kurbeln vermieden werden können, so daß die Bewegungsübertragung von einer Kurbel auf die andere unter allen Umständen möglich ist. Das Verhältniß der beiden Umdrehungsgeschwindigkeiten α und β der Axen, welches bei der vorausgesetzten Gleichheit der Halbmesser hier mit dem Verhältnisse v und v_1 der Umfangsgeschwindigkeiten von D und C übereinstimmt, ist hierbei ein in jedem Augenblicke wechselndes, wovon man sich leicht überzeugt.

Zunächst giebt es zwei ausgezeichnete Lagen des Systems, in denen die beiden Geschwindigkeiten gleich groß sind. Diese Lagen $D_1 C_1$ und $D_3 C_3$ sind nach dem Bisherigen diejenigen, in welchen der jedesmalige augenblickliche Drehpunkt der Kuppelstange P und P_1 von C und D gleiche Abstände hat, d. h. also die beiden Lagen, in denen die Kurbeln AD und BC gleiche Winkel mit der Axenverbindung AB bilden. Den Pol findet man bekanntlich immer im Durchschnittspunkte der beiden Kurbelrichtungen, und wenn man in bekannter Art die Polbahn für die Bewegung der Kuppelstange zeichnet, so erhält man eine Curve, welche nicht nur die erwähnten Pole P und P_1 in sich aufnimmt, sondern auch zweimal durch jeden der Axenpunkte A und B hindurchgeht, entsprechend den beiden Lagen, in denen jede Kurbel in die Richtung AB hineinfällt. Die Polbahn findet man daher als eine gegen die Gerade PP_1 symmetrische Curve von dem Verlaufe $PAOBP_1AOBP$.

Um von der Veränderlichkeit des Umsetzungsverhältnisses $\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = \frac{v}{v_1}$ eine Anschauung zu erhalten, denke man sich in der im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Weise das entsprechende Diagramm construirt, und sei dasselbe durch die geschlossene Curve $D_1 H E D_3 F$ dargestellt. Diese Curve, deren von A ausgehender in die Kurbelstellung fallender Fahrstrahl von der Länge x nach dem Früheren das Umsetzungsverhältniß $\frac{v}{v_1} = \frac{r}{x}$ ergiebt, schneidet demgemäß den um A mit $AD = r$ gelegten Kreis in denjenigen Punkten D_1 und D_3 , welche den beiden oben gedachten ausgezeichneten Lagen des Systems für gleiche Geschwindigkeiten entsprechen. Denkt man ferner um A die beiden Kreise gelegt, welche die Curve des Diagramms von innen in F und von außen in E berühren, so erhält man in AF und in AE diejenigen Lagen der Kurbel AD , für welche das Umsetzungsverhältniß $\frac{v}{v_1}$ beziehungsweise den größten und den kleinsten Werth hat. Wird daher die Kurbel AD mit gleichmäßiger Geschwindigkeit umgedreht, so erlangt die Kurbel BC ihre größte Geschwindigkeit in der Lage des Systems $AD_2 C_2 B$, und ihre geringste Geschwindigkeit in der Lage $AD_4 C_4 B$, welche den Kurbelstellungen AE und AF entsprechen. Diese beiden Geschwindigkeiten verhalten sich zu einander, wie die Fahrstrahlen AE und AF .

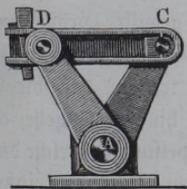
Wie hieraus hervorgeht, eignet sich dieses Getriebe nicht für gleichmäßige Bewegungsübertragung, wohl aber hat man dasselbe angewendet in Fällen, wo es darauf ankommt, eine Axe abwechselnd schneller und langsamer zu drehen, z. B. bei Hobelmaschinen, wo man aus Rücksichten möglichster Zeitersparniß den leer zurückgehenden Stichel gern mit einer größeren Geschwindigkeit bewegt, als man bei seinem Vorwärtsgange behufs der guten Arbeitsleistung ihm nur ertheilen darf. Das Verhältniß der beiden Zeittheile zum

Vorgange und Rücklaufe erkennt man leicht aus dem Diagramme in folgender Weise. Wenn man die Stellung der getriebenen Kurbel in BC_2 , welche ihrer größten Geschwindigkeit entspricht, als die mittlere Lage während des schneller zu bewirkenden Rücklaufes auffaßt, und demgemäß auf dem Kurbelkreise BC nach jeder Seite von dieser Stellung aus einen Viertelkreisbogen C_2C_5 und C_2C_6 abträgt, so findet man aus den zugehörigen Lagen BC_5D_5A und BC_6D_6A in AD_5 und AD_6 diejenigen in der Figur punktirten Stellungen der treibenden Kurbel AD , welche dem Anfange und Ende des Rücklaufes entsprechen. Es verhalten sich daher, eine gleichmäßige Drehung der treibenden Ase A vorausgesetzt, die besagten Zeiten für den schnellen Rücklauf und den langsamen Vorschub wie der concave Winkel D_5AD_6 zu demselben convexen Winkel.

Eine analytische Untersuchung der verschiedenen Geschwindigkeit führt, wie erwähnt, zu großen Weitläufigkeiten, man wird in den Fällen der Praxis immer mit leichterer Mühe und genügender Schärfe auf dem hier eingeschlagenen graphischen Wege zum Ziele kommen. Das hier besprochene Getriebe bezeichnet man wohl mit dem Namen der *Kniekuppelung* oder *Kurbelkuppelung*.

Wenn man bei dem vorstehenden Getriebe die Annahme machen würde, daß die Entfernung e der beiden Axen kleiner und kleiner und zuletzt Null werde, so würde die besprochene Polbahn sich mehr und mehr verkleinern, und zuletzt in den gemeinschaftlichen Axenpunkt zusammenschrumpfen. In diesem Falle würde die Bewegungsübertragung natürlich eine gleichmäßige werden, da die Abstände des Pols von den Kurbelenden hier fortwährend das constante Verhältniß der Kurbellängen hätten. Dieses constante Verhältniß würde auch noch bei ungleicher Größe der Kurbellängen vorhanden sein. Man macht hiervon häufigeren Gebrauch in dem unter dem Namen „*Schleppkurbel*“ bekannten Getriebe, Fig. 528, welches dazu dient, eine am freien

Fig. 528.



Ende mit einer Kurbel D versehene Ase A mit einer zweiten in ihre Verlängerung fallenden Ase zu verbinden, welcher letzteren man dann ebenfalls eine Kurbel C , meist von gleicher Länge mit D , giebt, so daß man nun die beiden Kurbelzapfen durch die *Schleppschiene* DC verkuppeln kann. Würden die beiden Axen immer genau in einer einzigen Geraden gelegen sein, so könnte man diese Kuppelung entbehren, und beide Axen etwa mit

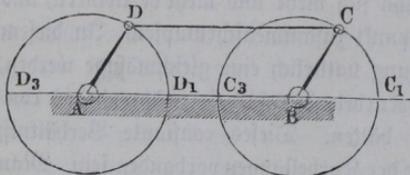
Hülfe des Kurbelzapfens D in starrer Weise verbinden. Muß man aber, etwa wegen ungenauer Aufstellung oder unvermeidlicher Erschütterungen der Fundamente, geringe Abweichungen der beiden Axen von einander befürchten, so gewährt die Schleppkurbel den Vortheil, die starken Zwängungen

oder selbst Brüche, welche eine starre Verbindung im Gefolge haben müßte, zu vermeiden. Wären die Abweichungen selbst von beträchtlicher Größe, so würde doch nur eine geringe Ungleichmäßigkeit in der Bewegungsübertragung daraus resultiren, die in den meisten Fällen nur ganz unmerklich sein dürfte.

In der vorstehenden Untersuchung der Kniekuppelung wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die Länge l der Kuppelungschiene größer sei, als der Abstand e der Axen, denn wenn $l < e$ ist, so ist wegen der dann auftretenden Wendepunkte überhaupt keine rotirende, sondern nur eine oscillirende Bewegung möglich, deren Schwingungswinkel um so kleiner ist, je mehr l im Vergleiche mit e und r abnimmt. Es würde selbstredend jede Beweglichkeit ausgeschlossen sein, wenn $l = 0$ wäre, d. h. die beiden Kurbelzapfen zusammenfielen. Der besondere Fall, wo $l = e$ ist, führt indessen zu einer wichtigen Anordnung, welche im Folgenden besonders betrachtet werden soll.

§. 137. **Parallelkurbeln.** Wenn das Gelenkviereck $ABCD$, Fig. 529, in ein Parallelogramm übergeht, indem die Kuppelstange eine Länge gleich dem Axenabstande erhält, so wird die parallele Lage der Kurbeln auch für jeden Augenblick der Bewegung gewahrt bleiben, und es ergibt sich daraus, daß

Fig. 529.



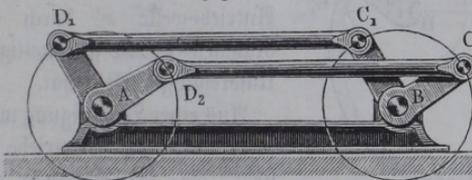
die Geschwindigkeiten der Kurbeln fortwährend der Größe und Richtung nach übereinstimmen. Eine gleichmäßige Drehung der einen Kurbel hat daher eine eben solche Drehung der anderen zur Folge, und man bedient sich daher dieses

von Reuleaux mit dem Namen der Parallelkurbeln belegten Getriebes zur gleichmäßigen Uebertragung einer Drehung zwischen zwei parallelen Axen, wie dies schon in §. 107, Fig. 414, gelegentlich der Schwingen gezeigt wurde. In dem letztgedachten Falle handelte es sich nur um die Uebertragung von Schwingungen von gewisser Größe, wenn es jedoch darauf ankommt, eine ununterbrochene Drehungsbewegung zu übertragen, so hat man noch besonders dafür Sorge zu tragen, daß die Bewegung auch über die beiden Todtlagen der Kurbeln hinaus geschehe, d. h. über diejenigen beiden Lagen $D_1 C_1$ und $D_3 C_3$ der Kuppelstange, welche durch die Axen A und B hindurchgehen. Man erreicht diesen Zweck am einfachsten durch gleichzeitige Anwendung von zwei Paaren von Parallelkurbeln, $D_1 C_1$ und $D_2 C_2$, Fig. 530, welche unter sich einen beliebigen Winkel $D_1 A D_2 = C_1 B C_2$ bilden. Wenn dieser Winkel nur nicht 0 oder 180° beträgt, so wird in jeder Todtlage des einen Systems immer das andere in Wirksamkeit sein. Bei den Locomotiven, bei denen diese Art der Kuppelung

zwischen den Triebaxen in allgemeinem Gebrauche ist, bilden die Kurbeln jeder Axe mit einander rechte Winkel. Diese Kuppelung ist eine vergleichsweise einfache und mit verhältnißmäßig geringen Reibungswiderständen verbunden, sobald nur der Bedingung gleicher Länge der betreffenden Glieder mit der größtmöglichen Genauigkeit genügt wird.

Man hat auch vorgeschlagen, jede der Axen mit drei Kurbeln zu versehen, welche nach Fig. 531 unter Winkeln von 120° gegen einander geneigt sind, in welchem Falle die Kuppelstangen durch Zugkraftorgane wie Drahtseile oder dünne Stangen ersetzt werden können, da hierbei immer wenigstens eine der Verbindungen auf Zug in Anspruch genommen wird, und diese zur Bewegungsübertragung ge-

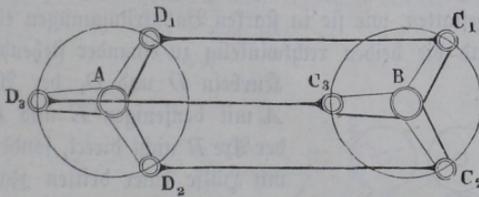
Fig. 530.



nügt. Eine derartige Anordnung würde sich daher für Uebertragungen auf große Entfernungen eignen, wenn nicht die Nothwendigkeit, die Kurbeln behufs des freien Spiels der Stangen in verschiedene Ebene legen zu müssen, zu constructiven Unbequemlichkeiten, wie z. B. der Anwendung gekrümmter Axen führte. Auch dürfte die abwechselnde Anspannung der Seile in ähnlicher Art zu Unregelmäßigkeiten der Be-

wegungsübertragung Veranlassung geben, wie dies in §. 123, gelegentlich der Seilgestänge gezeigt worden ist.

Fig. 531.



wegungsübertragung Veranlassung geben, wie dies in §. 123, gelegentlich der Seilgestänge gezeigt worden ist.

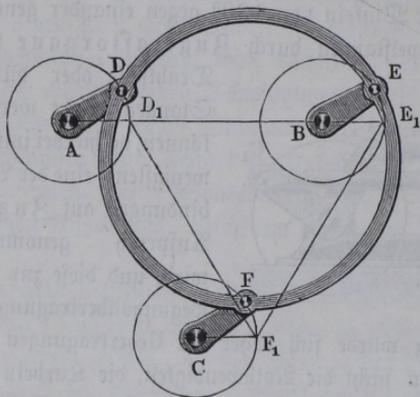
Auch hat man sich der Parallelkurbeln mit Vortheil zur unveränderten Uebertragung der Umdrehung einer Axe auf mehrere damit parallele Wellen bedient. Seien z. B. AD , BE und CF , Fig. 532, drei gleich lange parallele Kurbeln der Axen A , B und C , so wird eine Verbindung je zweier Zapfen durch die Kuppelstangen DE , EF und FD bewirken, daß eine Drehung einer beliebigen Axe A unverändert den übrigen Axen B und C mitgetheilt wird. Eine wirkungslose Lage des Getriebes stellt sich hierbei nicht ein, denn wenn zwei Kurbeln in ihre Todtlagen treten, z. B. in AD_1 und BE_1 , so wird die Drehung von A doch direct eine Bewegung von C und durch diese weiter auch eine solche von B veranlassen. Die drei Kuppelstangen können hierbei übrigens zu einem starren Rahmen DEF vereinigt

Auch hat man sich der Parallelkurbeln mit Vortheil zur unveränderten Uebertragung der Umdrehung einer Axe auf mehrere damit parallele Wellen bedient. Seien z. B. AD , BE und CF , Fig. 532, drei gleich lange parallele Kurbeln der Axen A , B und C , so wird eine Verbindung je zweier Zapfen durch die Kuppelstangen DE , EF und FD bewirken, daß eine Drehung einer beliebigen Axe A unverändert den übrigen Axen B und C mitgetheilt wird. Eine wirkungslose Lage des Getriebes stellt sich hierbei nicht ein, denn wenn zwei Kurbeln in ihre Todtlagen treten, z. B. in AD_1 und BE_1 , so wird die Drehung von A doch direct eine Bewegung von C und durch diese weiter auch eine solche von B veranlassen. Die drei Kuppelstangen können hierbei übrigens zu einem starren Rahmen DEF vereinigt

werden, welcher Rahmen bei dem in Fig. 444, §. 112, besprochenen Schützenguge in Form eines Ringes ausgeführt erschien.

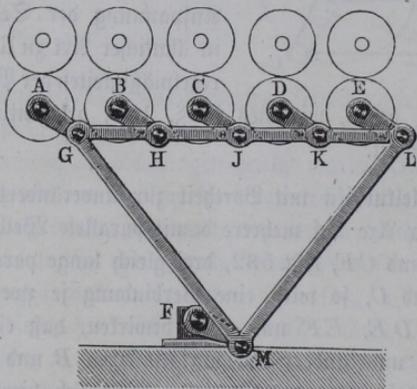
Dieses Getriebe findet namentlich für Arbeitsmaschinen häufigere Verwendung, z. B. zur kreisförmigen Bewegung der Schleifschalen über dem Schleifsteine in Spiegelschleifereien. In Fig. 533 ist die Art skizzirt, in

Fig. 532.



ohne Störung der Bewegungsübertragung eine geringe gegenseitige Annäherung oder Entfernung zu gestatten, wie sie in starken Bahnkrümmungen eintreten strebt. Hierbei sind die beiden rechtwinklig zu einander stehenden

Fig. 533.



ohne Störung der Bewegungsübertragung eine geringe gegenseitige Annäherung oder Entfernung zu gestatten, wie sie in starken Bahnkrümmungen eintreten strebt. Hierbei sind die beiden rechtwinklig zu einander stehenden

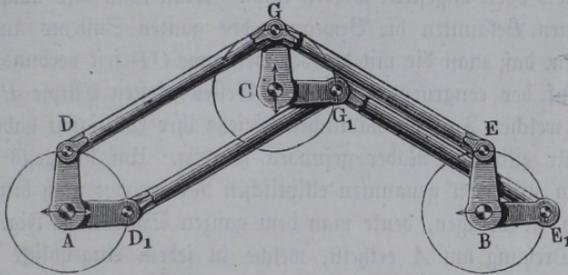
Kurbeln D und D_1 der Axe A mit denjenigen E und E_1 der Axe B nicht direct, sondern mit Hülfe einer dritten Zwischenaxe C und deren Kurbeln G und G_1 verbunden, derart, daß ein der Zwischenaxe C gestattetes geringes Erheben oder Niedersinken in ihren Lagern den beiden Triebaxen die gewünschte Veränderung ihres Abstandes ermöglicht.

Unter Festhaltung der oben gemachten Voraussetzung, daß in dem Gelenkvierecke je zwei Seiten paarweise von gleicher Länge sein sollen, kann man noch zu einer anderen Anordnung*), Fig. 535, gelangen, in welcher

*) S. Reuleaux, Theoret. Kinematik, §. 47 u. 67.

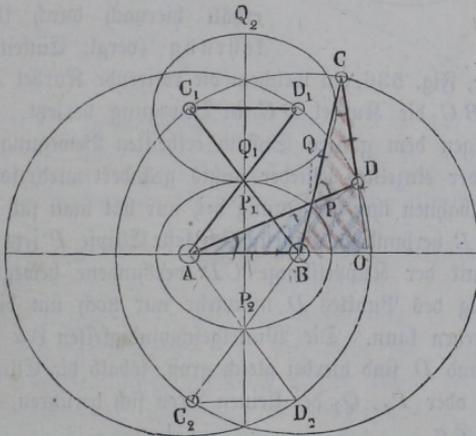
die beiden Kurbeln AD und BC sich kreuzen. Auch hier giebt es wieder zwei Lagen ABC_1D_1 und ABC_2D_2 , in welchen die Kurbeln gleiche Winkel mit der Basis AB bilden, und in welchen die Kuppelstange CD parallel zu AB ausfällt. Für diese Lagen sind die Winkelgeschwindigkeiten der

Fig. 534.



beiden Axen gleich groß, da der Pol P_1 resp. P_2 , welcher immer im Durchschnittspunkte der beiden Kurbeln liegt, gleiche Abstände von den Endpunkten der Kuppelstange hat. Um auch für die übrigen Stellungen des Systems das Geschwindigkeitsverhältniß zu finden, mögen die Polbahnen ermittelt werden. Der Pol P für irgend eine Systemlage wie $ABCD$ hat die Abstände $PA = p$ und $PB = p_1$ von den Axen. Verlängert man AB und

Fig. 535.



CD zum Durchschnitt O , so findet man aus der Congruenz der Dreiecke ODA und OBC leicht, daß

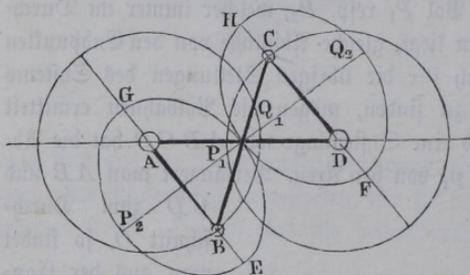
$PB = PD$, also
 $PA + PB = AD$,
 oder

$p + p_1 = r$,
 wenn die Kurbel-
 länge AD mit r be-
 zeichnet wird. Die
 Constanz der Ab-
 standssumme des Pols
 von den Axen besagt

aber bekanntlich, daß der Pol in einer Ellipse liegen muß, deren Brennpunkte in den Axen liegen und deren große Axe $AD = r$ ist. Diese Ellipse stellt also die feste Polbahn vor, und es geht auch ohne Weiteres aus der Symme-

trie der Anordnung des ganzen Systems hervor, daß die mit der Kuppelstange CD verbunden zu denkende bewegliche Polbahn eine mit der festen congruente Ellipse sein muß, deren Brennpunkte in die Kurbelzapfen C und D hineinfallen. Um dies zu erkennen, braucht man sich nur vorzustellen, daß die Kuppelstange $C_1 D_1$ festgehalten werde, in welchem Falle dieselbe Betrachtung wie oben angestellt werden kann. Man kann also nach dem über die Polbahnen Bekannten die Bewegung des ganzen Systems auch dadurch ersetzt denken, daß man die mit der Kuppelstange CD fest verbundene Ellipse $Q_1 Q_2$ auf der congruente mit dem Gestelle festen Ellipse $P_1 P_2$ abwälzt, für welchen Fall die nämlichen Gesetze ihre Gültigkeit haben, welche in §. 50 für elliptische Räder gefunden wurden. Um übrigens die Uebereinstimmung mit dem genannten elliptischen Räderpaare noch deutlicher zur Anschauung zu bringen, denke man dem ganzen Systeme in Fig. 535 eine zusätzliche Drehung um A ertheilt, welche in jedem Augenblicke derjenigen

Fig. 536.



Drehung gleich und entgegengesetzt ist, die vorher für die treibende Kurbel AD angenommen war. Hierdurch kommt diese Kurbel AD gänzlich in Ruhe, während die vorherige Grundplatte AB gleichmäßig um A rotirt, d. h. nun ihrerseits zur Kurbel wird. Man erhält hiernach durch Umkehrung (vergl. Einleitung

§. 31) ein neues Getriebe, Fig. 536, in welchem die rotirende Kurbel AB durch die Kuppelstange BC die Kurbel DC in Bewegung versetzt. Da durch Zusatz einer beliebigen dem ganzen System ertheilten Bewegung an der relativen Bewegung der einzelnen Glieder nichts geändert wird, so behalten auch die beiden Polbahnen ihre Bedeutung bei, nur hat man sich jetzt zu denken, daß die mit AB verbundene ursprünglich feste Ellipse P jetzt um A rotirt, während die mit der Kuppelstange CD verbundene bewegliche Ellipse Q durch Festlegung des Punktes D nunmehr nur noch um diesen ihren Brennpunkt sich drehen kann. Die Winkelgeschwindigkeiten $\partial \alpha$ und $\partial \beta$ der beiden Axen A und D sind hierbei gleich groß, sobald die Ellipsen in den Scheiteln P_1, Q_1 oder P_2, Q_2 der kleinen Axen sich berühren, und

nimmt dieses Verhältniß $\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}$ seinen größten Werth $\frac{r+e}{r-e}$ an, wenn E mit

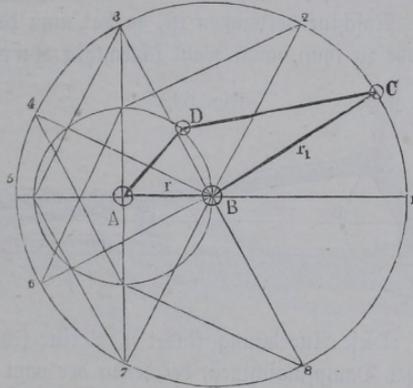
F in Berührung tritt, während der kleinste Werth $\frac{r-e}{r+e}$ des Umfengungs-

verhältnisses der Berührung der Scheitel G und H entspricht. Die beiden

Getriebe, Fig. 535 und 536, unterscheiden sich wesentlich nur dadurch von einander, daß in Fig. 535 die Drehungen der Axen in gleichem und in Fig. 536 in entgegengesetztem Sinne erfolgen. Da das Getriebe mit zwei todtten Punkten behaftet ist, so wird man bei der Verwendung desselben in irgend welcher Weise dafür sorgen müssen, diese todtten Punkte zu überwinden. Wie dies in einfacher Art durch zwei Paare Zähne oder Knaggen geschehen kann, hat Reuleaux, welcher dieses Getriebe näher untersucht hat und von welchem der Name Antiparallelkurbeln dafür gewählt ist, im *Civilingenieur*, 1859, Bd. X, S. 99, näher angegeben.

Anmerkung. Ein interessantes von Galloway*) angegebene Getriebe erhält man ferner, wenn man in dem Kurbelviereck paarweise zwei anstoßende

Fig. 537.



Seiten von gleicher Länge macht, also $AD = AB = r$ und $DC = BC = r_1$, Fig. 537. Hierbei hat eine volle Umdrehung der Kurbel AD nur eine halbe Umdrehung der Kurbel BC zur Folge und umgekehrt, wie die mit 1, 2, 3, 4, 5 ... 8 bezeichneten Stellungen der Kurbeln erkennen lassen.

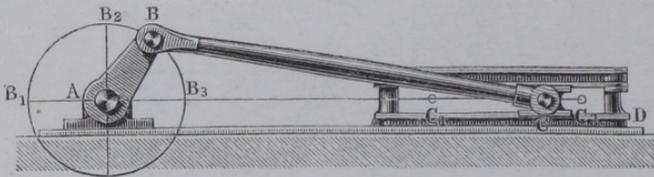
Die Kurbel. Wenn man in dem Getriebe des allgemeinen Kurbel- §. 138. vierecks die Länge des einen Kurbelarmes oder der Schwinge größer und größer annimmt, so wird der Kreisbogen, in welchem der Endpunkt der Kuppelstange schwingt, mehr und mehr sich verflachen und schließlich unter der Annahme einer unendlich großen Länge der Schwinge in eine gerade Linie übergehen. Man kann in diesem Falle die Schwinge selbst ersetzt denken durch eine Coulißführung, welche den betreffenden Endpunkt der Lenkerstange zwingt, in gerader Linie zu verharren, und gelangt hierdurch zu dem

*) S. Reuleaux, *Kinematik*, S. 191.

gewöhnlichen Kurbelgetriebe, Fig. 538, welches in der Praxis eine so ausgedehnte Verwendung findet. Man pflegt hierbei fast ausnahmslos die gerade Linie, in welcher der Endpunkt C der Lenkerstange geführt wird, durch die Ase A der Kurbel gerichtet anzunehmen, bei welcher Anordnung die Verschiebung dieses Punktes $C_1 C_3$ genau gleich dem Durchmesser $B_1 B_3 = 2r$ des Kurbelkreises ist und die Lenkerstange nach beiden Seiten dieser geraden Führungslinie um gleiche Winkel ausschlägt. Der Endpunkt C der Lenkerstange wird bei Anwendung von Prismen oder Büchsenführungen mit einem mit Gleitschuhen versehenen Querkopfe oder Kreuzkopfe versehen, doch kann man zur Führung dieses Querkopfes auch irgend eine andere der im dritten Capitel behandelten Geradföhrungen in Anwendung bringen.

Wenn, wie im Vorstehenden vorausgesetzt worden, das Lager für die Kurbelaxe A und das führende Prisma fest und unbeweglich mit dem Gestelle oder Grundrahmen der Maschine verbunden ist, so hat man es mit dem gewöhnlichen Kurbelgetriebe zu thun, auch wohl schlechtthin Kurbel oder Schub

Fig. 538.



kurbel genannt. Diese Anordnung findet u. a. eine sehr häufige Verwendung ebensowohl bei Dampfmaschinen, bei denen der vom Dampfkolben hin- und zurückgeschobene Kreuzkopf als treibender Theil auftritt, wie auch bei Pumpen, bei denen umgekehrt die rotirende Kurbel dem Kreuzkopfe und damit dem Pumpkolben die abwechselnde Bewegung ertheilt. Ueberhaupt findet das Kurbelgetriebe in den Fällen, wo es darauf ankommt, aus der rotirenden Bewegung eine geradlinig hin- und hergehende oder umgekehrt abzuleiten, die verbreitetste Anwendung.

Unter Berücksichtigung des in der Einleitung, §. 50, über die Bildung von Getrieben Gefagten ist es übrigens leicht, aus dem vorstehend betrachteten Kurbelgetriebe noch drei andere Bewegungsmechanismen dadurch abzuleiten, daß man nach einander eins der drei beweglichen Glieder, Kurbel, Kreuzkopf und Lenkerstange, zum festgehaltenen macht, wobei natürlich der Rahmen AD mit der Prismenführung beweglich gedacht werden muß. Um zu diesen Umkehrungen zu gelangen, denke man sich z. B. dem ganzen Systeme, Fig. 538, eine Drehung um die Ase A ertheilt, die derjenigen in jedem Augenblicke gleich und entgegengesetzt ist, welche die Kurbel vorher besaß.

und O_2 , deren Abstände von A und B gleich l sind. Denkt man in dem von C durchlaufenen Kreise den zu AB senkrechten Durchmesser C_1BC_3 , so erhält man offenbar in dem Verhältnisse des concaven Winkels C_1AC_3 zu demselben convexen Winkel das Verhältniß der Zeiten, welche die Stange BC gebraucht, um den oberen beziehungsweise den unteren Halbkreis zu durchlaufen, vorausgesetzt, daß die Schleife AD gleichmäßig gedreht werde. Wegen dieser Eigenschaft hat man dieses Getriebe, welches *Keuleux* die rotirende Kurbelschleife nennt, in ähnlicher Weise, wie oben von der Kniekuppelung gezeigt worden ist, bei Hobelmaschinen als Mechanismus zur schnellen Rücklaufbewegung verwendet.

In gleicher Weise kann man in diesem Getriebe durch Hinzufügung einer Drehung um B , gleich und entgegengesetzt der Drehung der Lenkerstange BC , die letztere feststellen und es entsteht dadurch ein neuer Mechanismus, Fig. 540,

Fig. 540.

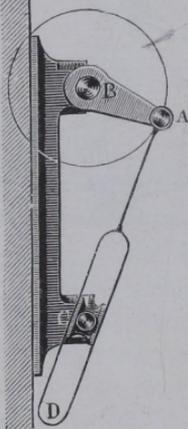
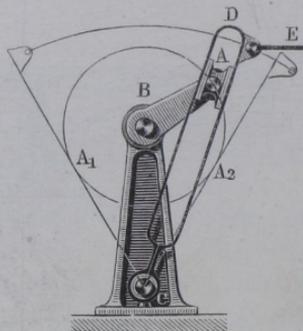
Oscillirende Kurbelschleife

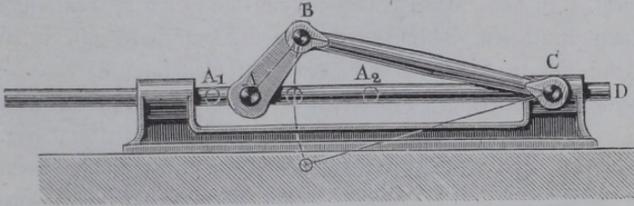
Fig. 541.

Oscillirende Kurbelschleife

bei welchem die stetige Drehung der Kurbel BA dem schleifenförmigen Rahmen AD neben der schwingenden Bewegung um C gleichzeitig eine hin- und hergehende Verschiebung ertheilt. Dieser Mechanismus, welcher *oscillirende Kurbelschleife* genannt wird, liegt den *oscillirenden Dampfmaschinen* und *Gebläsen* zu Grunde, bei welchen die *alternirende Verschiebung* der Schleife durch den *Oscillationsmittelpunkt C* derselben als die *Kolbenbewegung* auftritt. Dasselbe Getriebe findet aber ebenfalls für *Hobelmaschinen* zur Erzielung eines schnellen Rücklaufs Verwendung, indem man dabei von der *oscillirenden Bewegung* der Schleife CD , Fig. 541, Gebrauch macht, um dem *Stichelträger* mit Hilfe einer *Schubstange E* einen langsamen Hingang und eine schnellere Rückkehr zu ertheilen. Daß hierbei die Stange CD den

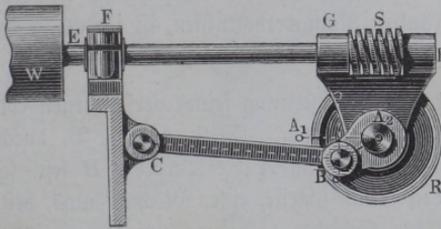
Kurbelzapfen *A* anstatt des Oscillationspunktes *C* mit einer Schleife umschließt, ist für das Bewegungsgesetz ohne Einfluß, da die Wirkung der Schleife nur darauf hinausläuft, dem Abstände zwischen *A* und *C* die erforderliche Veränderlichkeit zu ermöglichen. Man ersieht übrigens, daß auch hier die Zeit für den Hingang zu der für den Rückgang des Meißelträgers *E* sich wie der concave Winkel $A_1 B A_2$ zu demselben concaven Winkel verhält, wenn die Kurbel *BA* gleichmäßig sich dreht.

Fig. 542.



Wenn man endlich den Kreuzkopf festhält dadurch, daß man dem Kurbelgetriebe, Fig. 537, eine geradlinig hin- und hergehende Verschiebung erteilt, welche derjenigen des Kreuzkopfes in jedem Augenblicke gleich und entgegengesetzt ist, so erhält man den in Fig. 542 skizzirten Mechanismus, bei welchem die Kurbel *AB* außer der Rotation um *A* noch einer Oscillation in der Richtung *AC* um die Größe $A_1 A_2 = 2r$ unterworfen ist, und für wel-

Fig. 543.



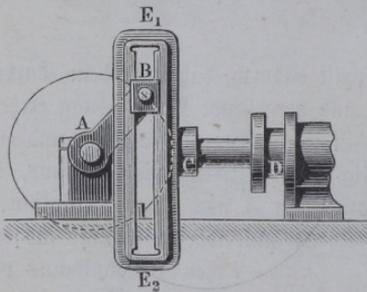
chen Mechanismus von Reuleaux der Name oscillirende Schubkurbel gewählt worden. Die Lenkerstange *BC* ist hierbei lediglich einer Schwingung um den festen Kreuzkopf unterworfen, welcher letztere in der Figur als hohle Büchse

gedacht ist, so daß die Stange *AD* nicht mehr in Schleifenform, sondern als gerader in der Büchse verschiebbarer Cylinder erscheint. Letztere Ausführungsart ändert an dem Bewegungscharakter offenbar nichts. Dieses Getriebe findet nur seltene Anwendung, als ein Beispiel kann der in Fig. 543 dargestellte Mechanismus angeführt werden, wie er bei einer Hartmann'schen Schleifmaschine für Kragentrommeln auf der Wiener Ausstellung zur Anwendung kam. Hierbei ist die in ununterbrochene Drehung versetzte Schleifwalze *W*, deren Axe *E* gleichzeitig einer Verschiebung in dem Lager *F* fähig ist, mit der Schraube ohne Ende *S* versehen, durch welche die Axe *A* in eine

stetige Drehung versetzt wird. Durch die Wirkung der Kurbel AB wird vermöge dieser Einrichtung die Ase A um die Größe $2r$ hin- und hergeschoben, welche transversirende Bewegung der Schleifwalze vermöge des Gabelhalters G mitgetheilt wird.

Die gewöhnliche Schubkurbel ist im Vorstehenden aus dem allgemeinen Gelenkviereck dadurch entstanden gedacht, daß man für die Schwinge eine unendlich große Länge annahm, d. h. daß man diese Schwinge durch eine Schleife oder Coulissenführung ersetzte, deren Richtung durch die Kurbelwelle hindurchgeht. In ganz ähnlicher Weise kann man auch die Lenkerstange unendlich lang annehmen, indem man den Kurbelzapfen zwingt, in einer geraden Bahn sich zu bewegen, d. h. denselben gleichfalls in einer Schleife führt, welche auf derjenigen des Kreuzkopfes senkrecht steht. Dann gelangt

Fig. 544.



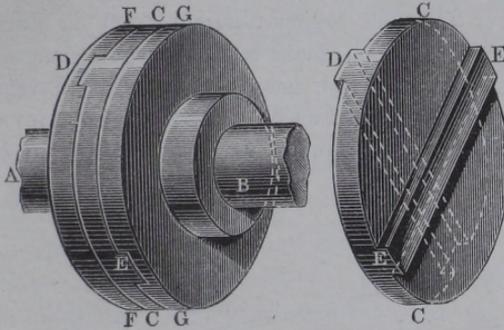
man zu dem Getriebe, Fig. 544, welches u. a. bei Dampfmaschinen vielfache Verwendung findet. Hierbei ist wieder das Zapfenlager der Kurbelwelle A mit der Führungsbüchse D auf einer festliegenden Grundplatte vereinigt, und die rotirende Kurbel AB verschiebt die mit einer Schleife versehene Stange C in der Richtung AD um die Länge $2r$ hin und zurück. Diese Anordnung gestattet die Ausführung des Kurbel-

getriebes noch bei sehr beschränkten Raumverhältnissen, ist jedoch gleichzeitig mit dem größeren Reibungswiderstande in der Schleife E verbunden.

Auch dieses Getriebe giebt durch Feststellung seiner verschiedenen Glieder zu verschiedenen Mechanismen Veranlassung. Stellt man z. B. durch zusätzliche Drehung des ganzen Systems um A die Kurbel AB fest, so erhält man, analog der rotirenden Kurbelschleife, einen Mechanismus, bei welchem der Rahmen AD und der Schieber C sich so um die Kurbel AB herumbewegen, daß die Richtung der Büchse D stets durch den festen Punkt A und die Richtung der Schleife E stets durch den festen Punkt B hindurchgeht. Man hat es daher in diesem Falle mit demselben Mechanismus, Fig. 545, zu thun, welcher bereits in §. 25 als Oldham'sche Kuppelung besprochen wurde. Hierbei entspricht die auf der Welle A befestigte Scheibe mit der prismatischen Nutz D dem um A , Fig. 544, rotirenden Rahmen AD , während die auf der anderen Welle B befindliche Scheibe mit der Nutz E mit dem auf dem Kurbelzapfen B , Fig. 544, befindlichen Gleitstücke übereinkommt. Die Mittelscheibe C endlich, welche bei der Oldham'schen

Kuppelung mit ihren gekreuzten Leisten in jene Ruthen *D* und *E* hineingreift, ist mit der Schleife *E* und ihrer Stange *C* identisch. Es ist in Betreff der Bewegungsverhältnisse bei diesem Getriebe schon in §. 25 nachgewiesen, daß eine gleichmäßige Umdrehung der einen Ase *A* eine ebensolche

Fig. 545.

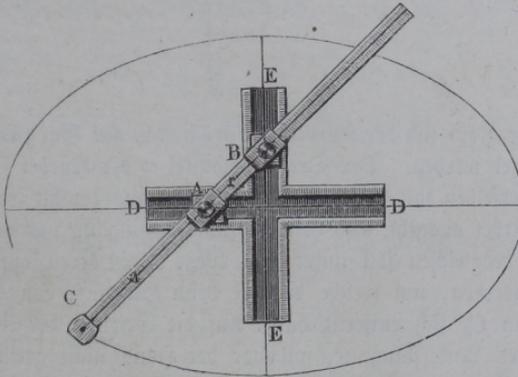


gleichmäßige Drehung der anderen *B* zur Folge hat.

Wollte man endlich in dem hier vorliegenden Getriebe die Schleifenstange *CE*₁ *E*₂, Fig. 544, feststellen, welche als ein Glied mit zwei zu einander rechtwinkligen Prismen angesehen werden

muß, so würde man den Mechanismus, Fig. 546, erhalten, bei welchem die beiden Stifte *A* und *B* von constanter Entfernung gezwungen sind, in zwei zu einander rechtwinkligen Geraden *EE* und *DD* zu verbleiben. Diese Bewegungsform ist bereits in der Einleitung, §. 11, näher untersucht worden

Fig. 546.



und dabei gefunden, daß jeder Punkt *C* in der Geraden *AB* eine Ellipse beschreibt, deren Azen in die Richtungen der Führungsgeraden fallen und die Größe $2a$ und $2(a+r)$ haben.

Dieser Mechanismus liegt daher einem bekannten Ellipsographen zu Grunde, ebenso wie man zum Abdrücken von Kör-

pern von elliptischen Querschnitten auf der Drehbank sich des (von Leonardo da Vinci angegebenen) Dvalwerks bedient, welches als dasselbe Getriebe mit festgehaltener Kurbel anzusehen ist.

unter γ den Neigungswinkel der Schubstange gegen die Führungsgerade AC verstanden. Da $AC_1 = l - r$, so läßt sich obiger Ausdruck auch schreiben:

$$r \cos \alpha + l - r + s = l \cos \gamma,$$

oder

$$s = r(1 - \cos \alpha) - l(1 - \cos \gamma).$$

Es ist leicht zu ersehen, daß für den Rückgang, wenn die Kurbel den Winkel $B_3AB' = \alpha'$ durchmessen hat, der Weg des Kreuzkopfes $s' = C_3C'$ ebenso gefunden wird, aus

$$r \cos \alpha' + l \cos \gamma' + s' = r + l$$

zu

$$s' = r(1 - \cos \alpha') + l(1 - \cos \gamma').$$

Man kann daher allgemein

$$s = r(1 - \cos \alpha) \mp l(1 - \cos \gamma)$$

schreiben, worin das obere Zeichen dem Hingange, das untere dem Rückgange zukommt. Zur Bestimmung von γ hat man nach der Figur

$$r \sin \alpha = l \sin \gamma,$$

woraus

$$\sin \gamma = \frac{r}{l} \sin \alpha \text{ und } \cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \alpha}$$

folgt.

Da in den Ausführungen l immer beträchtlich größer ist als r , und z. B. $\frac{r}{l}$ selten größer als $\frac{1}{3}$ sein wird, so kann man mit genügender Annäherung

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \alpha} = 1 - \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \alpha$$

setzen, und erhält durch Einführung dieses Wertes

$$s = r(1 - \cos \alpha) \mp \frac{r^2}{2l} \sin^2 \alpha.$$

Selbstredend wird für $\alpha = 0$, also für die todten Punkte $s = 0$. Setzt man dagegen $\alpha = 90^\circ$, so erhält man

$$s = r \mp \frac{r^2}{2l} = r \left(1 \mp \frac{r}{2l} \right).$$

Während also einer Vierteldrehung entsprechend, der Weg des Kreuzkopfes beim Hingange um die Größe $MC_2 = \frac{r^2}{2l}$ kleiner ist als der halbe Hub r , so ist der Weg beim Rückgange um eben so viel größer als der halbe Hub, so daß der Kreuzkopf jedesmal dieselbe Stelle C_2 einnimmt, wenn die Kurbel die Punkte B_2 und B_4 , d. h. den auf der Führung C_1C_3 senkrechten Durchmesser passiert. Man erkennt hieraus, daß die Bewegung des Kreuzkopfes

während des Hinganges eine andere ist, als während des Rückganges, und daß die Verschiedenheit um so größer ist, je größer das Verhältniß $\frac{r}{l}$ ist. So

sind z. B. bei einem Verhältnisse $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ die beiden einer Vierteldrehung entsprechenden Wege für Hin- und Hergang beziehungsweise durch $0,9r$ und $1,1r$ gefunden. Für die Annahme einer unendlich langen Lenkerstange, also für die Schleifenkurbel ergiebt die gefundene Formel einfach $s = r(1 - \cos \alpha)$ für den Hingang sowohl wie für den Hergang; beide Bewegungen stimmen in diesem Falle überein.

Für die mittlere Stellung des Kreuzkopfes in M , also für $s = r$, findet man aus

$$r \cos \alpha \pm l = \pm l \cos \gamma = \pm \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha}$$

oder

$$r^2 \cos^2 \alpha \pm 2lr \cos \alpha + l^2 = l^2 - r^2 + r^2 \cos^2 \alpha$$

den Drehungswinkel α durch:

$$\cos \alpha = \mp \frac{r}{2l}.$$

Setzt man z. B. $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$, so folgt hieraus $\alpha = 95^\circ 45'$ für den Hingang und $\alpha = 84^\circ 15'$ für den Rückgang.

Von einigem Interesse ist noch diejenige Kurbelstellung B_0 , in welcher die Lenkerstange mit der Kurbelrichtung einen Winkel $\beta = 90^\circ$ bildet. Für diesen Fall hat man aus der Figur

$$\operatorname{tg} \gamma = \mp \operatorname{cotg} \alpha_0 = \frac{r}{l},$$

z. B. für $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ ist $\alpha_0 = 101^\circ 20'$ für den Hingang und $78^\circ 40'$ für den Rückgang. Den Weg $C_1 C_0$ bzw. $C_3 C_0$, welchen der Kreuzkopf in dieser Kurbelstellung gemacht hat, findet man aus der allgemeinen Formel durch Einsetzung von α_0 und zwar unter Voraussetzung von $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ zu:

$$s = 1,10r \text{ für den Vorwärtsgang und}$$

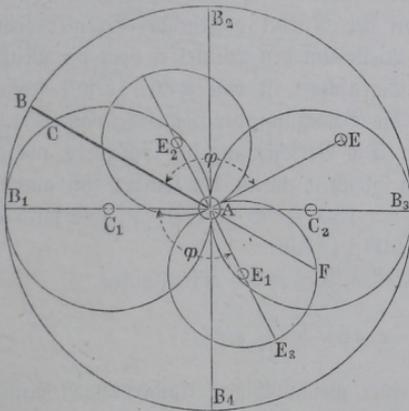
$$s = 0,90r \text{ für den Rückwärtsgang.}$$

Es liegt daher beiläufig in diesem Falle der Punkt C_0 eben so weit hinter der Mitte M , wie der Punkt C_2 , welcher einer Kurbeldrehung um 90° zugehört, vor dieser Mitte liegt. Bei einer unendlich langen Lenkerstange fallen die betreffenden Kurbelstellungen B_m und B_0 in der Mittelstellung B_2 und die Stellungen C_2 und C_0 in der Submitte M zusammen.

In sehr vielen Ausführungen der Praxis ist die Länge l der Lenkerstange im Vergleich zur Kurbellänge r so groß, daß man den kleinen Abweichungswinkel γ , dessen größter Werth durch $\sin \gamma = \frac{r}{l}$ gegeben ist, vernachlässigen kann, insbesondere gilt dies für die Anordnung der Excenter zur Bewegung der Schieber von Dampfmaschinen, da die Excenter lediglich als Kurbeln zu betrachten sind. Man kann daher in solchen Fällen immer die Lenkfstange als unendlich lang voraussetzen, und hat die Bewegung der gerade geführten Stange durch die einfachere Formel $s = r (1 - \cos \alpha)$ ausgedrückt. Es ist nun ersichtlich, daß der Kurbelkreis selbst für jede beliebige Stellung AB der Kurbel diesen Weg direct in dem Abstände des todten Punktes von der Projection D der Kurbelwarze auf den Durchmesser $B_1 B_3$ ergiebt, da in jedem Falle $B_1 D = r (1 - \cos \alpha)$ ist.

Es giebt aber auch noch ein anderes Mittel, in jeder Kurbelstellung den Weg des Kreuzkopfes graphisch darzustellen, und zwar als eine direct abzugreifende Länge, zu deren Construction man nicht erst das Loth BD zu ziehen hat. Denkt man sich

Fig. 548.



nämlich in dem Kurbelkreise, Fig. 548, über der Kurbellänge in den Todtlagen AB_1 und AB_3 als Durchmesser die beiden Kreise C_1 und C_2 beschreiben, so erhält man für jede beliebige Stellung der Kurbel wie AB in der Sehne AC den Betrag, um welchen der Kreuzkopf aus seiner mittleren Lage verschoben ist, denn es ist $AC = AB_1 \cos \alpha = r \cos \alpha$. Dabei gilt der Kreis C_1 für die Bewegung der Kurbel in dem Halbkreise $B_4 B_1 B_2$, d. h.

während der Kreuzkopf diesseits seiner mittleren Lage sich bewegt, während der zweite Kreis C_2 für die andere Bewegungshälfte jenseits der Mittellage, oder für den Kurbelhalbkreis $B_2 B_3 B_4$ gültig ist. Stellt man sich nun vor, es sei, wie bei Dampfmaschinen mit der gewöhnlichen Schiebersteuerung immer der Fall ist, auf der Axe A der Kurbel ein Excenter, oder eine zweite Kurbel AE angebracht, welche von der Kurbel AB um einen Winkel $BAE = \varphi$ abweicht, so kann man auch für diese Kurbel den Weg des Kreuzkopfes oder der Schieberstange in ähnlicher Art leicht finden. Wollte man zu dem Ende auch zwei Kreise durch A zeichnen, deren Mittelpunkte auf $B_1 B_3$ zu beiden

Seiten von A liegen und deren Durchmesser gleich der Kurbellänge AE , d. h. gleich der Excentricität sind, so würde man den Weg des Schiebers für jede Kurbelstellung AB in derjenigen Sehne dieser Kreise finden, welche um den Winkel $BAE = \varphi$ von der Kurbelrichtung AB nach vorwärts abweicht. Um aber dieses jedesmalige Antragen des Winkels φ an die betreffende Kurbelrichtung AB zu umgehen, kann man auch die beiden dem Excenter entsprechenden Kreise um denselben Winkel φ nach der entgegengesetzten Richtung, also hier nach rückwärts gedreht denken, wodurch die Mittelpunkte E_1 und E_2 dieser Kreise auf einen Durchmesser E_1AE_2 des Kurbelkreises zu liegen kommen, welcher mit der Schubrichtung B_1B_3 den Winkel $B_1AE_1 = \varphi$ bildet. Man erkennt dann sogleich, daß die in die Kurbelrichtung AB fallende Sehne AF des einen dieser Kreise direct die Verschiebung angiebt, um welche der von dem Excenter AE bewegte Schieber aus seiner mittleren Stellung gerückt ist, sobald die Kurbel in die Richtung AB getreten ist. Man ersieht auch aus der Figur, daß die Länge dieser Sehne durch $AF = AE_3 \cos FAE_3 = -e \cos(\alpha + \varphi)$ gegeben ist, unter e die Größe der Excentricität $AE = AE_3$ des Excenters verstanden. Diese Größe drückt aber in der That die Verschiebung aus, welche der um den Winkel φ von der Kurbel abstehende Excenter seiner Stange nach einer Drehung der Welle um den Winkel α über die Mittellage hinaus ertheilt hat. Diese Eigenschaft ist von Zeuner mit großem Vortheile verwendet worden, um die Bewegung der Schieber von Dampfmaschinen graphisch darzustellen*). Die Verschiebung des Schiebers aus der Mitte ist natürlich ein Maximum gleich e , wenn die Kurbel sich aus der Todtlage um den Winkel $B_1AE_2 = 180 - \varphi$ gedreht hat, und wird bei weiterer Drehung der Kurbel um 90° zu Null.

Aus der allgemeinen Formel für den Weg s des Kreuzkopfes

$$s = r(1 - \cos \alpha) \mp \frac{r^2}{2l} \sin^2 \alpha$$

erhält man unter Voraussetzung einer gleichmäßigen Umdrehungsbewegung der Kurbelwelle A die Geschwindigkeit c der Kolbenstange oder des Kreuzkopfes, nach Theil I, §. 21:

$$c = \frac{\partial s}{\partial t},$$

oder da $\omega \partial t = \partial \alpha$, unter ω die constante Winkelgeschwindigkeit verstanden, so erhält man auch:

$$c = \omega \frac{\partial s}{\partial \alpha} = \omega \left(r \sin \alpha \mp \frac{r^2}{2l} 2 \sin \alpha \cos \alpha \right) = \omega r \left(\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right).$$

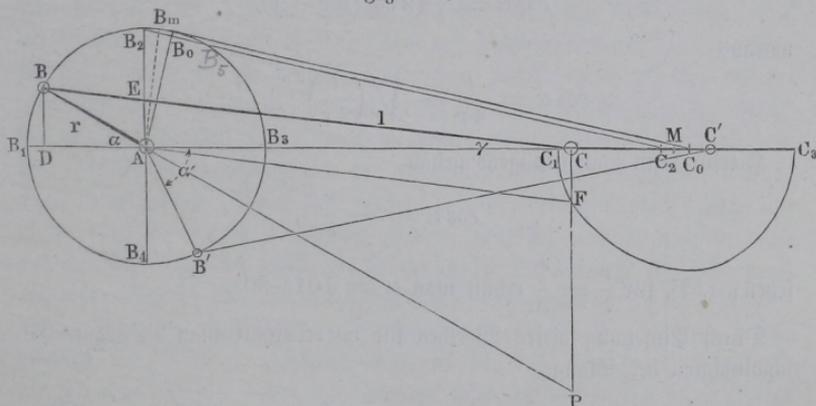
*) S. Die Schiebersteuerungen von Zeuner.

Da nun die constante Umfangsgeschwindigkeit v der Kurbelwarze sich durch $r\omega$ ausdrückt, so hat man das Umsetzungsverhältniß zwischen den Geschwindigkeiten des Kreuzkopfes und des Kurbelzapfens für den beliebigen Winkel α ausgedrückt durch

$$v = \frac{c}{v} = \sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha.$$

Die Geschwindigkeit c wird zu Null für $\alpha = 0$ und $\alpha = 180^\circ$, d. h. für die Todtlagen der Kurbel, wie es auch dem Wechsel der Kolbenbewegung in diesen Punkten entspricht. Für $\alpha = 90^\circ$, d. h. für die Kurbelstellungen in B_2 und in B_4 , Fig. 549, dagegen erhält man $\frac{c}{v} = 1$, d. h. in den mittleren Kurbellagen, welche zu den Todtlagen rechtwinkelig stehen, hat der Kreuzkopf stets mit dem Kurbelzapfen gleiche Geschwindigkeit, wie groß auch das Verhältniß $\frac{r}{l}$ sein möge, und man erkennt leicht, daß dieses Gesetz auch noch für eine ungleichförmige Bewegung der Kurbelwelle seine Gültigkeit behalten muß.

Fig. 549.



Wollte man dagegen die Geschwindigkeit c für die mittlere Lage des Kreuzkopfes in M finden, so hätte man für α in die Formel den dieser Stellung zugehörigen Winkel einzusetzen, für welchen oben gefunden wurde

$$\cos \alpha = \mp \frac{r}{2l}, \text{ also } \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{4l^2}}.$$

Man erhielte hierdurch:

$$\begin{aligned} v &= \sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha = \sin \alpha \left(1 \mp \frac{r}{l} \cos \alpha \right) \\ &= \sqrt{1 - \frac{r^2}{4l^2}} \left(1 + \frac{r^2}{2l^2} \right), \end{aligned}$$

was man unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{r}{l}$ auch schreiben kann:

$$v = \frac{c}{v} = 1 + \frac{3}{8} \frac{r^2}{l^2};$$

beispielsweise ist für:

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{5}, \quad v = 1,015.$$

Das Maximum der Kolbengeschwindigkeit c findet man aus:

$$\frac{\partial c}{\partial \alpha} = 0,$$

d. h. aus

$$\cos \alpha - \frac{r}{l} \cos 2\alpha = 0.$$

Man hat daher hierfür:

$$\cos \alpha = \frac{r}{l} (2 \cos^2 \alpha - 1),$$

woraus

$$\cos \alpha = \frac{l}{4r} - \sqrt{\left(\frac{l}{4r}\right)^2 + \frac{1}{2}}.$$

Hierfür kann man genügend genau

$$\cos \alpha = -\frac{r}{l}$$

setzen; z. B. für $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ erhält man $\alpha = 101^\circ 30'$.

Durch Einsetzung dieses Werthes für $\cos \alpha$ erhält man die größte Geschwindigkeit der Stange

$$\begin{aligned} c_{max} &= v \left(\sin \alpha - \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right) = v \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2} \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) \\ &= v \left(1 + \frac{r^2}{2l^2}\right). \end{aligned}$$

Für $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ folgt daher dieser Werth zu:

$$c_{max} = v \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{25}\right) = 1,02 v.$$

Den Durchschnittswerth für die Kolbengeschwindigkeit während einer Periode oder Umdrehung erhält man offenbar durch:

$$\frac{c}{v} = \frac{4r}{2\pi r} = 0,6366.$$

Man kann sich von der Größe der Stangengeschwindigkeit c auch noch durch ein graphisches Verfahren eine klare Vorstellung verschaffen. Zieht man nämlich in irgend einer Lage C des Kreuzkopfes eine Normale zu der Führungslinie $C_1 C_3$, so findet man im Durchschnittspunkte P dieser Normale mit der zugehörigen Kurbelrichtung das Momentancentrum oder den Pol, um welchen die Lenkerstange BC in dem betrachteten Augenblicke eine unendlich kleine Drehung vollführt. Da sich hierbei die Geschwindigkeiten c und v der Endpunkte C und B der Schubstange wie die Polstrahlen PC und PB verhalten, so hat man in jedem Falle:

$$c : v = PC : PB = FC : AB,$$

wenn die Gerade AF parallel zur Richtung der Lenkerstange durch die Axe A gelegt wird. Nimmt man daher etwa den Kurbelhalbmesser $AB = r$ als das Maß der Umfangsgeschwindigkeit v des Kurbelzapfens an, so erhält man in CF oder AE den Betrag der augenblicklichen Kolbengeschwindigkeit c . Da der Abschnitt AE auf dem zur Führungslinie $C_1 C_3$ senkrechten Radius liegt, d. h. auf derjenigen Geraden, welche durch die Axe mit der unendlich langen Schwinge parallel gelegt ist, durch welche man die Geradföhrung $C_1 C_3$ ersetzt denken kann, so erkennt man die Uebereinstimmung der hier gefundenen Beziehung mit der in §. 135 für das allgemeine Kurbelviereck aufgestellten. Man sieht ferner, daß die Geschwindigkeit c nicht nur in der Lage B_2 des Kurbelzapfens gleich v ausfällt, sondern noch in einer anderen Lage B_5 , für welche die Richtung der Schubstange ebenfalls durch B_2 geht, während für alle Stellungen des Kurbelzapfens zwischen B_2 und B_5 die Stangengeschwindigkeit c größer sein muß als die der Kurbelwarze, insofern der betreffende Abschnitt AE für alle diese Punkte größer ausfällt als der Kurbelarm r . Für alle übrigen Stellungen der Kurbel innerhalb des Halbkreises $B_1 B_2 B_3$ wird ebenso c kleiner als v . Für den Rückgang der Kurbel gelten dieselben Betrachtungen.

Wenn man sich die hier angegebene Construction von $CF = c$ für jede mögliche Kurbelstellung ausgeführt denkt, so erhält man in dem Verlaufe der Punkte F eine stetige Curve $C_1 F C_3$, welche in jeder ihrer Ordinaten CF unmittelbar die Geschwindigkeiten der Kolbenstange in demjenigen Augenblicke ergibt, in welchem der Kreuzkopf den Fußpunkt C der Ordinate passirt. Es ist aus dem Vorstehenden erkenntlich, daß für den Fall einer unendlich langen Lenkerstange diese Curve zu einem Halbkreise über dem Hube $C_1 C_3$ werden muß, und daß dieser Halbkreis die für endliche Länge der Schubstange geltende Curve F in zwei Punkten durchschneiden muß. In allen denjenigen

Fällen, wo die Länge l der Schubstange gegen den Kurbelarm nicht sehr gering ist, wird man annehmen dürfen, daß das Maximum der Kolbengeschwindigkeit derjenigen Kurbelstellung sehr nahe entspricht, für welche die Richtung der Schubstange den Kurbelkreis tangirt, d. h. der oben mit B_0 bezeichneten Stellung des Kurbelzapfens, für welchen

$$\cotg \alpha = -\frac{r}{l}$$

gefunden wurde. Die Rechnung gab für diesen Winkel der maximalen Geschwindigkeit den angenäherten Werth

$$\cos \alpha = -\frac{r}{l},$$

doch ist für diesen Winkel, welcher von 90° nur wenig abweicht, genügend genau der Cosinus gleich der Cotangente zu setzen, wie denn das Beispiel

$\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ in dem einen Falle

$$\text{arc cotg} -\frac{r}{l} = 101^\circ 20'$$

und

$$\text{arc cos} -\frac{r}{l} = 101^\circ 30'$$

ergab.

Alle vorhergegangenen Betrachtungen gelten natürlich nur unter der ausdrücklichen Unterstellung, daß die Kurbel mit constanter Winkelgeschwindigkeit sich dreht, und es muß in dem Falle, daß diese Voraussetzung nicht zutrifft, die Geschwindigkeit c aus der veränderlichen Geschwindigkeit v durch Reduction mit dem Verhältnisse

$$\frac{c}{v} = \frac{AE}{AB}$$

ermittelt werden, wofür in dem Folgenden einige Beispiele angeführt werden.

Mit der Annahme der Geschwindigkeit v der Kurbelwarze in diejenige c der Kolbenstange steht die Veränderlichkeit in engem Zusammenhange, in welcher die auf den Kolben wirkende Druck- oder Widerstandskraft Q sich nach dem Kurbelzapfen überträgt. Denkt man auf den Kreuzkopf C , Fig. 550, in einem beliebigen Augenblicke in der Richtung der Geradenführung $C_1 C_3$ die Kolbenkraft $Q = CD$ ausgeübt, so zerlegt sich dieselbe in eine senkrecht zu der Führung wirkende und von dieser direct aufgenommenen Seitenkraft $ED = Q \tan \gamma$, und in eine andere in die Schubstange fallende Componente

$$CE = \frac{Q}{\cos \gamma},$$

stattfinden, wie oben für die Geschwindigkeit c angedeutet wurde. Man kann daher die in Fig. 549 gefundene Geschwindigkeitscurve auch für die Veränderlichkeit der Umfangskraft U als maßgebend ansehen. Diese Uebereinstimmung zwischen den Gesetzen der Kraft und Geschwindigkeit läßt sich übrigens auch ohne Weiteres aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten erkennen, demzufolge jederzeit, auch für ungleichförmige Geschwindigkeiten und Kraftwirkungen, $Qc = Uv$ sein muß. Hiernach folgt auch ohne Weiteres, daß bei Voraussetzung einer constanten Kraft Q die mittlere oder durchschnittliche Umfangskraft

$$U = Q \frac{4r}{2\pi r} = 0,6366 Q$$

ist. Für den Fall, daß die Kolbenkraft Q veränderlich ist, muß natürlich die von dem Gesetze dieser Veränderlichkeit abhängige mechanische Arbeit A während einer Bewegungsperiode, etwa einer Umdrehung, bestimmt werden, und man findet alsdann die mittlere Umdrehungskraft zu

$$U = \frac{A}{2\pi r}.$$

Hierüber wird in dem Folgenden ein Näheres angeführt werden.

§. 140. Die oscillirende Kurbelschleife. Die obigen Entwicklungen für die rotirende Schubkurbel gelten auch für die schwingende Kurbelschleife, wie sie bei den oscillirenden Dampfmaschinen zur Verwendung kommt, wovon man sich durch folgende Betrachtung überzeugt. Bezeichnet nämlich a den Abstand AC , Fig. 551, der Kurbelwelle A von der Schwingungsaxe C des Cylinders, so veranlaßt eine Drehung der Kurbel um den Winkel $B_1AB = \alpha$, vom äußeren Todtpunkte aus gerechnet, eine Verschiebung des Kolbens um

$$s = B_1C - BC = a + r - \sqrt{a^2 + 2ar \cos \alpha + r^2},$$

oder annähernd

$$\begin{aligned} s &= a + r - a \left(1 + \frac{r \cos \alpha}{a} + \frac{r^2}{2a^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{4r^2 \cos^2 \alpha}{2a^2} \right) \\ &= r(1 - \cos \alpha) - \frac{r^2}{2a}(1 - \cos^2 \alpha) = r(1 - \cos \alpha) - \frac{r^2}{2a} \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

In gleicher Art findet man für den Rückgang des Kolbens, wenn die Kurbel von dem inneren Todtpunkte B_3 aus sich um $B_3AB' = \alpha$ gedreht hat,

$$s = B'C - B_3C = \sqrt{a^2 - 2ar \cos \alpha + r^2} - (a - r)$$

oder annähernd

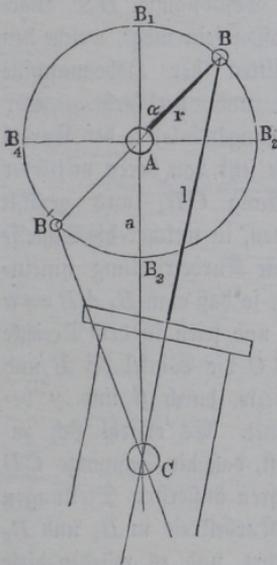
$$s = r (1 - \cos \alpha) + \frac{r^2}{2a} \sin^2 \alpha,$$

so daß man allgemein für die Kolbenbewegung setzen kann:

$$s = r (1 - \cos \alpha) \mp \frac{r^2}{2a} \sin^2 \alpha.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem in §. 139 für die rotirende Schubkurbel gefundenen genau überein, wenn man in letzterem anstatt der Länge l der

Fig. 551.

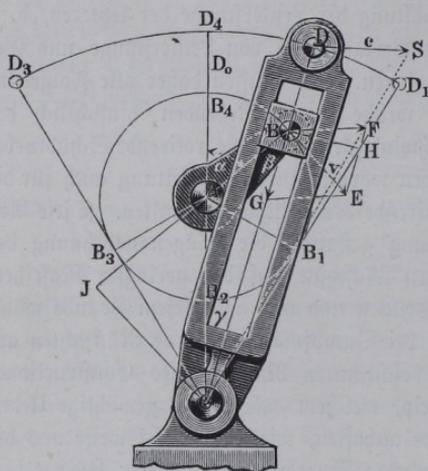


Pushstange den Abstand a der beiden Lager von A und C einführt, und entspricht dies ja auch der Entstehung der oscillirenden Kurbelschleife aus der rotirenden Schubkurbel durch Festhaltung der Lenkerstange der letzteren, d. i. durch Vertauschung von Lenkerstange und Gestellrahmen. Es müssen daher alle Folgerungen, welche im Vorstehenden hinsichtlich der Geschwindigkeiten für die rotirende Schubkurbel gezogen worden sind, ihre Geltung auch für die oscillirende Kurbelschleife behalten. Diese Anordnung gestattet, die Längenausdehnung der ganzen Maschine auf das geringste Maß herabzudrücken und nur aus diesem Grunde wählt man bei Dampfmaschinen aus Rücksichten auf den beschränkten Raum dieses Constructionsprincip, welchem andererseits gewichtige Uebelstände anhaften, wie sie beispielsweise aus der pendelnden Bewegung so schwerer Körper hervorgehen, als welche die Dampfsylinder ausgeführt werden müssen.

Dagegen benutzt man öfter für gewisse Arbeitsmaschinen die pendelnde Bewegung der Pleuelstange, indem man insbesondere von der Ungleichförmigkeit in deren Bewegungszustande Nutzen zieht. Eine häufigere derartige Anwendung findet die oscillirende Kurbelschleife bei kleineren Hobel- und Shaping-Maschinen, bei denen man dem Arbeitsstücke oder dem Meißel eine so langsame Vorwärtsbewegung, wie der Arbeitsproceß bedingt, ertheilt, während der Rückgang mit größerer Geschwindigkeit bewirkt wird, um die Verluste an Zeit möglichst herabzuziehen. Bei allen derartigen Maschinen geht der Antrieb von der Kurbelwelle aus, durch deren Umdrehung das betreffende Organ in regelmäßig schwingende Bewegung versetzt wird. Hierbei kann man immer die Umdrehung der Kurbel als eine ganz gleichmäßige betrachten, indem dieselbe vermöge ihres Zusammenhanges mit dem ganzen Betriebs-

werke der Fabrik in der Regel mit so großen Massen in directer und indirecter Verbindung steht, daß die Ungleichförmigkeit des Widerstandes in der kleinen Hobelmaschine nur ganz unbedeutende Geschwindigkeitsänderungen hervorrufen kann, abgesehen von der ausgleichenden Wirkung, welche der auf die Betriebsmaschine einwirkende Regulator fortwährend äußert. Es ist in diesem Falle von Interesse, die schwingende Bewegung der Kurbelschleife, bezw. des mit ihr verbundenen Organs unter Voraussetzung einer gleichförmigen Kurbeldrehung zu untersuchen. Zu dem Ende sei wieder $r = AB$, Fig. 552, die Länge der Kurbel und $a = AC$ der Abstand der beiden Axen, ferner $l = CD$ die Länge der Schwinge, an deren äußerem Ende bei D

Fig. 552.



die Schubstange DS angeschlossen sein möge, welche den Schlitten der Hobelmaschine hin- und herschiebt. Der Drehungswinkel α der Kurbel möge jetzt von deren mittlerer Stellung CB_4 aus gezählt werden, in welcher die Schleife in die Kurbelrichtung hinein- fällt, so daß man $B_4AB = \alpha$ hat, und seien in dem Dreiecke ABC die Winkel bei B und C bezw. durch β und γ bezeichnet. Es ersieht sich zunächst, daß die Schwinge CD in ihren äußersten Stellungen den Kurbelkreis in B_1 und B_3 berührt, und es würden diese

lagen zweiem Todtlagen des Systems entsprechen, wenn die Bewegung von der Schwinge ausgehen würde, was aber nur in den allersehrsten Fällen stattfinden dürfte. Die Zeit, welche die Schwinge zu dem Hingange von D_3 nach D_1 gebraucht, verhält sich daher zu der Zeit des Rückganges, wie der Bogen $B_3B_4B_1$ zu demjenigen $B_1B_2B_3$, welche Bögen die entsprechenden Kurbeldrehungen angeben. Die Führungslinie des Schlittens pflegt man so anzunehmen, daß dieselbe die Pfeilhöhe D_0D_4 des Bogens D_3D_1 halbirt, und auf der Mittellage CD_4 senkrecht steht, und daher kann man bei der geringen Größe dieser Pfeilhöhe im Vergleiche mit der Länge der Schubstange DS die Richtung der letzteren als parallel bleibend annehmen, indem man von den kleinen Abweichungen absieht, welche die Schubstange DS mit der Führungslinie des Schlittens bildet. Unter dieser Voraussetzung findet man die Geschwindigkeit c des Schlittens oder Schwingenendes D wie folgt.

Zerlegt man die constante Umfangsgeschwindigkeit $v = BE$ der Kurbelwarze in die beiden Componenten BG nach der Richtung der Schwinge und BF nach der Richtung der Schlittenführung, welche meist horizontal ist, so hat man die Geschwindigkeit c des Schlittens zu

$$c = \frac{DC}{BC} BF.$$

Nun ist aber, wenn $BH \perp BC$ ist:

$$BF = \frac{BH}{\cos \gamma} = v \frac{\cos \beta}{\cos \gamma},$$

daher folgt

$$c = \frac{DC}{BC \cos \gamma} v \cos \beta = \frac{l}{a + r \cos \alpha} v \cos \beta.$$

Für $\cos \beta$ erhält man andererseits, wenn CJ normal zu AB gezogen wird:

$$\cos \beta = \frac{BJ}{BC} = \frac{r + a \cos \alpha}{\sqrt{a^2 + 2ar \cos \alpha + r^2}},$$

so daß man

$$c = v \frac{r + a \cos \alpha}{a + r \cos \alpha} \frac{l}{\sqrt{a^2 + 2ar \cos \alpha + r^2}}$$

hat.

Für $\alpha = 0$ erhält man hieraus

$$c_{min} = v \frac{l}{a + r} = v \frac{CD}{CB_4}$$

und für $\alpha = 180^\circ$

$$c_{max} = -v \frac{l}{a - r} = -v \frac{CD}{CB_2},$$

während für die Stellungen der Kurbelwarze in B_1 und B_3 , für welche $\beta = 90^\circ$ ist, $c = 0$ folgt.

Von der Veränderlichkeit der Geschwindigkeit c verschafft man sich auch hier durch eine graphische Darstellung am besten eine Anschauung, wenn man, wie in Fig. 552 angegeben, verfährt. Ist zunächst das Verhältniß n gegeben, in welchem die Zeit des Vorgangs zu der des Rücklaufes stehen soll, so theile man den Kurbelkreis B in B_1 und B_3 nach diesem Verhältniß, indem man

$$B_1 B_2 B_3 = \frac{1}{n} B_3 B_4 B_1$$

macht, und man findet in dem Durchschnittspunkte C der beiden an B_1 und B_3 gelegten Tangenten den Drehpunkt der Schwinge, deren Länge CD dann aus dem vorgeschriebenen Hube $D_1 D_3$ des Schlittens sich ergibt. Nun

Stellungen der Kurbel zwischen den Todtlagen, wenn die Lenkerstange sehr lang vorausgesetzt wird. Für diese Annahme ergab sich für irgend eine Kurbelstellung der Kolbenweg vom äußeren Todtpunkte an zu

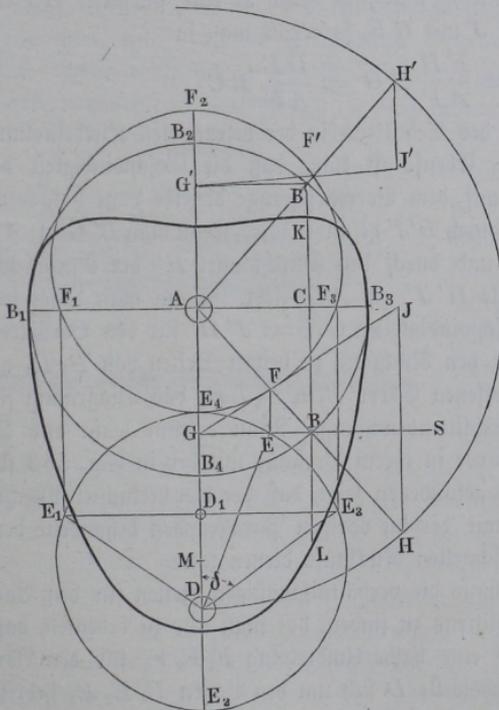
$$s = B_1 D = r (1 - \cos \alpha)$$

und daraus die Kolbengeschwindigkeit

$$c = v \sin \alpha,$$

wenn man die Geschwindigkeit der Kurbelwarze gleich v setzt. Man kann daher, wie schon erwähnt, den Kurbelkreis als das Diagramm ansehen, welches für jede Kurbelstellung entsprechend dem Winkel α in dem Perpendikel von der Kurbelwarze auf die Richtung der Geradföhrung die Geschwindigkeit $v \sin \alpha$ des Kreuzkopfes ergibt, wenn man den Kurbelradius r als Maß für die Umfangsgeschwindigkeit der Kurbelwarze annimmt. Diese Bemerkung dient dazu, um auch in solchen Fällen leicht durch eine graphische Darstellung die Veränderlichkeit der Stangengeschwindigkeit darzustellen, in denen die treibende Kurbelwelle mit einer veränderlichen Geschwindigkeit ge-

Fig. 554.



dreht wird. Solche Fälle kommen bei verschiedenen Arbeitsmaschinen öfter vor, und es ist schon in §. 50 bei Gelegenheit der unrunder Räder auf zwei Beispiele hingewiesen, welche hier einer näheren Betrachtung unterworfen werden sollen.

Zur langsamen Vorwärts- und schnelleren Rückwärtsbewegung des Schlittens wendet man bei Hobelmaschinen ebenfalls häufiger eine Kurbel AB , Fig. 554, an, welche von einer mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich umdrehenden Betriebswelle D vermittelft der beiden elliptischen Räder E und F mit veränderlicher Ge-

schwindigkeit gedreht wird. Dabei sei die Anordnung so getroffen, daß die Kurbel in die Richtung AB_4 der großen Ase der Ellipse F hineinfalle, und vermöge der Schubstange BS einen Schlitten um die Länge $B_1 B_3 = 2r$ hin- und herschiebe. Man könnte in irgend welcher Lage der Kurbel AB nach der eben gemachten Bemerkung das Perpendikel BC als Maß der Geschwindigkeit ansehen, wenn die Drehung von A gleichmäßig erfolgte. Wegen der elliptischen Räder ist dies nicht der Fall, vielmehr wird die Umdrehungsgeschwindigkeit der Welle D in dem betrachteten Augenblicke, in welchem die Kurbel aus der Lage AB_4 in diejenige AB gedreht ist, in dem Verhältnisse der Radien $\frac{DE}{AF}$ vergrößert, da in diesem Augenblicke zwei mit F und E

symmetrisch gegen AD gelegene Punkte der Ellipsen mit einander zum Eingriffe kommen. Man hat daher, um die augenblickliche Geschwindigkeit c des Schlittens zu finden, nur nöthig, die Länge BC in dem Verhältnisse $\frac{DE}{AF}$

zu vergrößern, wozu folgende Construction etwa dienen kann. Man ziehe $BG \perp AD$, trage auf der Verlängerung der Kurbel das Stück $FH = ED$ ab, wozu man sich bequem des um A durch D gezogenen Kreises bedienen kann, verbinde G mit F und ziehe durch H eine Parallele HJ mit AD bis zum Durchschnitte J mit GF , so erhält man in

$$HJ = \frac{FH}{AF} AG = \frac{DE}{AF} BC$$

die gesuchte Geschwindigkeit des Schlittens in der betrachteten Kurbelstellung AB auf dem Rückgange. Ebenso ist klar, daß die Geschwindigkeit des Schlittens, wenn derselbe auf dem Vorwärtsgange dieselbe Lage hat, wenn also die Kurbel in AB' steht, durch $H'J'$ gefunden wird, wenn man $B'G' \perp AD$ legt, G' mit F' verbindet und durch den Durchschnitt H' der Kurbel mit dem Kreise H eine Parallele $H'J'$ zu AD zieht. Trägt man daher jetzt von C aus diese beiden Geschwindigkeiten $CK = J'H'$ für den Vorwärtsgang und $CL = JH$ für den Rückgang zu beiden Seiten von $B_1 B_3$ ab, so erhält man in der geschlossenen Curve $B_1 KB_3 LB_1$ das Diagramm für die Geschwindigkeiten der Schlittenbewegung. Man erkennt leicht aus der Ähnlichkeit, welche diese Curve in ihrem Verlaufe mit der in Fig. 553 für die oscillirende Kurbelschleife gefundenen zeigt, daß der hier betrachtete Mechanismus in gleicher Weise wie der im vorigen Paragraphen behandelte dem beabsichtigten Zwecke eines schnellen Rücklaufs dienen kann.

Um bei diesem Mechanismus die verhältnißmäßigen Zeiten für den Vorwärtsgang und Rücklauf des Schlittens zu finden, hat man nur zu bedenken, daß, während die Kurbelwelle A eine halbe Umdrehung $F_1 F_2 F_3$ für den Vorwärtsgang macht, die Betriebswelle D sich um den Bogen $E_1 E_2 E_3$ gedreht haben muß, wenn man $F_1 E_1$ und $F_3 E_3$ parallel zu AD gezogen denkt,

während der Bogen $E_1 E_4 E_3$ dem Rücklaufe entspricht. Die Zeiten des Vorgangs und Rücklaufs verhalten sich daher wie die Winkel $E_2 D E_3$ und $E_4 D E_3$.

Ist dieses Geschwindigkeitsverhältniß und damit der Winkel $\delta = E_4 D E_3$ gegeben, und auch der Axenabstand $AD = 2a$ gleich der großen Ase der Ellipsen festgestellt, so findet man die Excentricität e der Ellipse leicht dadurch, daß nach bekannten Eigenschaften der Ellipse

$$AF_3 + DE_3 = D_1 E_3 + DE_3 = 2a$$

ist, also hat man, da D_1 der andere Brennpunkt und $D_1 D = 2e$ ist,

$$2e \tan \delta + \frac{2e}{\cos \delta} = 2a,$$

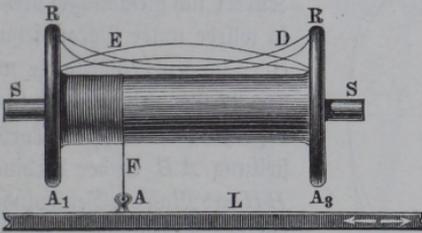
oder

$$e = a \frac{\cos \delta}{1 + \sin \delta'}$$

welcher Ausdruck sich leicht construiren läßt.

Wie ebenfalls schon in §. 50 angedeutet worden ist, wendet man zuweilen unrunde Räder in Verbindung mit einer Kurbel zu einem anderen als dem vorgedachten Zwecke bei gewissen Spulmaschinen an, bei denen es darauf ankommt, eine möglichst gleichmäßige Bewickelung der Spulen zu erlangen. Man denke sich zu dem Ende eine mit gleichmäßiger Geschwindigkeit umlaufende Spule SS , Fig. 555, von cylindrischer Form, welche durch

Fig. 555.

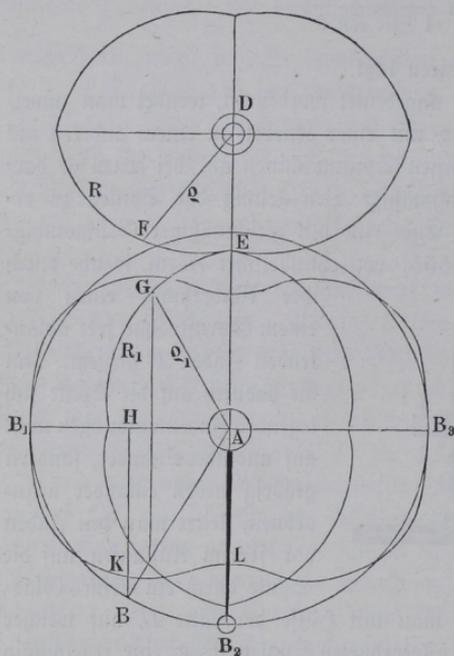


ihre Umdrehung einen von einem Garnsträhne frei ablaufenden Faden F anzieht. Um die dadurch auf die Spule sich legenden Fadenwindungen nicht auf und über einander, sondern gehörig neben einander anzuordnen, leitet man den Faden vor seinem Auslaufen auf die Spule durch ein kleines Glas-

auge oder Drahtöhr A , welchem man mit Hilfe der Latte L , auf welcher die Dehre für alle neben einander angeordneten Spulen sitzen, eine regelmäßig hin- und wiederkehrende Bewegung im Betrage $A_1 A_3$ gleich der ungefähren Länge der Spule zwischen ihren Rändern RR ertheilt. Auf solche Weise bedeckt sich die Spulenoberfläche bei jedem Hin- oder Hergange des Fadenleiters L mit einer Schicht von Fadenwindungen, deren Form wesentlich von der Bewegungsart des Fadenleiters abhängig ist. Wenn diese Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor sich geht, so werden die Schichten cylindrische Form annehmen. Dagegen entsteht eine bauchige Form wie E , wenn

die Geschwindigkeit des Fadenführers in der Mitte der Spule kleiner ist als an den Seiten, während im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn der Fadenführer in der Mitte seines Weges größere Geschwindigkeit hat, die Begrenzung der Schichten durch concave Linien wie D gebildet wird. Letzteres würde offenbar eintreten, wenn man den Fadenführer L durch eine Kurbel mit constanter Umdrehungsgeschwindigkeit bewegen wollte, da alsdann die Verschiebung um so langsamer erfolgt, je mehr sich die Kurbel den Todtlagen nähert. In Folge dessen würden die Fadenumwindungen in der Nähe der Spulentränder sich auf einander anhäufen und ein Abgleiten derselben würde unvermeidlich sein. Diesen Uebelstand zu verhindern, bewegt man wohl zuweilen eine Kurbel AB , Fig. 556, des Fadenführers so, daß sie in der mittleren Lage B_2 mit geringerer Winkelgeschwindigkeit sich dreht, als in

Fig. 556.



den Todtlagen B_1 und B_3 , indem man ihr die Bewegung von der gleichmäßig umlaufenden Ase D mittelst der spiralförmigen Räder (siehe §. 50) R und R_1 ertheilt. Von der hierdurch hervorbrachten Bewegung des Fadenführers kann man sich leicht durch eine graphische Darstellung ein Bild machen. Würde nämlich die Kurbel sich gleichmäßig drehen, so würde unter Voraussetzung einer langen Lenkerstange nach dem Früheren der Kurbelkreis $B_1 B_2 B_3$ für jede Kurbelstellung AB in der Ordinate BH das Maß der Geschwindigkeit des Fadenführers ergeben, wenn man wieder den Kurbelhalbmesser AB als Maß für die Geschwindigkeit der Kurbelwarze annähme. Da aber in

der Kurbelstellung AB die Räder R und R_1 mit den Punkten F und G sich berühren, so hat man nur die Länge BH in dem Verhältniß der Radien

$$\frac{g}{g_1} = \frac{DF}{AG}$$

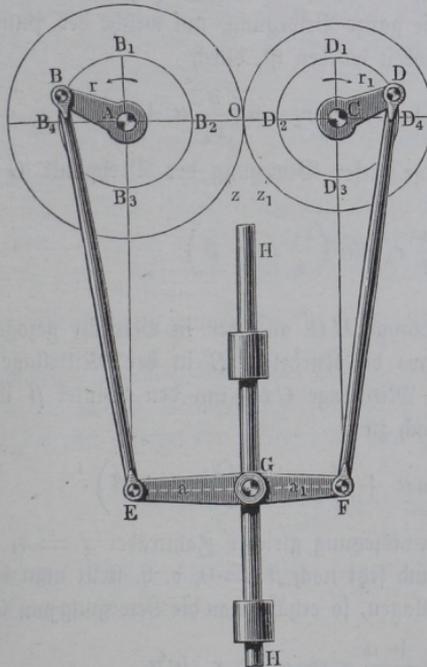
zu verkleinern, um in der Länge

$$HK = \frac{\rho}{\rho_1} HB$$

das Maß für die Geschwindigkeit des Fadenführers zu erhalten. Führt man diese hier angedeutete Construction für eine größere Anzahl von Kurbelstellungen aus, so erhält man in der Curve $B_1 K L B_3$ das Diagramm für die Geschwindigkeit des Fadenführers. Man erkennt daraus, daß bei dieser Anordnung eine gleichmäßige Bewegung nicht erreicht werden kann, daß vielmehr auch hier die Geschwindigkeit des Fadenführers in den toten Punkten zu Null wird, und man muß daher den hier gewählten Mechanismus nur als ein sehr unvollkommenes Hülfsmittel zur Verminderung des gedachten Uebelstandes in der Spulenbewicklung betrachten. Man sieht auch, daß bei Verwendung einer Kurbel überhaupt der gedachte Uebelstand nicht zu vermeiden ist, da die Geschwindigkeit in den Todtlagen immer Null ist. Dagegen hat man in der Verwendung von Curvenscheiben (siehe das folgende Capitel) Mittel zur Erreichung des vorliegenden Zweckes einer gleichmäßigen Bewegung des Fadenleiters.

Das Römer'sche Getriebe. Ein interessantes, zuerst von dem Astro- §. 142.

Fig. 557.



nomen Römer angegebene Getriebe entsteht durch die Vereinigung von zwei Schubkurbeln, AB und CD , Fig. 557, deren Schubstangen an den Endpunkten eines Balanciers EF angreifen, dessen mittlerer Drehpunkt G auf einer durch HH gerade geführten Stange angebracht ist. Die Bewegung des Punktes G kann hierbei je nach dem Verhältnisse der beiden Kurbelbewegungen eine äußerst mannigfache sein, sie läßt sich allgemein in folgender Art beurtheilen. Seien r und r_1 die Kurbellängen AB und CD und a und a_1 die Hebelarme des Balanciers, dessen ganze Länge $EF = l$ ge-

setzt werde, und es mögen die beiden Kurbelagen durch zwei Stirnräder mit z und z_1 Zähnen in Verbindung stehen. Die Länge der Lenkerstangen soll für die Rechnung als unendlich groß vorausgesetzt werden. Stellt man sich vor, die eine Kurbel AB stehe in ihrer mittleren Lage AB_2 , d. h. senkrecht zu HH , und möge die andere Kurbel CD dann ihre mittlere Lage CD_2 bereits um den Winkel β überschritten haben. Nun wird eine Drehung der Kurbel AB um den beliebigen Winkel $B_2AB = \alpha$ eine Bewegung des Punktes E zur Folge haben, welche annähernd zu $s = r \sin \alpha$ sich berechnet. In Folge dieser Bewegung des Punktes E wird der Drehpunkt G in der Richtung HH um die Größe

$$\frac{a_1}{l} s = \frac{a_1}{l} r \sin \alpha$$

verschoben.

Während dieser Drehung der Welle A um α hat sich auch die Axe C um den Winkel

$$\alpha_1 = \frac{z}{z_1} \alpha$$

gedreht. Stand nun die Kurbel CD zu der Zeit, wo AB in seiner mittleren Stellung AB_2 sich befand, etwa um den Winkel β von der mittleren Lage CD_2 entfernt, so wird die ganze Bewegung, um welche der Punkt F aus seiner mittleren Lage verschoben worden ist, durch

$$s_1 = r_1 \sin(\alpha_1 + \beta) = r_1 \sin\left(\frac{z}{z_1} \alpha + \beta\right)$$

ausgedrückt, und es ist in Folge dieser Bewegung der Drehpunkt G des Balancier's um

$$\frac{a}{l} s_1 = \frac{a}{l} r_1 \sin\left(\frac{z_1}{z} \alpha + \beta\right)$$

verschoben.

Die ganze Bewegung der Stange HG aus der in Betracht gezogenen Anfangslage, d. h. derjenigen, wo die Kurbel AB in der Mittellage B_2 stand, und die Kurbel CD die Mittellage CD_2 um den Winkel β überschritten hatte, bestimmt sich sonach zu

$$s + s_1 = \frac{a_1}{l} r \sin \alpha + \frac{a}{l} r_1 \sin\left(\frac{z_1}{z} \alpha + \beta\right).$$

Macht man die besondere Voraussetzung gleicher Zahnräder $z = z_1$ und gleicher Kurbellängen $r = r_1$ und setzt noch $\beta = 0$, d. h. stellt man beide Kurbeln gleichzeitig in die Mittellagen, so erhält man die Bewegung von G zu

$$s + s_1 = \frac{a_1 + a}{l} r \sin \alpha = r \sin \alpha,$$

und es ist der ganze Hub der Stange durch $2r$ gegeben, also gerade so wie für eine einfache Kurbel. Offenbar stimmt das dann entstehende Getriebe mit der in §. 105, Fig. 400 angegebenen Geradföhrung überein. Würde man dagegen unter denselben Voraussetzungen $\beta = 180^\circ$ annehmen, d. h. stände die Kurbel CD in D_4 , wenn AB in B_2 steht, so folgte

$$s + s_1 = \frac{a_1 - a}{l} r \sin \alpha$$

oder für $a = a_1$, $s + s_1 = 0$, d. h. die Stange HH würde dann gar keine Bewegung annehmen, indem die Wirkung der Kurbeln lediglich eine Schwingung des Balancier's um seinen ruhenden Mittelpunkt G erzeugte. Streng genommen gilt diese letztere Bemerkung allerdings nur unter Annahme unendlich langer Lenkerstangen, bei endlicher Länge derselben wird der Mittelpunkt G des Balancier's in Folge der Verschiedenheit der Kurbelbewegung beim Hin- und Rückgang kleine Schwingungen machen.

Aus diesen Bemerkungen geht hervor, daß der Hub des Balancierzapfens G wesentlich von der gegenseitigen Stellung der beiden Kurbeln zu einander abhängig ist, dieser Hub beträgt bei gleichen Kurbeln und Rädern $2r$, wenn die Kurbeln gleichzeitig in den inneren todten Punkten B_3 und D_3 stehen, wogegen der Hub zu Null wird, wenn die eine Kurbel im äußeren todten Punkte D_1 steht, sobald die andere im inneren todten Punkte B_3 sich befindet, d. h. wenn der Voreilungswinkel β im ersten Falle gleich Null, im zweiten Falle gleich 180° ist. Es ist daher leicht zu erkennen, daß bei einer Größe dieses Voreilungswinkels β zwischen 0 und 180° auch eine Hubhöhe des Balancierzapfens zwischen $2r$ und 0 sich einstellen wird. Denkt man sich nun, daß in einem gewissen Augenblicke die Kurbeln gleichzeitig in den inneren todten Punkten B_3 und D_3 stehen, und daß die Zähnezahlen der Räder ungleich sind. Bei einer vollen Umdrehung 2π der Kurbel AB ist die andere Kurbel CD um $\frac{z}{z_1} 2\pi$ gedreht worden, wenn $\frac{z}{z_1}$ das Verhältniß der Zähnezahlen bedeutet, worin für z und z_1 die kleinsten ganzen Zahlen gewählt sein mögen, welche dieses Verhältniß ausdrücken. Es wird daher nunmehr die eine Kurbel der anderen um den Winkel

$$E = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) 2\pi = \frac{z_1 - z}{z_1} 2\pi$$

voraneilen. Dieser Voreilungswinkel E wird nach der zweiten Umdrehung der Kurbel AB dann

$$2E = 2 \frac{z_1 - z}{z_1} 2\pi$$

und nach n Umdrehungen

$$n \frac{z_1 - z}{z_1} 2\pi$$

betragen. Setzt man hierin $n = z_1$, so beträgt die Voreilung $(z_1 - z) 2\pi$, d. h. eine ganze Anzahl von Umdrehungen, mit anderen Worten: die Kurbeln stehen jetzt beide zugleich wieder in den inneren todtten Punkten B_3 und D_3 . Es folgt daher hieraus, daß während dieser z_1 Umdrehungen der Kurbel A die Balancieraxe G von ihrer tiefsten Lage ausgehend nach einer Anzahl von Schwingungen, deren Größe wegen der Veränderlichkeit des Voreilungswinkels ebenfalls eine veränderliche sein muß, allmählig wieder in ihre tiefste Lage zurückkehrt. Die Schwingungsweiten dieser einzelnen Oscillationen werden dabei nach einem gewissen von der Länge der Kurbeln r und r_1 und der Balancierarme a und a_1 abhängigen Gesetze allmählig abnehmen und zunehmen. Dächte man sich etwa mit dem Zapfen G einen schreibenden Stift verbunden, welcher bei der gedachten schwingenden Bewegung auf einem Papierstreifen seinen Weg markirte, welcher Streifen eine gleichmäßig fortschreitende Bewegung normal zu HH erhielte, so würde das dadurch auf dem Streifen entstehende Diagramm die Bewegung des Punktes G veranschaulichen. Man kann sich aber auch leicht durch eine Zeichnung die entstehende Bewegung veranschaulichen. Zu dem Ende denke man eine beliebige Strecke ab einer horizontalen Abscissenaxe, Fig. 558, als Maß für die Winkelbewegung der Axe A während einer Bewegungsperiode, d. h. während die Kurbel AB z_1 Umdrehungen gemacht hat, aufgetragen. Für die Figur ist $\frac{z}{z_1} = \frac{3}{4}$ angenommen, dem entsprechend ist ab in b_1, b_2 und b_3 in vier gleiche Theile getheilt, und es ist daher

$$ab_1 = b_1 b_2 = b_2 b_3 = b_3 b = 2\pi.$$

Denkt man sich nun in hinreichend vielen Punkten dieser Axe den Weg, um welchen der Drehpunkt des Balanciers bewegt wird,

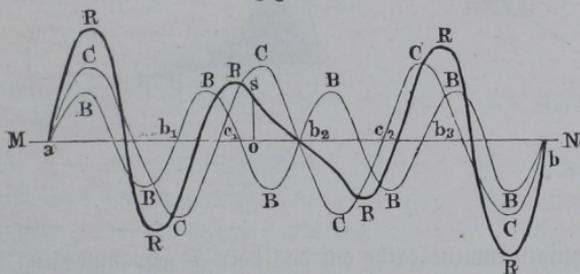
$$s = \frac{a_1}{l} r \sin \alpha$$

als Ordinate aufgetragen, so erhält man eine periodische in der Geometrie als Sinoide bekannte Curve $BBB \dots$, deren Ordinaten nach beiden Seiten der Axe MN die Wege des Balancierzapfens nach beiden Seiten von dessen mittlerer Stellung angeben.

In derselben Weise läßt sich nun die Sinuslinie $CCC \dots$ für die andere Kurbel auftragen, wobei zu berücksichtigen ist, daß diese Kurbel bei dem Ver-

Verhältniß $\frac{z}{z_1} = \frac{3}{4}$ nur drei Umgänge gemacht haben wird, daher die Länge ab hierfür durch c_1 und c_2 in drei gleiche Theile zu theilen ist, so daß jeder Theil $ac_1 = c_1c_2 = c_2b$ einer ganzen Umdrehung 2π der zweiten Kurbel entspricht. Addirt man nun die Ordinaten dieser beiden Curven unter Berücksichtigung von deren Richtungen nach verschiedenen Seiten der Mittellinie MN , so erhält man in der resultirenden Curve $RRR\dots$ das Diagramm für die Bewegung des Balancierzapfens. Dabei bedeuten die mit R bezeichneten Punkte die höchsten und tiefsten Stellungen des besagten Zapfens und man erhält in irgend einem Punkte o der Axe in der Ordinate os diejenige Größe, um welche der Balancierzapfen aus seiner mitt-

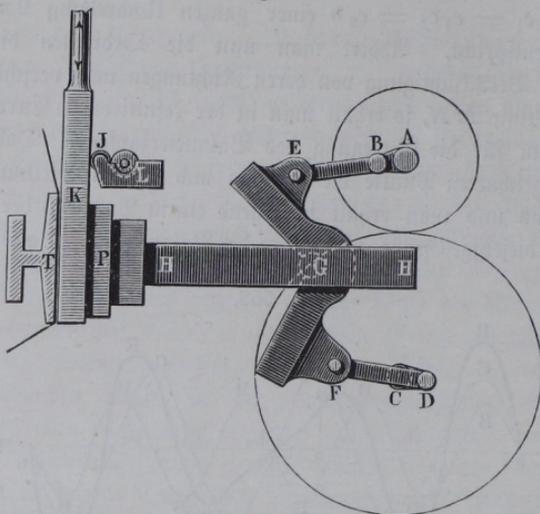
Fig. 558.



leren Stellung bewegt ist, sobald die Kurbeln diejenigen Drehungen gemacht haben, welche der Axeneintheilung gemäß durch die Abscisse ao angegeben ist. Eine häufigere Verwendung findet der besprochene Mechanismus in den Rattendruckereien bei den nach ihrem Erfinder sogenannten Perrotinen, d. h. Plattendruckmaschinen, bei welchen die hin- und zurückgehende Bewegung der gravirten Druckplatte mit Hilfe zweier Römer'schen Kurbeln erzeugt wird, deren Umdrehungszahlen sich wie 1 : 2 verhalten. In Fig. 559 (a. f. S.) ist der hierbei angewandte Mechanismus seinem Wesen nach angegeben. Die beiden Axen A und C , welche durch Zahnräder im Verhältniß 1 : 2 in Verbindung stehen, tragen die Kurbeln AB und CD , deren Lenkerstangen an die Transverse EF angeschlossen sind. Der Drehpunkt G der letzteren ist mit der in Geradföhrungen geföhrten Druckstange HH verbunden, deren vordere Stirn mit der Druckplatte P versehen ist. Dieser Druckplatte P gegenüber ist das feste Gestell zu einem Drucktische T gestaltet, über welchen das zu bedruckende Zeug periodisch um Längen gleich der Höhe der Druckplatte P hinweggezogen wird. Zwischen Druckplatte und Drucktisch ist die Platte K (Chassis) beweglich, welche bei ihrer Bewegung von der Farbwalze J aus dem Farbtroge L mit Farbe versehen wird, um in ihrer tiefsten Stellung der herantretenden Druckplatte P solche abzugeben. Wird hierauf nach dem

Rückgange der Formplatte *P* die Platte *K* nach oben zurückgezogen, so hat die Druckplatte *P* Gelegenheit, bei ihrem wiederholten Vorgange die von der

Fig. 559.



Reliefform aufgenommene Farbe auf das über *T* gespannte Zeug zu drucken. Hierzu ist daher erforderlich, daß die Druckplatte *P* aus ihrer hintersten Lage abwechselnd einen kleineren Vorschub bis an das Chassis *K* und dann einen größeren Vorschub bis an den Drucktisch *T* erlangt.

- §. 143. **Einfluss der Massen.** Bei den vorstehenden Ermittlungen ist auf die in den bewegten Theilen enthaltenen Massen eine besondere Rücksicht nicht genommen worden. Da indessen der Bewegungszustand des Kurbelgetriebes von diesen Massen wesentlich beeinflusst wird, insbesondere, sobald die Geschwindigkeiten nicht sehr kleine sind, so soll die Untersuchung mit Rücksicht hierauf besonders geführt werden. Man hat es bei dem Kurbelgetriebe hauptsächlich mit drei verschiedenen Massen zu thun, nämlich mit denjenigen, welche, mit der Kurbelwelle fest verbunden, lediglich eine rotirende Bewegung haben, ferner mit denjenigen, welche, mit dem Kreuzkopfe direct oder indirect vereinigt, an dessen geradlinig hin- und hergehender Bewegung sich theilnehmen, und endlich mit denjenigen Massen, deren Bewegung wie die der Lenkerstange eine aus Drehung und Verschiebung zusammengesetzte ist.

Die rotirenden Massen setzen sich zusammen aus denjenigen der Kurbelwelle nebst Kurbel und Kurbelzapfen sowie aller auf der Kurbelwelle fest angebrachten Theile, wie Räder, Scheiben zc. Ist die Kurbel auf der Axe

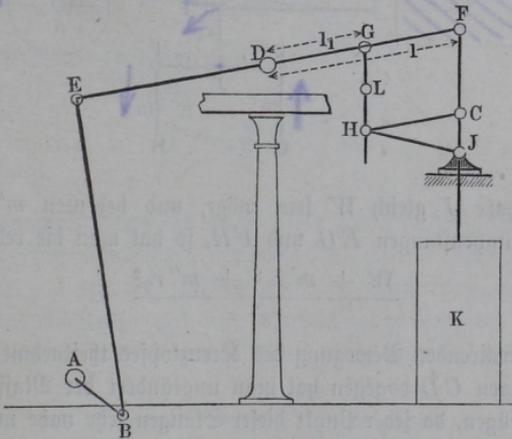
eines Wasserrades befestigt, so wird in der Regel die Masse dieses letzteren, bei einer Dampfmaschine diejenige des Schwungrades vorwiegend sein. Bei Kurbeln auf Transmissionswellen, wie sie zum Betriebe von Pumpen und anderen Arbeitsmaschinen häufiger angewendet werden, hat man als rotirende Masse diejenige der ganzen Transmissionswelle und aller auf dieser in starrer Weise befestigten Räder, Riemscheiben, Kuppelungen zc. anzunehmen. Im Folgenden soll immer unter der rotirenden Masse, welche mit m_1 bezeichnet werde, die auf einen Abstand von der Kurbelaxe gleich der Kurbellänge r reducirte Masse verstanden werden. Nach dem in Thl. I, §. 302 u. f. über Trägheitsmomente Gesagten wird die Reduction der Massen auf den Kurbelzapfen keine Schwierigkeiten haben, man wird in jedem Falle die so reducirte Masse eines Maschinentheiles zu

$$m = \frac{W}{r^2}$$

erhalten, wenn W das Trägheitsmoment dieses Theiles, bezogen auf die Kurbelaxe, vorstellt.

Als hin- und hergehende Massen hat man bei dem Kurbelgetriebe zunächst diejenigen des Kreuzkopfes mit seinen Gleitschuhen sowie der mit dem Kreuzkopfe direct verbundenen Kolbenstange nebst Kolben aufzufassen. Ist an diese Kolbenstange unmittelbar eine andere Stange, etwa diejenige einer

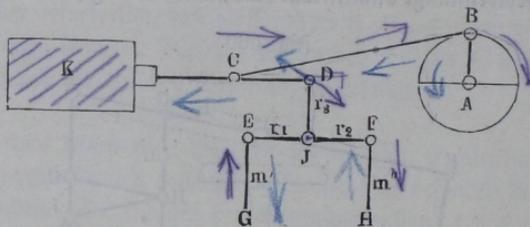
Fig. 560.



Luft- oder Wasserpumpe, angeschlossen, so ist auch die Masse dieser Stange sowie ihres Kolbens der Masse des Kreuzkopfes direct hinzuzufügen. Bei Maschinen, bei welchen zwischen die Kolbenstange und die Lenkerstange ein Hebel oder Balancier, wie in Fig. 560, eingeschaltet ist, hat man die schwin-

gende Masse dieses Balanciers auf den Endpunkt F , an welchem die Kolbenstange angreift, derart zu reduciren, daß man, unter W das Trägheitsmoment dieses Balanciers EDF , bezogen auf die Aze D , verstanden, in F eine Masse gleich $\frac{W}{l^2}$ angebracht denkt, welche ebenso wie die Masse der Hängschiene FC direct derjenigen der Kolbenstange hinzugefügt wird. Ebenso würde man bei sehr genauer Rechnung die Masse des Gegenlenkers JH auf den Punkt H reducirt zu den Massen der Stange L und der Schiene GH zu addiren und die erhaltene Summe m in dem Betrage $m \frac{l^2}{7^2}$ in F wirksam anzunehmen haben. Wollte man auch noch die Parallelschienen HC beachten, so würde man deren Trägheitsmoment in Bezug auf die Aze D des Balanciers durch l^2 dividirt in F wirksam denken müssen. Im Allgemeinen wird man die geringen Massen des Parallelogramms jedoch gegen die übrigen Massen vernachlässigen dürfen. In ähnlicher Art hätte man auch die Reduction der Massen vorzunehmen, wenn von dem Kreuzkopfe durch Hebel, wie es bei horizontalen Dampfmaschinen etwa nach Art von Fig. 561 öfter geschieht, Pumpen bewegt werden. Bezeichnet man dabei mit r_1 , r_2 und r_3 die Hebelsarme des Winkelhebels EFD , dessen Trägheitsmoment bezogen

Fig. 561.



*spezifische
Bildung
Pleuellager
Drehmoment
Drehmoment
spezifisch*

auf seine Drehaxe J gleich W sein möge, und bedeuten m' und m'' die Massen der Pumpenstangen EG und FH , so hat man die reducirt Masse

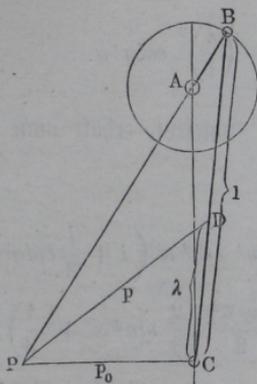
$$\frac{W + m' r_1^2 + m'' r_2^2}{r_3^2}$$

als an der alternirenden Bewegung des Kreuzkopfes theilnehmend anzusehen. Die Schubstangen CD dagegen hat man ungeändert der Masse des Kreuzkopfes hinzuzufügen, da jeder Punkt dieser Stangen sehr nahe mit dem Kreuzkopfe übereinstimmende Bewegung hat. Die Summe aller in solcher Art auf den Kreuzkopf reducirt Massen soll in dem Folgenden mit m_2 bezeichnet werden.

Was endlich die Lenkerstange anbetrifft, so wird man deren Masse als unerheblich in den meisten Fällen gegen die viel größeren rotirenden und

alternirenden Massen vernachlässigen können, doch kann man bei strengen Rechnungen den Einfluß dieser Masse in folgender Art näherungsweise in Betracht ziehen. Die Momentanbewegung der Lenkerstange BC , Fig. 562, in irgend einer Kurbelstellung AB läßt sich bekanntlich als eine unend-

Fig. 562.



lich kleine Drehung der Stange um den Pol P auffassen, welchen letzteren man jederzeit in dem Durchschnittspunkte der Kurbelrichtung BA mit der in C auf der Bewegung des Kreuzkopfes errichteten Normale CP findet. Bezeichnet nun p_0 den Polstrahl PC des Kreuzkopfes, dessen Geschwindigkeit c ist, und p den Polstrahl PD eines beliebigen Stangenpunktes D , in der Entfernung λ von C , so ist die Geschwindigkeit des letzteren $\frac{p}{p_0} c$. Das in D enthal-

tene Massenelement der Lenkerstange, deren Querschnitt f und deren Dichte γ sein möge, ist $m = f\gamma \partial \lambda$, unter $\partial \lambda$ ein Längenelement verstanden. Folglich hat man die vermöge der Geschwindigkeit in dem Elemente angehäuften Massenarbeit gleich

$$f\gamma \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 \frac{c^2}{2} \partial \lambda,$$

und die Massenarbeit in der ganzen Stange gleich

$$\int_0^l f\gamma \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 \frac{c^2}{2} \partial \lambda.$$

Zur Bestimmung dieses Werthes sei der Querschnitt f constant, d. h. die Stange von cylindrischer Form vorausgesetzt, welche Annahme bei der geringen Größe von m_3 als zulässig erscheint. Außerdem möge die Länge l der Stange im Vergleiche mit dem Kurbelarme r genügend groß angenommen werden, um in dem Ausdrücke für die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes

$$c = v \left(\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right)$$

das Glied $\frac{r}{2l} \sin 2\alpha$ vernachlässigen zu können, eine Annahme, die um so mehr zulässig erscheint, je mehr sich α dem rechten Winkel, also $\sin 2\alpha$ dem Werthe Null nähert. Betrachtet man ferner das Dreieck PCD als bei C

rechtwinkelig, indem man den Winkel γ wegen der Kleinheit der Größe $\frac{r}{l}$ vernachlässigt, so hat man den Polstrahl PD gleich

$$p = \sqrt{p_0^2 + \lambda^2},$$

oder da in diesem Falle $p_0 = l \tan \alpha$ zu setzen ist:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 = \frac{l^2 \tan^2 \alpha + \lambda^2}{l^2 \tan^2 \alpha} = 1 + \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cot^2 \alpha.$$

Diesen Werth für $\left(\frac{p}{p_0}\right)^2$ und $v \sin \alpha$ für c eingesetzt, erhält man für obiges Integral den Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{\gamma f}{2} \int_0^l \left(1 + \frac{\lambda^2}{l^2} \cot^2 \alpha\right) v^2 \sin^2 \alpha \partial \lambda &= \frac{\gamma f}{2} v^2 \sin^2 \alpha \left(l + \frac{l}{3} \cot^2 \alpha\right) \\ &= \frac{m_3 v^2}{2} \left(\sin^2 \alpha + \frac{1}{3} \cos^2 \alpha\right) = \frac{m_3 v^2}{2} \left(\frac{2}{3} \sin^2 \alpha + \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Da nun die in der rotirenden Masse m_1 vermöge der Geschwindigkeit v enthaltene Massenarbeit durch

$$\frac{m_1 v^2}{2}$$

und die in der schwingenden Masse m_2 vermöge der Geschwindigkeit $v \sin \alpha$ enthaltene Arbeit durch

$$\frac{m_2 v^2 \sin^2 \alpha}{2}$$

ausgedrückt ist, so läßt sich, wie obiger Ausdruck zeigt, die in der Masse m_3 der Lenkerstange angehäuften Arbeit annähernd derart berücksichtigen, daß man diese Masse zu einem Drittel der rotirenden Masse m_1 und zu zwei Dritteln der schwingenden Masse m_2 hinzugefügt denkt. Für die folgenden Untersuchungen soll immer eine solche Vertheilung der Lenkerstangemasse m_3 vorausgesetzt werden, so daß die besondere Einführung des Werthes m_3 in die Rechnung nicht nöthig ist.

Um zunächst im Allgemeinen von der Wirkung der Massen auf den Bewegungszustand der Kurbel eine Vorstellung zu gewinnen, bemerke man, daß in jedem Falle, ob nun die Drehung der Kurbelwelle mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolge oder nicht, die schwingende Masse von jeder Todtlage aus, woselbst ihre Geschwindigkeit gleich Null ist, während des ersten Theils der Bewegung ihre Geschwindigkeit zu einem gewissen größten Werthe c_{max} steigert, worauf diese Geschwindigkeit allmählig wieder zu Null herabsinkt, wenn die Kurbel die nächste Todtlage erreicht. Diese Masse m_2 nimmt daher bei jedem einfachen Schube während des ersten Theils der Bewegung eine ent-

sprechende mechanische Arbeit zu ihrer Beschleunigung in sich auf, welche Arbeit sie während des zweiten Theils der Bewegung wieder in ihrem ganzen Betrage hergiebt, da sie immer in den Grenzen des Hubes oder in den Wendepunkten ihre ganze lebendige Kraft eingebüßt hat. Während daher die schwingende Masse bei jedem einfachen Hube anfangs auf die Bewegung verzögernd wirkt, wird sie nachher einen beschleunigenden Einfluß ausüben. Es ist natürlich, daß die zu der Beschleunigung der schwingenden Massen erforderliche mechanische Arbeit von dem treibenden Organe angewendet werden muß, also von dem Dampfkolben bei Dampfmaschinen und von der Kurbelwelle bei Pumpwerken. Der Grenzpunkt zwischen diesen beiden entgegengesetzten Einwirkungen wird demjenigen Augenblicke entsprechen, in welchem der Kreuzkopf seine größte Geschwindigkeit c_{max} erreicht hat, da in diesem Augenblicke die Beschleunigung in eine Verzögerung übergeht. Diese größte Kolbengeschwindigkeit wurde in §. 139 unter Voraussetzung einer gleichmäßigen Kurbeldrehung ermittelt; es ist aber leicht einzusehen, daß die Kurbelwelle selbst eine genau gleichmäßige Bewegung niemals annehmen wird, denn hierzu würde erforderlich sein, daß die treibende Kraft mit Einschluß der aus der Verzögerung der schwingenden Massen hervorgehenden in jedem Augenblicke der Bewegung genau gleich dem Widerstande mit Einschluß des aus der Beschleunigung der schwingenden Massen resultirenden wäre. Da dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, die treibende Kraft vielmehr den widerstehenden Druck bald übertrifft, bald darunter bleibt, so wird in Folge des bald positiven, bald negativen Ueberschusses der ersteren Kraft über die letztere die Kurbelwelle bald einer Beschleunigung bald einer Verzögerung ausgesetzt, und es wird für den Betrag der hierdurch erzeugten Geschwindigkeitschwankungen in erster Reihe die Größe der rotirenden Masse m_1 bestimmend sein. Diese rotirende Masse nimmt hierbei in den Perioden einer überwiegenden Triebkraft mechanische Arbeit auf, indem sie beschleunigt wird, und sie giebt dagegen diese aufgespeicherte Arbeit wieder ab, sobald die treibende Kraft unter den Betrag des Widerstandes herabsinkt. Auch die rotirende Masse, als deren Hauptrepräsentanten die Schwungräder anzusehen sind, wirken daher bald als widerstehende, bald als treibende Organe, und es ist unschwer zu erkennen und wird in dem Folgenden näher untersucht werden, daß die Schwankungen der Geschwindigkeiten um so geringer, die Gleichförmigkeit der Bewegung daher um so größer werden muß, je größer die rotirende Masse m_1 ist. Auch die schwingende Masse m_2 nimmt natürlich an den hier gedachten Schwankungen der Geschwindigkeit Theil, im Verhältnisse mit der rotirenden Masse m_1 ist dieselbe aber in den meisten Fällen von nur untergeordneter Bedeutung für die Gleichförmigkeit in dem Bewegungszustande der Kurbelwelle. Daß übrigens die von den Massen abwechselnd aufgenommenen und wieder abgegebenen mechanischen Arbeiten

auch hier innerhalb gewisser Bewegungsperioden von genau gleichen Beträgen sind, gilt jedenfalls für den mit dem Namen „Beharrungszustand“ bezeichneten Zustand der Bewegung, wie er sich bei allen Maschinen sehr schnell von selbst einstellt, und wie er in den folgenden Untersuchungen immer vorausgesetzt werden soll. So lange bei einer Maschine die treibende Kraft den durchschnittlichen Widerstand übertrifft, wie dies nach dem Inangangsetzen einer Maschine während des sogenannten Anlaufes der Fall ist, wird die überschießende Arbeit der treibenden Kraft fortwährend zu Beschleunigung der Massen verwendet. Erst wenn die mit Vergrößerung der Geschwindigkeit gewachsenen Arbeitswiderstände einen durchschnittlichen Betrag erreicht haben, welcher dem Durchschnittswerthe der Triebkraft gleich ist, welche letztere im Allgemeinen mit zunehmender Geschwindigkeit kleiner zu werden pflegt, stellt sich jener gedachte Beharrungszustand im Gange der Maschine ein. In diesem Zustande stellen sich aus den oben erläuterten Gründen gewisse periodische Geschwindigkeitsänderungen in regelmäßiger Wiederholung ein, so lange in der Wirkung der Triebkraft und des Widerstandes nichts geändert wird. Beim Außerbetriebsetzen der Maschine, bei welchem die treibende Kraft gänzlich außer Wirkung gesetzt wird, muß die Bewegung noch eine gewisse Zeit hindurch vermöge der den Massen innewohnenden lebendigen Kraft andauern. Diese Bewegung, der sogenannte „Auslauf“ der Maschine, ist in ähnlicher Art durch eine fortgesetzte Verzögerung bis zum schließlichen Stillstande gekennzeichnet, in welcher der Anlauf durch eine stetige Beschleunigung vom Zustande der Ruhe bis zu dem der normalen Geschwindigkeit charakterisirt wird. Es ist selbstredend, daß die während des Anlaufes von der treibenden Kraft in den Massen angehäuften lebendige Kraft während des Auslaufs in ihrem vollen Betrage wieder hergegeben wird.

§. 144. Die Kurbel mit constanter Kolbenkraft. Um den Bewegungszustand der Kurbel unter Berücksichtigung der Massenwirkungen zu verfolgen, soll zunächst die einfachere Voraussetzung gemacht werden, daß die auf den Kreuzkopf wirkende Kolbenkraft Q von constanter Größe sein soll, wie diese Voraussetzung dem Falle einer Volldruckmaschine oder bezw. einer Wasserpumpe entspricht, und soll später die Untersuchung für eine veränderliche Kolbenkraft, wie sie den Expansionsmaschinen und Luftpumpen zukommt, besonders geführt werden. Auch die Kraft an der Kurbelwelle sei von constanter Größe und habe dieselbe an einem Halbmesser gleich dem Kurbelarme r den Werth P , und zwar soll zunächst entsprechend einer Dampfmaschine vorausgesetzt werden, daß der Antrieb von der Kolbenstange ausgeht, so daß man unter P einen Widerstand zu denken hat, wie er etwa von der durch die Dampfmaschine zu betreibenden Mühlen- oder anderen Anlage auf die Kurbelwelle wirksam ist. Wenn, wie bei dem Betriebe der Pump-

werke so häufig der Fall ist, der Antrieb von der Kurbelwelle ausgeht, so hat man sich unter P die constante, auf den Kurbelhalbmesser reducirte Betriebskraft zu denken, welche in Form eines Räder- oder Riemendruckes auf die Kurbelwelle ausgeübt wird. Unter m_1 und m_2 seien bezw. die rotirenden und die schwingenden Massen verstanden, so daß die Masse der Lenkerstange in dem vorstehend ermittelten Verhältnisse von ein und zwei Drittel in jenen Massen m_1 und m_2 enthalten ist. Auf die Gewichte der schwingenden Massen soll indeß hier keine Rücksicht genommen werden, indem man die Schubrichtung des Kreuzkopfes entweder als eine horizontale voraussetzen mag, oder indem man bei verticaler Kolbenbewegung sich denken kann, daß die Gewichte der auf- und niedergehenden Theile durch ein an der Kurbelwelle angebrachtes Gegengewicht im Gleichgewichte gehalten werden. Ueber die Verhältnisse und Wirkungen eines solchen Gegengewichtes soll in der Folge Näheres angegeben werden.

Den Beharrungszustand der Maschine vorausgesetzt folgt zunächst allgemein, daß bei dem Kurbelgetriebe die Periode der Bewegung durch eine Kurbeldrehung dargestellt ist, da das ganze System in derselben Lage, etwa in einem todten Punkte, immer wieder genau dieselben Geschwindigkeiten hat, und unter denselben Bedingungen sich befindet. Die Arbeit der Kolbenkraft Q während eines Hin- und Herganges ist daher genau gleich der Arbeit der Kraft P an der Welle, und man findet daher in dem vorliegenden Falle, wo Q constant ist, aus

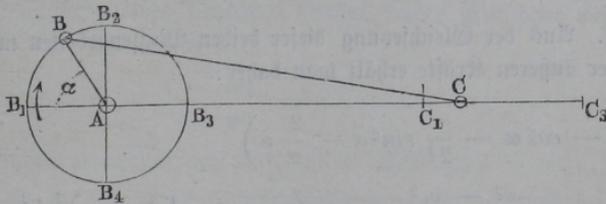
$$Q \cdot 2 \cdot 2r = P \cdot 2\pi r$$

den Werth

$$P = \frac{2}{\pi} Q = 0,6366 Q,$$

vorausgesetzt, daß von allen Nebenhindernissen, wie Reibungen, zuvörderst abgesehen werde. Unter Beibehaltung der bisherigen Bedeutung von r , l ,

Fig. 563.



α , β und γ sei unter v die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens in einem beliebigen Augenblicke, unter v_1 diejenige im äußeren todten Punkte B_1 , Fig. 563, und unter v_0 die durchschnittliche Geschwindigkeit des Kurbelzapfens ver-

standen, während wieder c die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes in beliebiger Stellung desselben bedeuten soll.

Setzt man voraus, die Kurbel AB habe sich von der äußeren Todtlage AB_1 aus um den Winkel α gedreht, wobei der Kreuzkopf den Weg

$$C_1 C = s = r (1 - \cos \alpha) - \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{2l}$$

zurückgelegt hat, so ist die gesammte von den äußeren Kräften Q und P hierbei verrichtete Arbeit ausgedrückt durch:

$$A = Qs - Pr\alpha = Qr (1 - \cos \alpha) - Q \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{2l} - Q \frac{2}{\pi} r \alpha.$$

Diese Arbeitsdifferenz A ist daher nach dem Vorstehenden während der betrachteten Drehung α von den Massen m_1 und m_2 in Form von lebendiger Kraft entweder aufgenommen oder von ihnen abgegeben worden, je nachdem der Ausdruck für A einen positiven oder negativen Werth hat. Die Arbeit, welche die Massen aber aufgenommen oder verrichtet haben, läßt sich wie folgt bestimmen. Die rotirende Masse m_1 , welche im todten Punkte die Geschwindigkeit v_1 hatte, bedurfte zur Erlangung der nunmehrigen Geschwindigkeit v der mechanischen Arbeit

$$m_1 \frac{v^2 - v_1^2}{2}.$$

Die schwingende Masse m_2 dagegen, welche im todten Punkte eine Geschwindigkeit gleich Null besaß, hat in C , wo ihre Geschwindigkeit zu dem Werthe

$$c = v \left(\sin \alpha - \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right)$$

angewachsen ist, hierzu die mechanische Arbeit

$$m_2 \frac{c^2}{2} = m_2 \left(\sin \alpha - \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right)^2 \frac{v^2}{2}$$

gebraucht. Aus der Gleichsetzung dieser beiden Massenarbeiten mit der Arbeit A der äußeren Kräfte erhält man daher:

$$\begin{aligned} Qr \left(1 - \cos \alpha - \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha \right) \\ = m_1 \frac{v^2 - v_1^2}{2} + m_2 \left(\sin \alpha - \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right)^2 \frac{v^2}{2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Geschwindigkeit v des Kurbelzapfens in der beliebigen, um den Winkel α vom äußeren todten Punkte abstehenden Lage zu

$$v = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + 2 Q r \left(1 - \cos \alpha - \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha\right)}{m_1 + m_2 \left(\sin \alpha - \frac{r}{2l} \sin 2\alpha\right)^2}}.$$

Diese Formel, welche für den Hingang des Kolbens von C_1 nach C_3 entwickelt worden ist, gilt übrigens auch für den Rückgang, wenn man darin den mit $\frac{r}{2l}$ behafteten Gliedern das entgegengesetzte Vorzeichen giebt, und den Winkel α von der inneren Todtlage AB_3 aus zählt.

Mit Rücksicht auf den immer nur kleinen Werth von $\frac{r}{2l}$, welcher meist den Betrag von 0,1 nicht übersteigt, kann man obigen Ausdruck mit genügender Annäherung zu

$$v = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + 2 Q r \left(1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha\right)}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha}}$$

vereinfachen. Dieser Ausdruck für v , welchen man auch

$$v = v_1 \sqrt{\frac{1 + \frac{2 Q r}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha\right)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \alpha}}$$

schreiben kann, läßt nunmehr ein Urtheil über den Bewegungszustand der Kurbel zu, und es lassen sich insbesondere die kleinste und die größte Geschwindigkeit der letzteren bestimmen. Zu dem Ende möge zuvörderst bemerkt werden, daß die schwingende Masse m_2 im Vergleich zu der rotirenden m_1 in fast allen Fällen der Praxis so klein ist, daß das Verhältniß $\frac{m_2}{m_1}$ meistens nur Bruchtheile eines Procentes beträgt, daher man ohne wesentliche Ungenauigkeit das Glied im Nenner

$$\frac{m_2}{m_1} \sin^2 \alpha$$

gegen die Einheit vernachlässigen darf. Man erhält dann

$$\begin{aligned} v &= v_1 \sqrt{1 + \frac{2 Q r}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha\right)} \\ &= v_1 \left[1 + \frac{Q r}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha\right)\right]. \end{aligned}$$

Die Winkel α für die kleinste und die größte Kurbelgeschwindigkeit erhält man einfach durch

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0, \text{ d. h. } \sin \alpha = \frac{2}{\pi} = 0,6366.$$

Diesem Werthe entsprechen die beiden Supplementwinkel

$$\alpha_1 = 39^\circ 32' \text{ und } \alpha_2 = 140^\circ 28'.$$

Hiervon entspricht in dem vorliegenden Falle, wo der Antrieb von der Kolbenstange ausgeht, der spitze Winkel α_1 der kleinsten und der stumpfe Winkel α_2 der größten Geschwindigkeit, denn die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = \cos \alpha$$

ist in dem ersteren Falle positiv, in dem letzteren negativ. Es ist dieses Verhalten auch schon aus dem in §. 139 über die Umfangskraft Gesagten ersichtlich, da diese Umfangskraft U beim Beginne der Bewegung Null ist und erst nach einer gewissen Drehung die an der Kurbel wirkende Widerstandskraft P erreicht und überschreitet. Es ist auch deutlich, daß die beiden durch die Winkel α_1 und α_2 repräsentirten Kurbelstellungen diejenigen sind, in denen die Umfangskraft U genau den Werth der Widerstandskraft P erreicht, indem in diesen Stellungen der größten und kleinsten Geschwindigkeit die Beschleunigung der Kurbelwelle zu Null wird. Ebenso ergibt sich leicht, daß für den Fall, daß der Antrieb von der Kurbelwelle ausgeht (Pumpwerke), umgekehrt der spitze Winkel α_1 der größten und der stumpfe Winkel α_2 der kleinsten Geschwindigkeit entspricht, da dann die Arbeit A der äußeren Kräfte das entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, und die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = - \cos \alpha$$

für α_1 negativ und für α_2 positiv wird.

Diese eminenten Geschwindigkeiten selbst ergeben sich, wenn man in die Formel für die Geschwindigkeit v jene Werthe von α_1 und α_2 einführt, wodurch man erhält:

$$v_{\min} = v_1 \sqrt{1 - 0,4210 \frac{Qr}{m_1 v_1^2}} = v_1 \left(1 - 0,2105 \frac{Qr}{m_1 v_1^2} \right)$$

$$\text{für } \alpha_1 = 39^\circ 32';$$

$$v_{\max} = v_1 \left(1 + 0,2105 \frac{Qr}{m_1 v_1^2} \right) \text{ für } \alpha_2 = 140^\circ 28'.$$

Für den Fall, daß der Antrieb von der Kurbel ausgeht, erhält man für die Geschwindigkeiten dieselben Werthe, nur daß, wie schon bemerkt, v_{\min} mit α_2 und v_{\max} mit α_1 zusammengehört. Es gelten nämlich die für v gefunde-

nen Formeln auch für diesen Fall, sobald man dem mit Q behafteten Gliede, welches die Arbeit der äußeren Kräfte Q und P darstellt, das entgegengesetzte Zeichen giebt, so daß man für diesen Fall

$$v = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 - 2 Q r \left(1 - \cos \alpha - \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha \right)}{m_1 + m_2 \left(\sin \alpha - \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right)^2}}$$

hat. Setzt man in der allgemeinen Formel für die Geschwindigkeit v für α den Winkel π entsprechend einer halben Umdrehung, so erhält man für den inneren todten Punkt:

$$v = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + 2 Q r \left(1 - \cos 180^\circ - \frac{r}{2l} \sin^2 180^\circ - \frac{2}{\pi} \pi \right)}{m_1 + m_2 \left(\sin 180^\circ - \frac{r}{2l} \sin 360^\circ \right)^2}} = v_1,$$

woraus man schließt, daß die Geschwindigkeit der einfachen Kurbel in deren beiden Todtlagen von gleicher Größe ist. Um auch die mittlere oder durchschnittliche Geschwindigkeit v_0 zu bestimmen, für welche man bei n Umdrehungen der Kurbel in der Minute

$$v_0 = \frac{n \cdot 2 \pi r}{60} = 0,1047 n r$$

setzen kann, gehe man von der angenäherten Formel

$$v = v_1 \left[1 + \frac{Q r}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha \right) - \frac{m_2}{2 m_1} \sin^2 \alpha \right]$$

aus und schreibe dieselbe

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_1} \left[1 - \frac{Q r}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha \right) + \frac{m_2}{2 m_1} \frac{1 - \cos 2 \alpha}{2} \right].$$

Bezeichnet nun ∂t ein Zeitelement, so hat man

$$v \partial t = r \partial \alpha,$$

daher

$$\partial t = \frac{r \partial \alpha}{v} = \frac{r \partial \alpha}{v_1} \left[1 - \frac{Q r}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha \right) + \frac{m_2}{2 m_1} \frac{1 - \cos 2 \alpha}{2} \right].$$

Durch Integration dieses Ausdrucks zwischen den Grenzen π und 0 erhält man dann die Zeit einer halben Umdrehung:

$$\begin{aligned} t &= \frac{r}{v_1} \left[\pi - \frac{Q r}{m_1 v_1^2} \left(\pi - \sin \pi - \frac{2}{\pi} \pi^2 \right) + \frac{m_2}{4 m_1} \left(\pi - \frac{\sin 2 \pi}{2} \right) \right] \\ &= \frac{r \pi}{v_1} \left(1 + \frac{m_2}{4 m_1} \right). \end{aligned}$$

Daher folgt die mittlere Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{r\pi}{t} = \frac{v_1}{1 + \frac{m_2}{4m_1}} = v_1 \left(1 - \frac{m_2}{4m_1}\right).$$

Dieser Werth ist nur um eine sehr kleine Größe von v_1 verschieden, so daß man mit genügender Annäherung die mittlere Geschwindigkeit v_0 gleich derjenigen v_1 in den todten Punkten annehmen und daher in allen bisher entwickelten Formeln auch v_0 anstatt v_1 setzen kann.

Anmerkung. Wollte man die Vernachlässigung von m_2 gegen m_1 nicht zulassen, so könnte man einen näheren Ausdruck für die eminenten Geschwindigkeiten aus der allgemeinen Formel

$$v = v_1 \sqrt{\frac{1 + \frac{2Qr}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha\right)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \alpha}}$$

in folgender Art herleiten. Man schreibe

$$\begin{aligned} v &= v_1 \sqrt{\left(1 - \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \alpha\right) \left[1 + \frac{2Qr}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha\right)\right]} \\ &= v_1 \left[1 + \frac{Qr}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha\right) - \frac{m_2}{2m_1} \sin^2 \alpha\right] \end{aligned}$$

und erhält hieraus durch Differentiation:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = v_1 \left[\frac{Qr}{m_1 v_1^2} \left(\sin \alpha - \frac{2}{\pi}\right) - \frac{m_2}{2m_1} \sin 2\alpha\right] = 0.$$

Hieraus folgt zur genaueren Bestimmung von α_1 und α_2

$$\sin \alpha = \frac{2}{\pi} + \frac{m_2 v_1^2}{2Qr} \sin 2\alpha.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich α_1 und α_2 am besten probeweise bestimmen, etwa indem man zunächst für α die Werthe $39^\circ 32'$ und $140^\circ 28'$ einführt und behufs der Erfüllung der Gleichung die geringe Correctur vornimmt. Für die Geschwindigkeiten erhält man mit jenen Werthen $\alpha_1 = 39^\circ 32'$ und $\alpha_2 = 140^\circ 28'$ die Ausdrücke:

$$v_{\min} = v_1 \left(1 - 0,2105 \frac{Qr}{m_1 v_1^2} - 0,2026 \frac{m_2}{m_1}\right)$$

und

$$v_{\max} = v_1 \left(1 + 0,2105 \frac{Qr}{m_1 v_1^2} - 0,2026 \frac{m_2}{m_1}\right).$$

§. 145. **Einfluss der Länge der Schubstange.** Bisher ist immer die Voraussetzung gemacht worden, daß die Länge l der Lenkerstange gegen den Halbmesser r der Kurbel so groß sei, daß man die Glieder mit dem Factor $\frac{r}{2l}$ vernachlässigen könne. Streng genommen gelten daher die gefundenen Be-

ziehungen nur für die Schleifenkurbel, bei welcher l als unendlich groß anzunehmen ist. In den Ausführungen der Praxis pflegt man l sehr häufig etwa gleich dem fünffachen Kurbelhalbmesser anzunehmen, so daß

$$\frac{r}{2l} = 0,1$$

ist. In Folge dieser endlichen Länge der Schubstangen stellen sich die größten und kleinsten Geschwindigkeiten der Kurbel von etwas anderen Werthen heraus, und es finden diese Geschwindigkeiten auch in anderen Kurbelstellungen statt, als oben berechnet worden. Um den Einfluß der Lenkstangenlänge auf diese Werthe kennen zu lernen, sei auf die allgemeine Formel für die Geschwindigkeit aus §. 144 zurückgegriffen:

$$v = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + 2 Q r \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r \sin^2 \alpha}{2l} - \frac{2}{\pi} \alpha \right)}{m_1 + m_2 \left(\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right)}}$$

worin die oberen Zeichen für den Hingang, die unteren für den Rückgang gelten. Dies kann man mit Rücksicht auf die Kleinheit von m_2 gegen m_1 auch schreiben:

$$\begin{aligned} v &= v_1 \sqrt{1 + \frac{2 Q r}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r \sin^2 \alpha}{2l} - \frac{2}{\pi} \alpha \right)} \\ &= v_1 \left[1 + \frac{Q r}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha \mp \frac{r \sin^2 \alpha}{2l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Hieraus findet man wieder wie oben die Bedingung für die größten und kleinsten Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \sin \alpha - \frac{2}{\pi} \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha = 0,$$

oder

$$\sin \alpha = \frac{2}{\pi} \pm \frac{r}{2l} \sin 2\alpha.$$

Diese Gleichung liefert für jeden Werth von $\frac{r}{l}$ zwei Paare von Winkeln und zwar α_1 und α_2 mit Benutzung des oberen Vorzeichens für den Hingang und (α_1) und (α_2) mit Benutzung des unteren Zeichens für den Rückgang. Hiervon entsprechen bei Dampfmaschinen α_1 und (α_1) den kleinsten und α_2 und (α_2) den größten Geschwindigkeiten, welche Geschwindigkeiten man erhält, wenn man die betreffenden Werthe von α in die Formel für v einführt. Es ist ferner leicht zu erkennen, daß diese vier Winkel α_1 , α_2 , (α_1) und (α_2) in solchem Verhältnisse zu einander stehen, daß der spitze Winkel α_1

den stumpfen (α_2) zu 180° ergänzt, und daß ebenso α_2 und (α_1) Nebenwinkel zu einander sein müssen, denn wenn die Gleichung

$$\sin \alpha = \frac{2}{\pi} + \frac{r}{2l} \sin 2\alpha$$

durch den Winkel α , erfüllt wird, so muß auch der Gleichung

$$\sin \alpha = \frac{2}{\pi} - \frac{r}{2l} \sin 2\alpha$$

durch den Winkel $(\pi - \alpha_1)$ Genüge geleistet werden.

Eine andere merkwürdige Eigenschaft ergibt sich in Beziehung auf die vier Geschwindigkeiten v_{max} und v_{min} für den Hingang und (v_{max}) und (v_{min}) für den Rückgang. Es läßt sich nämlich leicht erkennen, daß v_{max} die mittlere Geschwindigkeit v_0 oder v_1 der toten Punkte genau um dieselbe Größe übertrifft, um welche (v_{min}) darunter bleibt, und ein gleiches Verhältniß findet zwischen (v_{max}) und v_{min} statt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} v_{max} &= v_1 \left[1 + \frac{Qr}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos \alpha_2 - \frac{2}{\pi} \alpha_2 - \frac{r \sin^2 \alpha_2}{2l} \right) \right] \\ &= v_1 \left(1 + \frac{Qr}{m_1 v_1^2} k \right), \end{aligned}$$

wenn der Werth in der Klammer mit k bezeichnet wird.

Ferner ist aber auch

$$\begin{aligned} (v_{min}) &= v_1 \left[1 + \frac{Qr}{m_1 v_1^2} \left(1 - \cos(\pi - \alpha_2) - \frac{2}{\pi} (\pi - \alpha_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{r \sin^2(\pi - \alpha_2)}{2l} \right) \right] = v_1 \left[1 + \frac{Qr}{m_1 v_1^2} (k) \right]. \end{aligned}$$

Es ist aber sogleich ersichtlich, daß die beiden Werthe

$$k = 1 - \cos \alpha_2 - \frac{2}{\pi} \alpha_2 - \frac{r \sin^2 \alpha_2}{2l}$$

und

$$(k) = 1 - \cos(\pi - \alpha_2) - \frac{2}{\pi} (\pi - \alpha_2) + \frac{r \sin^2(\pi - \alpha_2)}{2l}$$

der Größe nach gleich und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sind.

Die Werthe α_1 und (α_1), sowie α_2 und (α_2) sind verschieden, ebenso wie v_{max} von (v_{max}), sowie v_{min} von (v_{min}) abweicht, so lange die Größe $\frac{r}{l}$ einen merklichen Werth hat. Es geht hieraus hervor, daß die Bewegungsverhältnisse des Kurbelgetriebes während des Hinganges nicht genau dieselben sind, wie beim Rückgange. Nur wenn, wie bei der Schleifenkurbel, $l = \infty$ wird, findet man $\alpha_1 = (\alpha_1)$ und $\alpha_2 = (\alpha_2) = \pi - \alpha_1$ und man hat in die-

sem Falle auch für den Hin- und Rückgang gleiche Maximal- und gleiche Minimalgeschwindigkeiten.

Wenn die Bewegung von der Kurbelwelle aus erfolgt, so gehen die hier gefundenen Maximalgeschwindigkeiten in Minimalgeschwindigkeiten über und umgekehrt. Man hat dann in den vorstehenden Ausdrücken für v nur dem mit Q behafteten Gliede, welches aus der Arbeit der äußeren Kräfte herrührt, das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben.

Legt man das sehr gebräuchliche Verhältniß $\frac{r}{l} = 1/5$ der Rechnung zu Grunde, so erhält man für den Hingang aus

$$\sin \alpha = \frac{2}{\pi} \alpha + 0,1 \sin 2 \alpha$$

die betreffenden Winkel α_1 und α_2 nebst den ausgezeichneten Geschwindigkeiten:

$$\alpha_1 = 47^\circ 25'; \quad v_{min} = v_0 \left(1 - 0,2577 \frac{Qr}{m_1 v_0^2} \right),$$

$$\alpha_2 = 146^\circ 45'; \quad v_{max} = v_0 \left(1 + 0,1757 \frac{Qr}{m_1 v_0^2} \right);$$

dagegen wird für den Rückgang aus

$$\sin \alpha = \frac{2}{\pi} \alpha - 0,1 \sin 2 \alpha$$

erhalten:

$$(\alpha_1) = 33^\circ 15'; \quad (v_{min}) = v_0 \left(1 - 0,1757 \frac{Qr}{m_1 v_0^2} \right),$$

$$(\alpha_2) = 132^\circ 35'; \quad (v_{max}) = v_0 \left(1 + 0,2577 \frac{Qr}{m_1 v_0^2} \right).$$

Frägt man noch nach denjenigen Kurbelstellungen, in welchen die Geschwindigkeit der Kurbel gerade gleich der mittleren v_1 oder v_0 ist, so hat man nur

$$1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha \mp 0,1 \sin^2 \alpha = 0$$

zu setzen und erhält daraus für den Hingang mittelst des oberen Vorzeichens

$$\alpha_0 = 106^\circ 30'$$

und für den Rückgang

$$(\alpha_0) = 73^\circ 30' = \pi - \alpha_0.$$

Für die Schleifenkurbel oder $\frac{r}{l} = 0$ erhält man natürlich aus

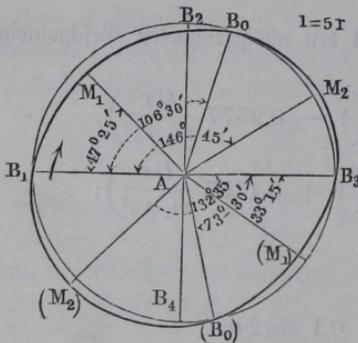
$$1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} \alpha = 0$$

den Werth

$$\alpha_0 = (\alpha_0) = \frac{\pi}{2}.$$

Man kann sich von der Veränderlichkeit der Kurbelgeschwindigkeit graphisch eine Vorstellung verschaffen, wenn man den Radius AB , Fig. 564, der Kurbel als das Maß der mittleren Geschwindigkeit v_0 betrachtet und für jede Kurbelstellung die zugehörige Geschwindigkeit v vom Mittelpunkte A auf der Kurbelrichtung angetragen denkt. Die dadurch erhaltene geschlossene Curve

Fig. 564.



$B_1 M_1 B_0 M_2 B_3 (M_1) B_0 (M_2) B_1$ läßt dann in ihren Abweichungen von dem Kurbelkreise die Schwankungen der Geschwindigkeit gegen die mittlere Geschwindigkeit v_0 übersehen. Man erkennt daraus, daß die Geschwindigkeit der Kurbel in ihrer mittleren Stellung B_2 beim Hingange genau um dieselbe Größe unter der mittleren Geschwindigkeit v_0 verbleibt, um welche ihre Geschwindigkeit in der mittleren Stellung B_4 beim Rückgang den Durchschnittswerth v_0 über-

trifft. Man erhält diese Geschwindigkeiten in B_2 und B_4 aus der Formel für v , wenn man darin $\alpha = \frac{\pi}{2}$ einsetzt, zu

$$v = v_0 \left(1 \mp \frac{r}{2l} \frac{Qr}{m_1 v_0^2} \right).$$

Für die Schleifenkurbel werden diese Geschwindigkeiten gleich der mittleren v_0 , es geht daher für dieselbe die Geschwindigkeitscurve durch die Eckpunkte B_1, B_2, B_3 und B_4 aller Quadranten. Nach den früheren Bemerkungen ergibt sich übrigens ohne Weiteres, daß die in Fig. 564 gezeichnete Geschwindigkeitscurve auch dem Falle entspricht, daß der Antrieb von der Kurbelwelle ausgeht, wenn man nur annehmen will, daß die Kurbel sich in der entgegengesetzten Richtung $B_1 B_4 B_3 \dots$ umdrehe.

Die Bewegung der Kurbel erfolgt um so ungleichförmiger, je größer die Differenz zwischen der absolut größten und kleinsten Geschwindigkeit (v_{max}) — v_{min} im Vergleiche zu der mittleren Geschwindigkeit v_0 ist. Man pflegt daher diesen Werth

$$\frac{(v_{max}) - v_{min}}{v_0} = \delta$$

mit dem Namen des Ungleichförmigkeitscoefficienten zu bezeichnen. Nach dem Vorhergehenden hat dieses Verhältniß, welches man bei-
läufig auch durch

$$2 \frac{(v_{max}) - v_0}{v_0}$$

ausdrücken kann, für $\frac{r}{l} = 1/5$ den Werth

$$\delta = 0,5154 \frac{Qr}{m_1 v_0^2},$$

während es für die Schleifenkurbel oder für $\frac{r}{l} = 0$ zu

$$\delta = 0,4210 \frac{Qr}{m_1 v_0^2}$$

sich ergab. Im Allgemeinen nimmt die Ungleichförmigkeit mit dem Verhältniß $\frac{r}{l}$ ab, und man wird zur Erzielung eines möglichst gleichförmigen Ganges neben einer entsprechend langen Lenkerstange eine genügend große rotierende Masse m_1 anwenden müssen. Ebenso erkennt man, daß bei gleicher Kraft Q und Masse m_1 sowie unter sonst gleichen Umständen die Gleichförmigkeit des Ganges um so größer werden muß, je größer die durchschnittliche Umdrehungsgeschwindigkeit v_0 gewählt wird. Ein Näheres darüber siehe bei den Schwungrädern.

Die folgende Tabelle enthält die Winkel und Größen der kleinsten und größten Geschwindigkeiten sowie die Ungleichförmigkeitscoefficienten für einige der gebräuchlicheren Verhältnisse $\frac{r}{l}$. Außerdem sind unter der Bezeichnung α_0 diejenigen Winkel angegeben, welchen eine Kurbelgeschwindigkeit gleich der mittleren zukommt, während die Geschwindigkeiten der Kurbel in ihren mittleren Stellungen unter der Bezeichnung $v_{\frac{\pi}{2}}$ aufgeführt sind.

Tabelle für die Kurbelgeschwindigkeiten.

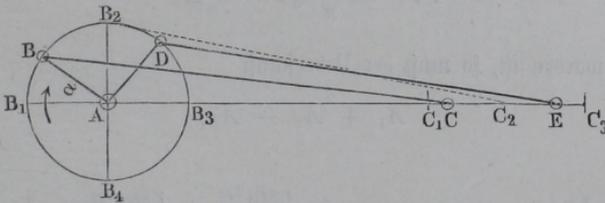
$$C = \frac{Qr}{m_1 v_0^2}.$$

$l =$	4 r	5 r	6 r	∞
v^{min}	$(1 - 0,2718 C) v_0$	$(1 - 0,2577 C) v_0$	$(1 - 0,2489 C) v_0$	$(1 - 0,2105 C) v_0$
α_1	49° 29'	47° 25'	46° 3'	39° 32'
v^{max}	$(1 + 0,1686 C) v_0$	$(1 + 0,1757 C) v_0$	$(1 + 0,1807 C) v_0$	$(1 + 0,2105 C) v_0$
α_2	148° 14'	146° 45'	145° 58'	140° 28'
(v^{min})	$(1 - 0,1686 C) v_0$	$(1 - 0,1757 C) v_0$	$(1 - 0,1807 C) v_0$	$(1 - 0,2105 C) v_0$
(α_1)	31° 46'	33° 15'	34° 2'	39° 32'
(v^{max})	$(1 + 0,2718 C) v_0$	$(1 + 0,2577 C) v_0$	$(1 + 0,2489 C) v_0$	$(1 + 0,2105 C) v_0$
(α_2)	130° 31'	132° 35'	133° 57'	140° 28'
α_0	108° 30'	106° 30'	102° 50'	90°
$v\pi/2$	$(1 \mp 0,125 C) v_0$	$(1 \mp 0,1 C) v_0$	$(1 \mp 0,0833 C) v_0$	v_0
δ	0,5436 C	0,5154 C	0,4978 C	0,4210 C

Die doppelte Kurbel. Man wendet in vielen Fällen bei Dampfmaschinen, bei solchen mit Vorwärts- und Rückwärtsgang fast immer, zwei Kurbeln auf einer gemeinschaftlichen Welle an, und pflegt dann diese Kurbeln um 90° gegen einander zu versetzen. Bei einer solchen Anordnung sind eigentliche todte Punkte des Systems nicht vorhanden, indem die Todtlagen der einen Kurbel zwischen diejenigen der anderen hineinfallen, es ist daher durch die Kolbendrücke auch in jeder beliebigen Kurbelstellung ein Antrieb nach der Kurbelwelle ermöglicht, was bei einer einfachen Kurbel in den Todtlagen nicht der Fall ist. Aus diesem Grunde wendet man Doppeltkurbeln fast immer bei Dampfmaschinen an, welche, wie Locomotiv- und Dampfschiffmaschinen, von jeder Stellung aus sowohl vorwärts als rückwärts sich bequem müssen in Gang setzen lassen. Auch bei Pumpen und ähnlichen Maschinen, bei welchen der Antrieb von der Kurbelwelle ausgeht, wird die Doppeltkurbel zuweilen, doch vergleichsweise nur selten, zur Anwendung gebracht.

Um die Theorie der Doppeltkurbel zu entwickeln, soll wieder vorausgesetzt werden, daß die Kurbelwelle von den Kolbenkräften in Umdrehung gesetzt werde. Es bedente wieder P die constante Widerstandskraft an der Kurbelwelle in einem Abstände r gleich dem Arme jeder der beiden gleich langen Kurbeln, und Q sei der constante Druck an jedem der beiden Kolben, m_1 sei die rotirende auf die Kurbelwarzen reducirte Masse und m_2 die Masse, welche mit jedem Kreuzkopfe verbunden zu denken ist. Die Massen der Lenkerstangen mögen in der in §. 143 angegebenen Art, nämlich zu $\frac{1}{3}$ auf die Kurbelzapfen und zu $\frac{2}{3}$ auf die Kreuzköpfe, vertheilt gedacht werden und diese Antheile in m_1 und m_2 inbegriffen sein. Die Kurbeln sollen, wie fast immer der Fall ist, um $BAD = 90^\circ$, Fig. 565, gegen einander ver-

Fig. 565.



setzt sein. Zunächst hat man wieder für den eingetretenen Beharrungszustand der Bewegung die mechanischen Arbeiten $P \cdot 2\pi r$ und $2 \cdot Q \cdot 4r$ gleichzusetzen, woraus man jetzt

$$P = \frac{4}{\pi} Q$$

erhält. Denkt man wieder die Kurbelwelle um einen beliebigen Winkel α ,

von der äußeren Todtlage AB_1 ausgehend, gedreht, so daß die Kurbel B von B_1 nach B und diejenige D von B_2 nach D gelangt, so hat sich der Kreuzkopf C um das Stück

$$s_1 = C_1 C = r (1 - \cos \alpha) \mp \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{2l}$$

bewegt, während der Kreuzkopf E aus der Stellung C_2 in diejenige E gelangt ist, also den Weg

$$\begin{aligned} s_2 &= C_1 E - C_1 C_2 = r [1 - \cos (90^\circ + \alpha)] \mp \frac{r^2 \sin^2 (90^\circ + \alpha)}{2l} \\ &- \left[r (1 - \cos 90^\circ) \mp \frac{r^2 \sin^2 90^\circ}{2l} \right] = r \sin \alpha \pm \frac{r^2}{2l} (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= r \left(\sin \alpha \pm \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right) \end{aligned}$$

zurückgelegt hat.

Für die von beiden Stangen verrichtete mechanische Arbeit hat man daher den Ausdruck

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= Qs_1 + Qs_2 \\ &= Qr \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha \mp \frac{r \sin^2 \alpha}{2l} \pm \frac{r \sin^2 \alpha}{2l} \right), \end{aligned}$$

in welchem Ausdrücke das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem die betreffende Kurbel im Hingange oder Hergange befindlich ist.

Da während dieser Bewegung von der Kurbelwelle die mechanische Arbeit

$$Pr\alpha = \frac{4}{\pi} Qr\alpha = A_3$$

verrichtet worden ist, so muß der Ueberschuß

$$A_1 + A_2 - A_3,$$

d. h. also

$$Qr \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha \mp \frac{r \sin^2 \alpha}{2l} \pm \frac{r \sin^2 \alpha}{2l} - \frac{4}{\pi} \alpha \right)$$

von den Massen als lebendige Kraft aufgenommen oder abgegeben sein. — Die von der Masse m_1 der Kurbelwelle bei dem Uebergange aus der Geschwindigkeit v_1 in B_1 in die Geschwindigkeit v in B aufgenommene Arbeit ist wieder

$$L_1 = m_1 \frac{v^2 - v_1^2}{2},$$

und ebenso bestimmt sich wie bei der einfachen Kurbel die von der Masse m_2 des Kreuzkopfes C aufgenommene Arbeitsleistung für die Aenderung der Geschwindigkeit Null im todten Punkte in diejenige

$$c = v \left(\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right)$$

in der Stellung B zu

$$L_2 = m_2 \left(\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right)^2 \frac{v^2}{2}.$$

Dagegen hat die Masse m_2 des zweiten Kreuzkopfes E , welche zu Anfang der betrachteten Bewegung in C_2 stehend die Geschwindigkeit

$$v_1 \left(\sin 90^\circ \mp \frac{r}{2l} \sin 180^\circ \right) = v_1$$

hatte, nunmehr die Geschwindigkeit

$$v \left[\sin(90^\circ + \alpha) \mp \frac{r}{2l} \sin 2(90^\circ + \alpha) \right] = v \left(\cos \alpha \pm \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right)$$

erlangt, so daß der Zuwachs an Massenarbeit

$$L_3 = m_2 \left(\cos \alpha \pm \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right)^2 \frac{v^2}{2} - m_2 \frac{v_1^2}{2}$$

beträgt. Vernachlässigt man in den Ausdrücken für L_2 und L_3 alle höheren Potenzen von $\frac{r}{2l}$ als kleine Größen, so läßt sich setzen:

$$L_2 = m_2 \left(\sin^2 \alpha \mp \frac{r}{l} \sin \alpha \sin 2\alpha \right) \frac{v^2}{2}$$

und

$$L_3 = m_2 \left(\cos^2 \alpha \pm \frac{r}{l} \cos \alpha \sin 2\alpha \right) \frac{v^2}{2} - m_2 \frac{v_1^2}{2},$$

woraus also

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 + L_3 \\ = m_1 \frac{v^2 - v_1^2}{2} + m_2 \frac{v^2 - v_1^2}{2} + m_2 \frac{r}{l} (\mp \sin \alpha \pm \cos \alpha) \sin 2\alpha \frac{v^2}{2} \end{aligned}$$

folgt. Bei der Kleinheit von m_2 gegen m_1 und von r gegen l kann man das letzte Glied in diesem Ausdruck vernachlässigen und erhält daher einfacher:

$$L_1 + L_2 + L_3 = (m_1 + m_2) \frac{v^2 - v_1^2}{2}.$$

Setzt man diesen Zuwachs an Massenarbeit gleich der von den äußeren Kräften geleisteten Arbeit $A_1 + A_2 - A_3$, so wird:

$$(m_1 + m_2) \frac{v^2 - v_1^2}{2} \\ = Qr \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha \mp \frac{r \sin^2 \alpha}{2l} \pm \frac{r \sin^2 \alpha}{2l} - \frac{4}{\pi} \alpha \right),$$

woraus man schließlich für die Geschwindigkeit v der Kurbelwarzen den Ausdruck erhält:

$$v = \sqrt{v_1^2 + \frac{2Qr}{m_1 + m_2} \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha \mp \frac{r \sin^2 \alpha}{2l} \pm \frac{r \sin^2 \alpha}{2l} - \frac{4}{\pi} \alpha \right)}.$$

Unter Vernachlässigung der mit $\frac{r}{2l}$ behafteten Glieder, d. h. unter Voraussetzung von unendlich langen Lenkerstangen und für große Massen kann man auch schreiben:

$$v = v_1 \left[1 + \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \frac{4}{\pi} \alpha \right) \right].$$

Für diesen Fall sehr langer Lenkerstangen erhält man daher die größten, bezw. kleinsten Geschwindigkeiten durch Differentiation aus

$$\cos \alpha + \sin \alpha - \frac{4}{\pi} = 0,$$

oder

$$\left(\frac{4}{\pi} \right)^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha;$$

d. i.

$$\sin 2\alpha = \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 - 1 = 0,6211.$$

Dieser Gleichung entsprechen die beiden Complementswinkel

$$\alpha_1 = 19^\circ 12' \text{ und } \alpha_2 = 70^\circ 48'.$$

Es ist nach dem Früheren nun klar, daß dem Winkel $\alpha_1 = 19^\circ 12'$ die kleinste und dem Winkel $\alpha_2 = 70^\circ 48'$ die größte Geschwindigkeit entspricht, wenn, wie hier angenommen, der Antrieb von den Kolbenstangen ausgeht. Bei der Bewegung von Pumpen durch die Kurbelwelle würde das Gegentheil stattfinden. Diese ausgezeichneten Geschwindigkeiten selbst erhält man durch Einsetzung der gefundenen Werthe für α_1 und α_2 zu:

$$v_{\min} = v_1 \left(1 - 0,0422 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right)$$

und

die Geschwindigkeit $v = v_1$ wird, man hat daher nicht nur in den Grenzpunkten der Quadranten, sondern auch in deren Mitten, also überhaupt in Abständen von 45° dieselbe Geschwindigkeit v_1 wie in den toten Punkten. Man kann auch hier die Geschwindigkeit in diesen Punkten v_1 gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit v_0 nehmen, um so mehr, als die maximale Geschwindigkeit v_{max} jene Geschwindigkeit v_1 genau um denselben Betrag übersteigt, um welchen v_{min} darunter bleibt. Wenn man daher in Fig. 566 (a. v. S.) wieder die Kurbelgeschwindigkeiten proportional den Radien auf den Kurbelstellungen angetragen denkt, so ergibt die wellenförmige Curve $B_1 O B_2 \dots$ ein anschauliches Bild von den regelmäßigen Schwankungen der Geschwindigkeit. Dabei sind die Winkel $B_1 A M_1 = 19^\circ 12'$ und $B_1 A M_2 = 70^\circ 48'$ wie oben berechnet worden.

§. 147. Einfluss der Länge der Schubstangen. Die Geschwindigkeitsverhältnisse der Kurbelwelle stellen sich indessen wesentlich anders dar, wenn die Lenkerstangen eine endliche Länge haben, und soll dieser Fall hier untersucht werden, unter der Voraussetzung, daß $\frac{r}{l}$ einen Werth zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ habe. Unter dieser Voraussetzung muß auf die allgemeine Gleichung

$$A = A_1 + A_2 - A_3 = L_1 + L_2 + L_3$$

zurückgegriffen werden. In dieser Gleichung ist, wie oben gezeigt wurde, annähernd

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = (m_1 + m_2) \frac{v^2 - v_1^2}{2}$$

für alle Quadranten gültig, vorausgesetzt, daß v_1 die Kurbelgeschwindigkeit in dem Anfangspunkte des Quadranten, also gleich derjenigen in bezw. B_1 , B_2 , B_3 und B_4 bedeutet. Die Arbeiten dagegen A sind für die verschiedenen Quadranten verschieden.

Für die Bewegung im ersten Quadranten von B_1 bis B_2 ist die Arbeit

$$A = A_1 + A_2 - A_3$$

ausgedrückt durch

$$Qr \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \frac{4}{\pi} \alpha \right),$$

da die beiden Glieder $\frac{r}{2l} \sin^2 \alpha$ sich fortheben. Man kommt daher hier auf dieselbe Formel für v wie für den Fall unendlich langer Lenkerstangen, nämlich

$$v = v_1 \left[1 + \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \frac{4}{\pi} \alpha \right) \right].$$

Es gelten hier also auch dieselben Ermittlungen, wie im vorigen Paragraphen, insbesondere ist für $\alpha = 0, 45^\circ$ und 90° , die Geschwindigkeit $v = v_1$ und die Minimal- und Maximalgeschwindigkeiten sind, den Winkeln $\alpha_1 = 19^\circ 12'$ und $\alpha_2 = 70^\circ 48'$ entsprechend durch die schon berechneten Werthe

$$v_1 \left(1 \mp 0,0422 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right)$$

gegeben.

Für den zweiten Quadranten $B_2 B_3$ hat man die Anfangsgeschwindigkeit in B_2 daher zu v_1 wie in B_1 gefunden, dagegen ist die Arbeit der Kräfte durch

$$Qr \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha + \frac{r}{l} \sin^2 \alpha - \frac{4}{\pi} \alpha \right)$$

gegeben, wenn der Winkel α hierbei von dem Anfangspunkte B_2 des zweiten Quadranten gezählt wird, so daß man jetzt erhält:

$$v = v_1 \left[1 + \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha + \frac{r}{l} \sin^2 \alpha - \frac{4}{\pi} \alpha \right) \right].$$

Zunächst findet man hieraus wieder für das Maximum und Minimum der Geschwindigkeit durch Differentiation aus

$$\cos \alpha + \sin \alpha + \frac{r}{l} \sin 2\alpha - \frac{4}{\pi} = 0$$

die Winkel α_1 und α_2 vermittelst

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{r}{l} \sin 2\alpha \right)^2.$$

Es ist daher

$$1 + \sin 2\alpha = \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 - \frac{8}{\pi} \frac{r}{l} \sin 2\alpha + \frac{r^2}{l^2} \sin^2 2\alpha$$

oder

$$\sin 2\alpha = \frac{\left(\frac{4}{\pi} \right)^2 - 1}{1 + \frac{8}{\pi} \frac{r}{l} - \frac{r^2}{l^2} \sin 2\alpha}.$$

Dieser Gleichung entsprechen folgende Winkel und die zugehörigen eminenten Geschwindigkeiten für $\frac{r}{l} = 1/4$:

$$\alpha_1 = 11^\circ 20\frac{1}{2}' ; \quad v_{\min} = v_1 \left(1 - 0,02618 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right)$$

$$\alpha_2 = 78^\circ 39\frac{1}{2}' ; \quad v_{\max} = v_1 \left(1 + 0,27618 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right)$$

für $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$:

$$\alpha_1 = 12^\circ 17\frac{1}{2}' ; \quad v_{\min} = v_1 \left(1 - 0,02827 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right)$$

$$\alpha_2 = 77^\circ 42\frac{1}{2}' ; \quad v_{\max} = v_1 \left(1 + 0,22827 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right)$$

für $\frac{r}{l} = \frac{1}{6}$:

$$\alpha_1 = 13^\circ 3' ; \quad v_{\min} = v_1 \left(1 - 0,02987 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right)$$

$$\alpha_2 = 76^\circ 57' ; \quad v_{\max} = v_1 \left(1 + 0,19155 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right).$$

Setzt man ferner

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

ein, so erhält man die Geschwindigkeit im inneren todten Punkte B_3 zu

$$v_2 = v_1 \left(1 + \frac{r}{l} \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right).$$

Es besteht sonach ein Unterschied zwischen der doppelten und der einfachen Kurbel darin, daß bei der ersteren die Geschwindigkeit v_2 im inneren todten Punkte nicht gleich derjenigen v_1 im äußeren Todtpunkte ist, welche Gleichheit für die einfache Kurbel gefunden wurde.

Für die Bewegung der Kurbelwelle durch den dritten Quadranten hat man wieder die Arbeit der Kräfte

$$A = Qr \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \frac{4}{\pi} \alpha \right)$$

wie im ersten Quadranten, der Unterschied zwischen beiden Bewegungsquarteln besteht nur darin, daß die Bewegung im äußeren todten Punkte B_1 mit der Geschwindigkeit v_1 begann, während die letztere im inneren todten Punkte B_3 den ermittelten Betrag

$$v_2 = v_1 \left(1 + \frac{r}{l} \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right)$$

hat. Man findet daher im dritten Quadranten die Geschwindigkeit für einen beliebigen Drehungswinkel α ganz wie im ersten durch

$$v = v_2 \left[1 + \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_2^2} \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \frac{4}{\pi} \alpha \right) \right].$$

Auch hier ergeben sich in derselben Art wie im ersten Quadranten für die kleinste und größte Geschwindigkeit die Werthe:

$$\alpha_1 = 19^\circ 12'; \quad v_{\min} = v_2 \left(1 - 0,0422 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_2^2} \right);$$

$$\alpha_2 = 70^\circ 48'; \quad v_{\max} = v_2 \left(1 + 0,0422 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_2^2} \right).$$

Man findet auch hier für $\alpha = 0, 45^\circ$ und 90° gleiche Geschwindigkeiten

$$v_2 = v_1 \left(1 + \frac{r}{l} \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right).$$

Für $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ ist

$$v_2 = v_1 \left(1 + 0,2 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right),$$

daher

$$\begin{aligned} v_{\max} &= v_1 \left(1 + 0,2 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right) \left(1 + 0,0422 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right) \\ &= v_1 \left(1 + 0,242 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v_{\min} &= v_1 \left(1 + 0,2 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right) \left(1 - 0,0422 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right) \\ &= v_1 \left(1 + 0,158 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} \right). \end{aligned}$$

Im vierten Quadranten beginnt die Bewegung in B_4 mit derselben Geschwindigkeit v_2 wie im dritten, und man hat, da hier die Arbeit der Kräfte Q und P durch

$$A = Qr \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \frac{r}{l} \sin^2 \alpha - \frac{4}{\pi} \alpha \right)$$

dargestellt ist, für dieses letzte Bewegungsquartel:

$$v = v_2 \left[1 + \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_2^2} \left(1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \frac{r}{l} \sin^2 \alpha - \frac{4}{\pi} \alpha \right) \right].$$

Setzt man auch hier wieder

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0,$$

so erhält man

$$\cos \alpha + \sin \alpha - \frac{r}{l} \sin 2 \alpha - \frac{4}{\pi} = 0,$$

oder wie oben:

$$1 + \sin 2 \alpha = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \frac{8}{\pi} \frac{r}{l} \sin 2 \alpha + \frac{r^2}{l^2} \sin^2 2 \alpha,$$

d. i.:

$$\sin 2 \alpha = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1}{1 - \frac{8}{\pi} \frac{r}{l} - \frac{r^2}{l^2} \sin 2 \alpha}.$$

Wenn man hierin für $\frac{r}{l}$ die Größen $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ einführt, so findet man die rechte Seite stets größer als Eins, woraus man folgern muß, daß im vierten Quadranten bei diesen Längenverhältnissen überhaupt keine größte und kleinste Geschwindigkeit vorkommt, daß vielmehr die Kurbelgeschwindigkeit von ihrem Werthe in B_4

$$v_2 = v_1 \left(1 + \frac{r}{l} \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2}\right)$$

stetig abnehmend bei einer Drehung um 90° in B_1 den ursprünglichen Werth v_1 wieder erreicht. Daß dieser letztere Werth in B_1 wirklich sich einstellt, zeigt sich durch Einsetzen von

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

in die letzte Formel für v , wodurch man erhält:

$$v = v_2 \left(1 - \frac{r}{l} \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_2^2}\right),$$

oder für v_2 seinen Werth eingesetzt:

$$v = v_1 \left(1 + \frac{r}{l} \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2}\right) \left(1 - \frac{r}{l} \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_2^2}\right) = v_1.$$

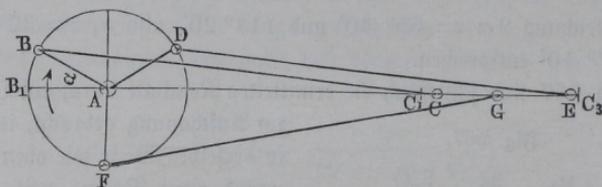
Es kann übrigens hier bemerkt werden, daß auch im vierten Quadranten unter Umständen eine größte und kleinste Geschwindigkeit vorkommen kann, nämlich in dem Falle, daß das Verhältniß $\frac{r}{l}$ noch kleiner ist als oben angenommen, wie ja schon unter der Voraussetzung $\frac{r}{l} = 0$ ein Maximum und ein Minimum der Geschwindigkeit auch im vierten Quadranten gefunden

ersten Quadranten zu suchen, man hat daher den Ungleichförmigkeitsgrad hier:

$$\delta = (0,242 + 0,042) \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2} = 0,284 \frac{Qr}{(m_1 + m_2) v_1^2}.$$

§. 148. Die dreifache Kurbel. Es kommt zuweilen, wenn auch selten, der Fall vor, daß eine Welle mit drei gleich langen unter 120° gegen einander versetzten Kurbeln versehen ist, sei es nun, daß diese Welle durch drei Dampfkolben bewegt werde, oder daß sie dreien Pumpkolben ihre hin- und hergehende Bewegung mittheilt. Zunächst ist klar, daß von der Lage der Kurbelwelle, in welcher die eine Kurbel AB in dem todten Punkte B_1 steht, Fig. 568, eine Drehung um 120° genügt, um eine eben solche Lage des

Fig. 568.



Systems wieder herbeizuführen, indem dann jede einzelne Kurbel an die Stelle der vorhergehenden getreten ist und auch die Verbindung mit ihrem Kreuzkopfe genau dieselbe ist, wie sie bei ihrer Vorgängerin war. Eine ganze Umdrehung der Welle wird daher aus drei übereinstimmenden Perioden bestehen, und es genügt, die Bewegung für eine Drehung von 120° zu untersuchen. Eine solche Bewegung zerfällt aber ihrerseits wieder in zwei gleiche Abschnitte von je 60° Drehung, welche dadurch von einander verschieden sind, daß in der ersten Hälfte zwei Kurbeln B und D im Hingange, und eine F im Rückgange befindlich sind, während die zweite Hälfte der Bewegung durch das Hingehen nur einer Kurbel B und das Hergehen der beiden anderen D und F charakterisirt ist. Unter Beibehaltung der früher gebrauchten Bezeichnungen lassen sich die hierfür gültigen Gleichungen wie in den vorhergehenden Fällen leicht aufstellen, wenn man nur berücksichtigt, daß der einem Drehungswinkel α entsprechende Weg des Kreuzkopfes durch

$$s = r \left(1 - \cos \alpha - \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right)$$

beim Hingange und durch

$$s = r \left(1 - \cos \alpha + \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right)$$

beim Rückgange ausgedrückt ist. Demgemäß ist die mechanische Arbeit der äußeren Kräfte P und Q während der Drehung α der Kurbelwelle für den ersten Sextanten der Bewegung ausgedrückt durch:

$$\begin{aligned} A = & -Pr\alpha + Qr \left(1 - \cos \alpha - \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right) \\ & + Qr \left[1 - \cos(120^\circ + \alpha) - \frac{r}{2l} \sin^2(120^\circ + \alpha) \right. \\ & \quad \left. - \left(1 - \cos 120^\circ - \frac{r}{2l} \sin^2 120^\circ \right) \right] \\ & + Qr \left[1 - \cos(60^\circ + \alpha) + \frac{r}{2l} \sin^2(60^\circ + \alpha) \right. \\ & \quad \left. - \left(1 - \cos 60^\circ + \frac{r}{2l} \sin^2 60^\circ \right) \right], \end{aligned}$$

woraus nach leichter Umformung

$$A = -Pr\alpha + Qr \left[1 - 2\cos(60^\circ + \alpha) + \frac{r}{l} \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \right]$$

folgt. In derselben Weise erhält man für die zweite Hälfte der Periode:

$$A = -Pr\alpha + Qr \left[1 - 2\cos(60^\circ + \alpha) - \frac{r}{l} \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \right].$$

Da für eine ganze Umdrehung der Axe während des Beharrungszustandes

$$P2\pi r = 3 \cdot Q \cdot 4r$$

ist, so hat man hieraus:

$$P = \frac{6}{\pi} Q$$

und somit die verrichtete Arbeit

$$A = Qr \left[1 - 2\cos(60^\circ + \alpha) \pm \frac{r}{l} \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) - \frac{6}{\pi} \alpha \right].$$

Diese Arbeit setzt sich in lebendige Kräfte der Massen m_1 und $3m_2$ über und zwar wie folgt. Die rotierende Masse m_1 geht aus der Geschwindigkeit v_1 im Todtpunkte der Kurbel B_1 in diejenige v über, nimmt also die mechanische Arbeit

$$m_1 \frac{v^2 - v_1^2}{2}$$

auf. Die Masse m_2 des Kreuzkopfes C geht von der Geschwindigkeit 0 in diejenige

$$c = v \left(\sin \alpha - \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right)$$

über. Vernachlässigt man auch hier wieder wie früher die Glieder mit

$$\frac{r}{l} \frac{m_2}{m_1},$$

so ist die entsprechende Massenarbeit durch

$$m_2 \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2}$$

gegeben. Ebenso ermitteln sich die von den Kreuzköpfen E und G aufgenommenen resp. abgegebenen Massenarbeiten, indem hier die Anfangsgeschwindigkeiten $v_1 \sin 60^\circ$ in $v \sin(60^\circ - \alpha)$ und bezw. $v \sin(60^\circ + \alpha)$ übergehen. Man hat daher die gesammte von sämmtlichen Massen aufgenommene mechanische Arbeit zu

$$\begin{aligned} L &= m_1 \frac{v^2 - v_1^2}{2} + m_2 \frac{v^2}{2} [\sin^2 \alpha + \sin^2(60^\circ - \alpha) + \sin^2(60^\circ + \alpha)] \\ &\quad - m_2 \frac{v_1^2}{2} (\sin^2 120^\circ + \sin^2 60^\circ) \\ &= m_1 \frac{v^2 - v_1^2}{2} + m_2 \frac{v^2}{2} \left(\sin^2 \alpha + \frac{3}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) - \frac{3}{2} m_2 \frac{v_1^2}{2} \\ &= \left(m_1 + \frac{3}{2} m_2 \right) \frac{v^2 - v_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth von L gleich der Arbeit A der äußeren Kräfte, so berechnet sich wie in den früheren Fällen die Geschwindigkeit zu

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_1^2 + \frac{2 Q r \left[1 - 2 \cos(60^\circ + \alpha) \pm \frac{r}{l} \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) - \frac{6}{\pi} \alpha \right]}{m_1 + \frac{3}{2} m_2}} \\ &= v_1 \left[1 - \frac{Q r}{(m_1 + \frac{3}{2} m_2) v_1^2} \left(\frac{6}{\pi} \alpha + 2 \cos(60^\circ + \alpha) \mp \frac{r}{l} \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) - 1 \right) \right], \end{aligned}$$

worin wieder das obere Vorzeichen für den ersten, das untere Zeichen für den zweiten Sextanten gilt.

Durch Differentiation findet man hieraus für die eminenten Geschwindigkeitswerthe:

$$\frac{6}{\pi} - 2 \sin(60^\circ + \alpha) \mp \frac{r}{l} [\sin(60^\circ - \alpha) \cos \alpha - \sin \alpha \cos(60^\circ - \alpha)] = 0$$

oder:

$$\sin(60^\circ + \alpha) = \frac{3}{\pi} \mp \frac{r}{2l} \sin(60^\circ - 2\alpha).$$

Für das Verhältniß $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ erhält man hieraus für den ersten Sextanten:

$$\alpha_1 = 0^\circ 20'; \quad v_{\min} = v_1 \left(1 - 0,000 \frac{Qr}{(m_1 + \frac{3}{2} m_2) v_1^2} \right)$$

und

$$\alpha_2 = 39^\circ 18'; \quad v_{\max} = v_1 \left(1 + 0,0580 \frac{Qr}{(m_1 + \frac{3}{2} m_2) v_1^2} \right);$$

dagegen mit dem unteren Vorzeichen für den zweiten Sextanten:

$$\alpha_1 = 20^\circ 42'; \quad v_{\min} = v_1 \left(1 - 0,0580 \frac{Qr}{(m_1 + \frac{3}{2} m_2) v_1^2} \right)$$

und

$$\alpha_2 = 59^\circ 40'; \quad v_{\max} = v_1 \left(1 + 0,000 \frac{Qr}{(m_1 + \frac{3}{2} m_2) v_1^2} \right).$$

Man hat daher hierbei den Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung zu:

$$\delta = 2 \cdot 0,0580 \frac{Qr}{(m_1 + \frac{3}{2} m_2) v_1^2} = 0,116 \frac{Qr}{(m_1 + \frac{3}{2} m_2) v_1^2}.$$

Für $\alpha = 60^\circ$ erhält man für beide Sextanten $v = v_1$.

Unter Voraussetzung unendlich langer Lenkerstangen würde man aus

$$\frac{6}{\pi} = 2 \sin(60^\circ + \alpha)$$

für beide Sextanten

$$\alpha_1 = 12^\circ 44'; \quad v_{\min} = v_1 \left(1 - 0,0181 \frac{Qr}{(m_1 + \frac{3}{2} m_2) v_1^2} \right)$$

$$\alpha_2 = 47^\circ 16'; \quad v_{\max} = v_1 \left(1 + 0,0181 \frac{Qr}{(m_1 + \frac{3}{2} m_2) v_1^2} \right),$$

daher einen Ungleichförmigkeitscoefficienten

$$\delta = 0,0362 \frac{Qr}{(m_1 + \frac{3}{2} m_2) v_1^2}$$

erhalten. Im letzteren Falle wird auch für

$$\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

die Geschwindigkeit $v = v_1$, während man bei dem Verhältnisse $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ diejenigen Kurbelstellungen zwischen den Endpunkten der Sextanten, in welchen die Geschwindigkeit $v = v_1$ wird, aus

$$\frac{6}{\pi} \alpha + 2 \cos(60^\circ + \alpha) \mp 0,2 \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) - 1 = 0$$

erhält, welche Stellungen, wie aus der vorstehenden Berechnung von v_{\min}

Abweichungswinkel der Schubstange von dieser meist vertical anzunehmenden Sehne bezeichnet werden. Es ist zunächst deutlich, daß bei dieser Anordnung die beiden todten Punkte B_1 und B_3 der Kurbel einander diametral gegenüber stehen, so daß zum Aufgang sowohl wie zum Niedergehen des Balancierens genau eine halbe Umdrehung erforderlich ist.

Um zunächst wieder eine Beziehung zwischen dem Drehungswinkel α der Kurbel und dem Wege s des Balancierendes C zu finden, an welchem letzteren die constante Kraft Q als treibende wirken mag, hat man für die horizontale und verticale Projection des Polygons $ABCMC_1A$ folgende Gleichungen:

$$a \cos \beta + l \sin \gamma = r \sin \alpha + a \cos \beta_1$$

und

$$r \cos \alpha + l \cos \gamma - a \sin \beta + a \sin \beta_1 = l + r$$

oder, da $a \sin \beta_1 = r$ ist,

$$r \cos \alpha + l \cos \gamma = l + a \sin \beta.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$l^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) = l^2 = [r \sin \alpha - a (\cos \beta - \cos \beta_1)]^2 + (l - r \cos \alpha + a \sin \beta)^2.$$

Hieraus folgt weiter

$$a \sin \beta = r \cos \alpha - l + \sqrt{l^2 - [r \sin \alpha - a (\cos \beta - \cos \beta_1)]^2}$$

oder annähernd:

$$a \sin \beta = r \cos \alpha - \frac{[r \sin \alpha - a (\cos \beta - \cos \beta_1)]^2}{2l}.$$

Setzt man hierin

$$\begin{aligned} \cos \beta - \cos \beta_1 &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta - (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta_1) \\ &= \frac{1}{2} (\sin \beta_1^2 - \sin^2 \beta), \end{aligned}$$

so erhält man

$$a \sin \beta = r \cos \alpha - \frac{[r \sin \alpha - \frac{1}{2} a (\sin \beta_1^2 - \sin \beta^2)]^2}{2l}.$$

Hierin kann man auf der rechten Seite genau genug

$$\sin \beta = \frac{r \cos \alpha}{a}$$

setzen, und da auch

$$\sin \beta_1 = \frac{r}{a}$$

ist, so folgt:

$$\begin{aligned} a \sin \beta &= r \cos \alpha - \frac{1}{2l} \left[r \sin \alpha - \frac{r^2}{2a} (1 - \cos^2 \alpha) \right]^2 \\ &= r \cos \alpha - \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{2l} \left(1 - \frac{r \sin \alpha}{2a} \right)^2 \end{aligned}$$

oder

$$\sin \beta = \frac{r \cos \alpha}{a} - \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{2al} \left(1 - \frac{r \sin \alpha}{2a} \right)^2.$$

Da $\frac{r}{a}$ meist nicht größer als $\frac{1}{3}$, oft noch kleiner gemacht wird, so kann man unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $\frac{r}{a}$ annähernd schreiben:

$$\sin \beta = \frac{r \cos \alpha}{a} - \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{2al} + \frac{r^3 \sin^3 \alpha}{2a^2 l}.$$

Der Bogen selbst, welcher dem Ausschlagswinkel β entspricht, läßt sich nun mittelst der Reihe

$$\beta = \sin \beta + \frac{1}{6} \sin^3 \beta + \dots$$

bestimmen und man erhält daher

$$\beta = \frac{r \cos \alpha}{a} - \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{2al} + \frac{r^3 \sin^3 \alpha}{2a^2 l} + \frac{r^3 \cos^3 \alpha}{6a^3},$$

und für $\alpha = 0$:

$$\beta_1 = \frac{r}{a} + \frac{r^3}{6a^3}.$$

Hiernach endlich erhält man den Weg $C_1 C = s = a (\beta_1 - \beta)$, welchen der Endpunkt des Balanciers bei einer Drehung der Kurbel um $B_1 A B = \alpha$ zurücklegt, zu:

$$s = r \left[1 - \cos \alpha + \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha - \frac{r^2}{2al} \sin^3 \alpha + \frac{r^2}{6a^2} (1 - \cos^3 \alpha) \right].$$

Diese Formel gilt für den Hingang der Kurbel von B_1 nach B_3 ; ebenso findet man für den Rückgang, d. i. für die aufsteigende Bewegung des Balancierendpunktes von C_3 nach C_1 :

$$(s) = r \left[1 - \cos \alpha - \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha - \frac{r^2}{2al} \sin^3 \alpha + \frac{r^2}{6a^2} (1 - \cos^3 \alpha) \right].$$

Für $\alpha = 0$ hat man natürlich

$$s = (s) = 0,$$

und für $\alpha = 180^\circ$:

$$s = (s) = 2r \left(1 + \frac{r^2}{6a^2} \right) = 2a \cdot \text{arc sin } \frac{r}{a} = 2a \beta_1.$$

Für $\alpha = 90^\circ$, also für die Stellungen der Kurbelwarze in B_2 und B_4 , hat man dagegen

$$s = r \left(1 + \frac{r}{2l} - \frac{r^2}{2al} + \frac{r^2}{6a^2} \right)$$

und

$$(s) = r \left(1 - \frac{r}{2l} - \frac{r^2}{2al} + \frac{r^2}{6a^2} \right).$$

Wenn nun an dem Endpunkte des Balanciers C tangential an dessen Bahn die constante Kraft Q wirkt, und P den am Kurbelzapfen auftretenden Widerstand bezeichnet, so ist zunächst das Verhältniß beider durch die für eine ganze Kurbeldrehung gültige Gleichung

$$2Q \cdot 2r \left(1 + \frac{r^2}{6a^2} \right) = P \cdot 2\pi r$$

gegeben, und man hat daher

$$P = Q \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{r^2}{6a^2} \right).$$

Die während einer Drehung der Kurbel um den beliebigen Winkel α zur Beschleunigung der trägen Massen aufgewendete mechanische Arbeit bestimmt sich demgemäß zu

$$L = Qs - Pr\alpha = Qr \left[1 - \cos \alpha \pm \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha - \frac{r^2}{2al} \sin^3 \alpha + \frac{r^2}{6a^2} (1 - \cos^3 \alpha) - \frac{2}{\pi} \alpha \left(1 + \frac{r^2}{6a^2} \right) \right].$$

Wie bei den früheren Ermittlungen erhält man diejenigen Winkel α , für welche die Geschwindigkeit v der Kurbelwarze ein Maximum oder Minimum ist, durch die Bedingung $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$, also durch die Gleichung:

$$\sin \alpha \pm \frac{r}{2l} \sin 2\alpha - \frac{3r^2}{2al} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{3r^2}{6a^2} \cos^2 \alpha \sin \alpha - \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{r^2}{6a^2} \right) = 0,$$

d. h. man erhält

$$\sin \alpha = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{r^2}{6a^2} \right) - \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \left(\pm 1 - \frac{3r}{2a} \sin \alpha + \frac{rl}{2a^2} \cos \alpha \right).$$

Bezeichnet m_1 die auf die Kurbelwarze reducirte Masse der Welle und vernachlässigt man dagegen die auf den Punkt C reducirte Masse m_2 der schwingenden Theile, so hat man wieder wie früher

$$v = v_1 \left(1 + \frac{L}{m_1 v_1^2} \right)$$

und erhält hieraus die Minimal- und Maximalwerthe der Geschwindigkeit, wenn man darin die jenen ermittelten Winkeln α zugehörigen Werthe von L einsetzt.

Nimmt man den gewöhnlichen Fall, d. h. $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ und $\frac{r}{a} = \frac{1}{3}$ an, so erhält man:

$$\sin \alpha = \frac{2}{\pi} \frac{55}{54} - 0,1 \sin 2\alpha \left(\pm 1 - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{5}{18} \cos \alpha \right)$$

und

$$L = Qr \left[1 - \cos \alpha \pm 0,1 \sin^2 \alpha - \frac{1}{30} \sin^3 \alpha + \frac{1}{54} (1 - \cos^3 \alpha) - \frac{55}{54} \frac{2}{\pi} \alpha \right].$$

Der ersten Formel entsprechen die beiden Winkel für den Niedergang des Balancierendes:

$$\alpha_1 = 34^\circ 4' \text{ und } \alpha_2 = 136^\circ 5',$$

dagegen für den Aufgang

$$(\alpha_1) = 49^\circ 35' \text{ und } (\alpha_2) = 148^\circ 56'.$$

Mit den durch Einführung dieser Winkel erhaltenen Werthen von L kommt man dann schließlich für den Niedergang:

$$v_{\min} = v_1 \left(1 - 0,1804 \frac{Qr}{m_1 v_1^2} \right) \text{ für } \alpha_1 = 34^\circ 4',$$

$$v_{\max} = v_1 \left(1 + 0,2428 \frac{Qr}{m_1 v_1^2} \right) \text{ für } \alpha_2 = 136^\circ 5',$$

und für den Aufgang:

$$(v_{\min}) = v_1 \left(1 - 0,2687 \frac{Qr}{m_1 v_1^2} \right) \text{ für } (\alpha_1) = 49^\circ 35'$$

und

$$(v_{\max}) = v_1 \left(1 + 0,1701 \frac{Qr}{m_1 v_1^2} \right) \text{ für } (\alpha_2) = 148^\circ 56'.$$

Man hat daher den Grad der Ungleichförmigkeit

$$\delta = (0,2428 + 0,2687) \frac{Qr}{m_1 v_1^2} = 0,5115 \frac{Qr}{m_1 v_1^2},$$

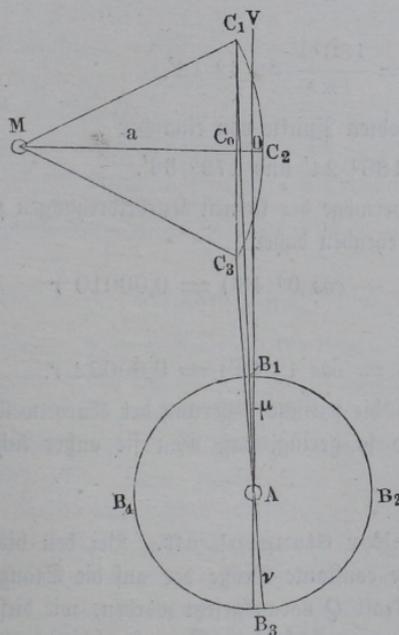
eine Größe, welche von dem unter dem gleichen Verhältnisse $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ für die directe Bewegung gefundenen Werthe (s. §. 145) $\delta = 0,5154$ so unbedeutend abweicht, daß man von dem Unterschiede in der Praxis ganz absehen darf.

Die bei den gewöhnlichen Ausführungen in der Regel übliche Anordnung weicht von der der obigen Rechnung zu Grunde gelegten noch insofern in geringem Maße ab, als die Kurbelwelle A meist nicht in die Sehne $C_1 C_3$ des Balancierbogens, sondern in eine mit dieser Sehne parallele, die Pfeilhöhe $C_0 C_2$ dieses Bogens halbirende Gerade gelegt wird. Man wählt diese Einrichtung aus dem Grunde, um die Verschiedenheit möglichst auszugleichen, welche bei der Anordnung in Fig. 569 in der beiderseitigen Ablenkung der Schubstange BC sich einstellt. Bezeichnet man diese Pfeilhöhe $C_0 C_2$ mit e , so ist ersichtlich, daß die beiden größten Ablenkungswinkel γ der Kurbelstange nach verschiedenen Seiten der Bogensehne sehr nahe gegeben sind durch

$$\sin \gamma_1 = \frac{r - e}{l} \quad \text{und} \quad \sin \gamma_2 = \frac{r + e}{l}.$$

Wollte man diese beiderseitigen Ablenkungen von der Verticalen gleich groß machen, so müßte man offenbar die Kurbelwelle a in der mit der Sehne parallelen Tangente in C_2 des Bogens $C_1 C_2 C_3$ lagern, doch pflegt man sich damit zu begnügen, die Ase A nur

Fig. 570.



um die halbe Pfeilhöhe $\frac{e}{2}$ von der

Sehne entfernt aufzustellen, um einen anderen mit einer solchen Verschiebung verknüpften Uebelstand nicht zu stark vorherrschen zu lassen. Man ersieht nämlich aus Fig. 570, in welcher die Ase A in die durch die Mitte O der Pfeilhöhe mit der Sehne gezogene Parallele VOA gelegt ist, daß nunmehr die beiden toten Punkte B_1 und B_3 , d. h. die mit A und C in derselben Geraden liegenden Punkte nicht mehr diametral gegenüber liegen, sondern daß der Bogen $B_1 B_2 B_3$ kleiner als $B_3 B_4 B_1$ ist. In Folge dieser Ungleichheit der Kurbeldrehungen für den Auf- und Niedergang des Balanciers muß natürlich eine gewisse Ungleichförmigkeit im Gange der Maschine eintreten, welche um so merk-

licher wird, je weiter man die Ase A von der Sehne $C_1 C_3$ entfernt. Nimmt man diesen Abstand, wie gewöhnlich geschieht, zu $C_0 O = \frac{1}{2} C_0 C_2 = \frac{1}{2} e$ an, so ist indessen die hervorgerufene Ungleichheit nur sehr gering, wie fol-

gende Betrachtung zeigt. Bezeichnet man die Abweichungen der Lenkerstange in ihren Todtlagen von der Verticalen mit μ und ν , setzt also $C_1AO = \mu$ und $C_3AO = \nu$, so kann man mit großer Annäherung setzen:

$$\mu = \frac{C_0O}{C_1A} = \frac{e}{2(l+r)} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{C_0O}{C_3A} = \frac{e}{2(l-r)}.$$

Bei dem geringen Ausschlagswinkel β_1 des Balanciers kann man nun die Pfeilhöhe

$$e = \frac{C_1 C_0^2}{2a} = \frac{r^2}{2a}$$

annehmen, so daß man für die Winkel μ und ν erhält:

$$\mu = \frac{r^2}{4a(l+r)} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{r^2}{4a(l-r)}.$$

Für $\frac{r}{a} = \frac{1}{3}$ und $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ hat man beispielsweise:

$$\mu = \frac{1}{72}, \quad \text{also} \quad \mu^0 = \frac{180^0 \mu}{\pi} = 0^0 48'$$

und

$$\nu = \frac{1}{48}, \quad \text{also} \quad \nu^0 = \frac{180^0 \nu}{\pi} = 1^0 12'.$$

Es sind folglich die Abstände der toten Punkte von einander

$$180 \pm (\nu - \mu) = 180^0 24' \quad \text{und} \quad 179^0 36'.$$

Die Wege, welche der Balancier vermöge der kleinen Kurbeldrehungen μ und ν beschreibt, sind nach dem Vorstehenden daher

$$\sigma_1 = r(1 - \cos \mu) = r(1 - \cos 0^0 48') = 0,00010 r$$

und

$$\sigma_2 = r(1 - \cos \nu) = r(1 - \cos 1^0 12') = 0,00022 r.$$

Diese Größe und damit die durch die seitliche Lagerung der Kurbelwelle hervorgerufene Ungleichförmigkeit sind so gering, daß man sie außer Acht lassen kann.

§. 150. Die Kurbel mit veränderlicher Stangenkraft. Bei den bisherigen Ermittlungen ist immer eine constante Größe der auf die Stange oder den Kreuzkopf wirkenden Kolbenkraft Q vorausgesetzt worden, wie diese Annahme annähernd bei Wasserpumpen und solchen Dampfmaschinen zutreffend ist, bei denen der Dampf während des ganzen Kolbenlaufes zum Cylinder Zutritt hat. Wenn der Dampf jedoch vor Beendigung des Kolbenlaufes in einer gewissen Kolbenstellung jedesmal abgeschlossen wird, damit er durch seine Expansion eine fernere Wirkung ausübe, so wird von dem

Eintritte dieser Expansion an der Druck auf den Kolben sich vermindern, und man hat daher bei jeder Expansionsdampfmaschine zwei Perioden der Bewegung innerhalb jedes einzelnen Kolbenlaufes zu unterscheiden, welche dadurch von einander verschieden sind, daß die Kolbenkraft während der ersten oder Volldruckperiode constant, während der letzten oder Expansionsperiode variabel ist, wie schon in Theil II des Näheren aus einander gesetzt worden ist. Auch bei den Gebläsemaschinen, welche bei jedem Kolbenlaufe ein gewisses Volumen atmosphärischer Luft in einen Raum von größerer Pressung hineindrücken, finden zwei derartige verschiedene Bewegungsperioden statt, von denen die erste durch einen allmählig zunehmenden Widerstand charakterisirt als Compressionsperiode bezeichnet werden kann, auf welche die zweite Periode mit constantem Widerstande des Kolbens folgt. Für die Theorie der Kurbel macht es auch hier keinen Unterschied, ob die Stangenkraft wie bei den Dampfmaschinen treibend, oder wie bei den Pumpen widerstehend wirkt, nur werden in den beiden Fällen Maximal- und Minimalgeschwindigkeiten ihre Plätze vertauschen, indem in dem einen Falle eine Verzögerung eintritt, wo unter sonst gleichen Umständen der andere durch eine Beschleunigung der Bewegung gekennzeichnet ist. Bei der großen Bedeutung, welche die Expansion des Dampfes für die praktischen Ausführungen der gesammten Technik hat, soll im Folgenden die Untersuchung der Kurbelbewegung für eine Expansionsmaschine geführt werden, mit dem Expansionsverhältnisse ε , d. h. in deren Cylinder der abgesperrte Dampf sich auf das ε fache seines Volumens ausdehnen kann. Ist daher wieder $2r$ der ganze Kolbenweg, so soll der Weg $\frac{2r}{\varepsilon}$ unter constanter Kolbenkraft und der

Rest $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} 2r$ unter abnehmendem Drucke zurückgelegt werden. Ueber das

Gesetz, nach welchem die Abnahme des Dampfdruckes bei erfolglicher Expansion vor sich geht, ist im zweiten Theile ebenfalls ausführlicher gehandelt. Bei der folgenden Untersuchung soll die einfachere Voraussetzung gemacht werden, daß die Expansion entsprechend dem Mariotte'schen Gesetze vor sich gehe. Zwar drückt dieses Gesetz das Verhalten der Dämpfe nur annähernd aus, doch würde die Zugrundelegung scharferer Formeln, wie sie aus der mechanischen Wärmetheorie folgen, in dem vorliegenden Falle die Untersuchung nur unnötig erschweren. Es möge mit Q wieder der auf den Kolben treibend wirkende Dampfdruck vor der Expansion bezeichnet werden, und sei hier der auf die Rückfläche des Kolbens wirkende Gegendruck, wie er dem atmosphärischen Drucke oder der Pressung im Condensator entspricht, mit R bezeichnet. Dieser Gegendruck R muß hier deswegen besonders in Rechnung gestellt werden, weil derselbe während des ganzen Kolbenlaufes constant ist. Bei den früheren Untersuchungen der Kurbelbewegung für constante Stangen-

kraft konnte eine solche besondere Einführung des Gegendruckes R unterbleiben, wenn man nur unter der Stangenkraft Q den Ueberdruck verstand, um welchen die Pressung auf die eine Kolbenfläche den Gegendruck der Rückfläche übersteigt. Zur Bestimmung der Umfangskraft P an der Kurbelwarze hat man wieder für den Beharrungszustand die mechanische Arbeit der Kraft P für eine halbe Umdrehung, also $P\pi r$ gleich der Arbeit der Kolbenkraft während eines einfachen Kolbenlaufes zu setzen. Die letztere Arbeit setzt sich zusammen aus den Arbeiten A_1 vor dem Beginne der Expansion, und A_2 während der Expansion, vermindert um die Arbeit A_3 des Gegendruckes.

Man hat also, wenn $s_1 = 2r$ den ganzen Kolbenlauf, und $s' = \frac{2r}{\varepsilon}$ den Weg vor der Absperrung bedeutet, diese Leistung nach Thl. I, §. 415:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 - A_3 &= Qs' \left(1 + \log \text{nat} \frac{s_1}{s'} \right) - Rs_1 \\ &= Q \frac{2r}{\varepsilon} (1 + \log \text{nat} \varepsilon) - R2r. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzung dieses Werthes mit $P\pi r$ folgt daher

$$P = \frac{2}{\pi \varepsilon} (1 + \log \text{nat} \varepsilon) Q - \frac{2}{\pi} R.$$

Bezeichnet man ferner den Winkel, um welchen die Kurbel vom äußeren oder inneren todten Punkte sich gedreht hat, wenn die Expansion beginnt mit α_ε , so hat man für denselben

$$s' = \frac{2r}{\varepsilon} = r \left(1 - \cos \alpha_\varepsilon \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha_\varepsilon \right),$$

also ist:

$$\cos \alpha_\varepsilon = 1 - \frac{2}{\varepsilon} \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha_\varepsilon.$$

Nun findet man für die Bewegung vor der Expansion wieder wie früher

$$L = m_1 \frac{v^2 - v_1^2}{2} = (Q - R) r \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right) - Pr\alpha,$$

woraus man erhält:

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2 \frac{Q-R}{m_1} r \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right) - \frac{2Pr\alpha}{m_1}},$$

oder annähernd:

$$v = v_1 \left\{ 1 + \frac{r}{m_1 v_1^2} \left[(Q - R) \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right) - P\alpha \right] \right\}.$$

Um den Winkel α_1 zu finden, für welchen die Geschwindigkeit ein Minimum ist, hat man wieder

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0$$

zu setzen, und erhält dadurch:

$$(Q - R) \left(\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right) - P = 0,$$

oder

$$\sin \alpha = \frac{P}{Q - R} \pm \frac{r}{2l} \sin 2\alpha = \frac{P}{Q \left(1 - \frac{R}{Q} \right)} \pm \frac{r}{2l} \sin 2\alpha.$$

Setzt man hierin nach obiger Ermittlung

$$\frac{P}{Q} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 + \log \text{nat } \varepsilon}{\varepsilon} - \frac{R}{Q} \right)$$

so erhält man:

$$\sin \alpha_1 = \frac{2}{\pi \left(1 - \frac{R}{Q} \right)} \left(\frac{1 + \log \text{nat } \varepsilon}{\varepsilon} - \frac{R}{Q} \right) \pm \frac{r}{2l} \sin 2\alpha_1.$$

Für einen beliebigen Drehungswinkel α , welcher größer als α_ε ist, also in die Expansionsperiode hineinfällt, bestimmt sich dagegen die Leistung der Kolbenkraft wie folgt. Der Dampf hat mit Volldruck auf dem Wege

$$s' = \frac{2r}{\varepsilon}$$

gewirkt, dann ist eine Volumenvergrößerung im Verhältnisse

$$r \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right) \text{ zu } \frac{2r}{\varepsilon}$$

eingetreten, also hat man das entsprechende Expansionsverhältniß für den betrachteten Moment gleich

$$\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right)$$

und somit die ganze Arbeit des Dampfdruckes auf die Vorderfläche des Kolbens gleich

$$A_1 = Q \frac{2r}{\varepsilon} \left[1 + \log \text{nat } \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right) \right].$$

Der Gegendruck R hat während dieser Zeit die Arbeit

$$R \cdot r \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right)$$

verrichtet, und daher berechnet sich die gesammte auf Beschleunigung der Massen verwendete Arbeit für die Drehung um den Winkel α zu:

$$L = Q \frac{2r}{\varepsilon} \left[1 + \log \operatorname{nat} \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right) \right] \\ - Rr \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right) - Pr \alpha.$$

Man findet daher in ganz derselben Weise wie früher aus

$$L = m_1 \frac{v^2 - v_1^2}{2},$$

für v den Ausdruck

$$v = v_1 \left(1 + \frac{L}{m_1 v_1^2} \right).$$

Um den Winkel α für die Maximalgeschwindigkeit zu vermitteln, hat man wieder $\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0$, d. h.:

$$Q \frac{2}{\varepsilon} \frac{\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha}{1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha} - R \left(\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right) = P,$$

oder

$$\left(\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right) \left(\frac{2}{\varepsilon} \frac{Q}{1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha} - R \right) = P.$$

Dies läßt sich auch schreiben:

$$\frac{\sin \alpha \left(1 \mp \frac{r}{l} \cos \alpha \right)}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 \mp \frac{r}{l} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)} \left[\frac{2}{\varepsilon} Q - 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 \mp \frac{r}{l} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) \right] = P,$$

oder

$$\cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{P}{\frac{2}{\varepsilon} Q \frac{1 \mp \frac{r}{l} \cos \alpha}{1 \mp \frac{r}{l} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 \mp \frac{r}{l} \cos \alpha \right)} \\ = \frac{P}{\frac{2}{\varepsilon} Q \left(1 \pm \frac{r}{l} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) - 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 \mp \frac{r}{l} \cos \alpha \right)}.$$

Setzt man hierin noch für P seinen Werth

$$\frac{2}{\pi} \left(\frac{1 + \log \operatorname{nat} \varepsilon}{\varepsilon} - \frac{R}{Q} \right) Q,$$

so erhält man schließlich:

$$\cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \log \text{nat } \varepsilon - \frac{\varepsilon R}{Q}}{\pi \left[1 \pm \frac{r}{l} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{\varepsilon R}{Q} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 \mp \frac{r}{l} \cos \alpha \right) \right]}$$

Nimmt man für das Expansionsverhältniß ε den vortheilhaftesten Werth an, d. h. denjenigen, für welchen gegen Ende des Kolbenlaufes der Dampfdruck $\frac{Q}{\varepsilon}$ gerade bis auf den Gegendruck R herabgesunken ist, setzt man also $Q = \varepsilon R$, so nehmen die gefundenen Gleichungen für die Winkel α_1 und α_2 der Minimal- und Maximalgeschwindigkeiten nunmehr einfachere Form an und zwar für die kleinste Geschwindigkeit (vor der Expansion):

$$\sin \alpha_1 = \frac{2 \log \text{nat } \varepsilon}{\pi (\varepsilon - 1)} \pm \frac{r}{2l} \sin 2 \alpha_1$$

und für die Maximalgeschwindigkeit:

$$\cotg \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\log \text{nat } \varepsilon}{\pi \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 \pm \frac{2r}{l} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}$$

Für diesen Fall erhält man die Umdrehungskraft

$$P = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 + \log \text{nat } \varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \right) Q = \frac{2}{\pi} \frac{Q}{\varepsilon} \log \text{nat } \varepsilon = \frac{2}{\pi} R \log \text{nat } \varepsilon,$$

und daher sind die eminenten Geschwindigkeiten:

$$v_{\min} = v_1 \left\{ 1 + \left[(\varepsilon - 1) \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right) - \frac{2}{\pi} \alpha \log \text{nat } \varepsilon \right] \frac{Qr}{\varepsilon m_1 v_1^2} \right\}$$

und

$$v_{\max} = v_1 \left\{ 1 + \left[1 + \cos \alpha \pm \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha + 2 \log \text{nat} \left(1 - \cos \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin^2 \alpha \right) \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{\pi} \alpha \log \text{nat } \varepsilon \right] \frac{Qr}{\varepsilon m_1 v_1^2} \right\}.$$

Nimmt man wieder $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ und $\varepsilon = 2$ an, so erhält man aus

$$\sin \alpha_1 = \frac{2 \log \text{nat } 2}{\pi} \pm 0,1 \sin 2 \alpha_1$$

die Winkel

$$\alpha_1 = 32^\circ 51\frac{1}{2}' \text{ für den Niedergang und} \\ (\alpha_1) = 21^\circ 50' \text{ für den Aufstieg.}$$

Durch Einführung dieser Werthe in die Gleichungen für L und v erhält man alsdann

$$v_{min} = \left(1 - 0,0613 \frac{Qr}{m_1 v_1^2}\right) v_1$$

und

$$(v_{min}) = \left(1 - 0,0667 \frac{Qr}{m_1 v_1^2}\right) v_1.$$

Für die Winkel α_2 der Maximalgeschwindigkeiten hat man dagegen

$$\cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{\log \text{nat } 2}{\pi \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 \pm 0,4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)},$$

welcher Gleichung die Winkel genügen:

$$\alpha_2 = 116^\circ 32' \text{ für den Hingang der Kurbel und}$$

$$(\alpha_2) = 104^\circ 12' \text{ für den Rückgang.}$$

Die entsprechenden Maximalgeschwindigkeiten sind

$$v_{max} = \left(1 + 0,1803 \frac{Qr}{m_1 v_1^2}\right) v_1$$

und

$$(v_{max}) = \left(1 + 0,2212 \frac{Qr}{m_1 v_1^2}\right) v_1.$$

Man hat daher den Ungleichförmigkeitsgrad

$$\delta = (0,2212 + 0,0667) \frac{Qr}{m_1 v_1^2} = 0,2879 \frac{Qr}{m_1 v_1^2}$$

oder, da

$$P = \frac{2Q}{\pi \varepsilon} \log \text{nat } \varepsilon = 0,22063 Q$$

ist,

$$\delta = \frac{0,2879}{0,2206} \frac{Pr}{m_1 v_1^2} = 1,305 \frac{Pr}{m_1 v_1^2}.$$

In der folgenden Tabelle sind unter Annahme von $l = 5r$ für einige Expansionsverhältnisse die entsprechenden Ungleichförmigkeitsgrade angegeben.

Expansionsverhältniß ε	2	3	4	5	6
Ungleichförmigkeitsgrad δ	1,305	1,374	1,421	1,453	1,477
	$\frac{Pr}{m_1 v_1^2}$				

§. 151. **Beschleunigungsdruck.** Bei der Uebertragung der auf den Kolben einer Dampfmaschine oder Pumpe wirkenden Kraft Q auf den Kurbelzapfen ist die Einwirkung der schwingenden Masse m_2 von wesentlichem Einflusse, wie aus der folgenden Betrachtung sich ergibt. Denkt man sich eine Kurbel-

welle, deren Kurbelzapfen mit der ganz oder annähernd gleichmäßigen Geschwindigkeit v sich dreht, so wird die schwingende Masse m_2 während jeder halben Umdrehung mit sehr veränderlicher Geschwindigkeit bewegt. Während die Geschwindigkeit c des Kreuzkopfes nämlich in der Todtlage der Kurbel gleich Null ist, wächst sie bis zu einem Maximum an, welches bei unendlich langer Lenkerstange genau und bei endlicher Länge dieser Stange annähernd in der mittleren Kolbenstellung sich einfindet, und darauf nimmt die Geschwindigkeit der schwingenden Masse von diesem größten Werthe allmählig wieder ab, bis sie im anderen todtten Punkte wieder zu Null geworden ist. Bei jeder folgenden halben Umdrehung wiederholt sich dieser Vorgang. Es ist daher während des ersten Theiles jedes einfachen Hubes eine gewisse Kraft zur Beschleunigung des Kreuzkopfes erforderlich, und die von dieser beschleunigenden Kraft verrichtete mechanische Arbeit wird in Form von lebendiger Kraft in der schwingenden Masse angehäuft. Sobald die letztere ihre größte Geschwindigkeit erlangt hat, ist die Beschleunigung Null geworden. Es geht dieselbe nunmehr in eine Verzögerung über, so daß während des zweiten Theiles der Bewegung die in der Masse m_2 aufgesammelte lebendige Kraft eine Arbeitsgröße äußert, deren Betrag genau gleich derjenigen Arbeit sein muß, welche in dem ersten Theile der Bewegung zur Beschleunigung angewendet worden ist, indem gegen Ende des Kolbenlaufes die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes wie zu Anfang der Bewegung den Werth Null hat. Die schwingende Masse m_2 wirkt daher in allen Fällen, gleichviel ob der Antrieb vom Kolben oder von der Kurbel ausgeht, während des ersten Theiles der Bewegung hemmend und während des zweiten Theiles des Kolbenlaufes fördernd auf den Gang des Kurbelgetriebes ein. Bei Pumpwerken, bei denen der Antrieb von der Welle ausgeht, ist die zur Beschleunigung der Masse m_2 erforderliche Arbeit natürlich von dieser Welle auszuüben, so daß diese Welle während der Beschleunigungsperiode einen größeren Widerstand zu überwinden hat, als während der Periode der Verzögerung, in welcher die lebendige Kraft der mit dem Kreuzkopfe schwingenden Masse fördernd im Sinne der Bewegung wirkt. Bei den Dampfmaschinen hingegen wird die Beschleunigung der Masse m_2 direct durch den auf den Kolben wirkenden Dampfdruck Q veranlaßt, so daß nur der Ueberschuß von Q über den erforderlichen Beschleunigungsdruck durch die Lenkerstange nach der Kurbel hin übertragen werden kann. Um daher zu beurtheilen, welche Kraft überhaupt durch die Lenkerstange nach dem Kreuzkopfe oder umgekehrt fortgepflanzt werden muß, ist die Ermittlung dieses zur Beschleunigung der Masse m_2 erforderlichen Druckes unumgänglich, welcher Druck kurz Massen- oder Beschleunigungsdruck heißen und mit M bezeichnet werden möge. Aus dem Vorstehenden ist übrigens klar, daß aus der gedachten Wirkung der Massen ein Verlust oder Gewinn an mechanischer Arbeit nicht hervorgehen kann.

Die Beschleunigung einer Masse, deren Geschwindigkeit durch c gegeben ist, findet man (Thl. I, §. 21) ganz allgemein durch $\frac{dc}{dt}$, unter t die Zeit verstanden. Da nun in dem Obigen die Geschwindigkeit c des Kreuzkopfes durch

$$c = \left(\sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right) v$$

gegeben ist, so hat man für die pro Masseneinheit erforderliche beschleunigende Kraft bei constanter Umdrehungsgeschwindigkeit v :

$$p = \frac{\partial c}{\partial t} = \left(\cos \alpha \mp \frac{r}{l} \cos 2\alpha \right) v \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

Da nun aber bei constanter Wazengeschwindigkeit v die Beziehung

$$r \partial \alpha = v \partial t$$

gilt, also

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{v}{r}$$

ist, so folgt die beschleunigende Kraft

$$p = \left(\cos \alpha \mp \frac{r}{l} \cos 2\alpha \right) \frac{v^2}{r}$$

pro Masseneinheit, oder der Beschleunigungsdruck für die Masse m_2

$$M = m_2 p = \left(\cos \alpha \mp \frac{r}{l} \cos 2\alpha \right) \frac{m_2 v^2}{r}.$$

Unter Voraussetzung einer unendlich langen Lenkerstange wird die Beschleunigung

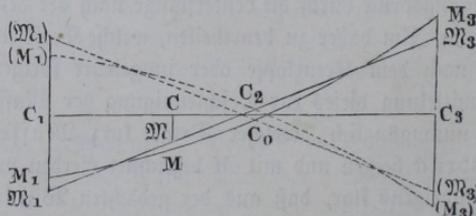
$$M = \cos \alpha \frac{m_2 v^2}{r},$$

also Null für $\alpha = 90^\circ$ und gleich

$$\mp \frac{m_2 v^2}{r}$$

für die todten Punkte oder $\alpha = 0$ und $\alpha = 180^\circ$, d. h. genau so groß,

Fig. 571.



wie die Centrifugalbeschleunigung derselben Masse m_2 , wenn dieselbe an der Kurbelwarze befestigt wäre. Denkt man sich auf einer Abscissenaxe, $C_1 C_3$, Fig. 571, deren Länge $C_1 C_3 = 2r$ ist, von den Endpunkten C_1 und C_3 die Kolbenwege s als Abscissen $C_1 C$ und die zugehörigen Beschleunigungskräfte p als Ordinaten CM aufgetragen, so erkennt man sehr leicht, daß man als Curve der Beschleunigungen zwei durch die Mitte C_2 gehende gerade Linien $M_1 M_3$ erhält, die eine $M_1 M_3$ für den Hingang, die andere $(M_3)(M_1)$ in der Figur punktiert gezeichnete für den Rückgang, und daß die Endordinaten

$$C_1 M_1 = C_3 M_3 = \frac{m_2 v^2}{r}$$

sind. Denn da der Weg des Kreuzkopfes für eine beliebige Stellung C

$$s = C_1 C = r (1 - \cos \alpha),$$

daher $C_2 C = r \cos \alpha$ ist und die Ordinate CM daselbst durch

$$CM = \frac{m_2 v^2}{r} \cos \alpha$$

dargestellt ist, so hat man in

$$\frac{C_2 C}{CM} = \text{const}$$

die Gleichung einer Geraden.

Wenn die Lenkerstange dagegen eine endliche Länge hat, so sind die Beschleunigungen in den todten Punkten C_1 und C_3 durch

$$\frac{m_2 v^2}{r} \left(1 \mp \frac{r}{l} \right)$$

gegeben, z. B. bei $l = 5r$ durch

$$0,8 \frac{m_2 v^2}{r} \text{ und } 1,2 \frac{m_2 v^2}{r}.$$

Die Beschleunigungen sind jetzt durch zwei krumme Linien $M_1 M_3$ und $(M_3)(M_1)$ begrenzt, welche die Axe $C_1 C_3$ in einem Punkte C_0 schneiden, der etwas hinter der Mitte C_2 liegt, und demjenigen Punkte entspricht, in welchem die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes ein Maximum ist, und für welchen schon in §. 139 die Bedingung

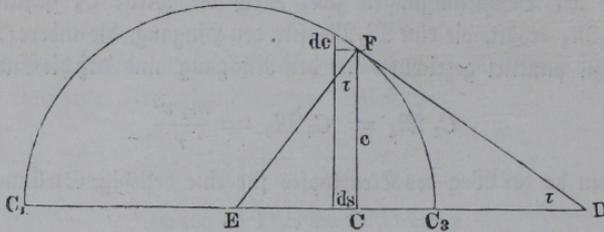
$$\cos \alpha = \pm \frac{r}{l} \cos 2 \alpha$$

gefunden wurde. Diese beiden Beschleunigungscurven, welche gegen die Axe $C_1 C_3$ symmetrisch gestaltet sind, lassen sich bei einem bekannten Stangenverhältnisse $\frac{r}{l}$ leicht construiren, wozu man am besten die Ordinaten CM für eine Anzahl von Kolbenstellungen rechnerisch bestimmt, indem man die

Functionen $\cos \alpha$ und $\cos 2 \alpha$ für die zugehörigen Kurbelstellungen den trigonometrischen Tafeln entnimmt.

Man kann hierbei bemerken, daß diese Beschleunigungscurve sich direct aus der nach §. 139 entworfenen Geschwindigkeitscurve $C_1 F C_3$, Fig. 572,

Fig. 572.



construiren läßt, welche Curve bekanntlich in ihrer Ordinate CF die Geschwindigkeit c des Kreuzkopfes angebt. Man findet nämlich für irgend eine Stellung C , für welche die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes durch $c = CF$ gegeben ist, die Beschleunigung $p = \frac{\partial c}{\partial t}$ einfach in der Subnormale CE des Punktes F und zwar aus folgendem Grunde. Bezeichnet τ den Winkel der Curve in F mit der Axe $C_1 C_3$, so hat man $\partial c = \partial s \cdot \text{tang } \tau$, also auch

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} \text{ tang } \tau = c \text{ tang } \tau,$$

d. h. nach der Figur

$$\frac{\partial c}{\partial t} = p = CE.$$

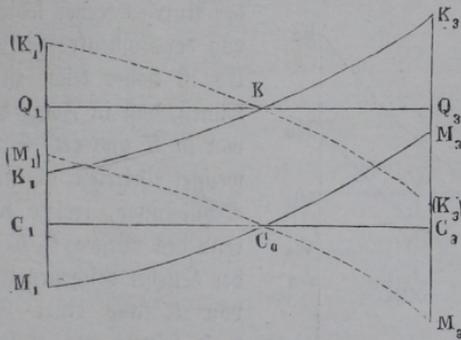
Doch ist eine solche Construction der Beschleunigungscurve nicht anzurathen, da die Zeichnung der Tangenten in der Regel nicht mit der genügenden Schärfe ausführbar ist und im vorliegenden Falle die dabei unvermeidlichen Ungenauigkeiten zu denjenigen noch hinzutreten, welche schon bei der Construction der Geschwindigkeitscurve sich nicht umgehen ließen. Am besten wird daher die Construction der Beschleunigungscurve in der oben angegebenen Weise mit Hülfe der trigonometrischen Functionen geschehen.

§. 152. **Kolbendruck.** Es ist nunmehr leicht, den Druck zu bestimmen, welcher in jedem Augenblicke der Bewegung von dem Kreuzkopfe durch die Lenkerstange auf die Kurbelwarze übertragen wird, indem dieser Druck als die Resultirende aus der direct auf den Kolben wirkenden Kraft Q und dem Beschleunigungsdrucke M sich ergibt*). Man kann sich auch hierbei mit Vor-

*) Siehe hierüber: Radinger, „Ueber Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit“, Zeitschrift des österr. Ing.- u. Archit.-Vereins, 1869, Heft VIII.

theil einer graphischen Methode bedienen, indem man auf einer Abscissenaxe $C_1 C_3 = 2r$, Fig. 573, in jedem Punkte die auf die Kolbenfläche wirkende Kraft Q als Ordinate aufgetragen denkt. Man erhält dadurch ein Dia-

Fig. 573.



gramm $C_1 Q_1 Q_3 C_3$. Nimmt man zunächst eine constante Kolbenkraft Q , entsprechend den Volldruckmaschinen und Wasserpumpen, an, so fällt die Begrenzungslinie $Q_1 Q_3$ der Ordinaten gerade und parallel mit der Axe $C_1 C_3$ aus. Ebenso entwerfe man in diesem Diagramm die Curve für den Massendruck M . Bei einer Dampf-

maschine, wo die zur Beschleunigung des Kreuzkopfes erforderliche Kraft M direct von dem Dampfdruck des Kolbens ausgeübt wird, kann nur der Ueberdruck dieses Dampfdruckes Q über den Beschleunigungsdruck M durch die Lenkerstange nach dem Kurbelzapfen fortgepflanzt werden. Wenn man daher die Ordinaten der beiden Diagrammlinien für Q und M algebraisch addirt, so erhält man in der resultirenden Linie $K_1 K_3$ die Begrenzung der Ordinaten, welche den auf die Kurbel übertragenen Kolbendruck vorstellen, und zwar gilt die Linie $K_1 K_3$, wie leicht zu erkennen, für den Hingang und $(K_1)(K_3)$ für den Rückgang. Man ersieht hieraus, daß der auf den Kurbelzapfen durch die Lenkerstange fortzupflanzende Druck gegen Ende des Kolbenlaufes den Kolbendruck Q erheblich übersteigen kann, was namentlich bei der Bestimmung der Dimensionen des Kurbelzapfens und der Lenkerstange in Betracht zu ziehen ist. Für den Fall, daß die Bewegung, wie bei Pumpen, von der Kurbel ausgeht, treten die Beschleunigungsdrücke in dem ersten Theile des Kolbenlaufes mit dem Kolbenwiderstande Q in derselben Richtung auf, und es gilt daher die Curve $(K_1)(K_3)$ für den Hingang und diejenige $K_1 K_3$ für den Rückgang.

Wenn nun entweder in Folge eines großen Werthes von m_2 oder der Kurbelgeschwindigkeit v die anfängliche Massenbeschleunigung $m_2 \frac{v^2}{r}$ einen Betrag $C_1 M_1$ annehmen würde, welcher die Größe $C_1 Q_1$ des wirklichen Dampfdruckes auf den Kolben überstiege, so würde die den resultirenden Kolbendruck darstellende Linie durch eine Curve $K_1 K_3$, Fig. 574 (a. f. S.), dargestellt werden, welche die Axe $C_1 C_3$ in einem gewissen Punkt K resp. (K) schneidet. Man ersieht hieraus, daß in diesem Falle der Kreuzkopf zu Anfang seiner Bewegung während des Weges $C_1 K$ resp. $C_3 (K)$ nicht durch

wegung eines Pumpwerkes dient, also der Antrieb von der Kurbelwelle ausgeht, so ruft das Auftreten des Druckwechsels in den Punkten K und (K) eine andere eigenthümliche Erscheinung hervor. Hierbei hat die Kurbel während des Hingangs, wenn $C_1 Q_1$ die von der zu hebenden Wassersäule auf den Kolben wirkende Widerstandskraft Q bedeutet, im Beginne der Bewegung einen Widerstand $C_1(K_1) = Q + M$ zu bewältigen. Dieser Widerstand wird kleiner und kleiner und ist in der Kolbenstellung C_0 , welcher der maximalen Kolbengeschwindigkeit entspricht, gerade bis auf den Betrag Q herabgesunken, d. h. gleich dem Gewichte der auf dem Kolben lastenden Wassersäule von der Subhöhe zur Höhe und der Kolbenfläche zum Querschnitte geworden. Bei weiterer Bewegung über C_0 hinaus wirkt nun die bewegte Masse m_2 wegen ihrer Verzögerung ebenfalls treibend auf den Kolben, so daß die Kurbel einen stetig abnehmenden Widerstand zu überwinden hat. Dieser Bewegungszustand würde nun bis zu Ende des Kolbenlaufes anhalten in derselben Art, wie bei einer Dampfmaschine, wenn die ganze schwingende Masse m_2 fest mit dem Kreuzkopfe verbunden wäre. Dies ist bei Pumpwerken aber nicht der Fall, denn die schwingende Masse m_2 setzt sich hier zusammen aus den Massen der mit dem Kreuzkopfe direct verbundenen Maschinenteile, wie Kolben und Kolbenstange, und aus der in der Saugröhre hängenden Wassermenge, welche bei der Bewegung des Kolbens demselben folgen muß. Es wird nun zwar auch diese Wassermenge von dem Punkte C_0 aus bei eintretender Verzögerung vermöge ihrer aufgesammelten lebendigen Kraft fördernd auf den Kolben wirken und dadurch den Kolbenwiderstand für die Kurbel vermindern, doch wird dieser Druck des nachfolgenden Saugwassers gegen den Kolben nur eine bestimmte Größe erreichen können. Sobald nämlich dieser Druck einen Betrag erreicht, welcher hinreicht, das Steigventil, welches im Kolben oder in einem besonderen Ventilgehäuse angeordnet ist, zu öffnen, wird dieses letztere Ventil in der That geöffnet werden und es gelangt von diesem Augenblicke an bis zum Ende des Kolbenlaufes ein gewisses Wasserquantum durch das Druckventil hindurch zum Ausflusse. Während dieser letzten Periode wirkt das bewegte Wasser in der Saugröhre nur mit demjenigen constanten Drucke schiebend auf den Kolben, welchen es auf diesen in dem Momente ausübte, in dem das Steigventil aufgeworfen wurde. Auf diese Weise hat man sich die auffällige Erscheinung zu erklären, daß Pumpen unter Umständen per Kolbenshub ein Wasserquantum liefern können, welches größer ist als der vom Kolben durchlaufene Cylinderraum. Würde z. B. die zum Deffnen des Steigventils erforderliche Kraft in der Figur durch VW ausgedrückt sein, so würde das Wasser zum Ausflusse gelangen in demjenigen Augenblicke, in welchem der Kolben die Lage X passirt. Der Widerstand, welchen der Kolben seiner Bewegung entgegensetzt, wäre nun bis zum Ende des Laufes constant gleich XW , und es würde ein Wasser-

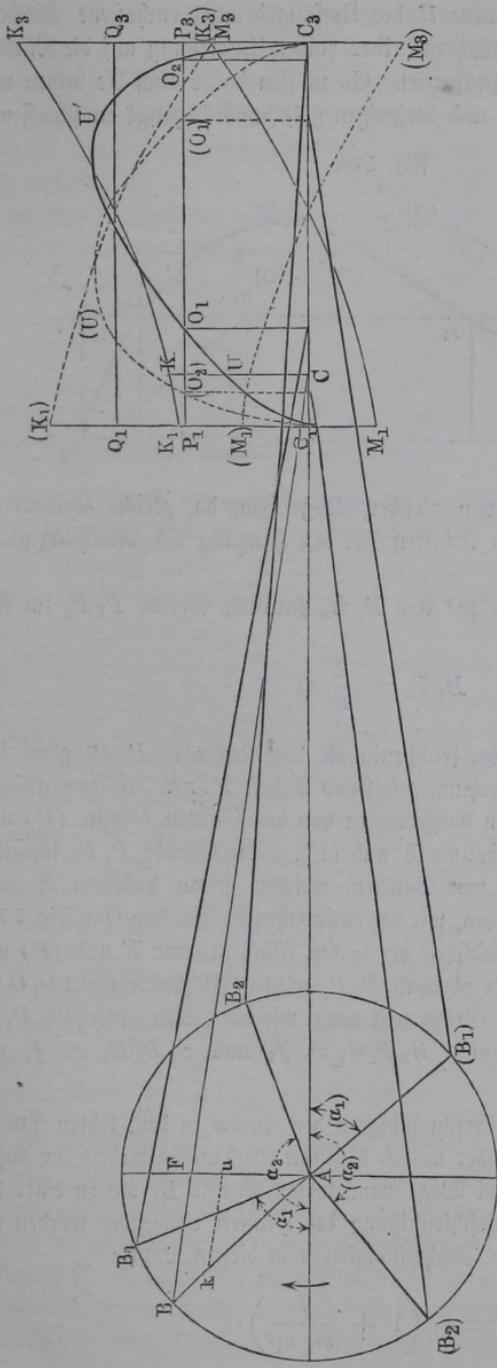
quantum schon während des Hingangs zum Ausflusse gelangen, dessen Größe sich dadurch bestimmte, daß die zur Förderung dieses Wassers erforderliche mechanische Arbeit durch die Fläche $WW_3(K_3)W$ ausgedrückt ist. Von der Kurbelwelle dagegen wäre eine mechanische Arbeit während des Kolbenlaufes zu verrichten, welche durch die Fläche $C_1(K_1)K_0WW_3C_3C_1$ dargestellt wird.

§. 153. **Graphische Untersuchung der Kurbelbewegung.** Nachdem man in der vorstehend angegebenen Art den von den schwingenden Massen erforderlichen Beschleunigungsdruck ermittelt hat, ist auch die Untersuchung der Kurbelbewegung auf graphischem Wege leicht ausführbar. Es stelle zu dem Ende wieder das Rechteck $C_1Q_1Q_3C_3$, Fig. 575, das Diagramm des Dampfdruckes für eine Dampfmaschine ohne Expansion dar, ferner seien die Linien M für den Massendruck und durch Vereinigung der Ordinaten von Q und M diejenigen K für den resultirenden Kolbendruck eingezeichnet, und zwar sind die für den Rückgang geltenden Linien in der Figur punktiert worden. Nunmehr kann man auch nach §. 139 diejenige Linie U eintragen, deren Ordinaten den von der Lenkerstange an dem Kurbelzapfen ausgeübten Umfangsdruck angeben. Um diesen Umfangsdruck U für jede beliebige Kolbenstellung C zu ermitteln, war in §. 139 gefunden: $K:U = AB:AF$, wenn K die Kolbenkraft vorstellte. Denkt man daher den für C zugehörigen Kolbendruck CK auf der Kurbelrichtung gleich Ak angetragen und mit der Lenkerstange BC die Parallele ku gezogen, so erhält man in Au die Größe des Umfangsdruckes, wenn der Kolben in C sich befindet. Diese Größe $Au = CU$ eingetragen und dieselbe Construction für eine genügend große Zahl von Punkten ausgeführt, erhält man in $C_1UU'C_3$ das Diagramm für den Umfangsdruck. Endlich ziehe man noch in dem Abstände

$$C_1P_1 = \frac{2}{\pi} C_1Q_1$$

von der Ase C_1C_3 die mit der letzteren parallele Gerade P_1P_3 , so stellen deren constante Ordinaten offenbar die Größe des durchschnittlichen Nutzwiderstandes an der Kurbelwelle an einem Arme gleich dem Kurbelhalbmesser r dar. Diese Gerade P_1P_3 wird die Curve U des Umfangsdruckes für den Hingang in zwei Punkten O_1 und O_2 und diejenige (U) für den Rückgang in zwei anderen Punkten (O_1) und (O_2) schneiden. Es ist daher in den diesen vier Schnittpunkten entsprechenden Kolbenstellungen der an der Kurbelwarze wirksame Umfangsdruck U gerade gleich dem an derselben Stelle auftretenden Widerstande P , woraus folgt, daß in diesen Schnittpunkten die Bewegung weder beschleunigt noch verzögert wird. Solche Punkte, deren Beschleunigung Null ist, entsprechen aber einem Maximum resp. Minimum der Geschwindigkeit, und man erkennt ohne Weiteres, daß die Punkte O_1 und (O_1)

Fig. 575.

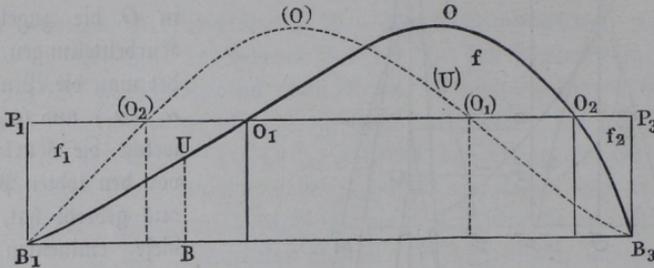


den kleinsten und die-
 jenigen O_2 und (O_2) den
 größten Geschwindig-
 keitswerthen entsprechen.
 Construiert man noch zu
 diesen Kolbenstellungen
 in O die zugehörigen
 Kurbelstellungen, so fin-
 det man die Winkel α_1 ,
 α_2 , (α_1) und (α_2) , um
 welche die Kurbel sich
 von den toden Punkten
 aus gedreht hat, wenn
 diese eminenten Ge-
 schwindigkeiten sich ein-
 stellen.

Man kann auch den
 Werth dieser größten
 und kleinsten Geschwin-
 digkeiten graphisch be-
 stimmen, nur muß man
 für diese Ermittlung
 die Umfangsdrucke U
 nicht über einer Axe
 gleich dem Kolbenhube,
 sondern über einer sol-
 chen gleich dem halben
 Umfange des Kurbelkrei-
 ses auftragen. Ist B_1B_3 ,
 Fig. 576 (a. f. S.), gleich
 πr , und stellt irgend
 eine Ordinate BU den
 Umfangsdruck an der
 Kurbelwarze in demjeni-
 gen Augenblicke dar, in
 welchem die Kurbel-
 warze einen bogenförmigen
 Weg von der Länge
 der Abscisse B_1B ge-
 macht hat, so sieht man
 auch, daß der zwischen

der Ase $B_1 B_3$ und der Curve U des Umfangsdruckes enthaltene Flächenraum die von dem Kolben während einer halben Umdrehung auf die Kurbelwelle übertragene Arbeit repräsentirt. Es müssen daher auch die beiden von der Curve U des Hingangs und derjenigen (U) des Rückgangs umschlossenen

Fig. 576.



Flächenräume F und (F) von gleicher Größe sein, da, gleiche Kolbenkraft vorausgesetzt, die geleisteten Arbeiten für den Hingang und Rückgang gleich groß sind.

Zieht man auch hier die zur Ase $B_1 B_3$ parallele Gerade $P_1 P_3$ im Abstände

$$B_1 P_1 = \frac{2}{\pi} Q$$

von der Ase, so ist auch der Flächeninhalt des Rechtecks $B_1 P_3$ gleich der während einer halben Umdrehung geleisteten Arbeit $P \cdot r\pi$, also von gleicher Größe mit jedem der beiden vorgedachten von den Curven U resp. (U) und der Ase begrenzten Flächenräume F und (F) . Die Gerade $P_1 P_3$ schneidet auch hier die Curven U in vier Punkten, welchen genau dieselben Kolben- und Kurbelstellungen zugehören, wie den entsprechenden Punkten O in Fig. 575. Es folgt ferner aus der Gleichheit der beiden Flächenräume F und (F) mit dem Rechtecke $B_1 P_3$, daß der oberhalb $P_1 P_3$ gelegene Flächenabschnitt $O_1 O O_2$ oder f genau von derselben Größe sein muß, wie die beiden unterhalb $P_1 P_3$ gelegenen dreieckigen Abschnitte $B_1 P_1 O_1 = f_1$ und $O_2 P_3 B_3 = f_2$ zusammen.

Ist nun v_1 wieder die Geschwindigkeit der Kurbel in dem toten Punkte B_1 , und bezeichnet man wieder mit L diejenige mechanische Arbeit der äußeren Kräfte, welche auf dem Wege vom toten Punkte B_1 bis zu einer beliebigen Stellung B auf Beschleunigung der Massen verwendet worden ist, so hat man nach früher die Geschwindigkeit v in diesem Punkte

$$v = v_1 \left(1 + \frac{L}{m_1 v_1^2} \right).$$

Es ist nun leicht, für diese Formel die Größe L aus dem Diagramm zu entnehmen, denn die auf Beschleunigung der Massen verwendete mechanische Arbeit ist stets durch diejenige Fläche ausgedrückt, welche vom todtten Punkte B_1 an bis zu der betrachteten Kurbelstellung B zwischen der Geraden P_1P_3 und der Curve des Umfangsdruckes U enthalten ist, wobei die nach den entgegengesetzten Seiten von P_1P_3 gelegenen Flächenstücke mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet zu denken sind. So hat man zur Ermittlung der Minimalgeschwindigkeit in O_1 für L die durch die Fläche $B_1P_1O_1 = f_1$ dargestellte mechanische Arbeit mit dem negativen Vorzeichen in Rechnung zu stellen, während die Geschwindigkeit v_{max} in O_2 sich ergibt, wenn man für L die durch die Differenz $O_1O_2 - B_1P_1O_1 = f - f_1$ dargestellte mechanische Leistung annimmt. Die Bestimmung der Flächenräume kann dabei etwa unter Anwendung der Simpson'schen Regel oder mit Hilfe eines planimetrischen Instrumentes geschehen.

Die vorstehend angegebene graphische Untersuchung der Kurbelbewegung ist in derselben Weise für Expansionsmaschinen durchführbar. Hierbei weicht das Diagramm nur in der Linie Q des Dampfdruckes ab, insofern diese Linie nur für das der Volldruckperiode entsprechende Stück Q_1Q_2 , Fig. 577, parallel der Aye begrenzt wird. Der weitere Verlauf der Begrenzungslinie Q_2Q_3 ist dann nach dem Gesetze zu ermitteln, welches man für die Wirkung des Dampfes während der Expansion zu Grunde legen will, und die Untersuchung wird durchaus nicht erschwert, wenn man ein der Wahrheit näher kommendes Gesetz (siehe Theil II) annimmt, als das Mariotte'sche, während die in §. 150 angegebene analytische Untersuchung in diesem Falle zu sehr verwickelten kaum durchführbaren Rechnungen führen dürfte. Man kann sogar das Dampfdruckdiagramm gänzlich ohne Zugrundelegung eines bestimmten Gesetzes nach den aus indicatorischen Messungen sich ergebenden Resultaten auftragen, ohne daß die Untersuchung erschwert würde. In der großen Einfachheit dieses graphischen Verfahrens und der Uebersichtlichkeit und Anschaulichkeit der gewonnenen Resultate sind die Hauptvortheile zu erkennen, welche diese darstellende Methode gegenüber der rechnerischen bei dem ausführenden Ingenieur in neuerer Zeit sehr beliebt gemacht und zu fast ausschließlicher Anwendung gebracht haben.

In Fig. 577 (a. f. S.) ist das Diagramm für eine Maschine mit dreifacher Expansion entworfen, und es dürfte, da die vorherige Bezeichnung für die Linien beibehalten wurde, eine besondere Erläuterung überflüssig sein. Die Linie R_1R_3 bedeutet hierbei den constanten Gegenruck auf die Rückfläche des Kolbens, und die Linie des Kolbendruckes K ist daher als die aus den Diagrammen für Q , R und M resultirende anzusehen. Auch hier gelten die punktirten Linien Q , M , K und U für den Rückgang.

hat man nur nöthig, für irgend eine Kolbenstellung C die Ordinate daselbst CW gleich der Summe der beiden Umfangsdrücke CU und $C'U'$ beider Kurbeln zu machen, wobei sich die Lage des zweiten Kolbens in C' ohne Weiteres aus dem Winkel ergibt, um welchen die Kurbeln gegen einander versetzt sind. Auf diese Weise erhält man die Linie $W(W)$ für den resultirenden Umfangsdruck. Diese Linie wird in der Figur von der den Widerstand P darstellenden Geraden P_1P_3 in sechs Punkten O geschnitten, welche den drei ersten Quadranten angehören, ein Zeichen, daß hier bei den gewählten Verhältnissen im vierten Quadranten eine größte oder kleinste Geschwindigkeit überhaupt nicht vorkommt, wie ein ähnliches Verhalten auch bereits in §. 147 gefunden wurde.

Die Reibung des Kurbelgetriebes. Als schädliche Nebenhinder- §. 154.
nisse treten bei dem Kurbelgetriebe hauptsächlich die Reibungswiderstände an den Verbindungsstellen je zweier Maschinentheile auf, wogegen der Luftwiderstand wegen seiner in den gewöhnlichen Fällen geringen Größe außer Acht gelassen werden kann. Solche Reibungen finden daher in den Lagern der Kurbelwelle, an dem Kurbelzapfen und dem Bolzen des Kreuzkopfes und zwischen dessen Gleitschuhen und den Führungsschienen statt.

Die Reibung der Kurbelwelle in jedem ihrer Lager findet man einfach zu φR , unter R den Lagerdruck verstanden, und ist die durch diese Zapfenreibung bei jeder Umdrehung aufgezehrte Arbeit durch $\varphi R \pi d_1$ ausgedrückt, wenn d_1 den Durchmesser des betreffenden Wellzapfens bedeutet. Auf den Kurbelzapfen reducirt ist die Axenreibung durch

$$w_1 = \varphi R \frac{d_1}{2r}$$

ausgedrückt. Die Reactionen R in den Lagern der Welle sind in jedem besonderen Falle nach den bekannten Regeln der Statik zu ermitteln, und ist bei der Bestimmung dieser Lagerdrücke außer der auf die Kurbel übertragenen Kolbenkraft K und dem Eigengewicht G der Kurbelwelle nebst Schwungrad, Triebrädern zc., namentlich noch der Räder- oder Riemenndruck von Einfluß, welcher aus der Uebertragung der rotirenden Bewegung folgt. Wegen der abwechselnden Richtung des Kolbendruckes werden auch die Lagerreactionen während jeder Umdrehung ihre Richtung ändern, insbesondere wird das unmittelbar neben der Kurbel anzubringende Lager, welches vornehmlich den Kolbendruck aufzunehmen hat, abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen gepreßt werden. Die Größe der Lagerdrücke ist ebenfalls während jeder Umdrehung wegen der Veränderlichkeit der Kolbenkraft gewissen Schwankungen unterworfen, und man wird daher, um die Reibung der Kurbelwelle näherungsweise zu bestimmen, einen durchschnittlichen Werth für die Größe der

Kolbenkraft in Rechnung zu stellen haben, welcher Durchschnittswerth sich am einfachsten aus dem betreffenden Diagramme, Figuren 575 bis 577, vermittelst der den Kolbendruck darstellenden Curve K bestimmen läßt.

An dem Kurbelzapfen, dessen Durchmesser d_2 sein möge, findet eine Reibung statt, welche durch die in der Schubstange wirkende Kraft hervorgerufen wird, und welche Reibung während jeder Kurbeldrehung einen Weg gleich dem Umfange der Kurbelwarze $d_2 \pi$ zurücklegt. Die Größe der Stangenkraft wurde oben zu $\frac{K}{\cos \gamma}$ gefunden, wenn γ den Ablenkungswinkel der Lenkerstange von der Schubrichtung vorstellt. Für diesen Winkel γ hat man nach dem Früheren die Beziehung

$$\frac{r \sin \alpha}{l} = \sin \gamma,$$

oder

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \alpha\right)^2}.$$

Der Ausschlagswinkel γ und damit auch $\frac{1}{\cos \gamma}$ erreicht den größten Werth für

$$\partial \left(\frac{r}{l} \sin \alpha\right) = 0,$$

d. i. für $\alpha = 90^\circ$, also wenn die Kurbel ihre mittlere Stellung zwischen den Todtlagen einnimmt. Hierfür ist

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2},$$

daher die Kraft in der Richtung der Lenkerstange

$$S = \frac{K}{\cos \gamma} = \frac{K}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2}} = K \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2}\right).$$

Für das gewöhnliche Verhältniß von $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ hätte man daher die Stangenkraft bei dem größten Ausschlagswinkel γ zu $S = 1,02 K$. Es folgt hieraus, daß man genügend genau die Kolbenkraft K als reibungserzeugend ansehen kann, und es ist daher, unter K wieder einen durchschnittlichen Werth der Kolbenkraft verstanden, die während einer Kurbeldrehung von der Warzenreibung aufgezehrte Arbeit gleich $\varphi K \cdot \pi d_2$. Reducirt man diesen Reibungswiderstand auf die Kurbelwelle, so erhält man an einem Hebelsarm gleich der Kurbellänge r den Widerstand

bei jeder Kurbeldrehung die Lenkerstange um den größten Ausschlagswinkel $\gamma = \text{arc sin } \frac{r}{l}$ nach jeder Seite hin und zurück, und da man bei der Kleinheit dieses Winkels $\gamma = \frac{r}{l}$ setzen kann, so ist der Weg der Reibung zu $4 \frac{r}{l} \frac{d_3}{2}$ gegeben, unter d_3 den Durchmesser des Bolzens verstanden. Der auf den Kurbelzapfen reducirte Reibungswiderstand dieses Bolzens bestimmt sich daher zu:

$$\varphi K \frac{4 r d_3}{2 l \cdot 2 \pi r} = w_3 = \varphi K \frac{d_3}{\pi l}.$$

Wenn auch diese Reibung nur unbeträchtlich ausfällt, so wird doch durch die abwechselnde Richtung des Widerstandes, verbunden mit dem wechselnden Drucke K , dem Bolzen des Kreuzkopfes ein Bestreben mitgetheilt, in der Traverse sich zu lösen, weswegen auf eine besonders solide Verbindung desselben mit dem Kreuzkopfe zu achten ist, um die in Folge eines LöSENS eintretenden wiederholten kleinen Stöße und damit einen unruhigen Gang zu vermeiden.

Zwischen den Gleitbacken des Kreuzkopfes und den Führungsprimen findet in Folge der mehr oder minder schrägen Lage der Lenkerstange ein auf gleitende Reibung wirkender Seitendruck statt, welcher, wie leicht zu erkennen ist, zu $Q \text{ tang } \gamma$ sich bestimmt. Für die todten Punkte ist dieser Seitendruck gleich Null und erreicht in einer gewissen mittleren Lage, welche wesentlich von der Veränderlichkeit von K abhängig ist, einen größten Werth. Bei constanter Kolbenkraft würde dieser größte Seitendruck gleichzeitig mit dem größten Ausschlagswinkel γ , also für eine Kurbeldrehung $\alpha = 90^\circ$, auftreten. Da aber im Allgemeinen der Kolbendruck nicht constant ist, auch bei Volldruckmaschinen und Wasserpumpen nicht wegen des Massendrucks der schwingenden Massen, so wird man zur genauen Bestimmung des Führungswiderstandes w_4 die Arbeit desselben während einer Umdrehung durch den Ausdruck

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} \varphi K \text{ tang } \gamma \partial s$$

zu bestimmen haben. Setzt man hierin

$$\text{tang } \gamma = \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{l^2}{r^2 \sin^2 \alpha} - 1}}$$

und nach §. 139 ferner

$$\partial s = \left(r \sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right) \partial \alpha,$$

so erhält man die Arbeit der Reibung in der Führung durch

$$\varphi \int_0^{2\pi} K \frac{r \sin \alpha + \frac{r}{2l} \sin 2\alpha}{\sqrt{\frac{l^2}{r^2 \sin^2 \alpha} - 1}} d\alpha.$$

Die Ausrechnung dieses Ausdruckes führt auf größere Schwierigkeiten, um daher zu einer angenäherten Formel zu gelangen, setze man

$$\tan \gamma = \sin \gamma = \frac{r}{l} \sin \alpha, \text{ und } \partial s = r \sin \alpha,$$

und lege wieder einen durchschnittlichen Werth für den Kolbendruck K zu Grunde, alsdann erhält man die Reibungsarbeit an der Führung während einer Kurbeldrehung zu

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi K \frac{r}{l} \sin \alpha \cdot r \sin \alpha d\alpha &= \varphi K \frac{r^2}{l} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \\ &= \varphi K \frac{r^2}{l} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha = \varphi K \frac{r^2}{l} \pi, \end{aligned}$$

folglich den auf die Kurbelwarze reducirten Führungswiderstand

$$w_4 = \varphi K \frac{r}{2l}.$$

Man erkennt übrigens leicht, daß der Seitendruck der Lenkerstange bei einer bestimmten Umdrehungsrichtung der Kurbel immer, sowohl beim Hingange wie beim Rückgange, auf die eine Führungsstange fällt, und die andere Coulotte nur bei der entgegengesetzten Umdrehung gedrückt wird. Daher erklärt es sich, warum man zuweilen bei solchen Maschinen, die stets nur in einer und derselben Richtung sich umdrehen, dem Kreuzkopfe nur einerseits eine Führung durch eine Gleitbahn giebt.

Nach den vorstehenden Ermittlungen hat man, unter K einen durchschnittlichen Kolbendruck verstanden, für die Arbeit aller Kräfte die Gleichung:

$$P 2\pi r = K 4r \pm (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) 2\pi r,$$

oder

$$P = \frac{2}{\pi} K \pm (w_1 + w_2 + w_3 + w_4),$$

worin das obere Vorzeichen für Pumpen, das untere für Dampfmaschinen gilt. Führt man hierin für die Widerstände w die oben gefundenen Werthe ein, so erhält man:

$$P = \frac{2}{\pi} K \pm \varphi \left[R \frac{d_1}{2r} + K \left(\frac{d_2}{2r} + \frac{d_3}{\pi l} + \frac{r}{2l} \right) \right].$$

Anmerkung. Wollte man sich bei Bestimmung der Reibung in der Führung mit der hier angegebenen Annäherung nicht begnügen, so könnte man das allgemeine Integral

$$\int_0^{2\pi} \varphi K \tan \gamma \, ds$$

am bequemsten durch Construction finden, indem man in dem Diagramme, Fig. 577, für jede Kolbenstellung die Größe $\varphi K \tan \gamma$ construirt und den erhaltenen Werth als Ordinate aufträgt, man erhält dann eine Curve w_4 , welche durch die Punkte C_1 und C_3 geht, und zwar ist diese Curve w_4 für den Hingang eine andere als diejenige (w_4) für den Rückgang. Die beiden Flächen, welche zwischen diesen Curven und der Axc $C_1 C_3$ eingeschlossen sind, stellen dann die mechanischen Arbeiten dar, welche von der Reibung in der Führung beim Hingange resp. beim Rückgange des Kolbens consumirt werden, und man findet den auf die Kurbelwarze reducirten Widerstand w_4 dieser Reibungen in bekannter Weise in den Höhen derjenigen Rechtecke zur Grundlinie πr , deren Inhalte mit jenen Flächen gleiche Größe haben.

Es ist ferner von Interesse, den Wirkungsgrad des Kurbelgetriebes annähernd kennen zu lernen. Da in der oben entwickelten Formel für P das Glied mit R , welches die Agerreibung repräsentirt, wesentlich von dem Gewichte G der Schwungradwelle und von der Betriebskraft derselben abhängig ist, so enthält diese Formel einen größeren Widerstand als er durch das Kurbelgetriebe allein veranlaßt wird. Um annähernd diejenigen Widerstände zu erhalten, welche lediglich aus dem Kurbelmechanismus entspringen, und um dadurch zu einer Schätzung des Wirkungsgrades des Kurbelgetriebes zu gelangen, kann man den betreffenden Theil der Agerreibung zu φK annehmen, welche Annahme in den meisten Fällen deswegen der Wahrheit sehr nahe kommen wird, weil unmittelbar neben der Kurbel meist ein Lager angeordnet ist, welches den Kolbendruck vorzugsweise aufnimmt. Unter dieser Voraussetzung hätte man für die an der Kurbelwarze wirkende Kraft P den Ausdruck, wenn der Antrieb vom Kolben ausgeht:

$$P = K \left[\frac{2}{\pi} - \varphi \left(\frac{d_1 + d_2}{2r} + \frac{d_3}{\pi l} + \frac{r}{2l} \right) \right]$$

und somit, da ohne Reibungen

$$P_0 = \frac{2}{\pi} K$$

sich berechnet, den Wirkungsgrad annähernd zu:

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{\frac{2}{\pi} - \varphi \left(\frac{d_1 + d_2}{2r} + \frac{d_3}{\pi l} + \frac{r}{2l} \right)}{\frac{2}{\pi}} = 1 - \frac{\varphi \pi}{2} \left(\frac{d_1 + d_2}{2r} + \frac{d_3}{\pi l} + \frac{r}{2l} \right)$$

Beispiel. Wenn bei einer Dampfmaschine die Kurbellänge $r = 0,5$ Meter, die Länge der Lenkerstange $l = 2,5$ Meter, der Zapfendurchmesser der Welle $0,200$ Meter, der Durchmesser des Kurbelzapfens $0,120$ Meter und derjenige des Kreuzkopfbolzens $0,080$ Meter beträgt, wie groß ist dann bei einem Reibungscoefficienten von $0,08$ der voraussichtliche Wirkungsgrad des Kurbelgetriebes?

Man hat in diesem Falle:

$$\eta = 1 - 0,08 \cdot 1,57 \left(\frac{0,320}{2 \cdot 0,5} + \frac{0,08}{3,14 \cdot 2,5} + \frac{0,5}{5} \right)$$

$$= 1 - 0,126 (0,320 + 0,01 + 0,10) = 1 - 0,054 = 0,946.$$

Durch die Nebenhindernisse der Kurbelbewegung ohne Berücksichtigung der Reibung, welche das Gewicht des Schwungrades veranlaßt, gehen daher etwa $5\frac{1}{2}$ Procent der Kraft verloren.

Die Construction der Kurbel. Der Kurbelarm wird in den meisten §. 155. Fällen als besonderes Stück gebildet und mit seiner Bohrung genau passend auf das Stirnende der Kurbelwelle gesteckt. Bei den Handkurbeln für Winden macht man denselben wegen seiner im Verhältniß zur Länge (0,3 — 0,45 Meter) geringen Stärke in der Regel aus Schmiedeeisen, Fig. 580, und befestigt ihn auf der Kurbelwelle *A* mittelst der Mutter *F*. Die Kurbelwarze wird hier durch einen 0,3 — 0,48 Meter langen Stift *CD* gebildet, welcher bei *C* in den Kurbelarm genietet wird, und auf welchen als Handhabe für die Arbeiter eine Hülse *E* von Holz oder Blech lose drehbar aufgesteckt wird. Zuweilen schmiedet man auch wohl die Handhabe mit dem Kurbelarme aus einem Stücke *BCD*, Fig. 581, und läßt die Hülse ganz

Fig. 580.

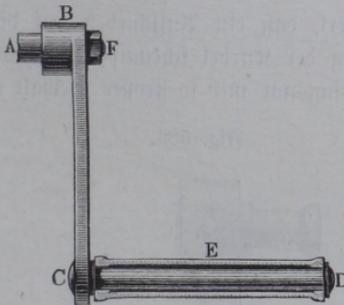
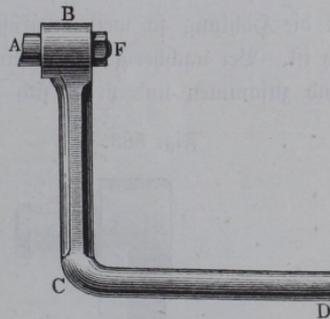


Fig. 581.

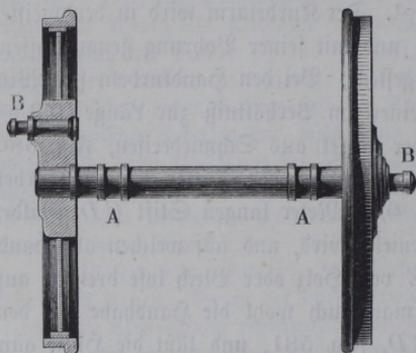


fort, welches letztere aber nicht zu empfehlen ist. Ist auf dem Ende der Kurbelwelle ein hinreichend großes Schwungrad angebracht, so kann man auch die Handhabe direct in einen Arm derselben in der entsprechenden Entfernung von der Mitte einschrauben, wie dies z. B. bei Häcksel- und Handbaggermaschinen u. oft geschieht. Auch die Kurbelzapfen zum Drehen der Schwungradwelle durch Fußbewegung an Nähmaschinen setzt man oft in einen Schwungradarm. Die Kurbeln größerer Dampfmaschinen macht man wegen der leichteren Herstellung dagegen meist von Gußeisen, und nur da, wo man mit Rücksicht auf eine besondere Solidität die größeren Kosten nicht scheut, wendet man auch hier Schmiedeeisen an. Bei den Locomotiven mit außen liegenden Cylindern schmiedet man die Naben der Triebräder be-

hufs Aufnahme der Kurbelzapfen zu entsprechenden Verstärkungen aus. In Fig. 582 sind *B, B* die Kurbelzapfen, welche um 90 Grad gegen einander versetzt sind.

Von den beiden hier gezeichneten Kurbeln für Dampfmaschinen, welche den in Redtenbacher's Resultaten angegebenen Verhältnissen gemäß gezeichnet sind, stellt Fig. 583 eine

Fig. 582.

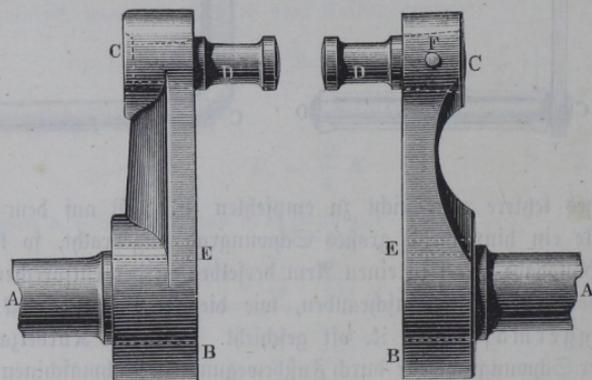


gußeiserne, Fig. 584 eine schmiedeeiserne Kurbel vor. Auf die Befestigung der Kurbel auf der Axe *A* muß bei diesen Kurbeln große Sorgfalt verwendet werden, und man begnügt sich in der Regel nicht mit dem Keil oder dem Schraubenstifte *E*, sondern setzt die Kurbeln häufig warm auf die Axen, indem man nämlich die Bohrung der Kurbel um wenig enger ausführt als der Durch-

messer des Wellenendes beträgt, und nun durch mäßige Erwärmung der Kurbel die Höhlung so weit vergrößert, daß ein Aufchieben auf die Axe möglich ist. Bei nachheriger Erkaltung der Kurbel schrumpft die Nabe entsprechend zusammen und preßt sich ringsum mit so großer Gewalt an die

Fig. 583.

Fig. 584.



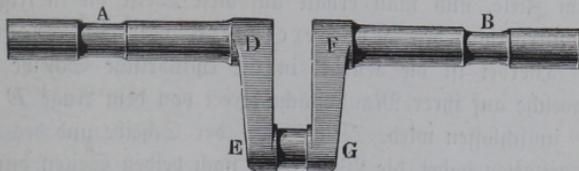
Axe, daß die dadurch erzeugte Reibung in der Regel schon ein Lösen verhindert. Da hierbei indessen das Material der Nabe schon von vornherein einer gewissen Spannung unterworfen ist, so wird die Differenz, um welche die Bohrung kleiner zu machen ist, als der Axenschaft, nur sehr gering sein

dürfen. Eine genaue Berechnung dieser möglichen Differenz und der dadurch veranlaßten Spannungen der Nabe ist mit Sicherheit nicht ausführbar, man wird indeß für gußeiserne Kurbeln keine höhere Erwärmung annehmen dürfen als etwa zu 200° C., da die Festigkeit des Gußeisens mit der Erwärmung bekanntlich sehr schnell abnimmt. Wollte man eine solche Erwärmung zu Grunde legen, so würde die cylindrische Bohrung vom Durchmesser d auf $d(1 + 200 \cdot 0,000011) = 1,002 d$ sich erweitern, die Welle dürfte also höchstens um $\frac{1}{500}$ ihres Durchmessers stärker gehalten werden als die Bohrung der Nabe. Die Befestigung des Kurbelzapfens D in der Kurbel geschieht häufig durch einen Keil oder Stift, F in Fig. 584, oder auch durch Vernietung bei C , Fig. 583; eine Schraubenmutter wendet man hierfür seltener an, wegen der Gefahr eines Lösens unter Einfluß der beständigen Druckwechsel der Schubstange.

Um den Kurbelhub nach Bedarf veränderlich machen zu können, wie es für manche Hobel- und Nuthstoßmaschinen erforderlich ist, versieht man den Kurbelarm auch mit einem prismatischen und radial gerichteten Schlitz, in welchem ein den Kurbelzapfen tragendes Gleitstück mit Hülse einer Stellschraube verschiebbar angebracht ist. Auch bedient man sich in diesem Falle anstatt des Kurbelarmes wohl einer auf der Axe fest aufgekeilten Scheibe, welche mit mehreren in verschiedenen Abständen von der Mitte angebrachten Löchern zur Aufnahme des Zapfens versehen ist.

Die hier besprochenen Kurbelconstructions sind nur anwendbar, wenn die Kurbel auf dem freien Ende der Welle angebracht werden kann, die letztere selbst also nur nach der einen Seite der Kurbelenebene sich erstreckt. Wenn dagegen, wie es bei den Schiffsmaschinen und bei den Locomotiven mit inneren Cylindern der Fall ist, die Kurbelwelle nach beiden Seiten der Kurbelenebene sich fortsetzen muß, so ist man genöthigt, die Kurbel durch eine entsprechende Kröpfung der Welle zu bilden, wie Fig. 585 zeigt. Diese sogenannten gekröpften Axen oder Krummzapfenwellen werden immer

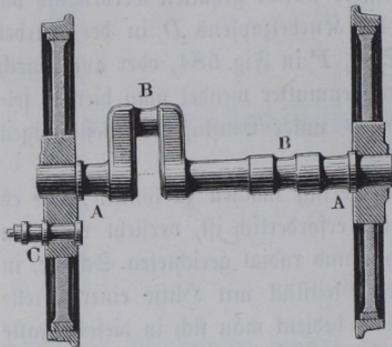
Fig. 585.



aus Schmiedeeisen gemacht und zwar in der Regel aus einem Stücke geschmiedet, nur bei sehr großen Stärken, wie sie etwa bei Schiffsmaschinen vorkommen, pflegt man wohl die Kurbelarme DE und FG als besondere Stücke auf die Axenschenkel zu setzen und beide Theile durch den gemein-

schaftlichen Kurbelzapfen *EG* zu verbinden. Von der Verwendung von Gußeisen für solche gekröpfte Axen ist man heutzutage bei den Fortschritten, welche man in der Herstellung schwerer Schmiedestücke gemacht hat, so gut wie gänzlich zurückgekommen, weil gußeiserne Krummzapfenwellen nur geringe Sicherheit gegen Stöße darbieten. Für zweicylindrige Dampfmaschinen versteht man solche Krummzapfenwellen mit zwei unter rechtem Winkel zu

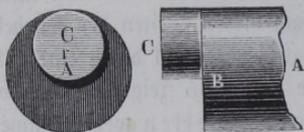
Fig. 586.



einander geneigten Kröpfungen, und es ist in Fig. 586 eine derartige Ase für eine Locomotive dargestellt. Hierbei sind *B, B* die Zapfen der Kröpfungen, an denen die Pleuerstangen der Dampfzylinder angreifen, während zwei in die Naben der Triebräder eingesetzte Zapfen, von denen in der Figur nur der eine *C* sichtbar ist, dazu dienen, mit Hilfe zweier Kuppelungsstangen eine zweite Triebaxe durch den Mechanismus der Parallelkurbeln (s. §. 137) in Umdrehung zu setzen.

§. 156. **Excenter.** Wenn eine Kurbel nur eine geringe Armlänge *r* hat, so kann man unter gänzlicher Umgehung eines besonderen Kurbelarms die Construction nach Fig. 587 derart ausführen, daß man das Ende der Kurbel-

Fig. 587.

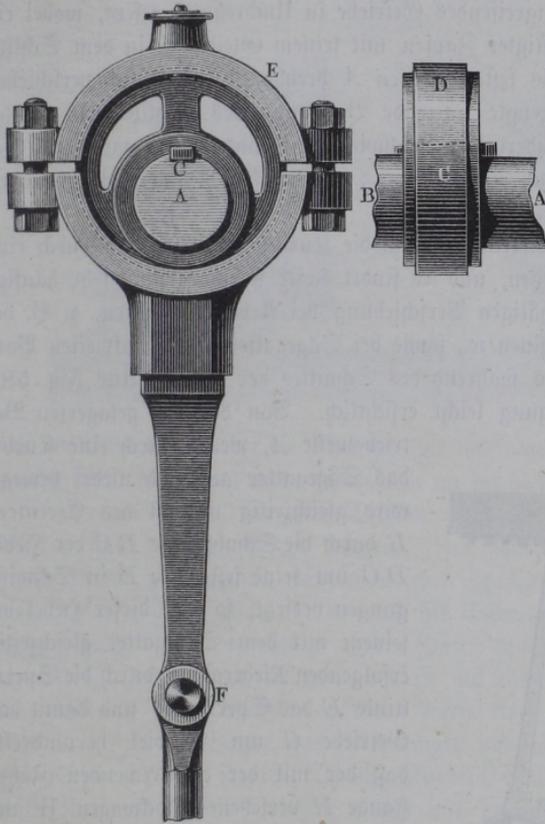


welle *AB* zu einem excentrisch stehenden Zapfen *C* abdreht, dessen Excentricität *AC* die gewünschte Kurbellänge vorstellt. Will man in diesem Falle die Ase *AB* nach beiden Seiten verlängern, ohne sie in ihrer Stärke zu verschwächen, so kommt man durch

eine entsprechende Vergrößerung des Zapfens *C* leicht zum Ziele, und man erhält auf diese Weise die in Fig. 588 dargestellte Construction des Kreisexcenters oder der excentrischen Scheibe. Hierbei ist die Kurbel in die cylindrische Scheibe *CD* übergegangen, welche auf ihrer Mantelfläche direct von dem Auge *E* der Pleuerstange *EF* umschlossen wird. Die Größe der Scheibe und des Auges oder Bügels *E* gestatten dabei, die Welle *AB* nach beiden Seiten durchzuführen, d. h. man kann derartige excentrische Scheiben an jeder beliebigen Stelle einer Ase bequem anordnen. Diese letztere Eigenschaft hat den Kreisexcentern eine sehr verbreitete Anwendung verschafft, insbesondere werden dieselben zur Bewegung der Steuerungsschieber für Dampfmaschinen ganz allgemein angewendet, wie in Thl. II mehrfach angeführt worden ist. Daß die Bewegungs-

verhältnisse des Kreisexcenters vollkommen mit denjenigen der gewöhnlichen Schubkurbel übereinstimmen, ergibt sich von selbst aus der vorstehenden Herleitung, wonach das Getriebe des Kreisexcenters in der That nichts anderes

Fig. 588.



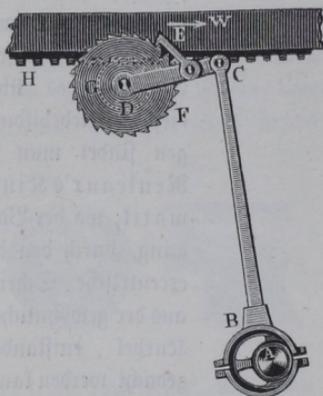
ist, als ein Kurbelgetriebe. Daraus folgt ferner, daß man auch bei dem Excenter in analoger Weise wie bei der gewöhnlichen Schubkurbel durch Feststellung der einzelnen Glieder, wie Scheibe, Excenterstange, Kreuzkopfbolzen, neue Getriebe bilden kann, welche bezw. der rotirenden Kurbelschleife, der oscillirenden Kurbelschleife, sowie der oscillirenden Schubkurbel entsprechen. Ein Näheres über diese Getriebebildungen findet man in Reuleaux's Kinematik, wo der Vorgegang, durch den die excentrische Scheibe aus der gewöhnlichen Kurbel entstanden gedacht werden kann,

allgemein als eine Zapfenerweiterung bezeichnet wird, insofern der Kurbelzapfen *C* so viel erweitert worden ist, daß er die Ase *AB* in sich einschließt. An der gedachten Stelle sind noch mehrere interessante Beispiele solcher Getriebe angegeben, welche durch Zapfenerweiterungen entstehen. Man kann z. B. bei geringer Länge der Excenterstange *CF* die Scheibe *CD* ferner noch so viel erweitern, daß auch der Zapfen *F* von ihr aufgenommen wird, oder umgekehrt kann man den Kreuzkopfbolzen *F* zu einer so großen Scheibe gestalten, daß dieselbe den Kreisexcenter *CD* sammt der in diesem liegenden Ase *AB* umschließt. Hinsichtlich dieser Anordnungen muß auf die

angegebene Quelle verwiesen werden. Stellt man bei dem Kreisexcenter die excentrische Scheibe fest, so entsteht ein von Whitworth angewendetes Getriebe zum schnellen Rücklauf, welches von Redtenbacher*) mit dem Namen der maskirten Kurbelschleife belegt worden ist. Hierbei wird der die feststehende Scheibe *AC* umschließende Ring *E* mittelst seines gezahnten Umfangs durch ein eingreifendes Getriebe in Umdrehung gesetzt, wobei ein in dem Zahnringe befestigter Zapfen mit seinem Gleitlager in dem Schlitz eines um den gleichfalls festen Zapfen *A* drehbaren Hebels sich verschieben kann. Die dadurch erzeugte rotirende Bewegung des Schlitzhebels erfolgt daher um *A* mit veränderlicher Geschwindigkeit, und es stimmt dieses Getriebe seinem Wesen nach mit der in §. 138 näher behandelten rotirenden Kurbelschleife überein (s. Fig. 539).

Auch in dem Kurbelvierecke läßt sich die Kurbel ohne Weiteres durch eine excentrische Scheibe ersetzen, und es findet dieser Mechanismus sehr häufige Anwendung zur selbstthätigen Verschiebung bei Arbeitsmaschinen, z. B. bei Drehbänken, Hobelmaschinen u., sowie bei Sägegattern zum ruckweisen Vorschieben des Blockwagens während des Schnittes der Säge. Aus Fig. 589 ist diese Art der Bewegung leicht ersichtlich. Von der fest gelagerten Be-

Fig. 589.



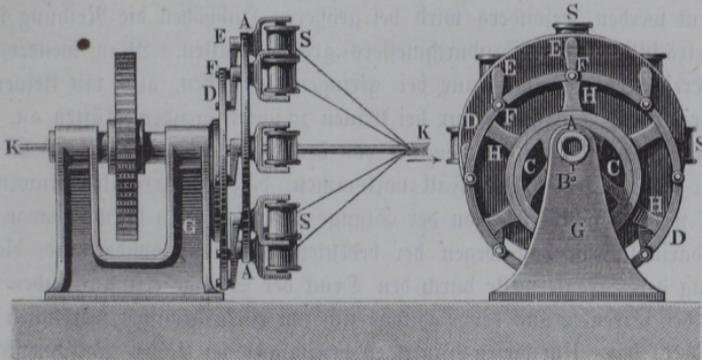
triebswelle *A*, welche durch eine Kurbel das Sägegatter auf und nieder bewegt, wird gleichzeitig mittelst des Excenters *B* durch die Schubstange *BC* der Hebel *DC* um seine feste Axe *D* in Schwingungen versetzt, so daß dieser Hebel bei seinem mit dem Sägegatter gleichzeitig erfolgenden Niedergange durch die Sperrklinke *E* das Sperrrad *F* und damit das Getriebe *G* um so viel herumdreht,

daß der mit der entsprechenden Zahnstange *H* versehene Blockwagen *W* um die Größe des Sägenschnittes vorgeschoben wird. Auch dieses Getriebe findet öfter solche Verwendung, daß die excentrische Scheibe festgehalten wird, so z. B. zum fortwährenden Parallelstellen der drehbaren Schaufeln an den Schaufelrädern von Dampfschiffen, sowie bei den sogenannten Kabelmaschinen, wie sie zum Zusammendrehen der Drähte zu Drahtseilen, resp. beim Umspinnen submariner Telegraphentabel mit Eisendrähten in Gebrauch sind. Die letztgedachte Verwendungsart macht Fig. 590 ersichtlich. Das zu umspinnende Kabel *K* passiert durch die hohle

*) S. Redtenbacher's Bewegungsmechanismen.

Axe einer großen Spulenscheibe *A*, welche auf ihrer Fläche gleichmäßig vertheilt die Spulen *S* trägt, auf denen die zum Umspinnen dienenden Drähte befindlich sind. Wird nun das Kabel nach der Richtung des Pfeiles durch einen Haspel langsam angezogen, so wird es bei gleichzeitiger Umdrehung der Spulenscheibe von deren Drähten in gleichmäßigen Schraubenwindungen um-

Fig. 590.



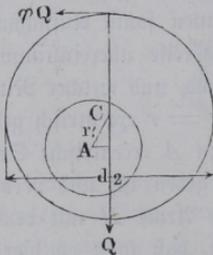
spinnen. Würden hierbei die Spulenhalter unbeweglich auf der Scheibe *A* befestigt sein, so würden auch die Spulen an der Drehung theilnehmen, und die Drähte würden in sich einer Torsion ausgesetzt sein, wie in §. 117 des Näheren aus einander gesetzt worden. Um daher diese Verwindung der Drähte in sich zu umgehen, dreht man jeden Spulenhalter um seinen Bolzen genau eben so viel zurück, als er durch die Umdrehung der Scheibe *A* vorwärts gedreht ist, und wendet zu diesem Zwecke den erwähnten Mechanismus an. Jeder Spulenhalter ist zu dem Ende mit einem Bolzen *E* drehbar in eine Bohrung der Scheibe *A* parallel deren Axe gesteckt, und hinter der Scheibe *A* sind alle Bolzen mit gleich langen und parallel gestellten Kurbeln *EF* versehen. Die Zapfen *F* dieser Kurbeln können somit Aufnahme in einem Ringe *DD* finden, dessen Größe mit dem Kreise übereinstimmt, in welchem die Bohrungen der Bolzen *E* angebracht sind, und welcher Ring zu der Axe der Scheibe *A* um die Länge $EF = AB = r$ excentrisch gelegen ist. Denkt man daher an dem Gestellbocke *G* eine zu *A* excentrische Scheibe *C* fest angeschraubt, deren Mittelpunkt durch *B* gegeben ist, und verbindet den diese Scheibe lose umschließenden Ring durch Arme *H* mit dem die Zapfen *F* aufnehmenden Ringe *D*, so ist ersichtlich, daß man es hier mit dem schon mehr besprochenen Getriebe der Parallelkurbeln zu thun hat, und daß daher sämtliche Spulen auch bei der Herumführung im Kreise ihre einmal ihnen gegebene Richtung im Raume beibehalten. Die Spulen *S* sind nunmehr nicht sowohl einer Drehung um die Axe von *A*, sondern nur einer Translation im Kreise ausgesetzt, da alle Punkte parallele und congruente

Bahnen beschreiben. Die Dräfte J werden daher einer Verwindung in sich auch nicht ausgesetzt sein.

Da die Construction des Kreisexcenters im Allgemeinen zu größerem Durchmesser der Scheibe nöthigt, mit diesem Durchmesser aber auch der Reibungswiderstand an deren Umfange wächst, so kann das Getriebe des Kreisexcenters nicht sonderlich ökonomisch hinsichtlich des Kraftverbrauches genannt werden, besonders wird bei größeren Hubhöhen die Reibung wegen des beträchtlichen Scheibendurchmessers groß ausfallen. Man wendet daher den Kreisexcenter immer nur bei geringen Hubhöhen, also mit kleiner Excentricität und auch meist nur bei kleinen zu übertragenden Kräften an. Ferner geht auch die Bewegung immer von der Welle aus, es dürfte wohl kaum in der Praxis jemals der Fall vorkommen, daß ein Excenter Anwendung fände, wenn der Antrieb von der Stange ausgeht. Den Grund davon muß man darin suchen, daß wegen der bedeutenden Reibungswiderstände die Bewegung der Excenterwelle durch den Druck der Stange erst stattfinden kann, wenn der Excenter aus der Todtlage sich um einen gewissen merklichen Winkel gedreht hat. Um diesen Winkel zu bestimmen, sei d_1 der Durchmesser der Welle in den Lagern, d_2 derjenige der excentrischen Scheibe, und r der Kurbelarm oder die Excentricität. Bei der geringen Größe dieser letzteren im Vergleich mit der Länge l der Lenkerstange kann man das Verhältniß $\frac{r}{l}$ und da-

mit auch die Abweichung γ der Lenkerstange von der Schubrchtung vernachlässigen. In Folge dessen fällt auch die Reibung in der Führung der Stange und diejenige am Bolzen des Stangenendes oder Kreuzkopfes nahezu gleich Null aus, man hat daher die beiden an der Welle und am Excenterumfang erzeugten Reibungen als einzige Widerstände von Belang anzusehen. Be-

Fig. 591.



deutet nun wieder Q die Stangenkraft, so hat dieselbe bei einer Drehung des Excenters um α über die Todtlage hinaus, Fig. 591, ein Moment $Qr \sin \alpha$. Dagegen ist das Moment der Zapfenreibung in Bezug auf die Wellenmitte durch $\varphi Q \frac{d_1}{2}$ und dasjenige der Excenterreibung für eben diesen Punkt annähernd durch $\varphi Q \frac{d_2}{2}$ gegeben*). Damit also durch Q über-

*) Strenger wird dieses Moment zu

$$\varphi Q \left(\frac{d_2}{2} \pm r \cos \alpha \right)$$

gefunden.

haupt Bewegung eingeleitet werden könne, hat man die Bedingung

$$Qr \sin \alpha \geq \varphi Q \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right),$$

oder α muß wenigstens einen solchen Werth haben, daß

$$\sin \alpha = \varphi \frac{d_1 + d_2}{2r}$$

ist. Nun ist jedenfalls d_2 größer als $2r + d_1$, man hat, wenn man die Stärke der Nabe an der schwächsten Stelle auch nur zu $\frac{1}{4}d_1$ annimmt,

$$d_2 = 2(r + \frac{3}{4}d_1) = 2r + \frac{3}{2}d_1.$$

Setzt man diesen geringsten Werth von d_2 in obige Gleichung ein, so erhält man für den kleinsten Winkel α , unter welchem noch Bewegung durch die Stangenkraft möglich ist:

$$\sin \alpha = \varphi \frac{2r + \frac{5}{2}d_1}{2r} = \varphi \left(1 + \frac{5}{4} \frac{d_1}{r} \right).$$

Nimmt man z. B. ein Verhältniß $r = \frac{d_1}{2}$, in welchem Falle also das Mittel des Excenters im Umfange der Welle liegt und für φ den Werth 0,08, so folgt aus

$$\sin \alpha = 0,08 \cdot (1 + \frac{5}{2}) = 0,28; \quad \alpha = 16^\circ 20'.$$

Die Stangenkraft würde daher zu jeder Seite der Todtlage durch einen Winkel von $16^\circ 20'$, also in jeder Todtlage entsprechend einem Drehungswinkel von $32^\circ 40'$ eine Wirkung auf Umdrehung nicht zu äußern vermögen, und es müßte durch diese Winkelräume hindurch die Drehung der Welle durch die lebendige Kraft der Schwungmassen bewirkt werden. Noch ungünstiger stellt sich das Verhältniß, wenn die Excentricität r noch geringer ist, als $\frac{d_1}{2}$, es wird offenbar eine Bewegung durch die Stangenkraft überhaupt nicht mehr möglich sein, sobald unter dem angenommenen Verhältnisse $d_2 = 2r + \frac{3}{2}d_1$ die Gleichung erfüllt ist

$$\varphi \left(1 + \frac{5}{4} \frac{d_1}{r} \right) = 1,$$

oder sobald, unter Voraussetzung von $\varphi = 0,08$, das Verhältniß $\frac{d_1}{r} = 9,2$ ist.

Dimensionen der Kurbel. Der Kurbelzapfen wird von dem Kolbendrucke K auf seine relative Festigkeit beansprucht und ist daher nach denselben Regeln zu berechnen, welche in §. 3 für die Stärke der Tragzapfen gefunden

wurden. Man erhält also den Durchmesser d_2 des Kurbelzapfens bei einem Längenverhältnisse $\frac{l}{d} = \lambda$ und bei einer höchstens zulässigen Materialspannung von k Kilogrammen per Quadratmillimeter zu

$$d_2 = 2,26 \sqrt{K \frac{\lambda}{k}} = \alpha \sqrt{K}.$$

Hierin hat man für K den größten Kolbendruck zu setzen, und es ist besonders bei schnellgehenden Maschinen darauf Rücksicht zu nehmen, daß dieser Druck durch die Massenwirkung gegen Ende des Kolbenschubs meist seinen größten Werth erreicht, besonders in den Fällen, wo die Expansion eine nicht sehr hohe ist. Mit Recht weist Nadinger an der oben angeführten Stelle darauf hin, daß bei durchgehenden Maschinen in der Regel der Kurbelzapfen abbricht, da der Kolbendruck K in Folge des durch die gesteigerte Geschwindigkeit sehr erhöhten Massendruckes gegen Ende des Kolbenhubes leicht einen Werth annimmt, welcher den Dampfdruck Q wesentlich übersteigt. Man kann indessen bemerken, daß in diesem Verhalten ein gewisser Vortheil enthalten ist, indem bei einem etwaigen Bruche, wie er durch unvorhergesehene Zufälligkeiten herbeigeführt werden kann, das Brechen des leicht wieder zu erneuernden Kurbelzapfens jedenfalls viel geringere Reparaturkosten und kleineren Zeitaufwand im Gefolge hat, als die Zerstörung eines größeren Theiles wie Kurbel oder Welle veranlassen würde. Es giebt nicht wenige Maschinenconstructeure, welche gerade mit Rücksicht hierauf ein leicht zu ersetzendes Organ, wie den Kurbel- oder Kreuzkopfzapfen absichtlich relativ etwas schwächer construiren, als die größeren Theile, deren Ersatz kostspieliger und zeitraubender ist.

Was das Längenverhältniß $\lambda = \frac{l}{d}$ der Kurbelzapfen betrifft, so pflegt man dasselbe aus constructiven Rücksichten und namentlich zur thunlichsten Verringerung des Abstandes der Zapfenmitte von dem Wellenlager nicht übermäßig groß zu nehmen, selten wird man dieses Verhältniß größer als 1,5 wählen, oft geht man bis zu dem Werthe 1 herab. Eine geringere Zapfenlänge ist hier auch schon deswegen angängig, weil bei dem eigenthümlichen Druckwechsel, wie schon in §. 154 angeführt worden, bei jeder Umdrehung nach und nach sämtliche Punkte im Umkreise der Zapfenlager den Druck aufzunehmen haben, in Folge dessen der Lagerverschleiß auch bei größerem Flächendrucke nicht so beträchtlich ausfällt, wie bei den Lagern von Transmissionswellen, die stetig an derselben Stelle gedrückt werden. Auch begünstigt dieser Druckwechsel die Vertheilung des Schmiermaterials zwischen dem Zapfen und seinen Pfannen. Nimmt man ein Längenverhältniß $\lambda = \frac{l}{d_2} = 1,5$

für die Rechnung an, so ergibt sich die Stärke des cylindrischen Kurbelzapfens nach §. 3 zu

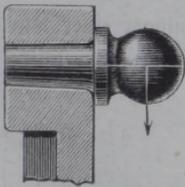
$$d_2 = 0,88 \sqrt{K}$$

bei Zapfen von Gußstahl, und zu

$$d_2 = 1,13 \sqrt{K}$$

bei solchen von Schmiedeeisen. Bei sehr schnell gehenden Kurbeln und besonders da, wo man gewärtigen muß, daß die Wellenlager in Folge von Erschütterungen ihre genau richtige Lage einbüßen können, wie dies z. B. bei den Sägegattern der Schneidemühlen einzutreten pflegt, giebt man dem Kurbelzapfen wohl auch eine kugelförmige Gestalt, nach Fig. 592, um dadurch der Lenkerstange eine gewisse Beweglichkeit senkrecht zu ihrer Schwingungsebene zu gewähren.

Fig. 592.



Die Kurbelwelle wird durch den Kolbendruck K auf Torston und durch die Lagerreactionen auf Biegung beansprucht. Hinsichtlich der Torsionswirkung hat man hierbei immer das größte Torsionsmoment in Rechnung zu stellen, welches mit dem Maximalwerthe der Umfangskraft U zusammentrifft, welcher aus dem Diagramme Fig. 574 bis 577 zu entnehmen ist. Bei der Berechnung hat man daher die Formel

$$d_1 = \alpha \sqrt[3]{Pa}$$

nach §. 14 zu Grunde zu legen, nicht aber diejenige

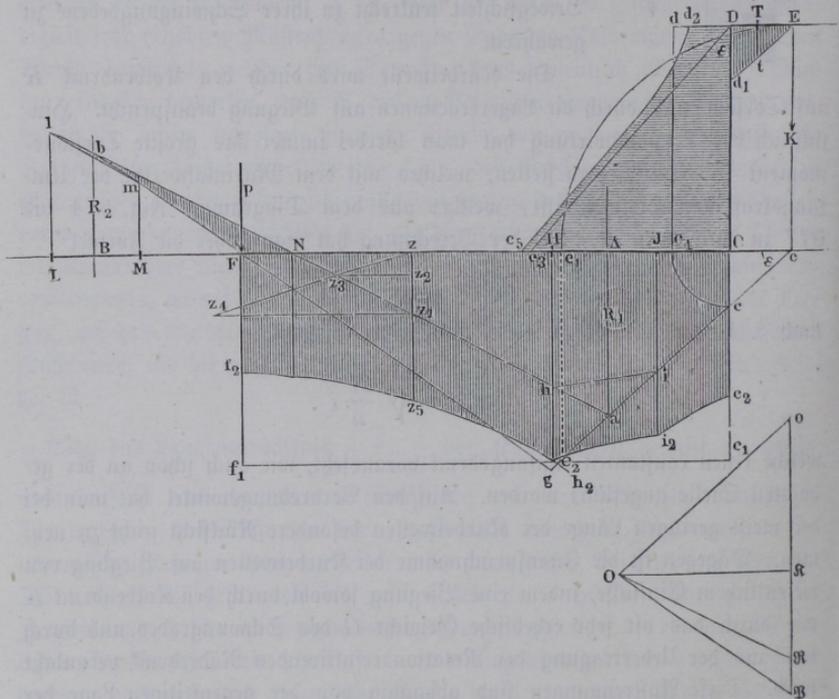
$$d_1 = \alpha_1 \sqrt[3]{\frac{N}{u}},$$

welche einen constanten Umfangsdruck voraussetzt, wie auch schon an der gedachten Stelle angeführt worden. Auf den Verdrehungswinkel hat man bei der meist geringen Länge der Kurbelwellen besondere Rücksicht nicht zu nehmen. Dagegen ist die Inanspruchnahme der Kurbelwellen auf Biegung von wesentlichem Einflusse, indem eine Biegung sowohl durch den Kolbendruck K wie durch das oft sehr erhebliche Gewicht G des Schwungrads und durch den aus der Uebertragung der Rotation resultirenden Räderdruck veranlaßt wird. Diese Anstrengungen sind abhängig von der gegenseitigen Lage der Kurbel, Räder und Lager gegen einander, und es ist sehr weitläufig, wenn überhaupt ausführbar, hierfür allgemein gültige Formeln aufzustellen. Jedemfalls kommt man mit Hülfe einer graphischen Methode immer bequemer und mit hinreichender Genauigkeit zum Ziele, so daß man zur Ermittlung der Inanspruchnahme und daher der Dimensionen von Kurbelwellen jetzt mit besonderer Vorliebe sich der Methoden bedient, welche die graphische Statik

an die Hand giebt. Das Diagramm lehrt dabei zugleich auch die Anstrengung des Kurbelarms und der Warze für jeden Punkt mit Sicherheit erkennen. Auch die Kurbel ist nämlich im Allgemeinen in zweifacher Weise beansprucht, indem nämlich der Kolbendruck K nicht nur eine Biegung des Kurbelarms ähnlich derjenigen eines eingemauerten Consols bewirkt, sondern wegen des einseitigen Angriffes auch eine Verdrehung des Kurbelarms um seine Längsaxe anstrebt. Die Verzeichnung des betreffenden Diagramms bietet nach dem im Anhange zu Thl. I über die Elemente der graphischen Statik Gesagten keine Schwierigkeiten dar, und es soll die Anwendung an zweien der am häufigsten vorkommenden Beispiele gezeigt werden.

Es seien A und B , Fig. 593, die Mitten der Zapfenlager einer Kurbelwelle, CD die Kurbel und E die Mitte des Kurbelzapfens, an welchem die

Fig. 593.



Kolbenkraft K wirksam sein mag. Ferner möge in F die Bewegung etwa durch ein daselbst angebrachtes gezahntes Rad, welches durch seine Masse als Schwungrad wirke, übertragen werden, und möge aus dem Eigengewichte dieses Rades und dem Räderdrucke eine Kraft P resultiren. Unter K soll der größte Kolbendruck verstanden und gleichzeitig angenommen werden, daß

diese Kraft als Umfangsdruck wirke, d. h. es soll eine Kurbelstellung rechtwinkelig zur Kolbenstange vorausgesetzt werden. Diese Voraussetzungen entsprechen jedenfalls der ungünstigsten Anstrengung der Welle auf Torsion und Biegung, und es wird in der Wirklichkeit die Inanspruchnahme meist eine günstigere sein, da im Allgemeinen das Maximum der Kolbenkraft K nicht gleichzeitig mit der gedachten Kurbelstellung zusammenfällt.

Um nun aus den Kräften K und P die Reactionen R_1 und R_2 in den Lagern A und B zu ermitteln, zeichne man zunächst das Kräftepolygon $OoK\mathbb{P}$, indem man $oK = K$ und $K\mathbb{P} = P$ macht, und den Polabstand $O\mathbb{K}$ als Momentenbasis annimmt. Zieht man nun durch e und F die Strahlen $eg \parallel Oo$ und $Fg \parallel O\mathbb{P}$, so erhält man in g den Punkt, durch welchen die verticale Mittelkraft von K und P hindurchgehen muß. Die Schnittpunkte a und b , in welchen die beiden Seile ge und gF von den verticalen Lagerreactionen in A und B geschnitten werden, ergeben daher in ihrer Verbindung ab die Schlußlinie des Seilpolygons, und man erhält durch den mit ab parallelen Strahl $O\mathcal{N}$ im Kräftepolygon in bekannter Art die Lagerreaction R_1 in A zu $\mathcal{N}o$ und diejenige R_2 in B zu $\mathbb{P}\mathcal{N}$. Das Seilpolygon für die Kurbelwelle ist daher durch $FeabF$ oder, wenn man auf die Länge der Wellenzapfen HJ und LM Rücksicht nimmt, durch $FeihlmF$ gegeben. Man findet daher in der Ordinate irgend eines Punktes das an dieser Stelle die Welle auf Biegung beanspruchende Moment, unter der Voraussetzung, daß der Polabstand $O\mathbb{K}$ als Momentenbasis betrachtet wird (s. Thl. I, Anhang, §. 44). Außerdem wird die Welle noch auf Verdrehung in Anspruch genommen, und zwar durch ein Moment Kr . Man findet dieses Moment sehr leicht aus dem Seilpolygon, wenn man den Kurbelarm r oder eE nach ee_1 überträgt, in der Ordinate e_1e_2 des Punktes e_1 . Da dieses Torsionsmoment für alle Punkte der Kurbelwelle von C bis F denselben Werth e_1e_2 hat, so ergiebt sich für die Drehungsmomente die Fläche FCe_1f_1 . Diese Fläche für die Drehmomente M_2 muß mit derjenigen für die Bieugungsmomente M_1 gemäß der Thl. I, §. 284 angegebenen Formel zu einem resultirenden Momente

$$M = \frac{3}{8} M_1 + \frac{5}{8} \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

zusammengesetzt werden, wozu man sich der schon in §. 16 für Wellen im Allgemeinen angegebenen Construction bedienen kann. Hierzu theile man für irgend einen Punkt die Ordinate zz_1 der Fläche für die Bieugungsmomente in z_2 so, daß $zz_2 = \frac{3}{8} zz_1$ ist, ziehe z_1z_4 senkrecht zu zz_1 und gleich dem Torsionsmomente $Cc_1 = Ff_1$ und verbinde z mit z_4 . Zieht man dann noch $z_2z_3 \parallel z_1z_4$ und macht $z_2z_3 = z_3z_4$, so hat man in der Ordinate zz_3 das combinirte Moment M , welches der Biegung und Drehung entspricht. Führt man diese Construction für eine größere Anzahl von Punkten aus, so erhält

man die in der Figur schraffierte Momentenfläche, für die Biegung und Drehung $Cc_2i_2h_2f_2FmlNC$, deren Ordinaten an jeder Stelle das resultierende Dreh- und Biegemoment M ergeben, aus welchem die Querschnittsdimensionen der Welle an dieser Stelle durch die bekannte Formel

$$M = k \frac{W}{e}$$

bestimmt werden können.

Der Kurbelarm DC wird durch die Kraft K , (man hat sich dieselbe in E senkrecht zur Ebene der Zeichnung wirkend zu denken), auf Biegung und gleichzeitig auf Drehung um die Axe DC beansprucht. Die Momentenfläche für die Biegung ist, wie leicht deutlich wird, durch das Dreieck CDe_3 dargestellt, wenn man Cc_3 gleich der für das Moment Kr schon gefundenen Strecke e_1e_2 macht. Man erkennt übrigens auch, daß man hierzu nur nöthig hat, den Winkel CDe_3 gleich demjenigen Cea zu machen, welche beiden Winkel in der Figur mit ε bezeichnet sind. Das auf Verdrehung des Kurbelarms um seine Längsaxe CD wirkende Torsionsmoment ist durch $K \cdot DE$ gegeben, man erhält dasselbe daher in der Ordinate Cc , und wenn man über CD als Grundlinie das Rechteck $CDdc_4$ mit dieser Ordinate Cc als Höhe beschreibt, so stellt dieses Rechteck die Fläche für die Drehmomente des Kurbelarms dar. Eine Vereinigung des Drehungsmomentes mit dem Biegemomente liefert in derselben Weise, wie für die Welle gezeigt worden, für den Kurbelarm die resultierende Momentenfläche CDd_2c_5C .

Für den Kurbelzapfen, welcher nur auf Bruch durch das Moment $K \cdot DE$ beansprucht wird, gilt als Momentenfläche das Dreieck Cec oder DEd_1 und man wird daher dem cylindrischen Zapfen überall die dem Punkte T entsprechende Stärke geben, welche aus dem Momente Tt daselbst durch

$$Tt = M = k \frac{W}{e}$$

folgt. Unter T ist derjenige Punkt zu verstehen, wo der Zapfen in den Kurbelarm eintritt.

Als ferneres Beispiel möge die gekröpfte Kurbelaxe $BCDEFA$, Fig. 594, untersucht werden, welche in A und B in Lagern gestützt, in der Kröpfung bei J durch die Kraft K und in G durch den Räderdruck resp. das Gewicht mit P angegriffen sein soll. Aus dem Kräftepolygon $oR\mathfrak{K}o$, bei welchem der Pol O in der Horizontalen durch \mathfrak{K} angenommen ist, um die Schlußlinie im Seilpolygon zwischen den Lagern horizontal zu erhalten, ergiebt sich, wie bekannt, das Seilpolygon $AkgBA$. Die Lagerreactionen in A und B sind dabei durch $R_1 = Ro$ und $R_2 = \mathfrak{K}R$ gefunden. Es wird nun das Wellenstück AF lediglich auf Biegung beansprucht, so daß für dasselbe die Momentenfläche durch das Dreieck AFf dargestellt ist. Dagegen wird der

die Fläche $DE e_3 k_3 d_3 D$ für die combinirten Dreh- und Biegemomente.

Der Kurbelarm EF wird durch die in A wirkende Lagerreaction R_1 angegriffen. Denkt man von A das Loth AA_1 auf die Richtung des Arms EF gezogen und die Reaction R_1 nach A_1 versetzt, indem man ein Kräftepaar hinzufügt, dessen Kräfte durch R_1 und dessen Arm durch AA_1 gegeben sind, so findet sich, daß der Kurbelarm EF durch die in A_1 angreifende Kraft R_1 auf Biegung und durch das Kräftepaar mit dem Momente $R_1 \cdot AA_1$ auf Verwindung angesprochen wird. Macht man daher den Winkel $EA_1 h_1$ gleich demjenigen FAk oder gleich dem Winkel NOo im Kräftepolygon, so stellt die Fläche $EFf_1 h_1$ die Biegemomente des Kurbelarms dar. Ebenso findet man in $a_2 a_3$ das Torsionsmoment $R_1 \cdot AA_1$, wenn man $A_1 a_2 = A_1 A$ macht, so daß die durch den Schnittpunkt a_3 mit EF parallel gezogene Gerade $f_2 h_2$ das Rechteck $EFf_2 h_2$ für die Torsionsmomente ergibt. Eine Zusammensetzung dieser beiden Momentenflächen liefert dann wieder die Fläche $EFf_3 h_3 E$ für die Dreh- und Biegemomente des Kurbelarms EF .

Auch der Kurbelarm DC wird auf Biegung und Drehung beansprucht, und zwar durch die Lagerreaction R_1 in A und die Kolbenkraft K in J , welche beiden Kräfte in entgegengesetzter Richtung wirken. Zieht man auch hier die beiden Normalen auf den Kurbelarm JJ_0 von J aus und AA_0 von A aus, so kann man wieder unter Hinzufügung der auf Torsion wirkenden Kräftepaare, deren Momente $K \cdot JJ_0$ resp. $R_1 \cdot AA_0$ sind, die biegenden Kräfte K und R_1 in J_0 und A_0 angreifend denken. Macht man daher die Winkel $CJ_0 M = NOk$ und $CJ_0 L = CA_0 N = NOo$ im Kräftepolygon, so stellen die beiden Dreiecke $J_0 LM$ und $A_0 NC$ die Biegemomente des Kurbelarms bezw. durch die Kräfte K und R_1 dar. Die Differenz beider Flächen führt zu derjenigen $CDp_1 q_1 l_1 C$ für die resultirenden Biegemomente. Ebenso erhält man in Tt das Torsionsmoment $R_1 \cdot AA_0$, wenn man $AT = AA_0$ macht, und in $i_1 i_2$ das Drehungsmoment $K \cdot JJ_0$, vorausgesetzt, daß man $J_0 J_1 = J_0 J$ macht. Wegen der entgegengesetzten Drehungsrichtung dieser Momente ist daher die Differenz $Tt - i_1 i_2$ das resultirende Moment, und ein mit dieser Differenz als Höhe über CD gezeichnetes Rechteck $CDp_2 l_2$ stellt die Fläche für das verdrehende Moment des Kurbelarms CD vor. Man hat daher schließlich noch die beiden Flächen $CDp_1 q_1 l_1$ und $CDp_2 l_2$ in der bekannten Weise zu einer Fläche $CDp_3 q_3 l_3 C$ zu vereinigen, um in deren Ordinaten die Größen der combinirten Dreh- und Biegemomente zu erhalten.

Die so ermittelten Momentenflächen sind sämmtlich in der Figur nach denjenigen Richtungen schraffirt, nach welchen die Ordinaten abzugreifen sind, welche die betreffenden Momente M darstellen, und man findet nun die

Dimensionen in jedem Punkte der Kurbelaxe mittelst der allgemeinen Formel

$$M = k \frac{W}{e},$$

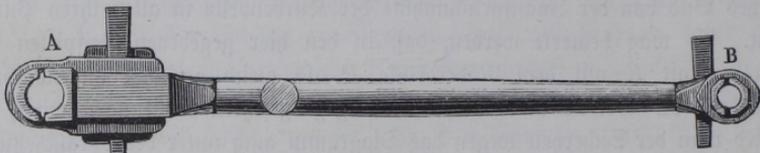
unter W wie immer das Trägheitsmoment des Querschnitts und unter e den Abstand der äußersten Faser von der neutralen Aze verstanden. Wie man aus der Figur ersieht, giebt das erhaltene Diagramm ein sehr anschauliches Bild von der Inanspruchnahme der Kurbelwelle in allen ihren Punkten. Es mag bemerkt werden, daß in den hier gegebenen Beispielen die Kolbenkraft K mit dem Räderdrucke P als gleich gerichtet angenommen wurde. Da aber K abwechselnd in entgegengesetzten Richtungen wirkt, so wird man der Sicherheit wegen das Diagramm auch unter der Voraussetzung zu entwerfen haben, daß K und P entgegengesetzte Richtung haben, und für jeden Arm diejenige Momentenfläche aus den beiden Diagrammen wählen, welche die größten Abmessungen ergiebt.

Eine ausführlichere Behandlung dieser graphischen Darstellungen für Kurbelwellen findet man u. a. in Reuleaux's Constructeur, welcher auch bei der vorstehenden Darstellung im Wesentlichen als Anhalt dient hat.

Die Lenkerstange. Die zur Uebermittlung der Zug- und Druckkraft zwischen dem Kreuzkopfe und dem Kurbelzapfen dienende Lenkerstange, auch wohl Schubstange, Pläuelstange, Pleuelstange genannt, wird in den weitaus meisten Fällen aus Schmiedeeisen dargestellt, und höchstens wandte man in früherer Zeit für die größten Dampfmaschinen wegen der schwierigen Darstellung so großer Schmiedestücke gußeiserne Lenkerstangen mit gerippten oder gefiederten Querschnitten an. Von der Verwendung von Gußeisen ist man derzeit indeß fast gänzlich zurückgekommen, insbesondere eignet sich dieses Material nicht für schnell gehende Maschinen, wegen der in solchen Fällen beträchtlichen Anstrengung durch die in der Masse auftretenden Trägheitskräfte. Dagegen behauptet gerade bei schnellgehenden Kurbelgetrieben das Holz als vorzügliches Material für Lenkerstangen neben dem Schmiedeeisen mehrfach seine Stelle, und man wendet dasselbe, wenn auch nicht bei Dampfmaschinen, so doch bei den Sägegattern mit Vorliebe an. Insbesondere wählt man hierzu recht gerade gewachsenes astfreies Tannenholz, welches neben verhältnißmäßig geringem specifischem Gewichte, also geringer Masse, besonders große Elasticität besitzt, vermöge deren es den wechselnden Wirkungen der lebendigen Kräfte vorzüglich zu widerstehen vermag (s. Thl. I, §. 375). Die Stange selbst führt man, wenn sie, wie bei einfachen Pumpen, nur auf Zug angestrengt wird, wohl von cylindrischer Form aus, während man ihr bei doppelt wirkenden Kurbeln wegen der Inanspruchnahme auf Zerknicken in der Mitte eine größere Stärke zu geben

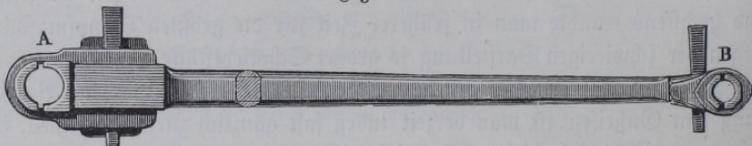
pflegt als nach den Enden hin, so daß sie annähernd die Form eines Körpers von gleicher Strebefähigkeit zeigt, Fig. 595. Bei langsam gehenden Kurbeln, bei welchen hauptsächlich die Festigkeit gegen Zerknicken zur Geltung kommt, giebt man dabei den schmiedeeisernen Lenkerstangen meist den kreisförmigen und den gußeisernen Stangen einen kreuz- oder sternförmigen Querschnitt, welcher nach jeder Ebene gleiche Festigkeit gegen Ausbiegung

Fig. 595.



gewährt. Dagegen giebt man den Lenkerstangen für sehr schnell rotirende Kurbeln, wie denen der Locomotiven und Sägegatter in der Regel in der Bewegungsebene der Stange eine größere Höhe als in der dazu senkrechten Richtung, da die Wirkung der Massen die Stange in der Ebene der Bewegung zu biegen strebt. Als Querschnitt wählt man daher meist ein Rechteck, dessen schmale Seiten abgerundet sind, Fig. 596, auch pflegt man hierbei wohl die Stange von dem Lager *A* der Warze nach dem den Kreuzkopf ergreifenden Ende *B* hin allmählig verjüngt zulaufen zu lassen.

Fig. 596.



Jedes Ende der Lenkerstange ist zu einem sogenannten Kopflager ausgebildet, in welchem je zwei Pfannen oder Futter sich befinden, die durch Reile oder auch mittelst Schrauben wie bei den gewöhnlichen Wellenlagern mit mäßigem Drucke zusammengepreßt werden können, damit auf solche Weise der durch Abnutzung entstehende Spielraum sich stets beseitigen läßt. Letzterer Umstand ist wegen des beständigen Richtungswechsels von Zug und Druck für Erreichung eines geräuschlosen Ganges von großer Wichtigkeit. Diese Kopflager führt man in sehr verschiedener Art aus, und es mag nur bemerkt werden, daß man im Allgemeinen die geschlossenen Lager von den offenen unterscheidet. Bei den geschlossenen Kopslagern, wie sie in Fig. 597 und 598 dargestellt sind, ist das Stangenende zu einem verstärkten Auge *A* ausgeschmiedet, in welches die Rothgußfutter a_1 und a_2

genau eingepaßt sind. Der Keil *C*, welcher in Fig. 598 mittelst der Zugschraube *D* und der Mutter *F* angezogen wird, hält die Lagerpfannen dicht schließend an den Zapfen. Die erweiterte Oeffnung *G* im Stangenkopfe,

Fig. 597.

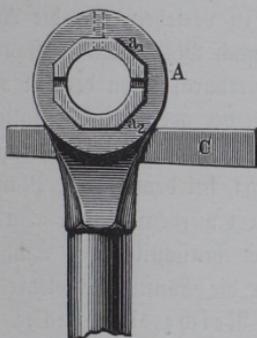


Fig. 598.

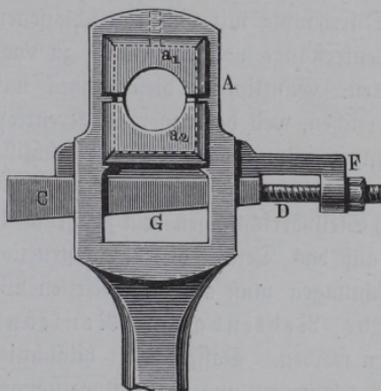
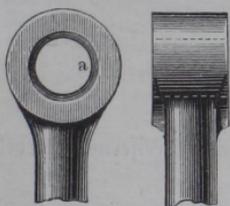


Fig. 598, hat nur den Zweck, die mit vorstehenden Rändern versehenen Pfannen *a* in das Auge einführen zu können. Nur bei geringen Kräften und kleiner Schwingungsbewegung, wie z. B. für die Schieber von Dampfmaschinen, läßt man die Nachstellvorrichtung fort und begnügt sich mit dem geschlossenen Auge, Fig. 599, in welches ein gehärteter Stahlring *a* eingefügt wird, in welchem der gleichfalls stählerne Bolzen genau eingeschliffen ist.

Fig. 599.



Offene Kopflager zeigen die Figg. 600 und 601, bei welchen wieder *C* den Zugkeil zum Anziehen der Pfannen *a* darstellt, während die hakenförmigen Schließkeile *D* dem Zugkeile nicht nur als Unterlage dienen, sondern mittelst ihrer vorstehenden Ansätze die Schenkel *E* des Bügels resp. der

Fig. 600.

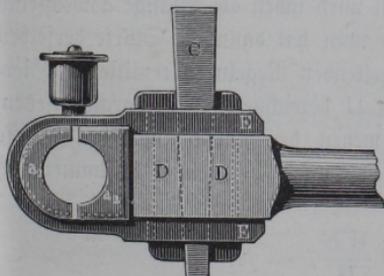
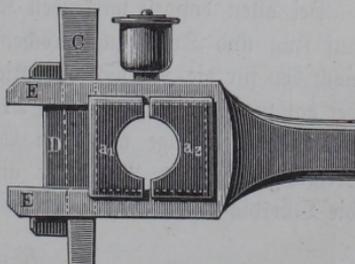


Fig. 601.



Stange an dem Auseinanderfedern hindern. Es leuchtet ein, daß bei den geschlossenen Kopflagern, Fig. 597 und 598, mit der Zeit durch das Anziehen des Keiles das Lagermittel nach außen, bei den offenen Lagern, Fig. 600 und 601, dagegen nach innen rückt. Aus dem Grunde pflegt man gern die Lenkerstangen von Dampfmaschinen am Kurbelzapfen mit einem offenen, am Querkopfe mit einem geschlossenen Lager zu versehen, um die Länge der Lenkerstange von Lagermitte zu Lagermitte nach Möglichkeit constant zu erhalten. Gänzlich ist dieser Zweck natürlich hierdurch schon deshalb nicht zu erreichen, weil das Lager am Kreuzkopfe wegen der geringen Oscillationsbewegung immer viel weniger verschliffen wird, als das am Kurbelzapfen. Man hat daher auch solche Kopflager ausgeführt, bei denen beide Pfannen durch Stellvorrichtungen dem Zapfenmittel genähert werden können. In Bezug auf das Detail dieser Constructionen sowie hinsichtlich der Schmier- vorrichtungen muß auf die speciellen Werke über die Constructionenlehre von Wiebe, Redtenbacher, Reuleaux, von Reiche, Uhlend u. c. verwiesen werden. Dasselbe gilt hinsichtlich der Anordnung der Kreuzköpfe sowie der Excenter und deren Bügelstangen.

Die Stärke D der Lenkerstange bestimmt sich, wenn die Stange nur auf Zug beansprucht wird, nach den Regeln der absoluten Festigkeit wie diejenige von Ankern durch

$$D^2 \frac{\pi}{4} k = K,$$

unter k die zulässige Faserspannung und unter K die größte Kolbenkraft verstanden. Nimmt man auch hier für Schmiedeeisen $k = 6$ Kilogramm, so erhält man die Stärke der Zugstange zu

$$D = \sqrt{\frac{2}{3\pi} K} = 0,46 \sqrt{K},$$

also hat man in diesem Falle, unter d die Stärke des schmiedeeisernen Kurbelzapfens $d = 1,13 \sqrt{K}$ verstanden, ein Verhältniß

$$\frac{D}{d} = 0,41.$$

Bei allen doppelt wirkenden Kurbeln wird indeß die Stange abwechselnd auf Zug und Druck angesprochen, und man hat dann die Stärke derselben nach den für die Zerknickungsfestigkeit geltenden Regeln zu ermitteln. Hierbei hat man den in Thl. I, §. 273 mit II bezeichneten Fall vorauszusetzen, wonach die Stange an ihren Enden wegen der Abrundung eine gewisse Neigung gegen ihre Längensaxe annehmen kann. Demgemäß bestimmen sich die Querdimensionen nach der Formel

$$K = \pi^2 \frac{WE}{l^2},$$

unter l die ganze Länge der Stange, unter W das Trägheitsmoment des Querschnitts und unter E den Elasticitätsmodul des Materials verstanden. Man hat hierbei eine gewisse vier- bis sechsfache Sicherheit anzunehmen, und kann sich auch zur Bequemlichkeit der Grasshof'schen Formel bedienen und den betreffenden Coefficienten aus den in Thl. I, §. 274 dafür angegebenen Tabellen entnehmen, indem man für das Verhältniß der Länge l zur gesuchten Querdimension vorläufig einen voraussichtlichen Werth annimmt. Nach Reuleaux soll man bei kreisförmigem Querschnitt der schmiedeeisernen Lenkerstange in der Mitte einen Durchmesser D geben, welcher durch

$$D = 0,21 d \sqrt{\frac{l}{d}}$$

gefunden wird, wenn wieder d den Wazendurchmesser und l die Länge der Lenkerstange bedeutet. Bei großer Umdrehungsgeschwindigkeit der Kurbel ist die Lenkerstange auch noch einer beträchtlichen Anstrengung auf Biegung durch die Trägheitskräfte der in der Stange vorhandenen Massentheilen ausgesetzt. Diese Kräfte, welche nur in der Schwingungsebene der Lenkerstange auftreten, sind die Ursache, warum man den Lenkerstangen schnellgehender Kurbelgetriebe in dieser Ebene größere Querdimensionen zu geben pflegt als in der dazu senkrechten Richtung. Namentlich gilt dies, wie schon oben bemerkt, für die Lenkerstangen von Locomotiven und Sägegattern.

Um die Einwirkung der Beschleunigungskräfte auf die Lenkerstange zu prüfen, sei eine constante Geschwindigkeit v der Kurbel vorausgesetzt, welche Annahme für den vorliegenden Zweck gerechtfertigt ist, da die Veränderungen der Kurbelgeschwindigkeit während jeder Umdrehung, welche in den §. 144 u. f. näher untersucht wurden, in der Wirklichkeit bei schnellgehenden Maschinen nur sehr geringe sind. In diesem Falle sind von zwei Punkten der Lenkerstange die Beschleunigungen für jeden Augenblick der Bewegung ihrer Größe und Richtung nach bekannt. Der Punkt der Lenkerstange, welcher in die Axe des Kurbelzapfens hineinfallend zu denken ist, hat wie der Kurbelzapfen wegen der gleichförmigen Rotationsbewegung nur eine normale, nach der Welle hin gerichtete Beschleunigung, welche für ein daselbst etwa vorhandenes Massentheilen m durch den Ausdruck für die Centrifugalkraft

$$m \frac{v^2}{r} = p$$

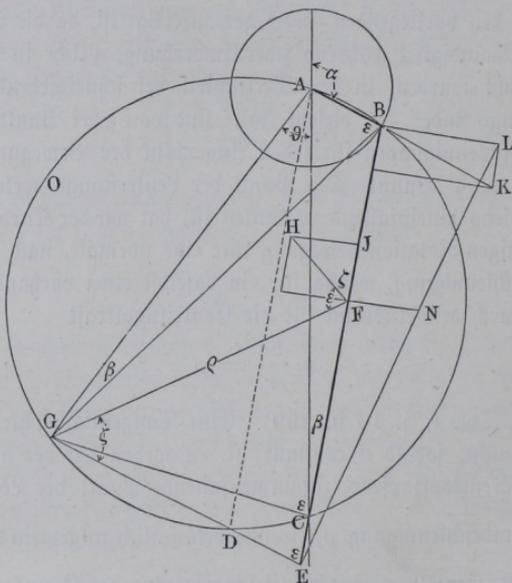
gegeben ist (s. Thl. I, §. 46 u. 299). Eine Tangentialbeschleunigung besitzt dieser Punkt nicht, sobald v constant ist. Dagegen hat der andere mit dem Mittel des Kreuzkopfszapfens zusammenfallende Punkt der Lenkerstange nur eine Tangentialbeschleunigung p_1 , welche bekanntlich allgemein durch $p_1 = \frac{\partial c}{\partial t}$ ausgedrückt ist, wenn c wieder die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes bezeichnet.

Diese Beschleunigung p_1 fällt in die Richtung der Geradföhrung. Eine Normalacceleration hat dieser Punkt nicht, indem der Ausdruck $\frac{c^2}{\rho}$ gleich Null ausfällt wegen des unendlich großen Krümmungshalbmessers ρ der geradlinigen Bahn. Die Beschleunigung p_1 dieses Lenkerstangenendes ist übereinstimmend mit der in §. 151 schon berechneten Beschleunigung der schwingenden Masse m_2 , und wurde daselbst zu

$$p_1 = \left(\cos \alpha + \frac{r}{l} \cos 2\alpha \right) \frac{v^2}{r}$$

gefunden. Um auch die Beschleunigung der übrigen Punkte der Lenkerstange zu finden, sei auf die in der Einleitung, §. 15, gefundene Eigenschaft des Beschleunigungscentrums zurückgegangen. Danach besteht für jedes bewegte System unter dem Namen Beschleunigungscentrum ein Punkt, welcher selbst ohne Beschleunigung ist, und dessen Fahrstrahlen nach den sämtlichen Systempunkten nicht nur mit den Beschleunigungen dieser Punkte proportional sind, sondern auch mit diesen Beschleunigungen einen und denselben Winkel ε bilden. Dieses Beschleunigungscentrum ändert während der Systembewegung fortwährend seinen Platz, und durchläuft während einer Kurbelumdrehung eine gewisse Schleifenlinie etwa von der Form der Ziffer 8, indem das Beschleunigungscentrum zweimal in den

Fig. 602.



Kreuzkopf fällt, nämlich in denjenigen Augenblicken, wo die Beschleunigung des Kreuzkopfes zu Null wird, welche nach dem Früheren dem Maximum der Geschwindigkeit c der schwingenden Masse m_2 entsprechen. Für jede einzelne Kurbelstellung, z. B. ABC in Fig. 602, kann man das Beschleunigungscentrum leicht wie folgt bestimmen. Legt man um das Kurbeldreieck ABC eine Kreislinie O , so muß auf derselben das Beschleunigungscentrum G liegen, da nur die Punkte dieses Kreises die Eigenschaft haben, daß die Fahrstrahlen nach B und C mit den Beschleunigungsrichtungen BA und CA gleiche Winkel ε einschließen, als Peripheriewinkel über gleichen Bögen. Um G selbst auf diesem Kreise zu finden, hätte man nur etwa eine Beziehung für den Winkel ϑ zu entwickeln, da man ε in der Regel nicht kennt, sofern zu dessen Bestimmung die Winkelgeschwindigkeit ω um den jedesmaligen Pol bekannt sein muß (s. §. 15, Einleitung). Zur Bestimmung von ϑ schreibe man:

$$GB = AB \frac{\sin[\pi - (\alpha - \vartheta)]}{\sin \beta} \quad \text{und} \quad GC = BC \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha},$$

woraus durch Division:

$$\frac{GB}{GC} = \frac{r \sin \alpha \sin(\alpha - \vartheta)}{l \sin \beta \sin \vartheta}$$

folgt. Da nun

$$r \sin \alpha = l \sin \beta$$

und

$$\frac{GB}{GC} = \frac{p}{p_1}$$

bekannt ist, so findet man

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin \vartheta} = \frac{\sin \alpha}{\tan \vartheta} - \cos \alpha,$$

also

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \alpha}{\frac{p}{p_1} + \cos \alpha},$$

woraus ϑ für jeden Winkel α ermittelt werden kann.

Für die vorliegende Entwicklung ist aber die Bestimmung des Beschleunigungscentrums nicht erforderlich, wie aus folgenden Bemerkungen hervorgeht. Denkt man von dem Beschleunigungscentrum G nämlich denjenigen Strahl GE an die verlängerte Lenkerstange geführt, welcher mit dieser gerade den Winkel ε bildet*), so fällt die Beschleunigung p_0 dieses Punktes E

*) Man erhält diesen Strahl, wenn man $AD \parallel BC$ und GD durch den Schnittpunkt mit dem Kreise zieht.

in die Lenkerstange CB hinein, hat also keine auf CB normale Componente, und übt daher auch keine biegende Wirkung auf die Lenkerstange aus. Wenn man nun den beliebigen Punkt F im Abstände $EF = x$ von E ins Auge faßt, dessen Beschleunigungsstrahl $GF = \rho$ sein mag, so ist die Größe der Beschleunigung p_x desselben nach der besagten Eigenschaft von G gefunden durch:

$$p_x : p = \rho : GB \text{ zu } p_x = \frac{p}{GB} \rho.$$

Diese in der Richtung FH wirkende Beschleunigung hat eine auf der Lenkerstange CB normale Componente

$$HJ = p_x \sin HFJ,$$

und da $HFJ = EGF = \xi$ ist, so erhält man diese Componente zu

$$HJ = p_x \sin \xi = \frac{p}{GB} \rho \sin \xi.$$

Da nun ferner

$$\rho : x = \sin \varepsilon : \sin \xi,$$

so hat man endlich die Componente

$$HJ = \frac{p \sin \varepsilon}{GB} x = kx,$$

wenn man die constante Größe $\frac{p \sin \varepsilon}{GB}$ mit k bezeichnet. Wenn man nun in jedem Punkte der Lenkerstange die zu deren Richtung senkrechte Componente der beschleunigenden Kraft als Ordinate aufträgt, indem man $FN = HJ$ macht, so folgt aus jenem Ausdrucke $HJ = kx$, daß die Endpunkte dieser Ordinaten sämtlich in einer geraden Linie liegen, welche durch den Punkt E hindurchgeht, in welchem die Beschleunigung in die Richtung der Lenkerstange hineinfällt. Die betreffende Ordinate der beschleunigenden Kraft in dem Endpunkte B erhält man dabei durch Zerlegung der Centrifugalbeschleunigung daselbst

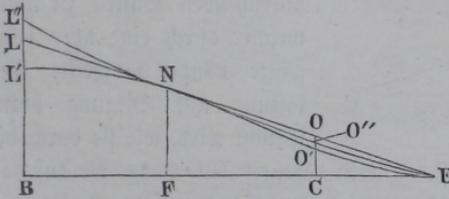
$$BK = \frac{mv^2}{r}$$

nach der Richtung der Lenkerstange BC und senkrecht dazu in BL . Das hier gefundene Gesetz, wonach die zur Stange normale Beschleunigungscomponente für jedes Massenelement m proportional mit dessen Abstände von einem Punkte E ist, gilt beiläufig auch ganz allgemein für eine nicht gleichförmige Drehung der Kurbelwelle. Wenn nun die Masse der Lenkerstange gleichmäßig über dieselbe vertheilt ist, die Stange selbst also einen prismatischen Körper von überall gleichem Querschnitte f bildet, so daß also in jedem Längenelemente dl der Stange die Masse

$$m = \frac{f \cdot \partial l \gamma}{g}$$

enthalten ist, unter γ das specifische Gewicht verstanden, so kann man durch die gerade Linie EL auch das Gesetz der Inanspruchnahme der Stange durch die den beschleunigenden Kräften entgegengesetzten Trägheitskräfte dargestellt denken; indem man etwa die Fläche $BLOC$, Fig. 603, als eine Belastung annimmt, welcher die in B und C auf Stützen ruhende Stange ausgesetzt

Fig. 603.

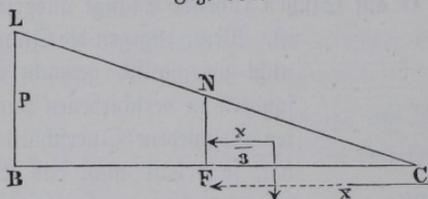


ist. Wenn dagegen die Stange nicht prismatisch gemacht ist, sondern in verschiedenen Punkten verschiedene Querschnitte f hat, so erhält man das Belastungsgesetz durch diejenige Curve ausgedrückt, deren Ordinaten durch die Producte der

Querschnittsfläche f in die Ordinaten der geraden Linie LE dargestellt werden. So würde z. B. die Belastungslinie für eine Lenkerstange, welche in einem mittleren Punkte F die größte Stärke hat und sich nach beiden Enden hin verjüngt, eine Linie wie $L'NO'E$ sein, während die Curve $LNO'E$ einer Stange entsprechen würde, welche an dem Warzenlager B die größte Stärke hat, welche sich allmählig nach dem Kreuzkopfe C hin verjüngt. Diese drei Belastungslinien haben über dem Punkte F , in welchem die Querschnitte gleich sind, den Punkt N gemein. Der Verlauf dieser Curven hängt selbstredend von dem Längenprofil der Stange oder von dem Gesetze ab, durch welches die Veränderlichkeit des Querschnittes ausgedrückt ist. Im Folgenden möge der einfachere Fall einer gleichmäßigen Massenvertheilung, also eine prismatische Lenkerstange vorausgesetzt werden, für welche die gerade Linie LE die Belastungsart ausdrückt. Es ist aus dem Vorstehenden ersichtlich, daß diese Gerade LE für verschiedene Stellungen der Lenkerstange verschieden ausfällt, und daß namentlich der Schnittpunkt E sehr veränderliche Abstände von C hat. Während in den Todtlagen der Kurbel Normalbeschleunigungen in der Lenkerstange gar nicht auftreten, die Belastungsgrenze LE daher in die Stange BC hineinfällt, wird der Punkt E in den Kreuzkopf C fallen, sobald die Beschleunigung desselben Null, d. h. sobald dessen Geschwindigkeit ein Maximum ist. Früher sind diese Lagen, welche wesentlich von dem Verhältniß $\frac{r}{l}$ abhängen, näher ermittelt worden, und wurde angegeben, daß das Maximum der Kolbengeschwindigkeit bei den gewöhnlichen Verhältnissen von $\frac{r}{l}$ sehr nahe in der Kurbelstellung stattfindet, in welcher die Lenkerstange

mit der Kurbel einen rechten Winkel bildet. Da nun in dieser Stellung die Beschleunigung des Elementes m im Warzenlager B senkrecht auf der Lenkerstange steht, daher mit ihrem ganzen Betrage transversal zur Wirkung kommt, so wird diese Lage auch sehr nahe mit derjenigen übereinstimmen, in welcher die Stange am stärksten durch die transversalen Beschleunigungskräfte in Anspruch genommen wird. Wenn man daher diese Kurbelstellung der Rechnung zu Grunde legt, so hat

Fig. 604.



man es mit einem auf zwei Stützen B und C , Fig. 604, aufliegenden Balken zu thun, welcher durch eine über seine ganze Länge vertheilte Belastung auf Biegung in Anspruch wird, wie sie durch die Dreiecksfläche BLC dargestellt ist. Hierin bedeutet $BL = p$ die auf das Massenelement der Längeneinheit in B wirkende beschleunigende Kraft

$$p = \frac{f\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Es ist zunächst die ganze auf die Stange wirkende Last entsprechend der Dreiecksfläche BLC gleich

$$P = p \frac{l}{2},$$

welche bekanntlich in B und C die Reactionen hervorruft:

$$B = \frac{2}{3} P = p \frac{l}{3} \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{3} P = p \frac{l}{6}.$$

Für irgend welchen Punkt F im Abstände x von C , dessen Belastungsordinate $y = \frac{p}{l} x$ ist, hat man daher das Moment der äußeren Kräfte M zu

$$M = Cx - y \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = p \frac{lx}{6} - \frac{p}{6l} x^3 = \frac{p}{6} \left(lx - \frac{x^3}{l} \right).$$

Dieses Moment erreicht sein Maximum für

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0 = l - 3 \frac{x^2}{l},$$

d. h. für

$$x = l \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = 0,577 l.$$

Mit diesem Werthe von x erhält man das maximale Bruchmoment

$$M_{max} = 0,0642 p l^2 = 0,064 \frac{f\gamma l^2 v^2}{g \cdot r}.$$

Setzt man hierin

$$v = \frac{2\pi r n}{60},$$

wenn n die Anzahl der Kurbelumdrehungen per Minute bedeutet, und ferner die Beschleunigung der Schwere $g = 9810$ Millimeter, so findet man

$$M_{max} = 0,0717 \frac{f \gamma l^2 r n^2}{1000000} = k \frac{W}{e}.$$

Legt man einen kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser D zu Grunde, für welchen

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi}{32} D^3 = 0,0982 D^3$$

und $f = 0,785 D^2$ ist, so erhält man

$$D = 0,000000573 \frac{\gamma l^2 n^2 r}{k}.$$

Diese Formel kann dazu dienen, bei schnell gehenden Kurbeln die Dicke D zu bestimmen, welche wegen der Trägheitskräfte erforderlich ist, oder, falls die Rücksicht auf Zerknicken größere Dimensionen erheischt, diejenige Spannung k zu ermitteln, welche durch den Einfluß der beschleunigenden Kräfte in der Stange hervorgerufen wird.

Wenn die Stange nicht überall denselben Querschnitt hat, so wird die Ermittlung des größten durch die Trägheitskräfte hervorgerufenen Spannungsmomentes am besten graphisch geschehen, indem man aus dem Gesetz der Querschnittsveränderung, wie schon angegeben, die Belastungscurve $L' O'$ resp. $L'' O''$, Fig. 603, und danach in der früher angegebenen Weise (Thl. I, Anhang, §. 45) das Seilpolygon entwirft. Diese Untersuchung ist von Pröll in einem Aufsatze*), welcher auch bei der vorstehenden Untersuchung benutzt worden ist, vorgenommen, und ist darin das Resultat abgeleitet, daß für eine doppelt conische Stange, deren Stärke in der Mitte gleich D , ferner in einem Abstände gleich $0,1 l$ vom Kurbelzapfen $0,8 D$, sowie in $0,1 l$ Abstand vom Kreuzkopfszapfen $0,7 D$ beträgt, unter sonst gleichen Verhältnissen die Beziehung gilt:

$$D = 0,000000559 \frac{\gamma l^2 n^2 r}{k}.$$

Für eine Stange endlich von rechteckigem Querschnitte mit constanter Breite und den Höhen h am Kurbelzapfen und $0,6 h$ am Kreuzkopfe ergab sich daselbst:

$$h = 0,000000567 \frac{\gamma l^2 n^2 r}{k},$$

so daß daraus geschlossen werden kann, daß bei der letztgedachten Stange mit

*) R. Pröll, Civil-Ingenieur, Bd. XVIII, Heft 2 und 3.

rechteckigem Querschnitte das Material der Stange am besten, bei der geraden cylindrischen Stange am wenigsten ausgenutzt wird.

Die Literatur über die Theorie der Krummzapfen ist ziemlich ausgedehnt. Eine größere Abhandlung von J. Weisbach darüber findet sich in dem polytechnischen Centralblatte, Jahrg. 1843, Bd. 1. Die erste richtige Theorie rührt von Cytelwein her, auch Morin bespricht im dritten Theile seiner *Leçons de mécanique pratique* die Theorie des Kurbelgetriebs ausführlich. In Bezug auf die vielen aus dem Kurbelgetriebe hergeleiteten Mechanismen sei auf die elegante Darstellung in Reuleaux, *Theoretische Kinematik*, verwiesen. Auch Laboulaye in *Traité de Cinématique* behandelt den Kurbelmechanismus. Die Regeln für die constructive Ausführung der einzelnen Glieder des Kurbelgetriebs geben fast alle Lehrbücher der Maschinenconstructionslehre, so der *Constructeur* von Reuleaux, in welchem namentlich den graphischen Methoden besondere Aufmerksamkeit zugewendet ist. Der Arbeiten von Radinger über „Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit“ und von Pröll über die „Beschleunigungen in der Schubstange eines Kurbelmechanismus“ ist schon im Vorhergehenden gedacht worden.