

lung des Zeitelements das Massenelement sich in  $d$  befinden. Dasselbe würde stattfinden, wenn vermöge einer einzigen Kraft  $dK$ , welche in der Richtung  $ad$  wirksam ist, das Massenelement in dem Zeitelement den Weg  $ds = ad$  zurückgelegt hätte. Es läßt sich also die Wirkung der drei Kräfte durch eine einzige ersetzen, deren Leistung sich ausdrückt durch  $dKds$ , und diese Kraft  $dKds$  ist die Resultante aus den drei Kräften  $dK'ds'$ ,  $dK''ds''$ ,  $dK'''ds'''$ .

Es folgt hieraus das Gesetz:

Wenn drei Kräfte, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement wirken, so erfolgt die gemeinschaftliche Wirkung nach der Diagonale des Parallelepipedums, welches durch die Gröfse und Richtung der Wegelemente der drei Kräfte gegeben ist, auch ist das Wegelement der Mittelkraft gleich der Länge dieser Diagonale. Dies Gesetz nennt man das Prinzip des Parallelepipedums der Kräfte.

Parallelepipedum der Geschwindigkeiten.

§ 26. Zufolge des Ausdrucks  $ds = c . dt$  verhalten sich die Wegelemente in einem bestimmten Zeitelemente, wie die in diesem Zeitelemente stattfindenden Geschwindigkeiten. Trägt man auf den Richtungslinien der Kräfte anstatt der Wegelemente die in dem betrachteten Zeitelemente stattfindenden Geschwindigkeiten ab, so folgt, daß die Diagonale des Parallelepipedums der Geschwindigkeiten sowohl der Gröfse als der Richtung nach gleich der Geschwindigkeit der Mittelkraft sein müsse.

Das Leistungselement, die Mittelkraft, aber drückt sich aus durch:

$$dKds = dm . c . dc.$$

Sind nun die Seitenkräfte ihrer Geschwindigkeit und Richtung nach gegeben, so ist auch die Geschwindigkeit und Richtung der Mittelkraft, und dadurch ihr Leistungselement entweder durch einfache geometrische, oder durch analytische Betrachtung zu finden.

Prinzip der virtuellen Leistungen.

§ 27. Für den Fall, daß die Richtungen der Seitenkräfte mit einander rechte Winkel machen, ist offenbar zufolge des Parallelepipedums der Geschwindigkeiten (Figur umstehend):

$$c^2 = c'^2 + c''^2 + c'''^2,$$

folglich:

$$cdc = c'dc' + c''dc'' + c'''dc''',$$

und:

$$54) dm \cdot cdc = dm \cdot c'dc' + dm \cdot c''dc'' + dm \cdot c'''dc''',$$

oder (nach 47):

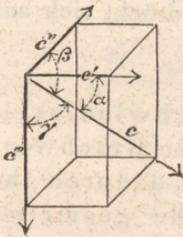
$$55) dK \cdot ds = dK' \cdot ds' + dK'' \cdot ds'' + dK''' \cdot ds''',$$

Darin liegt der Satz:

das Leistungselement der Mittelkraft dreier Kräfte, deren Richtungen zu einander normal sind, und welche in verschiedenen Ebenen liegen, ist gleich der Summe der Leistungselemente der einzelnen Kräfte; und umgekehrt jedes Leistungselement läßt sich durch die Summe dreier anderer Leistungselemente ersetzen, deren Geschwindigkeits-Richtungen zu einander normal und in verschiedenen Ebenen liegen.

Nennen wir  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel, welche die Richtungslinie der Mittelkraft mit den einzelnen zu einander normalen Seitenkräften bildet, so folgt:

$$56) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{c'}{c} = \frac{c'}{\sqrt{(c'^2 + c''^2 + c'''^2)}} = \frac{ds'}{ds} \\ \cos \beta = \frac{c''}{c} = \frac{c''}{\sqrt{(c'^2 + c''^2 + c'''^2)}} = \frac{ds''}{ds} \\ \cos \gamma = \frac{c'''}{c} = \frac{c'''}{\sqrt{(c'^2 + c''^2 + c'''^2)}} = \frac{ds'''}{ds} \end{array} \right.$$



Hieraus folgt, daß die gleichzeitigen Geschwindigkeiten für ein Zeitelement oder auch die Wegelemente der zu einander normalen Seitenkräfte gleich den Projektionen der Geschwindigkeit oder des Wegelementes der Mittelkraft auf die Richtungen der Wege der Seitenkräfte sind. Diese gleichzeitigen Seiten-Geschwindigkeiten nennt man, in Bezug auf die mittleren Geschwindigkeiten, die virtuellen Geschwindigkeiten, die Wer-

the  $dm \cdot c'dc'$  etc. nennen wir die virtuellen Arbeiten, und es läßt sich das Gesetz der Gleichungen 54 und 55) auch so fassen: Jedes Arbeitselement einer Kraft ist gleich der Summe seiner virtuellen Arbeiten.

Diesen Satz nennt man das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, besser wollen wir ihn das Prinzip der virtuellen Arbeiten nennen.

Ist  $ds$  der Weg während eines Zeitelements, welchen das Massenelement, durch die Mittelkraft getrieben, zurücklegen würde, so wollen wir die Wege  $ds'$ ,  $ds''$ ,  $ds'''$  d. h. die Projektionen des Wegelementes  $ds$  auf die Richtung der Seitenkräfte, die virtuellen Wegelemente der Seitenkräfte für  $ds$  nennen.

Parallelogramm der Kräfte.

§ 28. Ist das Wegelement der einen von den drei Kräften gleich Null, hat man es also nur mit zwei Kräften zu thun, so läßt sich immer durch die Richtungen der beiden Kräfte eine Ebene legen. Es folgt sehr leicht aus dem Vorgetragenen, daß in diesem Falle anstatt des Parallelepipediums ein Parallelogramm erscheint, daß das Wegelement der Mittelkraft gleich der Diagonale des Parallelogramms der Wegelemente, und die Geschwindigkeit der Mittelkraft gleich der Diagonale des Parallelogramms der Geschwindigkeiten ist.

Prinzip des unmöglichen Gleichgewichts für ein Massenelement.

§ 29. Wirken drei Kräfte auf ein Massenelement, deren Richtungslinien in verschiedenen Ebenen liegen, so läßt sich immer eine resultirende Kraft finden, deren Leistungselement einen bestimmten Werth hat. Daraus folgt, daß drei solcher Kräfte niemals für sich im Gleichgewicht sein können. Ebenso läßt sich zeigen, daß zwei Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien einen Winkel mit einander bilden, niemals für sich im Gleichgewicht sein können.

Dies Gesetz nennen wir das Prinzip des unmöglichen Gleichgewichts.

Mittelkraft einer beliebigen Anzahl von Kräften. Hilfssatz.

§ 30. In Folge des Satzes vom Parallelepipedium der Geschwindigkeiten kann man von einer beliebigen Anzahl von Kräften immer die Leistung der Mittelkraft bestimmen, denn man braucht die einzelnen Kräfte nur zunächst zu je zwei zusammzusetzen und damit fortzufahren, bis man dieselben auf drei Kräfte, die in verschiedenen Ebenen liegen, oder auch auf zwei Kräfte in einer Ebene reducirt hat, und von diesen dann wieder die Mittelkraft bilden. Die so gefundene Mittelkraft ist die Mittelkraft sämmtlicher Kräfte. Bei dieser Zusammensetzung kann man sich des folgenden, geometrisch leicht nachzuweisenden Satzes bedienen: