



Valentin Kaisermayer, BSc.

Beobachtung und Regelung hyperbolischer verteilt parametrischer Systeme am Beispiel einer Druckregelstrecke

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieur
Masterstudiengang: Elektrotechnik

eingereicht an der

Technische Universität Graz

Betreuer:

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Martin Horn,
Dipl.-Ing. Richard Seeber,
Dipl.-Ing. Klemens Kranawetter und
Dipl.-Ing. Stefan Lambert Hölzl

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik
Vorstand: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Martin Horn

Graz, Oktober 2017

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Datum

Unterschrift

Abstract

In this thesis, methods for the observation and control of hyperbolic distributed parameter systems are considered, using the example of the pressure control of an engine test stand. The considered problem is essentially the pressure control in a pipe. The problem is described by a system of hyperbolic differential equations, where the state variables are position-dependent and time-dependent; in such a case, one speaks of a distributed parameter system (DPS). In order to provide an efficient numerical simulation of the system, the finite volume method (FVM) is used. Starting from the system description by means of an initial boundary value problem, an analysis of the system is carried out with the idea of writing it as an abstract initial value problem and using the operator's notation. It turns out that the considered system is a so-called Riesz spectral system, which considerably simplifies further analysis. The modal approximation of the system is calculated by means of the operator's notation and the analysis of the eigenvalues and eigenfunctions of the system. Using the FVM approximation and the modal approximation, a so-called early lumping controller and observer design is carried out. Two controller structures are designed: on the one hand, a linear state regulator with a square quality measure (LQ-regulator), which is expanded by an integral part and on the other hand an observer based control of the mean pressure in the pipe. The late lumping observer and controller design is also considered. In the chosen approach, the operator-Riccati equation has to be solved for both the late lumping controller design and the observer design for DPS. Various methods for solving the operator-Riccati equation are investigated. Finally, the designed controllers are validated and compared in simulation and in experiments.

Kurzfassung

In dieser Arbeit werden, am Beispiel der Druckregelung eines Motorprüfstands, Methoden zur Beobachtung und Regelung hyperbolischer verteilt parametrischer Systeme betrachtet. Es handelt sich im Wesentlichen um die Druckregelung in einem Rohr. Das betrachtete Problem wird von einem System hyperbolischer Differentialgleichungen beschrieben, wobei die Zustandsvariablen orts- und zeitabhängig sind; man spricht in so einem Fall auch von einem verteilt parametrischen System (VPS). Um eine effiziente numerische Simulation des Systems zu ermöglichen wird die Finite Volumen Methode (FVM) verwendet. Ausgehend von der Systembeschreibung mittels eines Anfangs-Randwertproblems wird eine Analyse des Systems mit Hilfe der Operatorschreibweise eines abstrakten Anfangswertproblems durchgeführt. Es handelt sich um ein sogenanntes Riesz-Spektralsystem, was die weitere Analyse wesentlich vereinfacht. Mit Hilfe der Operatorschreibweise und der Analyse der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Systems wird die modale Approximation des Systems berechnet. Anhand der FVM Approximation und der modalen Approximation wird ein sogenannter Early Lumping Regler- und Beobachterentwurf durchgeführt. Es werden zwei Reglerstrukturen entworfen: Einerseits ein linearer Zustandsregler mit quadratischem Gütemaß (LQ-Regler), welcher um einen Integralteil erweitert wird und andererseits eine beobachterbasierte Regelung des mittleren Drucks im Rohr. Ebenso wird der Late Lumping Regler- und Beobachterentwurf betrachtet. Bei dem gewählten Ansatz, muss sowohl beim Late Lumping Reglerentwurf als auch beim Beobachterentwurf für VPS die Operator-Riccati-Gleichung gelöst werden. Hier werden verschiedene Methoden zur Lösung untersucht. Abschließend werden die entworfenen Regler in der Simulation und in Experimenten validiert und verglichen.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	II
Kurzfassung	III
1 Einleitung	2
1.1 Motivation	2
1.2 Ziel der Arbeit	3
1.3 Struktur der Arbeit	3
2 Physikalische Modellbildung	4
2.1 Modellbeschreibung	4
2.2 Klappenmodell	5
2.3 Rohrmodell	6
2.3.1 Euler-Gleichungen	7
2.3.2 Verallgemeinerung der eindimensionalen Euler-Gleichungen	9
2.3.3 Isentrope Zustandsänderung	10
2.3.4 Charakteristische Form	11
2.3.5 Randbedingungen	12
2.3.6 Numerische Lösung mit Hilfe der finiten Volumen Methode	13
2.3.6.1 Flux-Vektor-Splitting nach Liou und Steffen	16
2.3.6.2 Zeitdiskretisierung und Stabilität	16
2.4 Linearisierung	17
2.5 Beschreibung im Frequenzbereich	19
3 Theoretische Grundlagen	22
3.1 Anfangs-Randwertproblem	22
3.2 Abstraktes Anfangswertproblem	23
3.2.1 Vorbetrachtungen	23
3.2.2 Anwendung auf das vorliegende System	32
4 Reglerentwurf mittels <i>Early-Lumping</i>	39
4.1 Diskretisierung mittels FVM und Flux-Vector-Splitting	39
4.2 Ordnungsreduktion mittels <i>Balanced Truncation</i>	43
4.3 LQI Entwurf, mit Kalman-Störgrößenbeobachter	46
4.3.1 LQI-Entwurf	46
4.3.2 Kalman-Störgrößenbeobachter	48
4.3.3 Geschlossener Regelkreis	50
4.4 PI-Mittendruckregelung mit Kalman-Störgrößenbeobachter	51
4.4.1 Geschlossener Regelkreis	51

5	Reglerentwurf mittels <i>Late-Lumping</i>	53
5.1	LQ Entwurf für verteilt parametrisches System (VPS)	53
5.2	Zustandsbeobachter für VPS	57
5.3	Lösung der Operator-Riccati-Gleichung für Riesz-Spektral-systeme	58
5.4	Abschließende Bemerkung zum Late Lumping Entwurf	61
6	Zusammenhänge zwischen Early- und Late-Lumping	62
6.1	Näherungsweise Lösung der Operator-Riccati-Gleichung für den LQ-Entwurf . . .	62
6.2	Näherungsweise Lösung der Operator-Riccati-Gleichung für den Beobachter-Entwurf	65
7	Experimentelle Verifikation	69
7.1	Implementierung	69
7.2	Rohr mit konstantem Querschnitt	69
7.2.1	Testzyklus 1	71
7.2.2	Testzyklus 2	73
7.3	Rohr mit variablem Querschnitt	75
7.3.1	Testzyklus 1	75
7.3.2	Testzyklus 2	76
7.4	Simulationsstudie: Einbindung eines dritten Drucksensors	77
8	Zusammenfassung und Ausblick	79
8.1	Zusammenfassung	79
8.2	Ausblick	80
A	Mathematische Ergänzungen	81
A.1	Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen	81
A.2	Beweis der Riesz-Basis Eigenschaft	82
A.3	Berechnung des adjungierten Operators	83
A.4	Berechnung der biorthogonalen Folge	84
A.5	Beweis der Abgeschlossenheit	85
A.6	Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen für den <i>Late Lumping</i> LQI- Entwurf	86
A.7	Berechnung des adjungierten Systemoperators für den <i>Late Lumping</i> LQI-Entwurf	87
A.8	Berechnung des adjungierten Ausgangsoperators für den <i>Late Lumping</i> LQI- Entwurf	87
A.9	Berechnung der modalen Approximation für den <i>Late Lumping</i> LQI-Entwurf . .	88
A.10	Berechnung des adjungierten Störoperators für den <i>Late Lumping</i> Beobachter- Entwurf	89
A.11	Berechnung der modalen Approximation für den <i>Late Lumping</i> Beobachter-Entwurf	89
B	Parameter	91
B.1	Ventilkennlinie	91
B.2	Allgemeine Parameter	91
B.3	Rohr mit konstantem Querschnitt	91
B.3.1	Modale Approximation	91
B.3.2	FVM Approximation	92
B.4	Rohr mit variablem Querschnitt	92
B.5	Drei Drucksensoren	92

Kapitel 1

Einleitung

In diesem Kapitel wird die Arbeit kurz motiviert, sowie ein Einblick in die Ziele und die Struktur der Arbeit gegeben.

1.1 Motivation

Durch immer strengere *Abgasnormen* steigen auch die Anforderungen an die Prüfstände auf denen eben diese verifiziert werden. Unter anderem müssen bei Verbrennungskraftmaschinen (VKM)-Prüfständen die Drücke im Ansaugsystem, bzw. im Abgassystem konstant gehalten werden. Somit ist der Motor genormten Prüfbedingungen ausgesetzt bzw. kann speziellen Test-szenarien unterzogen werden. Es muss zum Beispiel der Druck im Ansaugsystem auf einem vorgegebenen Niveau (meist Meereshöhe) gehalten werden und darf um diesen nur um ± 3 mbar schwanken. Für das Abgassystem, in welchem auch die Probennahme für die Emissionszertifizierung erfolgt darf der Druck um etwas mehr schwanken, muss jedoch ebenfalls genormte Grenzen einhalten, vgl. [32, S. 11],[1, S. 175 f.].

In der Industrie haben sich zwei Methoden bewährt: Es kann die gesamte Prüfkammer auf einem konstanten Druck gehalten werden oder es wird eine Regelung der Drücke nur im Abgas-, bzw. Ansaugsystem verwendet.

Wird die zweite Variante verwendet, so stellt sich ein nicht ganz einfaches regelungstechnisches Problem. Da die Rohrlängen im Verhältnis zu ihrem Querschnitt vergleichsweise groß sind und sehr kleine Druckunterschiede betrachtet werden, kann der Druck im Rohr nicht mehr als orts-unabhängig angenommen werden. Aus regelungstechnischer Sicht wird somit die zu regelnde Strecke nicht mehr durch *gewöhnlichen Differentialgleichungen*, sondern durch *partiellen Differentialgleichungen* beschrieben. Dies stellt ganz neue Herausforderungen an den Regler- und Beobachterentwurf. Im Zusammenhang mit Regelstrecken, welche durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden spricht man häufig von einem verteilt parametrischen System (VPS), vgl. [7].

1.2 Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es Methoden zur Regelung, bzw. Beobachtung des Druckverlauf in einem Rohr zu betrachten und diese in der Simulation sowie am Prüfstand zu erproben. Wie oben erwähnt handelt es sich bei der zu regelnden Strecke um ein System welches mit partiellen Differentialgleichungen beschrieben wird. Im Speziellen handelt es sich um ein System aus gekoppelten *hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen*.

1.3 Struktur der Arbeit

Die Streckenbeschreibung mit Hilfe hyperbolischer partieller Differentialgleichungen stellt zahlreiche Probleme: Einerseits muss eine Möglichkeit gefunden werden dieses System numerisch zu simulieren, andererseits wird eine mathematische Darstellung benötigt, welche einen Regler- und Beobachterentwurf möglich macht.

In Kapitel 2 wird die *physikalische Modellierung* des vorliegenden Systems durchgeführt. Außerdem wird mit Hilfe der Finite Volumen Methode (FVM) ein Verfahren zur numerischen Simulation des Systems betrachtet.

In Kapitel 3 werden einige notwendige mathematische Grundlagen für den späteren Reglerentwurf betrachtet. Im Speziellen werden zwei Systembeschreibungen mit Hilfe eines *Anfangs-Randwertproblems* und mit Hilfe eines *abstrakten Anfangswertproblems* gezeigt.

Anhand der Modellbeschreibungen aus Kapitel 2 und der mathematischen Grundlagen aus Kapitel 3 wird im Kapitel 4 ein sogenannter *Early Lumping* Regler- und Beobachterentwurf durchgeführt. Hierbei wird die zu regelnde Strecke vor dem Reglerentwurf Ortsdiskretisiert, womit man ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen erhält. Das Ergebnis ist hier eine Systembeschreibung sehr hoher Ordnung, welche vor einem praktischen Einsatz reduziert werden muss. Anhand dieses *semidiskreten Modells* wird ein klassischer Reglerentwurf durchgeführt.

In Kapitel 5 wird anhand der Streckenbeschreibung mittels eines *abstrakten Anfangswertproblems* ein zu Kapitel 4 vergleichbarer Reglerentwurf dargestellt. Man spricht hierbei vom sogenannten *Late Lumping*, da der Reglerentwurf anhand der verteilt parametrischen Streckenbeschreibung durchgeführt wird. Der eigentliche Regler kann zwar mathematisch *elegant* angeschrieben werden, ist aber in den meisten Fällen praktisch nicht realisierbar. Somit muss dieser zum Schluss des Entwurfsprozesses Ortsdiskretisiert, bzw. approximiert werden.

In Kapitel 6 werden einige interessante Zusammenhänge zwischen dem *Early Lumping*- und *Late Lumping*-Entwurf aufgezeigt.

Abschließend werden die entworfenen Regler in der Simulation und am realen Prüfstand getestet und verifiziert. Die Ergebnisse dieser Experimente sind in Kapitel 7 dargestellt.

Kapitel 2

Physikalische Modellbildung

Im folgenden Kapitel wird das mathematische Modell der zu regelnden Strecke anhand physikalischer Überlegungen aufgestellt. Es handelt sich hierbei um das Ansaug- bzw. Abgassystem eines Motorprüfstands. Im Speziellen wird die Strömung eines kompressiblen Gases, innerhalb eines Verbindungsrohres des Ansaug- bzw. Abgassystems modelliert.

2.1 Modellbeschreibung

In Abbildung 2.1 ist das Schema des zu modellierenden Prüfstandsbaus abgebildet. Hier ist schematisch der Motor dargestellt, welcher mit Luft versorgt werden soll und dessen Abgas abtransportiert werden muss. Ziel ist es den Druck ansaug- und abgasseitig konstant zu halten, bzw. einem vorgegebenen Referenzdruck zu folgen. Sowohl das Ansaugsystem als auch das Abgassystem bestehen im Wesentlichen aus einem langen *Verbindungsrohr* und einer *Ventilklappe* an dessen Ende bzw. Anfang. Die beiden Ventilklappen sind hierbei als Stelleingriff zu interpretieren und die Verbrennungskraftmaschine (VKM) als Störung.

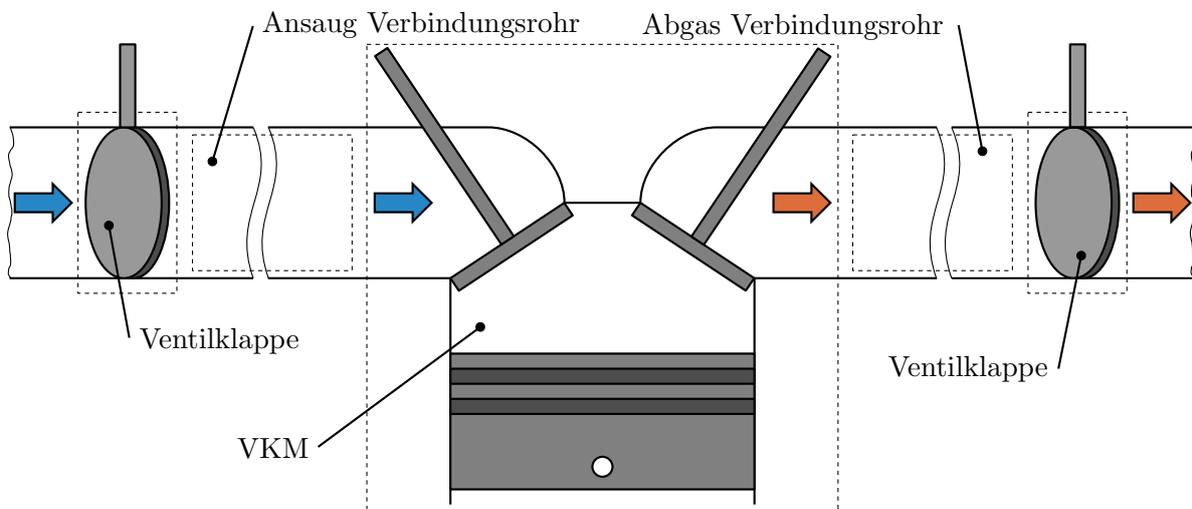


Abbildung 2.1: Schema des Prüfstandsbaus

Man erkennt, dass sich die Druckregelung des Ansaug- bzw. Abgassystems kaum unterscheidet. Aus regelungstechnischer Sicht ist es ausreichend die Druckregelung in einem langen Rohr zu betrachten. Aus der Sicht der Druckregelung wirkt die VKM als Störung, welche vereinfacht auch durch eine weitere Ventilklappe simuliert werden kann, vgl. Abbildung 2.2. Für dieses vereinfachte System wird nun im Weiteren die Modellierung durchgeführt.

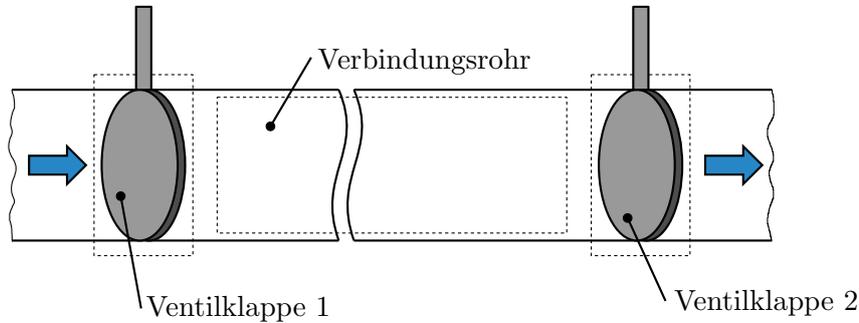


Abbildung 2.2: Schema des Testaufbaus

Aus regelungstechnischer Sicht handelt es sich beim Testaufbau in Abbildung 2.2 um ein System, bestehend aus zwei *Ventilkappen* und einem *Verbindungsrohr*. Am Prüfstand können die Drücke p_1 , p_2 , p_3 und p_4 jeweils vor und nach den beiden Klappen gemessen werden. Weiters befindet sich ein thermischer Massenstromsensor im Rohr, welcher jedoch über eine sehr geringe Dynamik verfügt und somit für den Regler- und Beobachterentwurf nicht verwendet werden kann. Aus dem Blockdiagramm in Abbildung 2.3 erkennt man, dass das zu modellierende System aus den zwei Ventilkappen am Anfang und am Ende des Rohrs und dem langen Rohr selbst besteht. Es müssen also zwei verschiedene Teilmodelle modelliert werden.

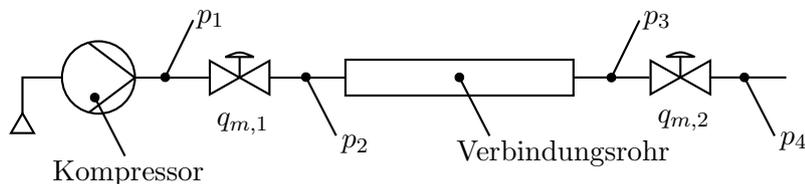


Abbildung 2.3: Blockdiagramm des Testaufbaus

Im folgenden wird die Modellierung der Teilmodelle (Klappe und Rohr) durchgeführt.

2.2 Klappenmodell

Die verstellbaren Klappen, Klappe 1 und Klappe 2, werden mittels einer Norm-Drossel mit veränderlichem Querschnitt nach [3, S. 186] modelliert, siehe Abbildung 2.4.

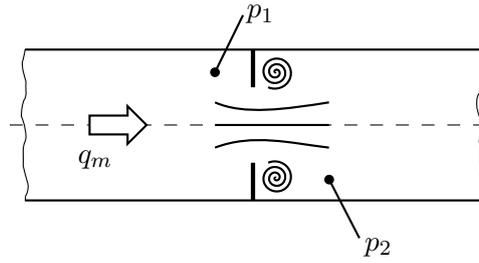


Abbildung 2.4: Aufbau der Drosselklappe

Für eine Norm-Drossel nach EN ISO 5167-2(2003) gilt für den Massenstrom q_m der folgende Zusammenhang

$$q_m = \frac{C}{\sqrt{1 - \beta^4}} \varepsilon \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2\rho_1(p_1 - p_2)}, \quad (2.1)$$

mit dem Durchflusskoeffizienten C , dem Durchmesser Verhältnis $\beta = d/D$ und der Expansionszahl ε . Hierbei ist d der Drosselöffnungsdurchmesser und D der Rohrdurchmesser. Die Drücke vor und nach der Drossel werden hier mit p_1 und p_2 bezeichnet und ρ_1 ist die Dichte vor der Drossel. Die Beziehung (2.1) lässt sich wie folgt vereinfachen

$$q_m = A_{\text{eff}}(\alpha) \sqrt{2\rho_1(p_1 - p_2)}, \quad (2.2)$$

wobei hier der effektive Querschnitt A_{eff} in Abhängigkeit vom Öffnungsgrad α wie folgt berechnet wird

$$A_{\text{eff}}(\alpha) = A_0 f_{tz}(\alpha) c_d(\alpha). \quad (2.3)$$

Hier ist A_0 der nominelle Querschnitt, welcher mit zwei Funktionen skaliert wird, die nichtlinear vom Öffnungsgrad α abhängen. Die Ventileklappe weist eine *Totzone* auf, d.h. für kleine Werte von α verhält sich die Klappe als wäre sie geschlossen

$$f_{tz}(\alpha) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \alpha \leq b \\ \alpha - b & \alpha > b \end{cases}, \quad (2.4)$$

wobei b die Ansprechschwelle ist.

Für eine praktische Anwendung muss noch berücksichtigt werden, dass der Massenstrom q_m sowohl positiv als auch negativ sein kann, was vom Vorzeichen des Druckunterschiedes $p_1 - p_2$ abhängt. Somit ergibt sich der folgende Zusammenhang

$$q_m = \begin{cases} A_{\text{eff}}(\alpha) \sqrt{2\rho_1(p_1 - p_2)} & p_1 > p_2 \\ -A_{\text{eff}}(\alpha) \sqrt{2\rho_2(p_2 - p_1)} & p_1 \leq p_2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Es ist zu beachten, dass im vorliegenden Fall der Klappenöffnungsgrad in Prozent angegeben wird und dieser natürlich nur Werte zwischen 0% und 100% annehmen kann. Man spricht in so einem Fall auch von einer *Stellgrößenbeschränkung*. Der experimentell bestimmte Verlauf des effektiven Querschnitts in Abhängigkeit des Klappenöffnungsgrads ist in Anhang B.1 dargestellt.

2.3 Rohrmodell

Da die Länge des zu modellierenden Rohrs gegenüber seinem Querschnitt sehr groß ist, können die Zustandsgrößen nicht mehr als ortsunabhängig betrachtet werden. Somit wird die Dynamik durch *partielle Differentialgleichungen* beschrieben. Es wird allerdings eine Vereinfachung

bezüglich der örtlichen Verteilung getroffen. Im vorliegenden Fall wird die Strömung nur in Längsrichtung des Rohrs betrachtet, es handelt sich also um eine planare, instationäre Strömung eines kompressiblen Gases. Somit sind die thermischen Zustandsgrößen z.B.: Druck $p(\xi, t)$ und Dichte $\varrho(\xi, t)$ als orts- und zeitabhängig zu betrachten.

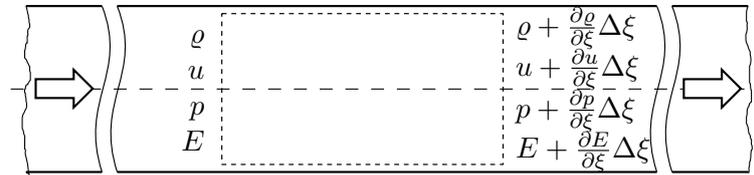


Abbildung 2.5: Verteilt parametrisches Rohrelement

Die Strömung eines Gases wird mit Hilfe sogenannter *Erhaltungsgleichungen* modelliert [17, S. 10–19], wobei eine Erhaltungsgleichung für ein infinitesimales Volumenelement im Allgemeinen wie folgt angeschrieben werden kann

$$\begin{array}{l}
 \text{Änderungsrate der} \\
 \text{Erhaltungsgrößen im} \\
 \text{Kontrollvolumen in} \\
 \text{Abhängigkeit der Zeit}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 \text{Netto Fluss in das} \\
 \text{Kontrollvolumen}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{l}
 \text{Wirkung der Kräfte} \\
 \text{auf ein} \\
 \text{Volumenelement.}
 \end{array}$$

Spricht man von den sogenannten Erhaltungsgrößen einer kompressiblen Gasströmung, so meint man die Dichte ϱ , die Impulsdichte ϱu und die Gesamtenergie des strömenden Gases pro Volumen E . Der Fluss der aus einem Kontrollvolumen hinaus bzw. hinein fließt setzt sich aus dem Massenfluss, dem Impulsstrom und dem Energiefluss zusammen. Im Fall der eindimensionalen, instationären Strömungsmechanik ergeben sich drei Erhaltungsgleichungen: Massenerhaltung, Impulserhaltung (in ξ -Richtung) und Energieerhaltung, vgl. [17, S. 10].

2.3.1 Euler-Gleichungen

Die Strömung im Rohr wird als adiabates System betrachtet, d.h. es findet kein Wärmeaustausch über die Systemgrenzen hinweg statt, vgl. [11, S. 35]. Weiters wird das Gas ideal und mit vernachlässigbarer Viskosität angenommen. Die instationäre Strömung eines idealen Gases kann mit guter Genauigkeit mit Hilfe der folgenden Erhaltungsgleichungen beschrieben werden, vgl. [28], [31]

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u}{\partial \xi} = 0 \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u^2 + p}{\partial \xi} = 0 \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (E + p)u}{\partial \xi} = 0. \quad (2.6c)$$

Bei den Gleichungen (2.6) handelt sich um die sogenannten *Euler-Gleichungen* in differenzieller Form, wobei alle Größen als orts- und zeitabhängig anzusehen sind. Die Zustandsgrößen lauten: Dichte $\varrho = \varrho(\xi, t)$, Impulsdichte $\varrho u = \varrho u(\xi, t)$ und Gesamtenergie des Gases pro Volumen $E = E(\xi, t)$. Bei den obigen Gleichungen handelt es sich um ein System von hyperbolischen

Differentialgleichungen, vgl. [31, S. 40].

Die Gleichungen (2.6) lassen sich kompakt in Vektorform anschreiben

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \xi} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

mit

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\xi, t) = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \varrho u \\ \varrho u^2 + p \\ (E + p)u \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Der Druck $p = p(\xi, t)$ ist über die thermische Zustandsgleichung für ideale Gase

$$p = \varrho RT, \quad (2.9)$$

mit der Dichte des Gases ϱ und dessen Temperatur T verknüpft, R ist hierbei die sogenannte Gaskonstante, vgl. [3, S. 266]. Es wird angenommen, dass es sich um ein polytropes Gas handelt und somit die folgende Zustandsgleichung gilt

$$p = K(S)\varrho^n, \quad (2.10)$$

mit einer von der Entropie abhängigen Konstante $K(S)$ und dem sogenannten *Polytropenexponenten* n , vgl. [11, S. 59]. Die Gesamtenergie des Gases pro Volumen E setzt sich aus der kinetischen und der inneren Energie zusammen, wobei für Gase die potentielle Energie vernachlässigt wird, vgl. [11, S. 32], [3, S. 197]

$$E = \varrho e + \frac{1}{2}\varrho u^2, \quad (2.11)$$

mit der inneren Energie ϱe und der kinetischen Energie des Gases $\frac{1}{2}\varrho u^2$, jeweils auf das Volumen bezogen. Für ein ideales, polytropes Gas gilt

$$e = c_v T, \quad (2.12)$$

mit der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_v und der spezifischen inneren Energie e , vgl. [11, S. 120]. Nach [35, S. 46] gelten die folgenden Zusammenhänge

$$c_p - c_v = R, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad (2.13)$$

wobei R die Gaskonstante, γ der Adiabatenexponenten und c_p die spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck ist. Somit ergibt sich aus der thermischen Zustandsgleichung (2.9)

$$p = (\gamma - 1)\varrho e. \quad (2.14)$$

Aus den Gleichungen (2.14) und (2.11) ergibt sich somit ein Zusammenhang für den Druck p in Abhängigkeit der Zustandsvariablen der Euler-Gleichungen (2.6) (ϱ , ϱu und E)

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2}\varrho u^2 \right). \quad (2.15)$$

Eine weitere wichtige Größe zur Analyse von jeglichen Schwingungsvorgängen in dem Strömungsvorgang ist die Schallgeschwindigkeit a . Diese wird allgemein wie folgt berechnet, vgl. [3, S. 272]

$$a = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right|_S}, \quad (2.16)$$

wobei hier die Entropie S konstant ist, d.h. es handelt sich um eine isentrope Zustandsänderung und es gilt $p = K\varrho^\gamma$. Aus (2.16) und der Zustandsgleichung (2.10), mit $n = \gamma$ folgt für die Schallgeschwindigkeit a in einem idealen Gas

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\varrho}} = \sqrt{\gamma RT}. \quad (2.17)$$

2.3.2 Verallgemeinerung der eindimensionalen Euler-Gleichungen

Für viele Probleme ist die Einschränkung auf eine eindimensionale, planare Strömung zu streng. Eine Erweiterung auf zweidimensionale Strömungen ist jedoch nicht immer notwendig, für den Spezialfall einer achssymmetrischen Rohrströmung lassen sich die Euler-Gleichungen (2.6) erweitern, ohne jedoch eine zweidimensionale Strömung berücksichtigen zu müssen, vgl. [31], [18]. Somit lassen sich *quasi-1D Strömungen* beschreiben. Des Weiteren kann die Reibung zwischen Rohrwand und Gas mittels einer Reibkraft modelliert werden.

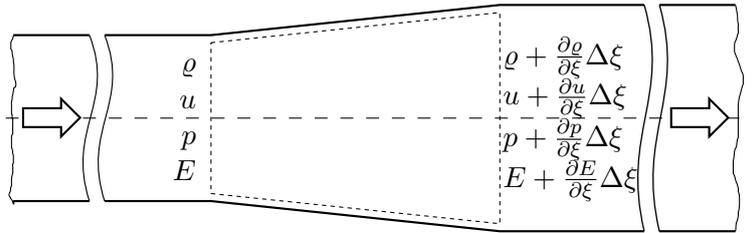


Abbildung 2.6: Verteilt parametrisches Rohrelement mit veränderlichem Querschnitt

Für eine 1D Strömung mit veränderlichem Querschnitt lauten die Euler-Gleichungen wie folgt, vgl. [31, S. 17]

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho u A}{\partial \xi} = 0 \quad (2.18a)$$

$$\frac{\partial \rho u A}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p) A}{\partial \xi} + \rho f_r A = p \frac{dA}{d\xi} \quad (2.18b)$$

$$\frac{\partial E A}{\partial t} + \frac{\partial (E + p) u A}{\partial \xi} = 0, \quad (2.18c)$$

mit der ortsabhängigen Querschnittsfläche $A = A(\xi)$. Die richtungsabhängige Reibkraft f_r ist hierbei gegeben durch

$$f_r = \frac{2f}{D} u |u|, \quad (2.19)$$

wobei f ein Reibkoeffizient ist und D der Rohrrinnendurchmesser, vgl. [31, S. 17]. Man erkennt, dass es in der Momentengleichung (2.18b) einen zusätzlichen Quellterm aufgrund des veränderlichen Querschnitts $A(\xi)$ gibt. Für ein starres Rohr gilt

$$\frac{dA(\xi)}{d\xi} = 0, \quad (2.20)$$

womit sich die Gleichungen (2.18) wie folgt vereinfachen lassen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial \rho u A}{\partial \xi} = 0 \quad (2.21a)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial (\rho u^2 + p) A}{\partial \xi} + \rho f_r = p \frac{A'}{A} \quad (2.21b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial (E + p) u A}{\partial \xi} = 0. \quad (2.21c)$$

mit

$$A' = \frac{dA}{d\xi}. \quad (2.22)$$

Wieder in Vektorform angeschrieben ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial(A \mathbf{F}(\mathbf{U}))}{\partial \xi} + \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \frac{A'}{A} \mathbf{D}(\mathbf{U}), \quad (2.23)$$

mit dem Vektor der Erhaltungsgrößen \mathbf{U} , der Flussfunktion $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ wie in (2.8) und mit den Vektoren $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ und $\mathbf{D}(\mathbf{U})$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2f}{D} \varrho u |u| \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Führt man die Differentiation des mittleren Terms in (2.23) aus erhält man

$$\frac{1}{A} \frac{\partial(A \mathbf{F}(\mathbf{U}))}{\partial \xi} = \frac{A'}{A} \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \xi}. \quad (2.25)$$

Somit ergibt sich wieder die Standardform der Euler-Gleichungen, mit einem zusätzlichen Quellterm $\mathbf{Q}(\mathbf{U})$, vgl. (2.7)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \xi} = \underbrace{-\frac{A'}{A} \mathbf{H}(\mathbf{U}) - \mathbf{G}(\mathbf{U})}_{\mathbf{Q}(\mathbf{U})}. \quad (2.26)$$

Der Vektor $\mathbf{H}(\mathbf{U})$ berechnet sich hierbei wie folgt

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{D}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \varrho u \\ \varrho u^2 \\ (E + p)u \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

womit der Quellterm $\mathbf{Q}(\mathbf{U})$ wie folgt angeschrieben werden kann

$$\mathbf{Q}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} -\frac{A'}{A} \varrho u \\ -\frac{A'}{A} \varrho u^2 - \frac{2f}{D} \varrho u |u| \\ -\frac{A'}{A} (E + p)u \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

2.3.3 Isentrope Zustandsänderung

Für eine reibungsfreie Gasströmung in einem adiabaten System kann eine isentrope Zustandsänderung (konstante Entropie S) angenommen werden, vgl. [3, S. 268]. Somit gilt

$$\frac{p}{\varrho^\gamma} = \frac{p_0}{\varrho_0^\gamma}, \quad p = K \varrho^\gamma, \quad (2.29)$$

mit einer Konstante K , welche vom Bezugsniveau (p_0 , ϱ_0) und dem Adiabatenexponent γ abhängt. Drückt man in der folgenden Gleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u}{\partial \xi} = -\frac{A'}{A} \varrho u \quad (2.30a)$$

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u^2 + p)}{\partial \xi} + \varrho f_r = -\frac{A'}{A} \varrho u^2 - \frac{2f}{D} \varrho u |u| \quad (2.30b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(E + p)u}{\partial \xi} = -\frac{A'}{A} (E + p)u, \quad (2.30c)$$

die Energiegleichung (2.30c) mittels der Entropie S aus, so vereinfachen sich die obigen Euler-Gleichungen wie folgt

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u}{\partial \xi} = -\frac{A'}{A} \varrho u \quad (2.31a)$$

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u^2 + p)}{\partial \xi} = -\frac{A'}{A} \varrho u^2 - \frac{2f}{D} \varrho u |u|. \quad (2.31b)$$

Die obigen Gleichungen lassen sich, wie schon zuvor, kompakt in Vektorform anschreiben

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \xi} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}), \quad (2.32)$$

mit

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\xi, t) = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \varrho u \\ \varrho u^2 + p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} -\frac{A'}{A} \varrho u \\ -\frac{A'}{A} \varrho u^2 - \frac{2f}{D} \varrho u |u| \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

2.3.4 Charakteristische Form

Eine weitere wichtige Form zur Analyse der Euler-Gleichungen ist ihre sogenannte *charakteristische Form*. Schreibt man die isentropen Euler-Gleichungen für variablen Querschnitt (2.31) in folgender, sogenannten *quasilinearen Form* an und vernachlässigt die Rohrreibung, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi}}_{\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{U})} \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u \end{bmatrix} = \underbrace{-\frac{A'}{A} \begin{bmatrix} \varrho u \\ \varrho u^2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{Q}}}. \quad (2.34)$$

Die Eigenwerte der Jakobimatrix $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{U})$ lauten

$$\lambda^+ = u + a, \quad \lambda^- = u - a, \quad (2.35)$$

mit den dazugehörigen Rechtseigenvektoren

$$\mathbf{r}^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{u+a} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^- = \begin{bmatrix} \frac{1}{u-a} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Hieran erkennt man die Hyperbolizität der Gleichungen (2.31), da die Eigenwerte der Jakobimatrix reell und die dazugehörigen Eigenvektoren linear unabhängig sind, vgl. [18, S. 7]. Mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{u+a} & \frac{1}{u-a} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

kann die Jakobimatrix $\bar{\mathbf{A}}$ diagonalisiert werden und es ergibt sich die Eigenwertmatrix $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} u+a & 0 \\ 0 & u-a \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Die sogenannte *charakteristische Form* der Gleichungen (2.34) lautet dann, vgl. [13, S. 161]

$$\mathbf{T}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} = \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}. \quad (2.39)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u+a & 0 \\ 0 & u-a \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = -\frac{A'}{A} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\varrho u(u+a) \\ \frac{1}{2}\varrho u(u-a) \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Die *charakteristischen Variablen* (w_1 und w_2) ergeben sich somit wie folgt

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_2 + au_1) \\ \frac{1}{2}(u_2 - au_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\varrho u + a\varrho) \\ \frac{1}{2}(\varrho u - a\varrho) \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Der Zusammenhang zwischen den charakteristischen Variablen und den konservativen Variablen (ϱ und ϱu) ist wie folgt gegeben

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}(w_1 - w_2) \\ w_1 + w_2 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Laut Gleichung (2.40) bewegen sich die charakteristischen Variablen (w_1 und w_2), mit der Geschwindigkeit λ_i entlang der sogenannten *Charakteristiken*. Das sind Kurven auf denen die Beziehung $d\xi = (u+a)dt$, bzw. $d\xi = (u-a)dt$ gilt. Da die rechte Seite der Gleichung (2.40) nicht Null ist, sind die charakteristischen Variablen entlang ihrer Charakteristiken nicht konstant, vgl.[13, S. 162–165]. Für die Vorgabe der Randbedingungen der Euler-Gleichungen sind die Charakteristiken von besonderer Bedeutung. Dies wird im Folgenden erläutert.

2.3.5 Randbedingungen

Für die allgemeinen Euler-Gleichungen (2.6), ist es keine triviale Aufgabe Randbedingungen zu finden, welche zu einem gut gestellten Problem führen, vgl.[9]. Oft sind die Randbedingungen durch physikalische Gegebenheiten vorgegeben. In den meisten Fällen handelt es sich hier um sogenannte *Dirichlet-Randbedingung*. Das sind Randbedingungen wo der Wert der abhängigen Variable am Rand vorgegeben wird. Hiermit lassen sich zum Beispiel Zufluss und Abfluss des Fluids/Gases beschreiben, nicht jedoch ein freies Abfließen, z.B. durch ein offenes Rohrende.

Im vorliegenden Anwendungsfall dienen die Randbedingungen zur Kopplung zwischen den Klappen und dem verteilt parametrischen Rohr, vgl. Abbildung 2.7 .

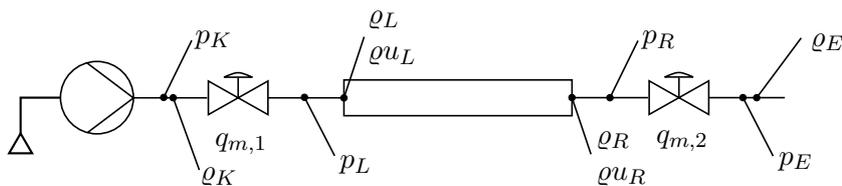


Abbildung 2.7: Blockdiagramm des Testaufbaus

Zur korrekten Vorgabe der Randbedingungen muss die charakteristische Form der Euler-Gleichungen (2.40) analysiert werden, vgl.[13, S. 346 f.]. Wie schon zuvor beschrieben handelt es sich bei den charakteristischen Variablen um Größen, die sich mit der Geschwindigkeit λ_i entlang ihrer Charakteristiken bewegen. Es muss also darauf geachtet werden, dass bei der Vorgabe der Randbedingen nur Variablen spezifiziert werden, welche sich in das Volumen hinein bewegen, also Information in das Volumen hinein tragen.

Im Folgenden wird angenommen, dass die Strömungsgeschwindigkeit des Gases im Unterschallbereich bleibt

$$-a \leq u \leq a, \quad (2.43)$$

somit gilt für die charakteristischen Geschwindigkeit

$$\lambda^+ = u + a \geq 0, \quad \lambda^- = u - a \leq 0. \quad (2.44)$$

Dies ist bei der betrachteten technischen Problemstellung immer der Fall. Es gilt also, dass sich die Bewegungsrichtungen der charakteristischen Variablen nicht ändert, was für die Vorgabe der Randbedingungen von besonderer Bedeutung ist.

Unterschall-Zufluss, links

Um einen Unterschall-Zufluss auf der linken Seite zu modellieren wird angenommen, dass die Strömungsgeschwindigkeit positiv ist. Für diesen Fall müssen nun Randbedingungen für die sich in das Volumen bewegendenden Charakteristiken gefunden werden. Dies kann leicht anhand der Eigenwerte überprüft werden. Für einen Unterschall-Zufluss auf der linken Seite ist lediglich der Eigenwert λ^+ positiv. Es muss also nur w_1 am linken Rand vorgegeben werden. Damit w_1 am Rand festgelegt ist kann sowohl die Dichte ρ als auch die Impulsdichte ρu am linken Rand vorgegeben werden, vgl. (2.41). Im vorliegenden Fall wird der Massenstrom vorgegeben, welcher direkt mit der Impulsdichte verknüpft ist.

Die physikalische Randbedingung für einen Unterschall-Zufluss am linken Rand lautet somit

$$(\rho u)_L = \frac{q_{m,1}}{A_L}, \quad \text{mit } q_{m,1} = A_{\text{eff}}(\alpha) \sqrt{2\rho_K(p_K - p_L)}, \quad (2.45)$$

mit der Querschnittsfläche am linken Rand A_L , siehe Gleichung (2.5).

Für die numerische Lösung des Problems müssen jedoch alle Zustandsvariablen am Rand vorgegeben werden. Dies kann über eine sogenannte *numerische Randbedingung* für w_2 erfolgen. Es wird angenommen, dass w_2 direkt am Rand gleich ist wie direkt daneben im Inneren des Volumens, vgl. [13, Kap. 19].

Unterschall-Abfluss, rechts

Für die Randbedingungen, welchen einen Unterschall-Abfluss auf der rechten Seite des Volumens modellieren, gelten im Wesentlichen die selben Überlegungen wie vorher. Hier wird allerdings w_2 durch die physikalische Randbedingung und w_1 durch die numerische Randbedingung vorgegeben.

$$(\rho u)_R = \frac{q_{m,2}}{A_R}, \quad \text{mit } q_{m,2} = A_{\text{eff}}(\alpha) \sqrt{2\rho_R(p_R - p_E)}, \quad (2.46)$$

mit der Querschnittsfläche am rechten Rand A_R . Für die numerische Randbedingung wird wieder angenommen, dass w_1 direkt am Rand ungefähr gleich ist wie direkt daneben im Inneren des Volumens.

2.3.6 Numerische Lösung mit Hilfe der finiten Volumen Methode

In den Abschnitten zuvor wurde immer von der Divergenz Form (Konservative Form) der Erhaltungsgleichungen ausgegangen

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\xi, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(\xi, t))}{\partial \xi} = \mathbf{Q}(\xi, t). \quad (2.47)$$

Dies setzt jedoch stetig differenzierbare Funktionen $\mathbf{U}(\xi, t)$ in Zeit und Ort voraus. Aus physikalischer Sicht treten aber im Überschallbereich unstetige Lösungen auf, z.B. in der Form von sogenannten *Verdichtungsstößen*, vgl. [26, S. 4 f.], [3, S. 274 ff.]. Um diese physikalischen

Phänomene trotzdem mathematisch beschreiben zu können, muss von der *Integralform* der Erhaltungsgleichung ausgegangen werden

$$\int_V \frac{\partial \mathbf{U}(\xi, t)}{\partial t} dV + \oint_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{U}(\xi, t)) d\Gamma = \int_V \mathbf{Q}(\xi, t) dV. \quad (2.48)$$

Hierbei ist V das Kontrollvolumen und Γ dessen Oberfläche. Die Idee der FVM ist, das Problemgebiet in Zellen $[\xi_{j-\frac{1}{2}}, \xi_{j+\frac{1}{2}}]$ aufzuteilen und über diese Zellen zu integrieren.

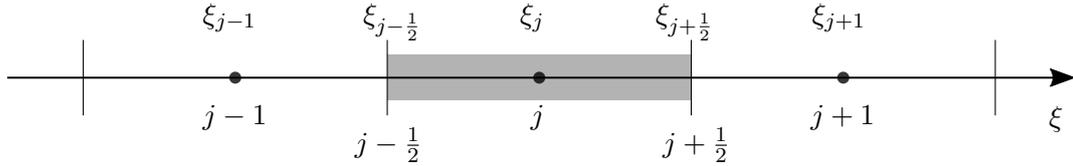


Abbildung 2.8: Aufteilung des Problemgebiets in Zellen

Da nun von der integralen Form ausgegangen wird, sind die Bedingungen an die Differenzierbarkeit nicht mehr so streng und es können Phänomene wie Verdichtungsstößen abgebildet werden. Dieser Aspekt der FVM und die einfache Verwendbarkeit bei nicht uniformen örtlichen Diskretisierungen macht das Verfahren so beliebt, dass es in 80 % der kommerziellen Anwendungen verwendet wird, vgl. [26, S. 4].

Durch Integration von (2.47) über eine Zelle erhält man

$$\int_{\xi_{j-\frac{1}{2}}}^{\xi_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \mathbf{U}(\xi, t)}{\partial t} d\xi + \int_{\xi_{j-\frac{1}{2}}}^{\xi_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(\xi, t))}{\partial \xi} d\xi = \int_{\xi_{j-\frac{1}{2}}}^{\xi_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{Q}(\xi, t) d\xi. \quad (2.49)$$

Durch Umformen ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \int_{\xi_{j-\frac{1}{2}}}^{\xi_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(\xi, t) d\xi + \mathbf{F}(\mathbf{U}(\xi, t)) \Big|_{\xi_{j-\frac{1}{2}}}^{\xi_{j+\frac{1}{2}}} = \int_{\xi_{j-\frac{1}{2}}}^{\xi_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{Q}(\xi, t) d\xi. \quad (2.50)$$

Die Idee der FVM ist es nun nicht mehr den Wert von $\mathbf{U}(\xi, t)$ an jedem Punkt im Problemgebiet zu berechnen, sondern nur mehr den sogenannten *Zellmittelwert* $\bar{\mathbf{U}}(\xi_j, t)$, der j -ten Zelle, vgl. [26, S. 13]. Der Zellmittelwert ist wie folgt definiert

$$\bar{\mathbf{U}}(\xi_j, t) := \bar{\mathbf{U}}_j := \frac{1}{\Delta \xi_j} \int_{\xi_{j-\frac{1}{2}}}^{\xi_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(\xi, t) d\xi, \quad (2.51)$$

mit

$$\Delta \xi_j := \xi_{j+\frac{1}{2}} - \xi_{j-\frac{1}{2}}. \quad (2.52)$$

Somit lässt sich die Gleichung (2.50) wie folgt anschreiben

$$\frac{d\bar{\mathbf{U}}(\xi_j, t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_j} \left(\mathbf{F}(\mathbf{U}(\xi_{j+\frac{1}{2}}, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(\xi_{j-\frac{1}{2}}, t)) \right) + \frac{1}{\Delta \xi_j} \int_{\xi_{j-\frac{1}{2}}}^{\xi_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{Q}(\xi, t) d\xi. \quad (2.53)$$

Bemerkenswert ist, dass bisher in der Herleitung der Finiten Volumen Methode *keine Näherungen* getroffen wurden. Da jedoch für die Berechnung des Flusses, d.h. der rechten Seite in (2.53), der Wert von \mathbf{U} an den Zellrändern ($\xi_{j-\frac{1}{2}}$ und $\xi_{j+\frac{1}{2}}$) benötigt wird, aber nur der Zellmittelwert

$\bar{\mathbf{U}}(\xi_j, t)$ zur Verfügung steht muss hier eine Näherung getroffen werden. Selbiges gilt für das Integral des Quellenterms $\int \mathbf{Q}(\xi, t) d\xi$. Somit ergibt sich die folgende Näherung

$$\frac{d\bar{\mathbf{U}}_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta\xi_j} \left(\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}} \right) + \bar{\mathbf{Q}}_j, \quad (2.54)$$

mit dem Mittelwert des Quellenterms $\bar{\mathbf{Q}}(\xi_j, t)$, der j -ten Zelle

$$\bar{\mathbf{Q}}(\xi_j, t) := \bar{\mathbf{Q}}_j := \frac{1}{\Delta\xi_j} \int_{\xi_{j-\frac{1}{2}}}^{\xi_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{Q}(\xi, t) d\xi \quad (2.55)$$

und der sogenannten *numerischen Flussfunktionen* $\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}$ und $\hat{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}}$. Zur numerischen Näherung von $\bar{\mathbf{Q}}_j$ gibt es eine Vielzahl von Möglichkeiten, vgl. [18, S. 93–100]. Eine einfache Möglichkeit besteht in der punktwweisen Approximation

$$\bar{\mathbf{Q}}_j \approx \mathbf{Q}(x_j, \bar{\mathbf{U}}_j). \quad (2.56)$$

Für die Berechnung der numerischen Flussfunktionen $\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}$ und $\hat{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}}$ existieren ebenfalls zahlreiche Methoden, vgl. [18, Kap. 4], [26, Kap. 2], [19].

Eine weit verbreitete Wahl für die numerischen Flussfunktionen ist das sogenannte *Upwind-Verfahren*

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \mathbf{F}_j, & \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} > 0 \\ \mathbf{F}_{j+1}, & \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} < 0 \end{cases}, \quad \hat{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \mathbf{F}_{j-1}, & \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} > 0 \\ \mathbf{F}_j, & \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} < 0 \end{cases}, \quad (2.57)$$

welches die Strömungsrichtung des Fluids/Gases berücksichtigt, vgl. [17, S. 84 f.]. Ein Vertreter des Upwind-Verfahrens ist das sogenannte *Flux-Vektor-Splitting*. Es beruht auf der Idee, die verallgemeinerte Flussfunktion $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ aufzuteilen in einen Teil \mathbf{F}^+ , der nur stromaufwärts laufende Wellen bildet, und einen Teil \mathbf{F}^- für stromabwärts laufende Wellen

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-. \quad (2.58)$$

Die Aufteilung muss so erfolgen, dass gilt

$$\frac{\partial \mathbf{F}^+}{\partial \mathbf{U}} \geq 0, \quad \frac{\partial \mathbf{F}^-}{\partial \mathbf{U}} \leq 0. \quad (2.59)$$

somit ist sichergestellt, dass \mathbf{F}^+ nur positive Eigenwerte und \mathbf{F}^- nur negative Eigenwerte aufweist, vgl. [17, S. 86]. Unter Anwendung des Flux-Vektor-Splitting ergeben sich somit die folgenden numerischen Flussfunktionen

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_j^+ + \mathbf{F}_{j+1}^- \quad (2.60a)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_{j-1}^+ + \mathbf{F}_j^-. \quad (2.60b)$$

Für die Aufteilung der Flussfunktion in \mathbf{F}^+ und \mathbf{F}^- gibt es zahlreiche Möglichkeiten, vgl. [19], [30], [33]. Allerdings können nicht alle Verfahren die für die Euler-Gleichungen (2.6) entwickelt worden sind auch für die isentrope Variante (2.31) eingesetzt werden. Ein Flux-Vektor-Splitting Verfahren, welches sich aber für beide Fälle eignet, wird in [19] beschrieben.

Unabhängig vom eingesetzten Flux-Vektor-Splitting Verfahren ergibt sich somit das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d\bar{\mathbf{U}}_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta\xi_j} \left(\mathbf{F}_j^+ + \mathbf{F}_{j+1}^- - \mathbf{F}_{j-1}^+ - \mathbf{F}_j^- \right) + \bar{\mathbf{Q}}_j, \quad (2.61)$$

2.3.6.1 Flux-Vektor-Splitting nach Liou und Steffen

Das in [19] von Liou und Steffen beschriebene Flux-Vektor-Splitting Verfahren beruht auf der Tatsache, dass die Flussfunktion der Euler-Gleichungen (2.8) aufgeteilt werden kann in einen konvektiven Teil und einen Teil der nur vom Druck p abhängt

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \varrho u \\ \varrho u^2 + p \\ (E + p)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ (E + p) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Von Liou und Steffen wird nun eine Darstellung der Flussfunktion mit Hilfe der Machzahl M

$$M = \frac{u}{a}, \quad (2.63)$$

vorgeschlagen. Damit kann die Flussfunktion (2.62) wie folgt angeschrieben werden

$$\mathbf{F} = M \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ (E + p) \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Die Aufteilung erfolgt nun lediglich über die Machzahl und den Druck bezogenen Teil des Flusses

$$\mathbf{F}^\pm = M^\pm \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ (E + p) \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 \\ p^\pm \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Bei der Aufteilung wird zwischen Unterschall- und Überschallbereich unterschieden. Die Aufteilung erfüllt die Beziehungen

$$M = M^+ + M^-, \quad p = p^+ + p^- \quad (2.66)$$

womit sich die folgenden Aufteilungen ergeben

$$M^+ = \begin{cases} 0 & M \leq -1 \\ \left(\frac{M+1}{2}\right)^2, & -1 < M < 1, \\ M, & M \geq 1 \end{cases}, \quad M^- = \begin{cases} M & M \leq -1 \\ -\left(\frac{M-1}{2}\right)^2, & -1 < M < 1, \\ 0, & M \geq 1 \end{cases}, \quad (2.67)$$

bzw.

$$p^+ = \begin{cases} 0 & M \leq -1 \\ p \left(\frac{1+M}{2}\right), & -1 < M < 1, \\ p, & M \geq 1 \end{cases}, \quad p^- = \begin{cases} p & M \leq -1 \\ p \left(\frac{1-M}{2}\right), & -1 < M < 1. \\ 0, & M \geq 1 \end{cases}. \quad (2.68)$$

Wie man leicht überprüfen kann gelten die Bedingungen (2.58) und (2.59), mit dieser Flussaufteilung auch noch im isentropen Fall.

2.3.6.2 Zeitdiskretisierung und Stabilität

Für die numerische Lösung der Differentialgleichung (2.61) kann ein beliebiger expliziter Integrationsalgorithmus zum Einsatz kommen. Eine einfache, wenn auch nicht sehr genaue Variante, ist die numerischen Integration mit Hilfe des *expliziten Vorwärts-Euler-Verfahrens*. Somit ergibt sich die folgende Differenzgleichung

$$\bar{\mathbf{U}}_j^{k+1} = \bar{\mathbf{U}}_j^k - \frac{\Delta t}{\Delta \xi_j} \left(\mathbf{F}^+(\bar{\mathbf{U}}_j^k) + \mathbf{F}^-(\bar{\mathbf{U}}_{j+1}^k) - \mathbf{F}^+(\bar{\mathbf{U}}_{j-1}^k) - \mathbf{F}^-(\bar{\mathbf{U}}_j^k) \right) + \Delta t \bar{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{U}}_j^k), \quad (2.69)$$

wobei Δt die Diskretisierungszeit ist. Für die Diskretisierung gilt

$$\bar{\mathbf{U}}_j^k := \bar{\mathbf{U}}_j(k\Delta t). \quad (2.70)$$

Bei der Zeitdiskretisierung muss ein besonderes Augenmerk auf die Stabilitätseigenschaften des verwendeten Integrationsalgorithmus gelegt werden. Insbesondere muss die Ausbreitungsgeschwindigkeit im numerischen Rechengitter ($\frac{\Delta \xi}{\Delta t}$) kleiner gleich der größten physikalischen Strömungsgeschwindigkeit sein, vgl. [17, S. 59]. Dies lässt sich anhand der Charakteristiken der Euler-Gleichung überprüfen, vgl. (2.35) und (2.40). Eine notwendige Stabilitätsbedingung für explizite Integrationsverfahren ist die sogenannte Courant, Friedrichs und Lewy (CFL)-Bedingung. Die notwendige Bedingung lautet wie folgt

$$\frac{\Delta t}{\Delta \xi} \sigma\{\bar{\mathbf{A}}\} = C \leq 1, \quad (2.71)$$

wobei $\sigma\{\bar{\mathbf{A}}\} = \max(|u + a|, |u - a|)$ für den betragsmäßig größten Eigenwert der Jakobimatrix $\bar{\mathbf{A}}$ steht, siehe Gleichung (2.35). Für das einfache explizite Vorwärts-Euler-Verfahren muss die CFL-Zahl C immer kleiner gleich 1 sein. Wird ein Integrationsalgorithmus höherer Ordnung verwendet, so kann C auch größer sein, vgl. [17, S. 59], [29, S. 6–14].

2.4 Linearisierung

Für einen späteren Reglerentwurf ist es sinnvoll ein vereinfachtes Modell der Strecke zu betrachten. Zu diesem Zweck werden die isentropen Euler-Gleichungen (2.31) um einen Arbeitspunkt linearisiert.

Es werden im Folgenden nur noch kleine Auslenkungen um diesen Arbeitspunkt betrachtet. Als Zustandsvariablen des Systems werden hierbei die Dichte ϱ und die Impulsdichte ϱu verwendet. Der Druck p wird durch die Zustandsgleichung (2.10) beschrieben. Es ergibt sich der folgende Arbeitspunkt

$$\varrho(\xi, t) = \varrho_0 + \Delta \varrho(\xi, t) \quad (2.72a)$$

$$(\varrho u)(\xi, t) = \Delta(\varrho u)(\xi, t), \quad (2.72b)$$

wobei angenommen wird, dass die Impulsdichte im Arbeitspunkt $(\varrho u)_0$ Null ist. Die eigentliche Linearisierung der isentropen Euler-Gleichungen (2.32) erfolgt analog zur Linearisierung eines nichtlinearen dynamischen Systems. Aus den in Vektorform angeschriebenen Gleichungen (2.32) erhält man die folgende Linearisierung

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0} \Delta \mathbf{U}. \quad (2.73)$$

Durch einige Umformungen ergibt sich das folgende lineare System von partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Delta \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \Delta \varrho u}{\partial \xi} = -\frac{A'}{A} \Delta \varrho u \quad (2.74a)$$

$$\frac{\partial \Delta \varrho u}{\partial t} + a_0^2 \frac{\partial \Delta \varrho}{\partial \xi} = 0. \quad (2.74b)$$

Die Schallgeschwindigkeit im Arbeitspunkt a_0 ist hierbei

$$a_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\varrho_0}}, \quad (2.75)$$

wobei sich p_0 aus Gleichung (2.29) berechnen lässt. Für viele ingenieurtechnische Anwendungen ist es sinnvoll eine Variablentransformation durchzuführen. In der Praxis werden häufig Druck p und Massenstrom q_m zur Beschreibung von instationären Strömungen verwendet. Der Zusammenhang zwischen Druck p und Massenstrom q_m mit Dichte ϱ und Impulsdichte ϱu ist durch folgende Gleichungen gegeben

$$\varrho = \left(\frac{p}{K}\right)^{1/\gamma}, \quad \text{mit } K = \frac{p_0}{\varrho_0^\gamma} \quad \text{und} \quad \varrho u = \frac{q_m}{A(\xi)}. \quad (2.76)$$

Wiederum wird eine Linearisierung um einen Arbeitspunkt durchgeführt und lediglich kleine Auslenkungen aus diesem betrachtet

$$p(\xi, t) = p_0 + \Delta p(\xi, t) \quad (2.77a)$$

$$q_m(\xi, t) = \Delta q_m(\xi, t), \quad (2.77b)$$

wobei der mittlere Massenstrom $q_{m,0}$ als vernachlässigbar angenommen wird. Somit ergibt sich das folgende lineare System von partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} + \frac{a_0^2}{A(\xi)} \frac{\partial \Delta q_m}{\partial \xi} = 0 \quad (2.78a)$$

$$\frac{\partial \Delta q_m}{\partial t} + A(\xi) \frac{\partial \Delta p}{\partial \xi} = 0. \quad (2.78b)$$

Die beiden Klappen werden mittels der Randbedingungen

$$q_m(0, t) = A_{\text{eff}}(\alpha_1(t)) \sqrt{\frac{p_1}{\gamma R T_0} (p_1 - p(0, t))} = f_1(p(\xi, t), \alpha_1(t)) \quad (2.79a)$$

$$q_m(L, t) = A_{\text{eff}}(\alpha_2(t)) \sqrt{\frac{p(L, t)}{\gamma R T_0} (p(L, t) - p_4)} = f_2(p(\xi, t), \alpha_2(t)), \quad (2.79b)$$

berücksichtigt. Hierbei wird angenommen, dass der Druck p_1 vor der Klappe 1 größer ist als der Druck im Rohr und dass der Druck p_4 nach der Klappe 2 kleiner ist als der Druck im Rohr. Da es sich bei den Gleichungen (2.79) um nichtlineare Randbedingungen handelt, werden diese, wie zuvor schon die partiellen Differentialgleichungen, um einen Arbeitspunkt linearisiert

$$\Delta q_m(0, t) = \left. \frac{\partial f_1}{\partial p} \right|_{p_0, \alpha_{1,0}} \Delta p(0, t) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \right|_{p_0, \alpha_{1,0}} \Delta \alpha_1(t) = c_{1,p} \Delta p(0, t) + c_{1,a} \Delta \alpha_1(t) \quad (2.80a)$$

$$\Delta q_m(L, t) = \left. \frac{\partial f_2}{\partial p} \right|_{p_0, \alpha_{2,0}} \Delta p(L, t) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} \right|_{p_0, \alpha_{2,0}} \Delta \alpha_2(t) = c_{2,p} \Delta p(L, t) + c_{2,a} \Delta \alpha_2(t). \quad (2.80b)$$

Somit ergibt sich zusammengefasst das folgende lineare *Anfangs-Randwertproblem*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta p(\xi, t) = -\frac{a_0^2}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta q_m(\xi, t), \quad 0 \leq \xi \leq L \quad (2.81a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta q_m(\xi, t) = -A \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta p(\xi, t) \quad (2.81b)$$

$$\Delta q_m(0, t) = c_{1,p} \Delta p(0, t) + c_{1,a} \Delta \alpha_1(t) \quad (2.81c)$$

$$\Delta q_m(L, t) = c_{2,p} \Delta p(L, t) + c_{2,a} \Delta \alpha_2(t) \quad (2.81d)$$

$$\Delta p(\xi, 0) = 0, \quad \Delta q_m(\xi, 0) = 0. \quad (2.81e)$$

Bemerkenswert ist die verblüffende Ähnlichkeit der Gleichung (2.78) mit der sogenannten *Leitungsgleichung* eines verlustlosen Leiters

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{C'(\xi)} \frac{\partial i}{\partial \xi} = 0 \quad (2.82a)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{L'(\xi)} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (2.82b)$$

wobei $i = i(\xi, t)$ der Strom, $u = u(\xi, t)$ die Spannung, $C'(\xi)$ der ortsabhängige Kapazitätsbelag und $L'(\xi)$ der ortsabhängige Induktivitätsbelag entlang der Leitung sind.

2.5 Beschreibung im Frequenzbereich

In vielen Fällen kann es hilfreich sein eine Analyse im Frequenzbereich durchzuführen. Zum Beispiel kann mittels eines sogenannten *Chirp-Versuchs* das Eingangs-/Ausgangsverhalten des Systems im Frequenzbereich relativ einfach messtechnisch ermittelt werden. Im Folgenden wird zum Zweck der Analyse im Frequenzbereich die Übertragungsmatrix des Systems auf analytischem Weg bestimmt.

Eine Möglichkeit zur Berechnung der Übertragungsfunktionen des Systems, ist die Transformation des Anfangs-Randwertproblems (2.81) in den Bildbereich. Es ergibt sich

$$s \bar{p}(\xi, s) - \Delta p(\xi, 0) = -\frac{a_0^2}{A} \frac{d}{d\xi} \bar{q}_m(\xi, s) \quad (2.83a)$$

$$s \bar{q}_m(\xi, s) - \Delta q_m(\xi, 0) = -A \frac{d}{d\xi} \bar{p}(\xi, s) \quad (2.83b)$$

$$\bar{q}_m(0, s) = c_{1,p} \bar{p}(0, s) + c_{1,a} \bar{u}_1(s) \quad (2.83c)$$

$$\bar{q}_m(L, s) = c_{2,p} \bar{p}(L, s) + c_{2,a} \bar{u}_2(s) \quad (2.83d)$$

$$\bar{y}_1(s) = \bar{p}(0, s) \quad (2.83e)$$

$$\bar{y}_2(s) = \bar{p}(L, s). \quad (2.83f)$$

wobei die folgenden Laplace-Transformationen gelten

$$\bar{p}(\xi, s) := \mathcal{L}\{\Delta p(\xi, t)\}, \quad \bar{q}_m(\xi, s) := \mathcal{L}\{\Delta q_m(\xi, t)\} \quad (2.84a)$$

$$\bar{u}_1(s) := \mathcal{L}\{\Delta \alpha_1(t)\}, \quad \bar{u}_2(s) := \mathcal{L}\{\Delta \alpha_2(t)\} \quad (2.84b)$$

$$\bar{y}_1(s) := \mathcal{L}\{\Delta p_2(t)\}, \quad \bar{y}_2(s) := \mathcal{L}\{\Delta p_3(t)\}. \quad (2.84c)$$

Es wird angenommen, dass die Anfangswerte Null sind

$$\Delta p(\xi, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \Delta q_m(\xi, 0) = 0. \quad (2.85)$$

Die allgemeine Lösung von (2.83) lautet

$$\begin{bmatrix} \bar{p}(\xi, s) \\ \bar{q}_m(\xi, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\left(\frac{s\xi}{a_0}\right) & -\frac{A}{a_0} \sinh\left(\frac{s\xi}{a_0}\right) \\ -\frac{A}{a_0} \sinh\left(\frac{s\xi}{a_0}\right) & \cosh\left(\frac{s\xi}{a_0}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}(0, s) \\ \bar{q}_m(0, s) \end{bmatrix}, \quad (2.86)$$

mit den noch zu bestimmenden Wert für $\bar{p}(0, s)$ und $\bar{q}_m(0, s)$. Diese können aber relativ einfach durch Einsetzen der allgemeinen Lösung (2.86) in die Randbedingungen (2.83c) und (2.83d)

bestimmt werden. Nach kurzer Rechnung ergibt sich

$$\bar{p}(0, s) = \frac{a_0 c_{1,a} \left(A \cosh \left(\frac{Ls}{a_0} \right) + a_0 c_{2,p} \sinh \left(\frac{Ls}{a_0} \right) \right) \bar{u}_1(s) - A a_0 c_{2,a} \bar{u}_2(s)}{A a_0 (c_{2,p} - c_{1,p}) \cosh \left(\frac{Ls}{a_0} \right) + (A^2 - a_0^2 c_{1,p} c_{2,p}) \sinh \left(\frac{Ls}{a_0} \right)} \quad (2.87a)$$

$$\bar{q}_m(0, s) = \frac{A c_{1,a} \left(A \sinh \left(\frac{Ls}{a_0} \right) + a_0 c_{2,p} \cosh \left(\frac{Ls}{a_0} \right) \right) \bar{u}_1(s) - A a_0 c_{1,p} c_{2,a} \bar{u}_2(s)}{A a_0 (c_{2,p} - c_{1,p}) \cosh \left(\frac{Ls}{a_0} \right) + (A^2 - a_0^2 c_{1,p} c_{2,p}) \sinh \left(\frac{Ls}{a_0} \right)}. \quad (2.87b)$$

Somit lautet die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ des *verteilt parametrischen Mehrgrößensystems* (2.83)

$$\bar{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{G}(s) \bar{\mathbf{u}}(s), \quad (2.88)$$

mit der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$

$$\mathbf{G}(s) = \frac{a_0}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} c_{1,a} \left(A \cosh \left(\frac{Ls}{a_0} \right) + a_0 c_{2,p} \sinh \left(\frac{Ls}{a_0} \right) \right) & -A c_{2,a} \\ A c_{1,a} & -c_{2,a} \left(A \cosh \left(\frac{Ls}{a_0} \right) - a_0 c_{1,p} \sinh \left(\frac{Ls}{a_0} \right) \right) \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

und der komplexen Nenner-Funktion $\Delta(s)$

$$\Delta(s) = A a_0 (c_{2,p} - c_{1,p}) \cosh \left(\frac{Ls}{a_0} \right) + (A^2 - a_0^2 c_{1,p} c_{2,p}) \sinh \left(\frac{Ls}{a_0} \right). \quad (2.90)$$

Die Polstellen p_k von $\mathbf{G}(s)$ lauten

$$p_k = \frac{a_0 (jk\pi + \beta)}{L}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (2.91)$$

mit der reellen Konstante β

$$\beta = \ln \left(\frac{\sqrt{A + a_0 c_{1,p}} \sqrt{A - a_0 c_{2,p}}}{\sqrt{(A - a_0 c_{1,p})(A + a_0 c_{2,p})}} \right). \quad (2.92)$$

Die abzählbar unendlich vielen Polstellen p_k liegen in einem *vertikalen Band* in der linken, offenen Halbebene. Für verteilt parametrische Systeme erhält man im allgemeinen, so auch hier, *irrationale Übertragungsfunktionen*, vgl. [5, S. 11]. Man erkennt den großen Einfluss der Randbedingungen auf das Systemverhalten. Würde statt der verkoppelten Randbedingungen (2.83c) und (2.83d) eine direkte Vorgabe der Massenströme an den Rändern gemacht, so würden die Polstellen auf der imaginären Achse liegen und das System wäre instabil. Anhand der Übertragungsfunktionen von VPS kann es möglich sein einen Reglerentwurf im Frequenzbereich durchzuführen, vgl. [5, S. 11–14].

In Abbildung 2.9 und 2.10 ist der Vergleich zwischen den analytisch berechneten Frequenzgängen und den mit Hilfe eines *Chirp-Versuchs* gemessenen dargestellt. Wie man erkennt, weisen die analytisch berechneten Frequenzgänge keinerlei *Dämpfung* auf, dies ist jedoch auch nicht zu erwarten gewesen. Das Anfangs-Randwertproblem (2.81), welches zur Berechnung der Frequenzgänge verwendet wurde modelliert ja genau ein ideales, verlustloses *Transportphänomen*.

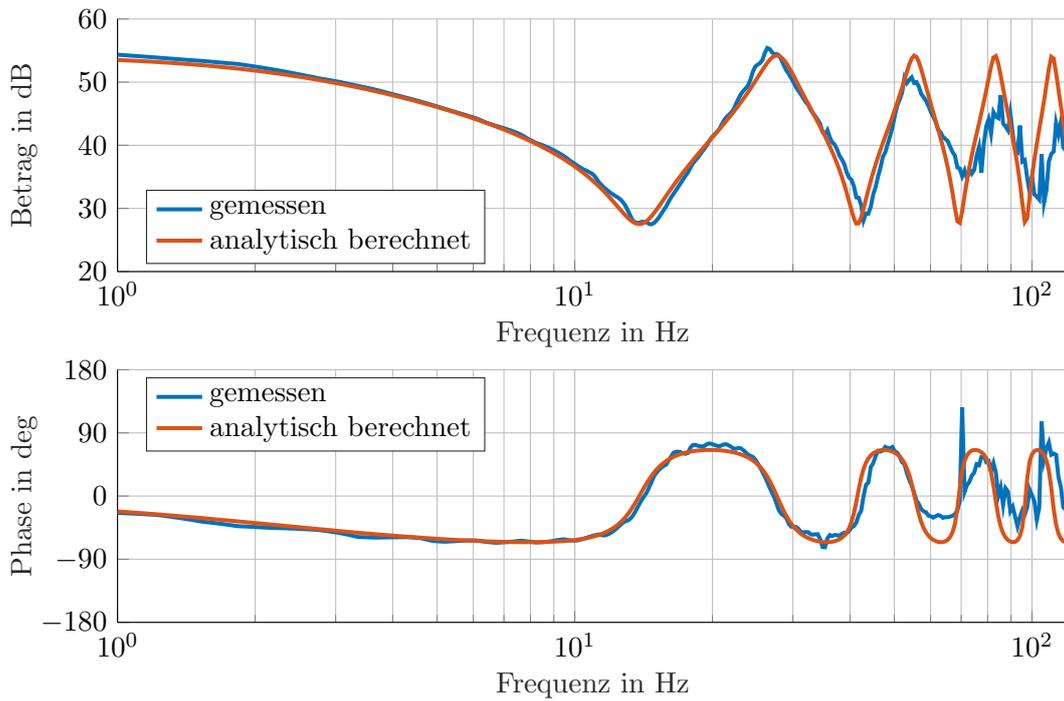


Abbildung 2.9: Vergleich zwischen analytisch berechnete und gemessene Frequenzgangs von $\Delta\alpha_1$ nach Δp_2

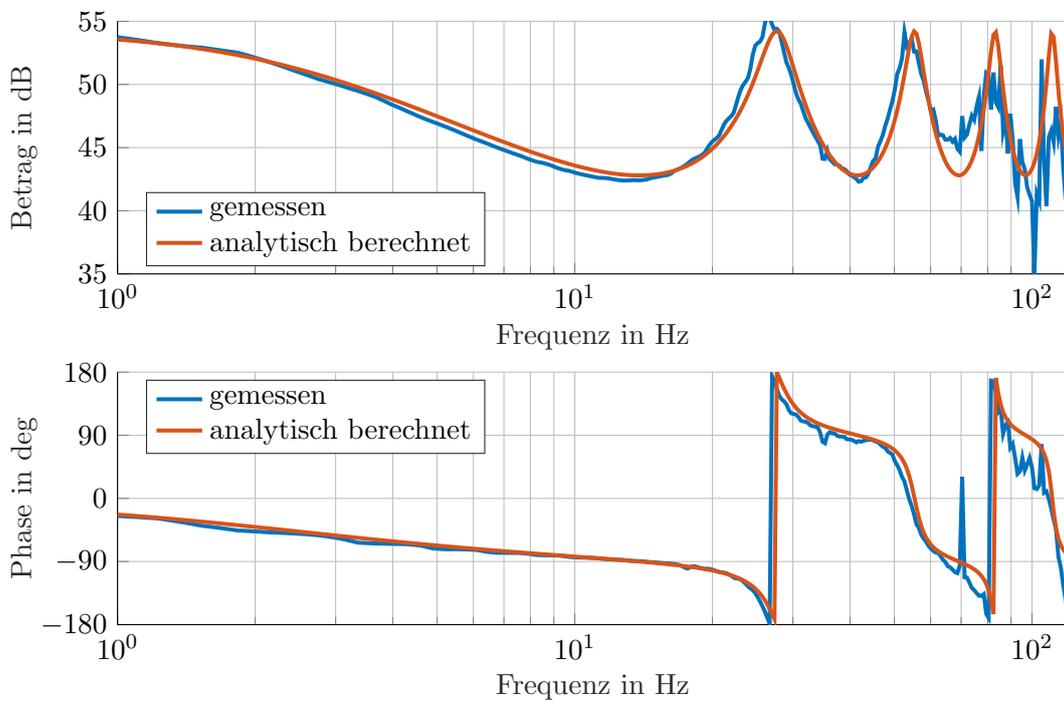


Abbildung 2.10: Vergleich zwischen analytisch berechnete und gemessene Frequenzgang von $\Delta\alpha_1$ nach Δp_3

Kapitel 3

Theoretische Grundlagen

Für verteilt parametrische Systeme (VPS) gibt es in der Literatur verschiedene, mathematische Darstellungsarten, vgl. [5], [7], [6]. Eine dieser wurde bereits im Kapitel 2 behandelt, die Darstellung mittels irrationaler Übertragungsfunktionen. In diesem Kapitel werden zwei, für den späteren Reglerentwurf wichtige Darstellungen, behandelt.

3.1 Anfangs-Randwertproblem

Der eigentliche Reglerentwurf wird anhand des linearisierten Streckenmodells des Testaufbaus durchgeführt. In Abbildung 3.1 ist der schematische Aufbau der zu regelnden Strecke dargestellt.

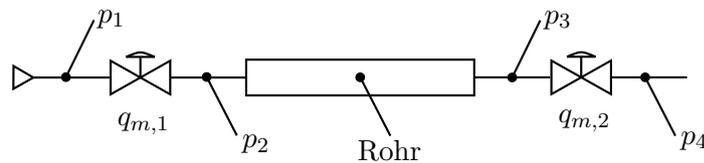


Abbildung 3.1: schematischer Aufbau der zu regelnden Strecke

Das mathematische Modell der Regelstrecke wurde im vorherigen Kapitel aufgestellt und lautet zusammengefasst wie folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta p(\xi, t) = -\frac{a_0^2}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta q_m(\xi, t) \quad 0 \leq \xi \leq L \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta q_m(\xi, t) = -A \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta p(\xi, t) \quad (3.1b)$$

$$\Delta q_m(0, t) = c_{1,p} \Delta p(0, t) + c_{1,a} \Delta \alpha_1(t) \quad (3.1c)$$

$$\Delta q_m(L, t) = c_{2,p} \Delta p(L, t) + c_{2,a} \Delta \alpha_2(t) \quad (3.1d)$$

$$\Delta p_2(t) = \Delta p(0, t) \quad (3.1e)$$

$$\Delta p_3(t) = \Delta p(L, t) \quad (3.1f)$$

$$\Delta p(\xi, 0) = 0, \quad \Delta q_m(\xi, 0) = 0. \quad (3.1g)$$

Um eine, in der Regelungstechnik übliche, Zustandsbeschreibung zu ermöglichen, werden die folgenden Zustände eingeführt

$$x_1(\xi, t) := \Delta p(\xi, t) \quad (3.2a)$$

$$x_2(\xi, t) := \Delta q_m(\xi, t). \quad (3.2b)$$

Außerdem werden die Eingangsgrößen $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \quad u_2(t)]^\top$

$$u_1(t) := \Delta \alpha_1(t) \quad (3.3a)$$

$$u_2(t) := \Delta \alpha_2(t) \quad (3.3b)$$

und die Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \quad y_2(t)]^\top$ definiert

$$y_1(t) := \Delta p_2(t) \quad (3.4a)$$

$$y_2(t) := \Delta p_3(t). \quad (3.4b)$$

Die Zustandsgleichungen lauten somit

$$\frac{\partial}{\partial t} x_1(\xi, t) = -\frac{a_0^2}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} x_2(\xi, t), \quad 0 \leq \xi \leq L \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} x_2(\xi, t) = -A \frac{\partial}{\partial \xi} x_1(\xi, t) \quad (3.5b)$$

$$x_2(0, t) - c_{1,p} x_1(0, t) = c_{1,a} u_1(t) \quad (3.5c)$$

$$x_2(L, t) - c_{2,p} x_1(L, t) = c_{2,a} u_2(t) \quad (3.5d)$$

$$y_1(t) = x_1(0, t) \quad (3.5e)$$

$$y_2(t) = x_1(L, t) \quad (3.5f)$$

$$x_1(\xi, t) = 0, \quad x_2(\xi, t) = 0. \quad (3.5g)$$

Es handelt sich hierbei um ein *hyperbolisches Anfangs-Randwertproblem* mit zwei abhängigen Variablen und inhomogenen *Dirichlet-Randbedingungen*. Die Zustandsvariablen (3.2) sind orts- und zeitabhängig. In der Literatur wird ein solches System häufig als verteilt parametrisches System (VPS) (bzw. in der englischen Literatur als distributed parameter system (DPS)) bezeichnet. Die Bezeichnung solcher Systeme als *unendlich-dimensionale Systeme* bzw. *infinite-dimensional Systems* ist ebenfalls üblich, vgl. [5], [6], [7].

3.2 Abstraktes Anfangswertproblem

3.2.1 Vorbetrachtungen

In Anlehnung an den endlich-dimensionalen Fall, lassen sich viele VPS als abstraktes Anfangswertproblem der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (3.6b)$$

darstellen, vgl. [6, Kapitel 1–5], [7, Kapitel 2], wobei $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ der Vektor der Eingangsgrößen und $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ der Vektor der Ausgangsgrößen ist. Die Zustandsvariablen $\mathbf{x}(t)$ sind hier als *abstrakte Funktionen* zu interpretieren

$$\mathbf{x}(\cdot, t) = \mathbf{x}(\xi, t), \quad \xi \in \Omega \quad (3.7)$$

wobei Ω als *Ortsbereich* bezeichnet wird, vgl. [7, S. 17]. Im Unterschied zu konzentriert parametrischen Systemen sind die Zustandsvariablen ortsabhängige Funktionen. Die Idee besteht nun darin das Anfangs-Randwertproblem mit Hilfe sogenannter *linearer Operatoren*, also linearen Abbildungen $\mathcal{S} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ mathematisch darzustellen, wobei \mathcal{X} und \mathcal{Y} *komplexe Hilberträume* sind. Ein linearer Operator erfüllt die Eigenschaft der *Homogenität* und *Additivität*

$$\mathcal{S}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 \mathcal{S}(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 \mathcal{S}(\mathbf{x}_2), \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}. \quad (3.8)$$

In der Literatur wird meist eine verkürzte Operatorschreibweise $\mathcal{S}\mathbf{x} = \mathcal{S}(\mathbf{x})$ verwendet.

In (3.6) haben die Matrizen \mathcal{A} , \mathcal{B} und \mathcal{C} lineare Operatoren als Elemente. Diese können auch *Differentialoperatoren* $\frac{d}{d\xi}$ sein. Im Unterschied zu konzentriert parametrischen Systemen ist der Zustandsraum nicht mehr \mathbb{R}^n , sondern ein *komplexer Hilbertraum* \mathcal{X} , d.h. $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}$. Auf dem Zustandsraum \mathcal{X} wird das *Skalarprodukt*

$$\langle \mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi) \rangle_{\mathcal{X}} = \int_0^L \mathbf{x}(\xi)^\top \overline{\mathbf{y}(\xi)} d\xi \quad (3.9)$$

eingeführt. Wobei mit $\overline{\mathbf{y}(\xi)}$ die konjugiert komplexe Funktion von $\mathbf{y}(\xi)$ gemeint ist. Ähnlich zum endlich-dimensionalen Fall wird der lineare Operator \mathcal{A} als *Systemoperator* bezeichnet

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}. \quad (3.10)$$

Die Randbedingungen des Anfangs-Randwertproblem (3.5) werden hierbei im Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ des Operators \mathcal{A} berücksichtigt. Der lineare, beschränkte Operator $\mathcal{B} : \mathbb{C}^p \mapsto \mathcal{X}$ wird als *Eingangoperator* bezeichnet

$$\mathcal{B}\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^p \mathbf{b}_i(\xi) u_i(t), \quad \mathbf{b}_i(\xi) \in \mathcal{X}, \quad (3.11)$$

mit den *Ortscharakteristiken* \mathbf{b}_i . Aus physikalischer Sicht macht es hier keinen Sinn den Eingangsraum aus den *komplexen Zahlen* zu wählen, dies hat allerdings mathematische Gründe, wie später noch gezeigt wird. Nach [6, Definition A.3.8, S. 583] gilt für beschränkte Operatoren die folgende Definition.

Definition 3.1 (Beschränkter Operator) Der lineare Operator $\mathcal{T} : D(\mathcal{T}) \subset \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ ist beschränkt, falls es eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt

$$\|\mathcal{T}\mathbf{x}\|_{\mathcal{Y}} \leq c \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}}, \quad \forall \mathbf{x} \in D(\mathcal{T}). \quad (3.12)$$

■

Es sei hier zu bemerken, dass Matrizen immer beschränkt sind, vgl. [7, S. 26]. Somit ist ein Eingangoperator \mathcal{B} der Form (3.11) immer beschränkt.

Der lineare, beschränkte Operator $\mathcal{C} : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{C}^m$ wird als *Ausgangoperator* bezeichnet

$$\mathcal{C}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{c}_1(\xi) \rangle_{\mathcal{X}} \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{c}_m(\xi) \rangle_{\mathcal{X}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_i(\xi) \in \mathcal{X} \quad (3.13)$$

mit den *Ortscharakteristiken* \mathbf{c}_i . Wie schon zuvor beim Eingangoperator wird aus mathematischen Gründen der Ausgangsraum aus den komplexen Zahlen gewählt. Der Operator \mathcal{C} ist

hierbei als Integraloperator zu interpretieren. Nach [6, S. 588] hat ein Integraloperator die folgende Form

$$(\mathcal{S}\mathbf{f})(t) = \int_a^b \mathbf{g}(\xi, t)\mathbf{f}(\xi)d\xi, \quad (3.14)$$

wobei die Funktion $\mathbf{g}(\xi, t)$ als *Kern* bezeichnet wird. Man erkennt, dass sich der Operator \mathcal{C} mit dem Skalarprodukt (3.9) als Integraloperator darstellen lässt. Eine wichtige Eigenschaft von Integraloperatoren ist, dass diese beschränkt sind, vgl. [6, Theorem A.3.24, S. 588], [7, S. 265].

Wie oben erwähnt, wird der Systemoperator $\mathcal{A}\mathbf{x}(t)$, mit dem Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ auf dem Zustandsraum \mathcal{X} eingeführt. Die Randbedingungen des Anfangs-Randwertproblems werden im Definitionsbereich von \mathcal{A} berücksichtigt, d.h. $\mathbf{x}(t) \in D(\mathcal{A})$. Die Randbedingungen müssen jedoch homogen sein, vgl. [7, S. 14]. Somit stellt sich sofort ein Problem, da es sich im vorliegenden Anwendungsfall (3.5) um ein VPS mit Randeingriff handelt, sind die Randbedingungen inhomogen. In [6, S. 121–128] und [7, S. 57–65] wird eine allgemeine Vorgehensweise beschrieben, mit deren Hilfe sich auch VPS mit Randeingriff in die Form (3.6) bringen lassen. Die Idee besteht im wesentlichen darin, durch eine geeignete Wahl von neuen Zustandsgrößen die Randbedingungen zu homogenisieren. Das Ergebnis ist dann ein um die Anzahl der Eingänge erweiterter Zustandsraum \mathcal{X}^e , mit neuen Eingängen $\bar{\mathbf{u}}(t)$.

Ein weiteres Problem sind die punktförmigen Messungen (3.5e) und (3.5f). Diese würden dem folgenden Ausgangsoperator entsprechen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x_1(0, t) \\ x_1(L, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{c}_1 \rangle_{\mathcal{X}} \\ \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{c}_2 \rangle_{\mathcal{X}} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

mit den Ortscharakteristiken

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} \delta_L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

wobei $\delta_{\xi_0} = \delta(\xi - \xi_0)$ die Delta-Distribution ist. Diese ist aber nicht Teil des Hilbertraums \mathcal{X} , vgl. [7, S. 18 f.].

Im Rahmen dieser Arbeit wird sowohl der punktförmige Eingriff, als auch die punktförmige Messung (wie in [6, S. 142 f.] vorgeschlagen) durch einen *verteilten Eingriff* bzw. durch eine *verteilte Messung* der folgenden Form

$$b(\xi) = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{1}_{[\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon]}(\xi), \quad \varepsilon > 0 \quad (3.17a)$$

$$c(\xi) = \frac{1}{2\nu} \mathbf{1}_{[\xi_1 - \nu, \xi_1 + \nu]}(\xi), \quad \nu > 0, \quad (3.17b)$$

approximiert. Der Rechteckpuls $\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(\xi)$ ist hierbei wie folgt definiert

$$\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(\xi) = \begin{cases} 1 & \alpha \leq \xi \leq \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.18)$$

Damit lässt sich natürlich nur eine Approximation des Systems (3.5) erreichen.

Eine große Klasse von VPS lässt sich mit Hilfe sogenannter *Riesz-Spektralsysteme* beschreiben, diese ermöglichen eine Analyse und Synthese anhand der *Eigenwerte* und *Eigenfunktionen* ihres Systemoperators, auch wenn diese keine *orthonormale Basis* bilden. Nach [6, Definition 4.1.1, S. 141] ist ein Riesz-Spektralsystem wie folgt definiert.

Definition 3.2 (Riesz-Spektralsystem) Ein lineares System der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.19a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (3.19b)$$

wird *Riesz-Spektralssystem* genannt, wenn der Systemoperator $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subset \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ ein *Riesz-Spektraloperator* ist und die Operatoren \mathbf{B} und \mathbf{C} beschränkt sind. ■

Der Begriff des Riesz-Spektraloperators wurde erstmals in [6, Definition 2.3.4, S. 41] definiert, vgl. [7, S. 23].

Definition 3.3 (Riesz-Spektraloperator) Sei \mathbf{A} ein linearer *abgeschlossener Operator* im Hilbertraum \mathcal{X} , mit *einfachen Eigenwerten* λ_k und den dazugehörigen Eigenfunktionen ϕ_k , welche eine *Riesz-Basis* bilden. Wenn der Abschluss der Menge $\{\overline{\lambda_k}\}$ total unzusammenhängend ist, so ist \mathbf{A} ein Riesz-Spektraloperator. ■

Unter dem Abschluss \overline{M} einer Menge M versteht man die Vereinigung der Menge selbst und ihrem Rand: $\overline{M} = M \cup \partial M$. Mit *total unzusammenhängend* ist hier gemeint, dass es keine zwei Punkte aus $\{\overline{\lambda_k}\}$ gibt, sodass diese mit einer Linie verbunden werden können, welche vollständig in $\{\overline{\lambda_k}\}$ liegt. Es werden neben isolierten Eigenwerten auch endlich viele *Häufungspunkte* der Eigenwerte zugelassen, vgl. [6, S. 41], [7, S. 23].

Spricht man von Eigenwerten, bzw. Eigenfunktionen von Operatoren, so meint man die *nicht-trivialen Lösungen* des folgenden Eigenwertproblems

$$\mathbf{A}\phi_k = \lambda_k\phi_k, \quad (3.20)$$

mit den Eigenwerten λ_k und den dazugehörigen Eigenfunktionen $\phi_k = \phi_k(\xi)$.

Bei VPS sind die Eigenwerte Elemente aus dem sogenannten *Punktspektrums* $\lambda_k \in \sigma_p(\mathbf{A})$. Das Spektrum $\sigma(\mathbf{A})$ eines linearen Operators setzt sich aus allen Punkten zusammen für die der Operator $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ nicht beschränkt oder nicht invertierbar ist, wobei \mathbf{I} der Identitätsoperator ist. Allgemein setzt sich das Spektrum eines linearen Operators wie folgt zusammen

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sigma_p(\mathbf{A}) \cup \sigma_k(\mathbf{A}) \cup \sigma_r(\mathbf{A}), \quad (3.21)$$

mit dem *Punktspektrum* $\sigma_p(\mathbf{A})$, dem *kontinuierlichen Spektrum* $\sigma_k(\mathbf{A})$ und dem *Restspektrum* $\sigma_r(\mathbf{A})$, vgl. [6, S. 610], [7, S. 21]. Bei VPS kann es vorkommen, dass es kontinuierlich verteilte Punkte im Spektrum von \mathbf{A} gibt. Für konzentriert parametrische Systeme ist die Menge des kontinuierlichen Spektrums und des Restspektrums leer, d.h. die Menge der Punkte aus dem Spektrum ist gleich den Eigenwerten.

Für die Definition des *Riesz-Spektraloperators* ist es notwendig die *Riesz-Basis* zu definieren. Diese ist nach [6, Definition 2.3.1, S. 38], [7, S. 24] wie folgt definiert.

Definition 3.4 (Riesz-Basis) Eine Folge von Vektoren ϕ_k im Hilbertraum \mathcal{X} bildet eine *Riesz-Basis*, falls $\text{span}\{\phi_k\} = \mathcal{X}$ gilt und es positive Konstanten m_1 und m_2 gibt, sodass die folgende Ungleichung für beliebige Skalare α_k gilt

$$m_1 \sum_{k=-N}^N |\alpha_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=-N}^N \alpha_k \phi_k \right\|^2 \leq m_2 \sum_{k=-N}^N |\alpha_k|^2, \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad (3.22)$$

■

In der obigen Definition bedeutet $\overline{\text{span}\{\phi_k\}} = \mathcal{X}$, dass jedes \mathbf{x} aus \mathcal{X} beliebig genau durch eine Linearkombination der Folge ϕ_k approximiert werden kann.

Es sei hier zu bemerken, dass jede *orthonormale Basis* eine Riesz-Basis ist, wie man leicht am folgenden Beispiel erkennen kann. Falls ϕ_k orthonormal ist gilt

$$\left\| \sum_{k=-N}^N \alpha_k \phi_k \right\|^2 = \sum_{k=-N}^N |\alpha_k|^2 \underbrace{\|\phi_k\|^2}_1, \quad (3.23)$$

womit die Definition 3.4 für $m_1 \leq m_2$ erfüllt ist.

Bilden die Eigenfunktionen ϕ_k des linearen Operators \mathcal{A} , mit den dazugehörigen Eigenwerten λ_k eine Riesz-Basis in \mathcal{X} , so können die Eigenfunktionen ψ_k des *adjungierten Operators* \mathcal{A}^* , mit den dazugehörigen Eigenwerten μ_k derart skaliert werden, dass folgender Zusammenhang gilt

$$\langle \phi_n, \psi_m \rangle_{\mathcal{X}} = \delta_{mn}. \quad (3.24)$$

Dieser Zusammenhang wird als *Biorthonormalitätsrelation* bezeichnet, vgl. [6, Lemma 2.3.2, S. 38], [7, S. 24].

Nach [6, Definition A.3.57, S. 601] ist der adjungierte Operator \mathcal{S}^* zu \mathcal{S} wie folgt definiert.

Definition 3.5 (Adjungierter Operator) Sei $\mathcal{S} : D(\mathcal{S}) \subset \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ ein Operator, dann existiert ein eindeutiger Operator $\mathcal{S}^* : D(\mathcal{S}^*) \subset \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{X}$, sodass gilt

$$\langle \mathcal{S}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{X}} = \langle \mathbf{x}, \mathcal{S}^*\mathbf{y} \rangle_{\mathcal{Y}}. \quad (3.25)$$

Der Operator \mathcal{S}^* wird *adjungierter Operator* zu \mathcal{S} genannt ■

Der Definitionsbereich des Operators $D(\mathcal{S})$ muss die homogenen Randbedingungen des Anfangsrandwertproblems berücksichtigen. Das gleiche gilt für den Definitionsbereich des adjungierten Operators $D(\mathcal{S}^*)$, dieser berücksichtigt die sogenannten *adjungierten Randbedingungen*. Als Beispiel sei hier auf die Berechnung des adjungierten Operators des vorliegenden Systems in Anhang A.3 verwiesen. Im linearen, konzentrierten Fall ist der *adjungierte Systemoperator* lediglich die transponiert, konjugiert komplexe Matrix von \mathbf{A} .

Eine in manchen Fällen einfacher nachzuweisende Definition einer Riesz-Basis, nach [6, Exercise 2.21, S.89] lautet wie folgt.

Definition 3.6 (Riesz-Basis (Alternative)) Sei \mathbf{e}_k eine orthonormale Basis in \mathcal{X} , also selbst eine *Riesz-Basis*, so ist ϕ_k eine Riesz-Basis, falls es einen beschränkten, invertierbaren Operator \mathcal{S} gibt, sodass

$$\phi_k = \mathcal{S}\mathbf{e}_k \quad (3.26)$$

gilt. ■

Weiters gilt für den Operator \mathcal{S} die folgende Beziehung

$$\mathcal{S}^*\psi_k = \mathbf{e}_k, \quad (3.27)$$

wobei ψ_k die *biorthogonale* Folge zu ϕ_k ist.

Die obige Definition ist vergleichbar mit der Diagonalisierbarkeit der Systemmatrix \mathbf{A} im linearen, konzentriert parametrischen Fall, mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. Eine hinreichende Bedingung ist, dass die $n \times n$ Matrix \mathbf{A} n verschiedene Eigenwerte aufweist. Die reguläre Transformationsmatrix \mathbf{T} hat dann die Rechtseigenvektoren von \mathbf{A} als Spalten. Die Eigenvektoren der Diagonalmatrix \mathbf{D} sind dann die Einheitsvektoren in \mathbb{R}^n .

Riesz-Spektraloperatoren weisen einige interessante Eigenschaften auf, welche sich besonders bei der Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des abstrakten Anfangswertproblems (3.6) als hilfreich herausstellen. Weiters lassen sich Fragen nach *Beobachtbarkeit* und *Steuerbarkeit* relativ einfach beantworten.

Ist der Systemoperator \mathcal{A} ein Riesz-Spektraloperator mit den Eigenwerten λ_k und den dazugehörigen Eigenfunktionen ϕ_k , so gilt die *spektrale Darstellung*

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k \langle \mathbf{x}, \psi_k \rangle_{\mathcal{X}} \phi_k, \quad (3.28)$$

mit den Eigenfunktionen ψ_k von \mathcal{A}^* , vgl. [6, Theorem 2.3.5, S. 41 f.].

Im folgenden werden die Begriffe *stark stetige Halbgruppe* und *infinitesimaler Generator* kurz betrachtet. Geht man zunächst vom linearen, konzentriert parametrischen Fall aus. Mit der *Zustandsdifferentialgleichung*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.29)$$

so lautet die bekannte Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau))\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (3.30)$$

bzw. für ein autonomes System $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0. \quad (3.31)$$

Die Matrix $\exp(\mathbf{A}t) = \Phi(t) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^n$, welche den Zustandsübergang von einem beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 beschreibt, wird auch *Transitionsmatrix* genannt. Es stellt sich die Frage wie man dieses Konzept auf den unendlich dimensionalen Fall erweitern kann. Definiert man ähnlich wie im linearen konzentriert parametrischen Fall einen linearen, beschränkten Operator $(\mathcal{T}\mathbf{x})(t) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathcal{X}$, so kann man die Lösung des *autonomen abstrakten Anfangswertproblems* $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{A}\mathbf{x}(t)$ wie folgt anschreiben

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{T}(t)\mathbf{x}_0. \quad (3.32)$$

Die Lösung, bzw. *Trajektorie* $\mathbf{x}(t)$ muss die *Wohlgestelltheitsbedingungen nach Hadamard* erfüllen, vgl. [6, S. 15]. Diese stellt zwei Bedingungen an die Lösung : Sie muss eindeutig sein und kontinuierlich vom Anfangszustand \mathbf{x}_0 abhängen. Betrachtet man nun die folgenden zwei Fälle

$$\mathbf{x}(0) = \mathcal{T}(0)\mathbf{x}_0 \quad (3.33)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+\tau) &= \mathcal{T}(t+\tau)\mathbf{x}(0), \quad t, \tau \in \mathbb{R}^+ \\ &= \mathcal{T}(t)\mathcal{T}(\tau)\mathbf{x}(0) \\ &= \mathcal{T}(t)\mathbf{x}(\tau). \end{aligned} \quad (3.34)$$

so ergeben sich ganz natürlich wesentliche Eigenschaften an den *Transitionoperator* $\mathcal{T}(t)$. Dieses Konzept lässt sich unter dem Begriff der *stark stetigen Halbgruppe* (C_0 -Halbgruppe) zusammenfassen, welche nach [6, Definition 2.1.2, S. 15] wie folgt definiert ist.

Definition 3.7 (Stark stetige Halbgruppe (C_0 -Halbgruppe)) Eine C_0 -Halbgruppe $(\mathcal{T}\mathbf{x})(t) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathcal{X}$ ist eine operatorwertige Funktion, mit den folgenden Eigenschaften

$$\mathcal{T}(0) = \mathcal{I} \quad (3.35)$$

$$\mathcal{T}(t + \tau) = \mathcal{T}(t)\mathcal{T}(\tau) \quad (3.36)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(\mathcal{T}\mathbf{x}_0)(t) - \mathbf{x}_0\| = 0, \quad (3.37)$$

wobei \mathcal{I} der *Identitätsoperator* ist. ■

Die erste Bedingung in obiger Definition folgt aus dem Beispiel (3.33), die Bedingung (3.36) stellt die *Zeitinvarianz* sicher und (3.37) stellt die *starke Stetigkeit* des Operators $\mathcal{T}(t)$ bezüglich eines Anfangszustandes \mathbf{x}_0 sicher. Bis auf die letzte Bedingung sind die Eigenschaften der *Transitionsmatrix* $\Phi(t)$ im lineare, konzentriert parametrischen Fall gleich. Da $\exp(\mathbf{A}t)$ unabhängig vom Anfangszustand stetig ist muss dies nicht extra berücksichtigt werden.

Mit Hilfe des *Transitionsoperators* kann nun die Lösung des abstrakten Anfangswertproblems (3.6) angeschrieben werden

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t - \tau)\mathcal{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (3.38a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{C}\mathbf{x}(t), \quad (3.38b)$$

wobei $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)$ die, zu (3.6) gehörige C_0 -Halbgruppe ist, vgl. [6, S. 141]. Betrachtet man (3.6) und geht von einer sprungförmigen Anregung $\mathbf{u}(t)$ aus, so ist $\mathbf{x}(t)$ nicht mehr stetig differenzierbar, allerdings ist (3.38) immer noch eine Lösung, welche als *milde Lösung* bezeichnet wird, vgl. [7, S. 38]. Die milde Lösung (3.38) des abstrakten Anfangswertproblems (3.6) ist gleich der *schwachen Lösung* des dazugehörigen Anfangs-Randwertproblems (3.1), vgl. [7, S. 15].

Der Zusammenhang zwischen der C_0 -Halbgruppe und den Zustandsgleichungen, führt auf den Begriff des *infinitesimalen Generators* einer C_0 -Halbgruppe, welcher nach [6, Definition 2.18, S.20] wie folgt definiert ist.

Definition 3.8 Der *infinitesimale Generator* \mathcal{A} der C_0 -Halbgruppe $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)$ im Hilbertraum \mathcal{X} ist wie folgt definiert

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t) - \mathcal{I}}{t} \mathbf{x}(t) \quad (3.39a)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(0)}{t} \mathbf{x}(t). \quad (3.39b)$$

■

Der Riesz-Spektraloperator \mathcal{A} ist der infinitesimale Generator der C_0 -Halbgruppe $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)$ falls dessen Eigenwerte λ_k die folgende Bedingung erfüllen, vgl. [6, Theorem 2.3.5, S. 41 f.]

$$\sup_k \operatorname{Re}(\lambda_k) < \infty. \quad (3.40)$$

Die zu \mathcal{A} gehörige C_0 -Halbgruppe lautet dann

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)\mathbf{x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle \mathbf{x}, \psi_k \rangle_{\mathcal{X}} \phi_k, \quad D(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)) = \mathcal{X}. \quad (3.41)$$

Wie oben beschrieben ist im linearen, konzentrierten Fall die Transitionsmatrix $\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ die C_0 -Halbgruppe. Ihr dazugehöriger infinitesimaler Generator kann mit Hilfe der obigen Definition einfach berechnet werden, es handelt sich um den *Differentialquotient*. Demnach ist im konzentriert parametrischen Fall der infinitesimaler Generator von $\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ einfach dessen Ableitung nach t , für $t \rightarrow 0$, also die *Systemmatrix* \mathbf{A} .

Bilden die Eigenfunktionen ϕ_k eine orthonormale Basis im Zustandsraum \mathcal{X} , so ist eine eindeutige Reihenentwicklung der Zustände möglich. Bei vielen Systemen bilden die Eigenfunktionen des Systemoperators \mathbf{A} jedoch keine orthonormale Basis im Zustandsraum, handelt es sich aber um ein *Riesz-Spektralsystem*, so ist trotzdem eine eindeutige Reihenentwicklung möglich, vgl. Definition 3.6.

Da die Eigenfunktionen ϕ_k eine Riesz-Basis bilden, können die Zustände $\mathbf{x}(t)$ durch die folgende Reihenentwicklung eindeutig dargestellt werden, vgl. [6, Corollary 2.3.3, S.40], [7, S. 34–40]

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^*(t) \phi_k, \quad (3.42)$$

mit den sogenannten *modalen Zuständen* $x_k^*(t)$

$$x_k^*(t) = \langle \mathbf{x}, \psi_k \rangle_{\mathcal{X}}. \quad (3.43)$$

Die Eingangs-Ortscharakteristiken \mathbf{b}_i können ebenfalls auf die gleiche Weise dargestellt werden

$$\mathbf{b}_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{i,k}^* \phi_k, \quad (3.44)$$

mit den Koeffizienten $b_{i,k}^*$

$$b_{i,k}^* = \langle \mathbf{b}_i, \psi_k \rangle_{\mathcal{X}}. \quad (3.45)$$

Durch Einsetzen von (3.44) in (3.11) erhält man

$$\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{i,k}^* \phi_k u_i(t) \quad (3.46)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k \mathbf{b}_k^{*\top} \mathbf{u}(t), \quad (3.47)$$

mit

$$\mathbf{b}_k^{*\top} = [b_{1,k}^* \quad \cdots \quad b_{p,k}^*]. \quad (3.48)$$

Setzt man (3.42) in (3.6a) ein, so ergibt sich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{x}_k^*(t) \phi_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^*(t) \mathbf{A} \phi_k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k \mathbf{b}_k^{*\top} \mathbf{u}(t) \quad (3.49)$$

Mit der Eigenwertgleichung (3.20) und einem Koeffizientenvergleich erhält man somit

$$\dot{x}_k^*(t) = \lambda_k x_k^*(t) + \mathbf{b}_k^{*\top} \mathbf{u}(t) \quad (3.50a)$$

$$x_k^*(0) = \langle \mathbf{x}(0), \psi_k \rangle. \quad (3.50b)$$

Die Ausgangsgleichung (3.6b) kann mit (3.42) wie folgt dargestellt werden

$$\mathbf{y}^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^*(t) \mathbf{C} \phi_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_k^* x_k^*(t), \quad (3.51)$$

mit

$$\mathbf{c}_k^* = \begin{bmatrix} \langle \phi_k, \mathbf{c}_1 \rangle_{\mathcal{X}} \\ \vdots \\ \langle \phi_k, \mathbf{c}_m \rangle_{\mathcal{X}} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Durch Reihenabbruch ergibt sich das endlichdimensionale Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}(t) \quad (3.53a)$$

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{x}^*(t), \quad (3.53b)$$

mit der *modalen Systemmatrix* $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{-n} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

der *modalen Eingangsmatrix* \mathbf{B}^*

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{-n}^{*\top} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^{*\top} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_1, \psi_{-n} \rangle_{\mathcal{X}} & \cdots & \langle \mathbf{b}_p, \psi_{-n} \rangle_{\mathcal{X}} \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{b}_1, \psi_n \rangle_{\mathcal{X}} & \cdots & \langle \mathbf{b}_p, \psi_n \rangle_{\mathcal{X}} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

und der *modalen Ausgangsmatrix* \mathbf{C}^*

$$\mathbf{C}^* = [\mathbf{c}_{-n}^* \quad \cdots \quad \mathbf{c}_n^*] = \begin{bmatrix} \langle \phi_{-n}, \mathbf{c}_1 \rangle_{\mathcal{X}} & \cdots & \langle \phi_n, \mathbf{c}_1 \rangle_{\mathcal{X}} \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{-n}, \mathbf{c}_m \rangle_{\mathcal{X}} & \cdots & \langle \phi_n, \mathbf{c}_m \rangle_{\mathcal{X}} \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

Die oben beschriebene Approximation wird auch *modale Approximation* n -ter Ordnung bezeichnet und kann als Ausgangspunkt für einen *Early-Lumping*-Ansatz verwendet werden, siehe Kapitel 4.

Wie schon in Kapitel 2 erwähnt, kann es sinnvoll sein die Übertragungsfunktion des Systems zu berechnen. Selbstverständlich kann die Übertragungsfunktion anhand des Anfangs-Randwertproblems (3.5) analytisch berechnet werden, wie schon in Kapitel 2 gezeigt. Allerdings kann die Übertragungsfunktion auch anhand der *spektralen Darstellung* eines Riesz-Spektralsystems dargestellt werden. Nach dem Hilfssatz aus [6, Lemma 4.3.10, S. 183] lautet die Übertragungsfunktion eines Riesz-Spektralsystems wie folgt.

Satz 3.1 (Übertragungsfunktion) Sei \mathcal{A} ein Riesz-Spektraloperator, \mathcal{B} und \mathcal{C} linear und beschränkt. So lautet die Übertragungsmatrix des Riesz-Spektralsystems wie folgt

$$\mathbf{G}(s) = \mathcal{C} (s\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} \quad (3.57a)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{C} \phi_k \overline{(\mathcal{B}^* \psi_k)^\top}}{s - \lambda_k} \quad (3.57b)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{c}_k^* \mathbf{b}_k^{*\top}}{s - \lambda_k}. \quad (3.57c)$$

■

Die Darstellung (3.57c) stimmt mit dem modalen Zustandsraummodell überein

3.2.2 Anwendung auf das vorliegende System

Das approximierte System, mit verteiltem Eingriff und verteilter Messung lautet wie folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} x_1(\xi, t) = -\frac{a_0^2}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} x_2(\xi, t) \quad 0 \leq \xi \leq L \quad (3.58a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} x_2(\xi, t) = -A \frac{\partial}{\partial \xi} x_1(\xi, t) + b_1(\xi)u_1(t) + b_2(\xi)u_2(t) \quad (3.58b)$$

$$x_2(0, t) - c_{1,p}x_1(0, t) = 0 \quad (3.58c)$$

$$x_2(L, t) - c_{2,p}x_1(L, t) = 0 \quad (3.58d)$$

$$y_1(t) = \int_0^L c_1(\xi)x_1(\xi, t)d\xi \quad (3.58e)$$

$$y_2(t) = \int_0^L c_2(\xi)x_1(\xi, t)d\xi \quad (3.58f)$$

$$x_1(\xi, t) = 0, \quad x_2(\xi, t) = 0. \quad (3.58g)$$

Hierbei sind die Randbedingungen homogenisiert worden und die punktförmigen Eingriffe aus (3.5c) und (3.5d) werden ähnlich wie in (3.17) mit den folgenden Eingangs-Ortscharakteristiken

$$b_1(\xi) = -\frac{Ac_{1,a}}{c_{1,p}} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}(\xi) \quad (3.59a)$$

$$b_2(\xi) = \frac{Ac_{2,a}}{c_{2,p}} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{1}_{[L-\varepsilon,L]}(\xi), \quad (3.59b)$$

approximiert. Auf die gleiche Weise werden die punktförmigen Messungen aus (3.5e) und (3.5f) mittels der Ausgangs-Ortscharakteristiken

$$c_1(\xi) = \frac{1}{2\nu} \mathbf{1}_{[\xi_{y_1}-\nu, \xi_{y_1}+\nu]}(\xi) \quad (3.60a)$$

$$c_2(\xi) = \frac{1}{2\nu} \mathbf{1}_{[\xi_{y_2}-\nu, \xi_{y_2}+\nu]}(\xi), \quad (3.60b)$$

approximiert. Das Anfangsrandwertproblem (3.58) lässt sich als abstraktes Anfangswertproblem der folgenden Form darstellen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.61a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (3.61b)$$

Als Zustandsraum \mathcal{X} wird die *direkte Summe* der Vektorräume \mathcal{X}_1 und \mathcal{X}_2

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathbf{L}_2(0, L) \oplus \mathbf{L}_2(0, L) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2 \right\} \quad (3.62)$$

gewählt. Diese sind jeweils der Funktionsraum $\mathbf{L}_2(0, L)$, d.h. der im Intervall $[0, L]$ quadratisch integrierbaren Funktionen. Weiters wird das *Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$ in \mathcal{X} wie folgt definiert

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}} = \int_0^L \left(x_1(\xi)\overline{y_1(\xi)} + x_2(\xi)\overline{y_2(\xi)} \right) d\xi. \quad (3.63)$$

Zu bemerken ist hierbei, dass es durchaus auch andere Möglichkeiten gibt den Zustandsraum und das Skalarprodukt zu wählen. Wichtig ist bei der Wahl des Zustandsraums, dass mit den

Zuständen die Gesamtenergie des Systems beschrieben werden kann, vgl. [7, S. 32]. Dies führt auf den Begriff des *Energieraumes*, in dem durch das eingeführte Skalarprodukt die induzierte Norm $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{X}}$ proportional zu Energie ist.

Aus (3.58a) und (3.58b) lässt sich der Systemoperator \mathcal{A} einfach ablesen

$$\mathcal{A}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_0^2}{A} \frac{d}{d\xi} \\ -A \frac{d}{d\xi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Neben der Vorschrift zur Abbildung, also den Operator \mathcal{A} selbst muss noch der dazugehörige Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ definiert werden. Die Zustandsgrößen $\mathbf{x}(t)$ müssen Elemente des Zustandsraums \mathcal{X} sein. Falls \mathbf{x} *absolut stetig* ist, so ist sicher gestellt das gilt

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{x}(0) + \int_0^\xi \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} d\zeta \quad (3.65)$$

und es existiert die *schwache Ableitung* von \mathbf{x} . Stellt man sich zum Beispiel einen Integrator vor der mit einer Sprungfunktion angeregt wird, so ist die Ausgangsfunktion *absolut stetig* und die Sprungfunktion deren *schwache Ableitung*. Die *klassische Ableitung* würde in diesem Fall nicht existieren. Aus der absoluten Stetigkeit von \mathbf{x} folgt die Existenz der schwachen Ableitung $\frac{d\mathbf{x}}{d\xi}$. Da der Operator \mathcal{A} vom Zustandsraum \mathcal{X} nach \mathcal{X} abbildet muss die Ableitung der Zustandsgrößen ebenfalls in diesem Zustandsraum sein, somit ist sichergestellt, dass gilt $\mathcal{A}\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Wie bereits oben erwähnt muss der Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ die homogenen Randbedingungen (3.58c) und (3.58d) des Anfangs-Randwertproblems berücksichtigen. Zusammengefasst ergibt sich der folgende Definitionsbereich

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid x_1, x_2 \text{ absolut stetig, } \frac{dx_1}{d\xi}, \frac{dx_2}{d\xi} \in \mathbf{L}_2(0, L) \right. \\ \left. \text{und } x_2(0) - c_{1,p}x_1(0) = 0, x_2(L) - c_{2,p}x_1(L) = 0 \right\}. \quad (3.66)$$

Aus Gleichung (3.58b) ergibt sich der folgende Eingangsoperator \mathcal{B}

$$\mathcal{B}\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u_2(t), \quad (3.67)$$

mit den Ortscharakteristiken b_1 und b_2 nach (3.59). Nun müssen noch die Ausgangsgleichungen (3.58e) und (3.58f) im vorher definierten Zustandsraum \mathcal{X} angeschrieben werden, was jedoch im vorliegenden Fall einfach möglich ist. Somit lautet der Ausgangsoperator \mathcal{C}

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \langle x_1(t), \overline{c_1(\xi)} \rangle_{\mathbf{L}_2} \\ \langle x_1(t), \overline{c_2(\xi)} \rangle_{\mathbf{L}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_1(t), \overline{c_1(\xi)} \rangle_{\mathbf{L}_2} + \langle x_2(t), 0 \rangle_{\mathbf{L}_2} \\ \langle x_1(t), \overline{c_2(\xi)} \rangle_{\mathbf{L}_2} + \langle x_2(t), 0 \rangle_{\mathbf{L}_2} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}(t), \begin{bmatrix} \overline{c_1(\xi)} \\ 0 \end{bmatrix} \rangle_{\mathcal{X}} \\ \langle \mathbf{x}(t), \begin{bmatrix} \overline{c_2(\xi)} \\ 0 \end{bmatrix} \rangle_{\mathcal{X}} \end{bmatrix} = \mathcal{C}\mathbf{x}(t), \quad (3.69)$$

mit den Ausgangs-Ortscharakteristiken c_1 und c_2 nach (3.60).

Wie oben erwähnt werden *Riesz-Spektralsysteme* anhand ihrer *Eigenwerte* und *Eigenfunktionen* analysiert. Hierzu wird das folgende *Eigenwertproblem* betrachtet

$$\mathcal{A}\phi_k = \lambda_k\phi_k. \quad (3.70)$$

Wobei λ_k die Eigenwerte des Systemoperators sind und ϕ_k die dazugehörigen Eigenfunktionen. Die *nichttriviale* Lösung des Eigenwertproblems (3.70), mit dem Operator \mathcal{A} (3.64) und dem dazugehörigem Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ (3.66) lautet (siehe Anhang A.1),

$$\lambda_k = \frac{a_0(jk\pi + \beta)}{L}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (3.71)$$

mit der reellen Konstante β

$$\beta = \ln \left(\frac{\sqrt{A + a_0c_{1,p}}\sqrt{A - a_0c_{2,p}}}{\sqrt{(A - a_0c_{1,p})(A + a_0c_{2,p})}} \right) \quad (3.72)$$

und den nicht normierten Eigenfunktionen ϕ_k

$$\phi_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{1,p}} \cosh\left(\frac{\lambda_k\xi}{a_0}\right) - \frac{a_0}{A} \sinh\left(\frac{\lambda_k\xi}{a_0}\right) \\ \cosh\left(\frac{\lambda_k\xi}{a_0}\right) - \frac{A}{a_0c_{1,p}} \sinh\left(\frac{\lambda_k\xi}{a_0}\right) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (3.73)$$

Man erkennt, dass es sich bei den Eigenwerten λ_k um die Polstellen aus (2.91) handelt. Wie man leicht überprüfen kann, sind die Eigenfunktionen ϕ_k im eingeführten Zustandsraum \mathcal{X} , mit dem Skalarprodukt (3.63) *nicht orthonormal*. Es ist also nicht sofort klar, ob es sich bei (3.73) um eine Riesz-Basis handelt. Unter Verwendung der Definition 3.6 kann jedoch gezeigt werden, dass es sich bei (3.73) um eine Riesz-Basis handelt (siehe Anhang A.2). Da die Eigenwerte (3.71) einfach sind und keine Häufungspunkte aufweisen und der Systemoperator abgeschlossen ist (siehe Anhang A.5), handelt es sich bei (3.64) um einen *Riesz-Spektraloperator*, nach Definition 3.3, vgl. [7, S. 27 f.]. Wie bereits oben erwähnt ist der Eingangoperator (3.11) und der Ausgangoperator (3.13) beschränkt, womit es sich bei dem oben beschriebenen System um ein *Riesz-Spektralsystem*, nach Definition 3.2 handelt.

Die Eigenfunktionen ϕ_k (3.73) müssen hierbei nicht extra normiert werden, da für den späteren Gebrauch lediglich die *Biorthonormalität* zwischen ϕ_k und ψ_k gelten muss. Somit wäre ohnehin nur die Normierung einer der beiden Folgen möglich.

Für die späteren Betrachtungen werden noch die Eigenfunktionen ψ_k und Eigenwerte μ_k des adjungierten Operators \mathcal{A}^* benötigt. Da bereits gezeigt wurde, dass \mathcal{A} ein *Riesz-Spektraloperator* ist kann die Berechnung von ψ_k und μ_k auch über die Eigenfunktionen ϕ_k und Eigenwerte λ_k erfolgen, siehe Gleichung (3.27). Diese lauten (siehe Anhang A.4)

$$\mu_k = \frac{a_0(-jk\pi + \beta)}{L}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (3.74)$$

mit der reellen Konstante β (3.72) und den Eigenfunktionen ψ_k

$$\psi_k = \begin{bmatrix} \frac{A^2c_{1,p}}{(A^2 - a_0^2c_{1,p}^2)L} \cosh\left(\frac{\mu_k\xi}{a_0}\right) - \frac{Aa_0c_{1,p}^2}{(A^2 - a_0^2c_{1,p}^2)L} \sinh\left(\frac{\mu_k\xi}{a_0}\right) \\ -\frac{a_0^2c_{1,p}^2}{(A^2 - a_0^2c_{1,p}^2)L} \cosh\left(\frac{\mu_k\xi}{a_0}\right) + \frac{Aa_0c_{1,p}}{(A^2 - a_0^2c_{1,p}^2)L} \sinh\left(\frac{\mu_k\xi}{a_0}\right) \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Für die bisherigen Betrachtungen wurde der *adjungierte Operator* \mathcal{A}^* zu \mathcal{A} nicht explizit benötigt, in Anhang A.3 wurde dieser jedoch trotzdem berechnet. Wie sich leicht feststellen lässt, gilt die *Biorthogonalitätsbeziehung*

$$\langle \phi_n, \psi_m \rangle_{\mathcal{X}} = \delta_{mn}. \quad (3.76)$$

Die Eigenwerte μ_k des adjungierten Operators entsprechen genau den konjugiert komplexen Eigenwerten λ_k

$$\mu_k = \bar{\lambda}_k. \quad (3.77)$$

Im folgenden wird die modale Approximation der Form

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}(t) \quad (3.78a)$$

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{x}^*(t), \quad (3.78b)$$

für das oben beschriebene System berechnet. Wendet man (3.55) auf die Eingang-Ortscharakteristiken b_i (3.59) des Systems an, erhält man mit ψ_k aus (3.75)

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_k^{*\top} &= [\langle \mathbf{b}_1, \psi_k \rangle_{\mathcal{X}} \quad \langle \mathbf{b}_2, \psi_k \rangle_{\mathcal{X}}] \\ &= \left[\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ b_1(\xi) \end{bmatrix}, \psi_k \right\rangle_{\mathcal{X}} \quad \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ b_2(\xi) \end{bmatrix}, \psi_k \right\rangle_{\mathcal{X}} \right], \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Nach kurzer Rechnung erhält man die folgenden *Entwicklungskoeffizienten* $\mathbf{b}_k^{*\top}$, der modalen Eingangsmatrix \mathbf{B}^* (3.55)

$$\mathbf{b}_k^{*\top} = \left[\begin{array}{c} \frac{Aa_0^2 c_{1,a} \left(A \left(1 - \cosh \left(\frac{\mu_k \varepsilon}{a_0} \right) \right) + a_0 c_{1,p} \sinh \left(\frac{\mu_k \varepsilon}{a_0} \right) \right)}{\mu_k L \varepsilon \left(A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2 \right)} \\ 2Aa_0^2 c_{1,p} c_{2,a} \sinh \left(\frac{\mu_k \varepsilon}{2a_0} \right) \left(A \sinh \left(\frac{\mu_k (2L - \varepsilon)}{2a_0} \right) - a_0 c_{1,p} \cosh \left(\frac{\mu_k (2L - \varepsilon)}{2a_0} \right) \right) \\ \frac{c_{2,p} \mu_k L \varepsilon \left(A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2 \right)}{c_{2,p} \mu_k L \varepsilon \left(A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2 \right)} \end{array} \right]^{\top}. \quad (3.80)$$

Die *Entwicklungskoeffizienten* \mathbf{c}_k^* der modalen Ausgangsmatrix \mathbf{C}^* (3.56) können mit ϕ_k aus (3.73) und den Ausgangs-Ortscharakteristiken c_i aus (3.60) auf die selbe Weise berechnet werden

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_k^* &= \begin{bmatrix} \langle \phi_k, \mathbf{c}_1 \rangle_{\mathcal{X}} \\ \langle \phi_k, \mathbf{c}_2 \rangle_{\mathcal{X}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left\langle \phi_k, \begin{bmatrix} c_1(\xi) \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}} \\ \left\langle \phi_k, \begin{bmatrix} c_2(\xi) \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Es ergeben sich die folgenden *Entwicklungskoeffizienten* \mathbf{c}_k^*

$$\mathbf{c}_k^* = \left[\begin{array}{c} \frac{a_0 \left(A \cosh \left(\frac{\xi_{y1} \lambda_k}{a_0} \right) - a_0 c_{1,p} \sinh \left(\frac{\xi_{y1} \lambda_k}{a_0} \right) \right) \sinh \left(\frac{\lambda_k \nu}{a_0} \right)}{A c_{1,p} \lambda_k \nu} \\ \frac{a_0 \left(A \cosh \left(\frac{\xi_{y2} \lambda_k}{a_0} \right) - a_0 c_{1,p} \sinh \left(\frac{\xi_{y2} \lambda_k}{a_0} \right) \right) \sinh \left(\frac{\lambda_k \nu}{a_0} \right)}{A c_{1,p} \lambda_k \nu} \end{array} \right]. \quad (3.82)$$

Mit den oben berechneten Koeffizienten $\mathbf{b}_k^{*\top}$ und \mathbf{c}_k^* und den Eigenwerten (3.71) kann nun die modale Approximation, der Ordnung n für das vorliegende System angeschrieben werden

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{-n}^*(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{-n} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{-n}^*(t) \\ \vdots \\ x_n^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{-n}^{*\top} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^{*\top} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.83a)$$

$$\begin{bmatrix} y_1^*(t) \\ y_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{-n}^* & \cdots & \mathbf{c}_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{-n}^*(t) \\ \vdots \\ x_n^*(t) \end{bmatrix}. \quad (3.83b)$$

Es handelt sich um ein *lineares, zeitinvariantes Zustandsraummodell*, der Ordnung $2n + 1$. Die Elemente der Systemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B}^* und \mathbf{C}^* sind allerdings komplexwertig. Wie bereits oben erwähnt, kann diese *modale Approximation* für einen *Early-Lumping* Entwurf verwendet werden, siehe Kapitel 4.

In Abbildung 3.2 ist der Vergleich zwischen der analytisch berechneten Übertragungsfunktion (2.89) und der modalen Approximation aus (3.57c), mit (3.80) und (3.82) dargestellt. Für die Approximation der Punkteingriffe und Punktmessungen wurden hierbei $\varepsilon = \frac{1}{1000}L$ und $\nu = \frac{1}{1000}L$ gewählt. Es werden jeweils nur zwei Frequenzgänge der Übertragungsmatrix exemplarisch herausgegriffen: Der Frequenzgang von $\Delta\alpha_1 = u_1$ nach $\Delta p_2 = y_1$ und der Frequenzgang von $\Delta\alpha_1 = u_1$ nach $\Delta p_3 = y_2$.

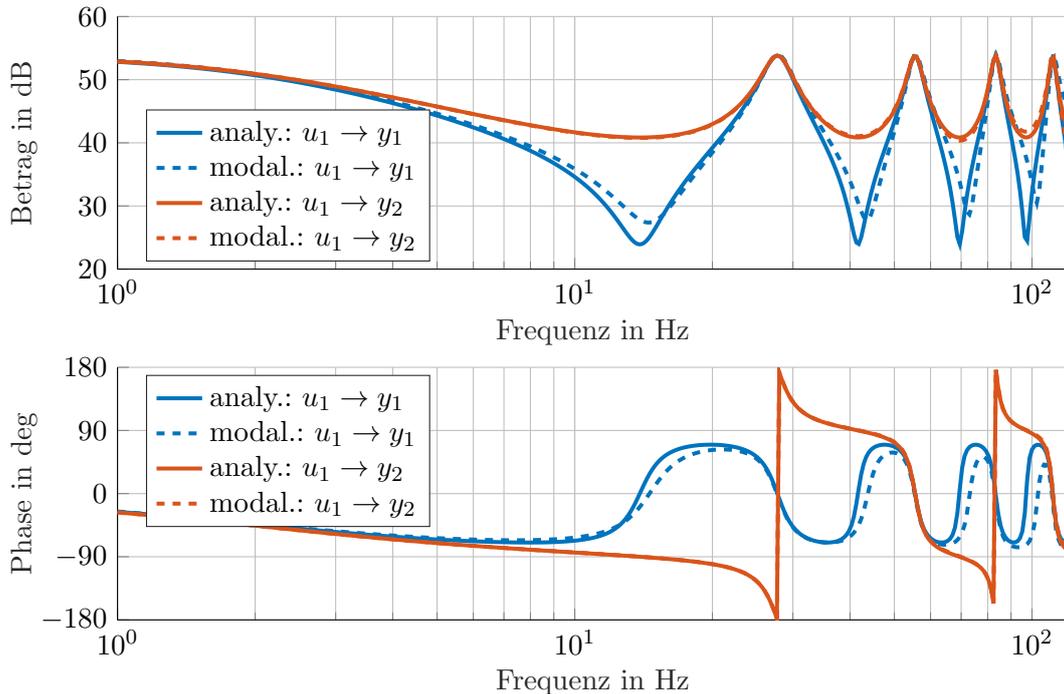


Abbildung 3.2: Vergleich zwischen analytisch berechneten und modal approximierten Frequenzgängen

Man erkennt, dass die Übereinstimmung zwischen dem analytisch berechneten Frequenzgang (2.89), mit *Randeingriff* und *Randmessung* für den Frequenzgang von $\Delta\alpha_1$ nach Δp_3 wesentlich besser ist als von $\Delta\alpha_1$ nach Δp_2 . Dies lässt sich dadurch erklären, dass aus der Sicht der *verteilt angenäherten Messung* y_2 der *verteilt approximierter Eingriff* u_1 annähernd punktförmig ist. Aus

der Sicht der *verteilt angenäherten Messung* y_1 aber eben nicht mehr.

Abschließend sein noch anzumerken, dass mit den Ortscharakteristiken b_i punktförmige Eingriffe und mit den Ortscharakteristiken c_i punktförmige Messungen approximiert werden. Diese Vorgehensweise hat allerdings hauptsächlich mathematische Gründe. Aus praktischer Sicht bietet sich eine vereinfachte Vorgehensweise an.

Führt man in (3.59) den Grenzübergang aus, d.h. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{b}_k^{*\top}$, so erhält man eine für den praktischen Gebrauch einfachere Beziehung für die Entwicklungskoeffizienten $\mathbf{b}_k^{*\top}$

$$\mathbf{b}_k^{*\top} = \left[-\frac{Ac_{1,a}}{c_{1,p}} \psi_{k,2}(0) \quad \frac{Ac_{2,a}}{c_{2,p}} \psi_{k,2}(L) \right]^\top, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (3.84)$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\mathbf{b}_k^{*\top} = \left[\frac{Aa_0^2 c_{1,a} c_{1,p}}{L (A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2)} \quad \frac{Aa_0 c_{1,p} c_{2,a} (-1)^k (A \sinh(\beta) - a_0 c_{1,p} \cosh(\beta))}{c_{2,p} L (A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2)} \right]^\top, \quad (3.85)$$

$$k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Wird die gleiche Vorgehensweise auf die Entwicklungskoeffizienten \mathbf{c}_k^* angewandt, d.h. $\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathbf{c}_k^*$, so erhält man

$$\mathbf{c}_k^* = \begin{bmatrix} \phi_{k,1}(\xi_{y_1}) \\ \phi_{k,1}(\xi_{y_2}) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (3.86)$$

mit (3.75)

$$\mathbf{c}_k^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{1,p}} \cosh\left(\frac{\lambda \xi_{y_1}}{a_0}\right) - \frac{a_0}{A} \sinh\left(\frac{\lambda \xi_{y_1}}{a_0}\right) \\ \frac{1}{c_{1,p}} \cosh\left(\frac{\lambda \xi_{y_2}}{a_0}\right) - \frac{a_0}{A} \sinh\left(\frac{\lambda \xi_{y_2}}{a_0}\right) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (3.87)$$

In Abbildung 3.3 ist der Vergleich zwischen den Frequenzgängen der modalen Approximation mit angenähertem Punkteingriff und angenäherter Punktmessung mit dem entsprechendem Grenzübergang ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{b}_k^{*\top}$, bzw. $\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathbf{c}_k^*$) dargestellt.

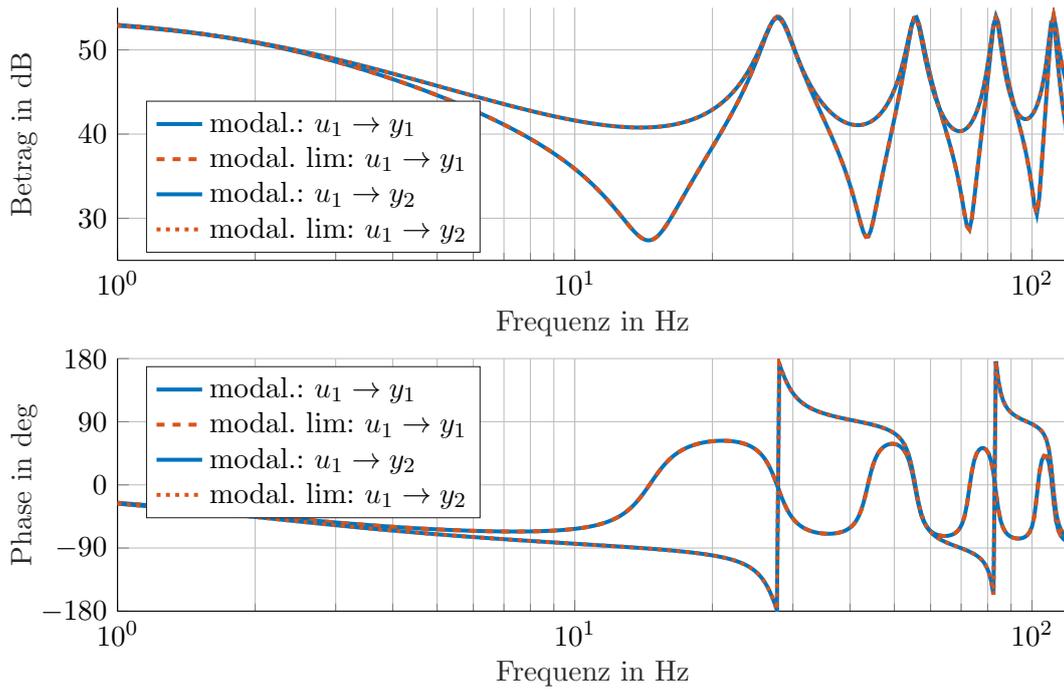


Abbildung 3.3: Vergleich zwischen modal approximierten Frequenzgängen, mit angenähertem Punkteingriff und angenäherten Punktmessungen mit dem entsprechendem Grenzübergang

Man erkennt keinerlei Unterschied zwischen den Frequenzgängen. Diese Vorgehensweise ist allerdings mathematisch nicht ganz korrekt, da wie oben schon erwähnt Delta-Distributionen nicht Teil des Hilbertraums \mathcal{X} sind. Es ist allerdings möglich den Zustandsraum \mathcal{X} in einen erweiterten Raum einzubetten, welcher auch Distributionen umfasst, vgl. [7, S. 19], [6, S. 143]. Aus einem praktischen Standpunkt heraus betrachtet ist diese Vorgehensweise jedenfalls sinnvoll, da so nicht mehr die komplizierten Integrale (3.79) und (3.81) ausgewertet werden müssen.

Kapitel 4

Reglerentwurf mittels *Early-Lumping*

Für verteilt parametrische Systeme (VPS) lassen sich die in der Literatur bekannten Entwurfsverfahren in zwei Kategorien einteilen: Dem *Early-Lumping* und dem *Late-Lumping*, vgl. [7, S. 1–4]. Beim Early-Lumping wird die verteilt parametrische Strecke vor dem eigentlichen Reglerentwurf Ortsdiskretisiert. Der Regler- bzw. Beobachterentwurf wird dann, mit klassischen Methoden, anhand des approximierten Systems durchgeführt, vgl. [10].

4.1 Diskretisierung mittels FVM und Flux-Vector-Splitting

Für den Early-Lumping-Entwurf wird die verteilt parametrische Strecke (3.5) mit Hilfe der FVM Ortsdiskretisiert. Das so erhaltene *semidiskrete* Modell endlicher Ordnung ist allerdings von extrem großer Ordnung und kann für einen praktischen Regler- und Beobachterentwurf nicht eingesetzt werden. Aus diesem Grund muss das Ortsdiskretisierte Modell in einem zweiten Schritt einer *Ordnungsreduktion* unterzogen werden.

Das Streckenmodell (3.5) lautet, in Vektorform angeschrieben

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\xi, t) = -\bar{\mathbf{A}} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{x}(\xi, t), \quad 0 \leq \xi \leq L \quad (4.1a)$$

$$x_2(0, t) - c_{1,p} x_1(0, t) = c_{1,a} u_1(t) \quad (4.1b)$$

$$x_2(L, t) - c_{2,p} x_1(L, t) = c_{2,a} u_2(t) \quad (4.1c)$$

$$y_1(t) = x_1(0, t) \quad (4.1d)$$

$$y_2(t) = x_1(L, t), \quad (4.1e)$$

mit der Matrix $\bar{\mathbf{A}}$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_0^2}{A} \\ A & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Die Ortsdiskretisierung wird, ähnlich wie zuvor mit Hilfe der FVM und dem *Flux-Vektor-Splitting* durchgeführt. Die verwendete Flux-Vektor-Splitting-Methode beruht auf [30]. Die Idee besteht

darin, dass die Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ wie folgt aufgeteilt wird

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}^+ + \bar{\mathbf{A}}^-, \quad (4.3)$$

wobei die Matrix $\bar{\mathbf{A}}^+$ nur positive Eigenwerte und $\bar{\mathbf{A}}^-$ nur negative Eigenwerte aufweist. Die Eigenwerte der Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ lauten

$$\lambda^+ = a_0, \quad \lambda^- = -a_0, \quad (4.4)$$

mit den dazugehörigen Rechtseigenvektoren

$$\mathbf{r}^+ = \begin{bmatrix} \frac{a_0}{A} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^- = \begin{bmatrix} -\frac{a_0}{A} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Wie schon bei der Transformation der Euler-Gleichungen in ihre charakteristische Form wird mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{a_0}{A} & -\frac{a_0}{A} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

eine Diagonalisierung von $\bar{\mathbf{A}}$ durchgeführt. Somit ergibt sich die folgende Diagonalmatrix

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & -a_0 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Die Aufspaltung der Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ erfolgt nun über die Eigenwertmatrix $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^+ + \mathbf{\Lambda}^-$

$$\mathbf{\Lambda}^+ = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

und man erhält

$$\bar{\mathbf{A}}^\pm = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda}^\pm \mathbf{T}^{-1}. \quad (4.9)$$

Entsprechend der FVM wird das Problemgebiet in N Zellen diskretisiert. In jeder Zelle werden die Zustandsvariablen Druck und Massenstrom betrachtet

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1,j} \\ x_{2,j} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Der Zustandsvektor lautet somit wie folgt

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = [x_{1,0} \quad x_{2,0} \quad x_{1,1} \quad x_{2,1} \quad \cdots \quad x_{1,N-1} \quad x_{2,N-1} \quad x_{1,N} \quad x_{2,N}]^\top. \quad (4.11)$$

Die physikalischen Randbedingungen aus Gleichung (4.1b) und (4.1c) und die numerischen Randbedingungen werden mittels sogenannter *Ghost Cells* berücksichtigt. In Abbildung 4.1 sind die Zellaufteilung des Problemgebiets (grau) und die *Ghost Cells* dargestellt. Es werden jeweils für den linken und rechten Rand des Problemgebiets *Ghost Cells* verwendet.

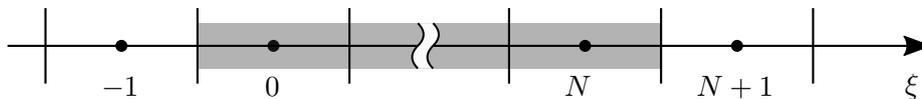


Abbildung 4.1: Ghost Cells

Auf den Ghost Cells werden die Zustandsgrößen als *Dirichlet Randbedingungen* vorgegeben

$$\mathbf{x}_{-1} = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ c_{1,p}x_{1,0} + c_{1,a}u_1 \end{bmatrix} \quad (4.12a)$$

$$\mathbf{x}_{N+1} = \begin{bmatrix} x_{1,N} \\ c_{2,p}x_{1,N} + c_{2,a}u_2 \end{bmatrix}. \quad (4.12b)$$

Mit dem Ansatz aus Gleichung (2.61) und $\mathbf{F}_j = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_j$ ergibt sich das folgende *semidiskrete* Modell

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_0 = -\frac{1}{\Delta\xi} \left(\bar{\mathbf{A}}^+\mathbf{x}_0 + \bar{\mathbf{A}}^-\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{A}}^+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_{1,p} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{A}}^-\mathbf{x}_0 \right) + \frac{1}{\Delta\xi} \mathbf{A}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ c_{1,a} \end{bmatrix} u_1, \quad (4.13a)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_j = -\frac{1}{\Delta\xi} \left(\bar{\mathbf{A}}^+\mathbf{x}_j + \bar{\mathbf{A}}^-\mathbf{x}_{j+1} - \bar{\mathbf{A}}^+\mathbf{x}_{j-1} - \bar{\mathbf{A}}^-\mathbf{x}_j \right), \quad 1 \leq j \leq N-1 \quad (4.13b)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_N = -\frac{1}{\Delta\xi} \left(\bar{\mathbf{A}}^+\mathbf{x}_N + \bar{\mathbf{A}}^- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_{2,p} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_N - \bar{\mathbf{A}}^+\mathbf{x}_{N-1} - \bar{\mathbf{A}}^-\mathbf{x}_N \right) - \frac{1}{\Delta\xi} \mathbf{A}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ c_{2,a} \end{bmatrix} u_2, \quad (4.13c)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{1,N} \end{bmatrix}. \quad (4.13d)$$

Wie man leicht erkennt handelt es sich bei (4.13) um ein lineares Zustandsraummodell der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad (4.14a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (4.14b)$$

mit der *spärlich besetzten* Systemmatrix \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{a_0(a_0c_{1,p}-A)}{2A\Delta\xi} & 0 & \frac{a_0}{2\Delta\xi} & -\frac{a_0^2}{2A\Delta\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A+a_0c_{1,p}}{2\Delta\xi} & -\frac{a_0}{\Delta\xi} & -\frac{A}{2\Delta\xi} & \frac{a_0}{2\Delta\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_0}{2\Delta\xi} & \frac{a_0^2}{2A\Delta\xi} & -\frac{a_0}{\Delta\xi} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{2\Delta\xi} & \frac{a_0}{2\Delta\xi} & 0 & -\frac{a_0}{\Delta\xi} & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_0}{2\Delta\xi} & \frac{a_0^2}{2A\Delta\xi} & \ddots & \frac{a_0}{2\Delta\xi} & -\frac{a_0^2}{2A\Delta\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{2\Delta\xi} & \frac{a_0}{2\Delta\xi} & \ddots & -\frac{A}{2\Delta\xi} & \frac{a_0}{2\Delta\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -\frac{a_0}{\Delta\xi} & 0 & \frac{a_0}{2\Delta\xi} & -\frac{a_0^2}{2A\Delta\xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\frac{a_0}{\Delta\xi} & -\frac{A}{2\Delta\xi} & \frac{a_0}{2\Delta\xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_0}{2\Delta\xi} & \frac{a_0^2}{2A\Delta\xi} & \frac{a_0(-A-a_0c_{2,p})}{2A\Delta\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2\Delta\xi} & \frac{a_0}{2\Delta\xi} & \frac{a_0c_{2,p}-A}{2\Delta\xi} & -\frac{a_0}{\Delta\xi} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

der Eingangsmatrix \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{a_0^2 c_{1,a}}{2A\Delta\xi} & 0 \\ \frac{a_0 c_{1,a}}{2\Delta\xi} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_0^2 c_{2,a}}{2A\Delta\xi} \\ 0 & \frac{a_0 c_{2,a}}{2\Delta\xi} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

und der Ausgangsmatrix \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Anhand dieses linearen Modells kann nun der eigentliche *Early-Lumping* Regler- und Beobachterentwurf durchgeführt werden. Hierbei ist anzumerken, dass je nachdem ob das Abgassystem oder das Ansaugsystem des VKM-Prüfstands betrachtet wird ein Klappenöffnungsgrad als Stellgröße u und der andere Klappenöffnungsgrad als Störung w zu interpretieren ist.

Ein sehr wichtiger Aspekt jeglicher Approximierungsmethode ist die sogenannte *Modellkonvergenz*, vgl. [25, Kapitel 3]. Darunter versteht man die Bedienung, dass für eine größer werdende Approximationsordnung die Lösung des approximierten Systems zur Lösung des ursprünglichen Systems konvergiert. Um die Gültigkeit der oben beschriebenen Ortsdiskretisierung zu überprüfen wird der Frequenzgang des mittels FVM approximierten Systems mit dem analytisch berechneten Frequenzgang aus (2.89) verglichen.

In Abbildung 4.2 ist der Vergleich zwischen den Frequenzgängen des analytisch berechneten Systems (2.89) und den Frequenzgängen des, mittels FVM approximierten Systems (4.13) dargestellt. Es wurden hier jeweils zwei Übertragungsfunktionen exemplarisch herausgegriffen: Die Übertragungsfunktion von $\Delta\alpha_1 = u_1$ nach $\Delta p_2 = y_1$ und die Übertragungsfunktion von $\Delta\alpha_1 = u_1$ nach $\Delta p_3 = y_2$. Für die FVM-Approximation wurden 60 Zellen gewählt.

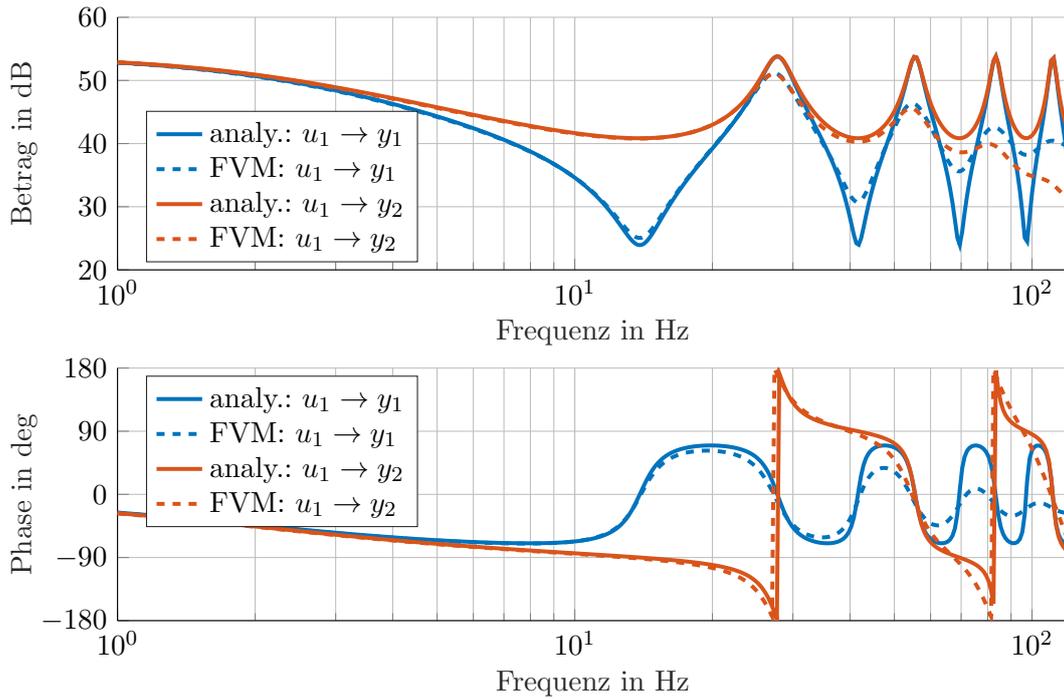


Abbildung 4.2: Vergleich zwischen den analytisch berechneten Frequenzgängen und den mittels FVM approximierten Frequenzgängen

Man erkennt eine gute Übereinstimmung zwischen dem analytisch berechneten Frequenzgang und dem mittels FVM-Approximation angenäherten. Es sei hier allerdings zu bemerken, dass trotz der hohen Anzahl von Zellen die Approximation für hohe Frequenzen sehr schnell schlechter wird. Eine Erhöhung der Anzahl von Zellen würde das Ergebnis zwar verbessern, allerdings hat sich gezeigt, dass dies erhebliche numerische Probleme nach sich ziehen kann.

4.2 Ordnungsreduktion mittels *Balanced Truncation*

Wie bereits zuvor beschrieben ist das semidiskrete Modell (4.14), welches durch eine FVM Approximation erhalten wurde, von sehr hoher Ordnung $n = 120$ und kann nur schwer für weitere Entwurfsschritte eingesetzt werden. Allerdings liefert eine FVM-Approximation wesentlich niedrigerer Ordnung eine unzureichende Systembeschreibung. In einem zweiten Schritt, wird aus dem System (4.14) mit Ordnung n ein System reduzierter Ordnung n_r berechnet. Zur Ordnungsreduktion stehen zahlreiche Methoden zur Verfügung [27], [8, Kapitel 9–10], [12]. Im vorliegenden Fall wird die Methode der sogenannten *Balanced Truncation* angewendet. Hierbei wird vom ursprüngliche Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.18a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (4.18b)$$

mit der *Gramsche Steuerbarkeitsmatrix* \mathbf{P} und der *Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix* \mathbf{Q} , welche jeweils die symmetrische, positiv definite Lösung der Gleichungen

$$\mathbf{P}\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{B}^\top = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top\mathbf{Q} + \mathbf{C}^\top\mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (4.20)$$

sind, eine sogenannte *Balanced Realization* berechnet. Es handelt sich im Wesentlichen um eine Zustandstransformation bei der die Idee besteht, die Energiezuteilung zwischen Stellgröße und Ausgangsgröße des transformierten Systems gleichmäßig zu verteilen. Dies ist genau dann der Fall wenn eine Transformationsmatrix \mathbf{T} so gefunden wird, dass gilt

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T}^{-\top} = \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{\top}\mathbf{Q}\mathbf{T}, \quad (4.21)$$

wobei σ_i die *Hankel Singulärwerte* des Systems (4.18) sind, vgl. [8, S. 323 f.]. Diese werden wie folgt berechnet

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{P}\mathbf{Q})}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \quad (4.22)$$

mit den Eigenwerten $\lambda_i(\mathbf{P}\mathbf{Q})$ der Matrix $\mathbf{P}\mathbf{Q}$. Die *Balanced Realization* wird über eine Zustandstransformation, mit der Transformationsmatrix \mathbf{T} , berechnet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.23a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{x}. \quad (4.23b)$$

Die Idee der *Balanced Truncation* ist es nur mehr denjenigen Teil der *Balanced Realization* (4.23) zu betrachten der für die größten Singulärwerte verantwortlich ist. Die Matrix $\mathbf{\Sigma}$ (4.21) wird wie folgt aufgeteilt

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

wobei $\mathbf{\Sigma}_1$ die größten n_r Singulärwerte beinhaltet. Auf die gleiche Weise wird die *Balanced Realization* partitioniert

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (4.25a)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \mathbf{x}. \quad (4.25b)$$

Das System reduzierter Ordnung lautet dann

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_r + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_r. \quad (4.26b)$$

Es stellt sich nun die Frage wie man diese Transformation praktisch durchführen kann. In [27] wird hierfür eine Methode vorgestellt, welche auf die *Schur-Zerlegung* zurückgreift, was sich als numerisch vorteilhaft herausstellt. Hierbei geht man vom stabilen System (4.18), mit der *Gramsche Steuerbarkeitsmatrix* \mathbf{P} und der *Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix* \mathbf{Q} aus. Im ersten Schritt wird die sogenannte *Schur-Zerlegung* der Matrix $\mathbf{P}\mathbf{Q}$ in aufsteigender

$$\mathbf{V}_A^{\top}\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{V}_A = \mathbf{\Sigma}_A = \begin{bmatrix} \sigma_n & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n, \quad (4.27)$$

bzw. absteigender Reihenfolge

$$\mathbf{V}_D^{\top}\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{V}_D = \mathbf{\Sigma}_D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n, \quad (4.28)$$

berechnet. Wie oben erwähnt ist man nur an jenem Teil des Systems interessiert, welcher für die größten n_r Singulärwerte verantwortlich ist. Die Matrizen \mathbf{V}_A und \mathbf{V}_D werden wie folgt aufgeteilt

$$\mathbf{V}_A = \begin{bmatrix} * & \mathbf{V}_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_L & * \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

mit $\mathbf{V}_R \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$ und $\mathbf{V}_L \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$. Die eigentlichen Transformationsmatrizen $\mathbf{S}_R \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$ und $\mathbf{S}_L \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$ werden dann über eine *Singulärwert-Zerlegung* berechnet

$$\mathbf{S}_R = \mathbf{V}_R \mathbf{W} \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{V}_L \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.31)$$

wobei die Matrizen \mathbf{W} , \mathbf{U} und $\mathbf{\Sigma}$ aus der folgenden Singulärwert-Zerlegung stammen

$$\mathbf{V}_L^\top \mathbf{V}_R = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{W}^\top. \quad (4.32)$$

Das *System reduzierter Ordnung* lautet

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{u} \quad (4.33a)$$

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r, \quad (4.33b)$$

mit den neuen Systemmatrizen

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{S}_L^\top \mathbf{A} \mathbf{S}_R, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{S}_L^\top \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{C} \mathbf{S}_R. \quad (4.34)$$

Die *Gramsche Steuerbarkeitsmatrix* \mathbf{P}_r und die *Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix* \mathbf{Q}_r des Systems reduzierter Ordnung lauten dann

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{S}_L^\top \mathbf{P} \mathbf{S}_L \quad (4.35)$$

$$\mathbf{Q}_r = \mathbf{S}_R^\top \mathbf{Q} \mathbf{S}_R, \quad (4.36)$$

mit

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{n_r} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

In Abbildung 4.3 ist der Vergleich zwischen den Frequenzgängen des semidiskreten Modells (4.14) und den Frequenzgängen des Systems reduzierter Ordnung dargestellt. Wiederum wurden zwei Frequenzgänge exemplarisch herausgegriffen.

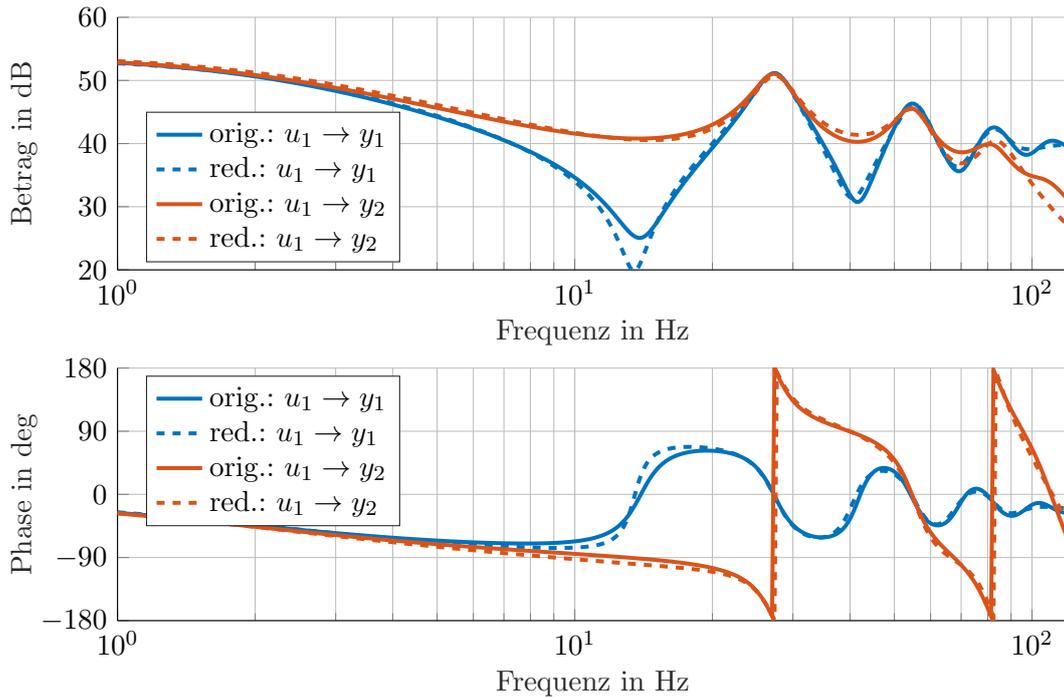


Abbildung 4.3: Vergleich zwischen Originalsystem und dem System mit reduzierter Ordnung

Das so erhaltene System ist nun nur mehr 11. Ordnung und kann für den weiteren Reglerentwurf eingesetzt werden. Hierbei ist zu bemerken, dass die FVM bei grober Aufteilung des Problemgebiets, d.h. für kleines N nur ein unzureichendes Approximationsergebnis liefert. Die *modale Approximation* aus Kapitel 3 liefert im vorliegenden, geometrisch sehr einfachen Fall wesentlich bessere Approximationsergebnisse, vgl. Abbildung 3.2. Allerdings können mit der FVM auch sehr komplizierte Geometrien behandelt werden, was mit Hilfe der modalen Approximation nur mehr schwer möglich ist.

4.3 LQI Entwurf, mit Kalman-Störgrößenbeobachter

Für das System (4.14) wird im folgenden ein linearer Regler mit quadratischem Gütekriterium (LQ)-Regler entworfen. Der Entwurf lässt sich natürlich genauso auf das *System reduzierter Ordnung* (4.33) anwenden. Es handelt sich bei dem vorliegenden Modell um ein in einem Arbeitspunkt linearisiertes Modell. Somit kann für das nichtlineare System stationäre Genauigkeit nur im Arbeitspunkt gewährleistet werden. Um die stationäre Genauigkeit gegenüber konstanten Störungen zu gewährleisten muss der *offene Kreis* integrierendes Verhalten haben. Da die Strecke kein integrierendes Verhalten aufweist muss der Regler integrierend sein, vgl. [15, S. 332 f.]. Um dies zu gewährleisten, wird der LQ-Regler um einen Integralteil erweitert.

4.3.1 LQI-Entwurf

Die Idee des LQ-Ansatzes besteht darin, das folgende *Optimierungsproblem*

$$\text{minimiere } J(u(t)) = \int_0^\infty \mathbf{z}(t)\mathbf{Q}_c\mathbf{z}(t) + r_c u^2(t) dt \quad (4.38)$$

unter

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}u$$

bezüglich $u(t)$ zu lösen. Dabei stehen die positiv semidefinite Matrix $\mathbf{Q}_c \geq 0$ für die Gewichtung der Zustände und die positive Konstante $r_c > 0$ für die Gewichtung der skalaren Stellgröße. Das Ergebnis des Optimierungsproblems (4.38) ist ein klassischer linearer Zustandsregler

$$u_{\min}(t) = \tilde{\mathbf{k}}^\top \mathbf{z}(t). \quad (4.39)$$

Die Lösung von (4.38) ist aus der Literatur bekannt, vgl. [21, Kaptitel. 7]. Der optimale Regler $\tilde{\mathbf{k}}^\top$ ist gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{k}}^\top = -r_c^{-1} \tilde{\mathbf{b}}^\top \mathbf{\Pi}, \quad (4.40)$$

wobei $\mathbf{\Pi}$ die symmetrische, positiv definite Lösung der sogenannten *Matrix-Riccatigleichung* ist.

$$\tilde{\mathbf{A}}^\top \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{\Pi} \tilde{\mathbf{b}} r_c^{-1} \tilde{\mathbf{b}}^\top \mathbf{\Pi} + \mathbf{Q}_c = \mathbf{0}. \quad (4.41)$$

Die Gleichung (4.41) besitzt eine eindeutige Lösung falls (\mathbf{A}, \mathbf{b}) stabilisierbar und $(\mathbf{H}_c, \mathbf{A})$, mit $\mathbf{H}_c^\top \mathbf{H}_c = \mathbf{Q}_c$ detektierbar sind. Wie einleitend beschrieben wird allerdings ein LQI-Entwurf durchgeführt, wofür lediglich ein Teil des Streckenmodells (4.14) betrachtet wird. Im Speziellen wird zunächst die Störung w vernachlässigt und nur der Druck an einem Ende des Rohres p_2 als zu regelnde Ausgangsgröße angenommen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (4.42a)$$

$$y = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}. \quad (4.42b)$$

Selbstverständlich kann auch p_3 als zu regelnde Ausgangsgröße angenommen werden, der Reglerentwurf ist vollkommen identisch. Selbiges gilt für die Störung, diese kann entweder am rechten oder linken Ende des Rohres wirken. Somit ist der Reglerentwurf sowohl für die Regelung des Ansaugsystems als auch für die Regelung des Abgassystems anwendbar. In Abbildung 4.4 ist das Blockdiagramm des geschlossenen Regelkreises mit LQI-Regler und Vorsteuerung dargestellt.

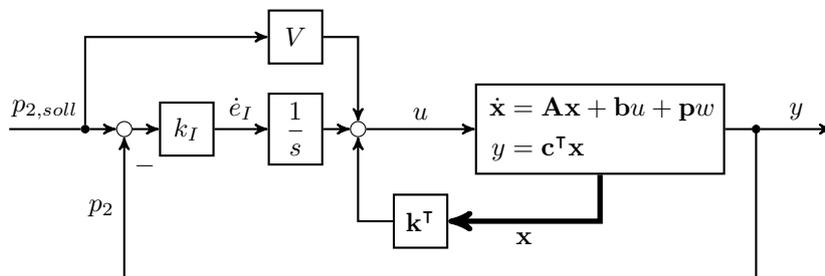


Abbildung 4.4: Blockdiagramm des geschlossenen Regelkreises mit LQI-Regler

Für den LQI-Ansatz wird der zu minimierende Zustandsvektor \mathbf{x} um das Integral des gewichteten Regelfehlers

$$\dot{e}_I = k_I(r - y) = k_I(p_{2,soll} - p_2) \quad (4.43)$$

erweitert. Der neue Zustandsvektor \mathbf{z} lautet somit

$$\mathbf{z} = [\mathbf{x} \quad e_I]^\top. \quad (4.44)$$

Das Zustandsraummodell des geschlossenen Regelkreises lautet (vgl. Abbildung 4.4)

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^\top & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}^\top & k_I \end{bmatrix} \right)}_{\Theta} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}V \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (4.45)$$

$$y = [\mathbf{c}^\top \quad 0] \mathbf{z}. \quad (4.46)$$

Man erkennt sofort die Ähnlichkeit mit dem klassischen Zustandsregler-Entwurf. Mit Hilfe des Rückführvektors $[\mathbf{k}^\top \ k_I]$ soll erreicht werden, dass die Eigenwerte der Matrix Θ gewissen *Wunscheigenwerten* entsprechen. Vernachlässigt man zunächst die Vorsteuerung V so lautet das System für den LQ-Entwurf wie folgt

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u, \quad (4.47)$$

mit den Matrizen $\tilde{\mathbf{A}}$ und $\tilde{\mathbf{b}}$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^\top & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Zum Schluss wird noch der skalare Faktor V einer Vorsteuerung so entworfen, dass gilt

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} = T(s)|_{s=0} \stackrel{!}{=} 1, \quad (4.49)$$

wobei $T(s)$ die Führungsübertragungsfunktion der erweiterten Strecke (4.45) ist. Nach kurzer Rechnung erhält man das bekannte Ergebnis

$$V = \frac{1}{\mathbf{c}^\top (-\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top)^{-1} \mathbf{b}}. \quad (4.50)$$

4.3.2 Kalman-Störgrößenbeobachter

Da der Zustandsvektor \mathbf{x} der Strecke (4.14) nicht messbar ist, wird ein Zustandsbeobachter eingesetzt. Auf das System (4.14) wirkt die unbekannte, nicht messbare Störung δ , weshalb ein *Kalman-Filter* als *Störgrößenbeobachter* entworfen wird. Das um das Störmodell erweiterte Streckenmodell lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(u + w_u) + \mathbf{p}(\delta + w_1) \quad (4.51a)$$

$$\dot{\delta} = S\delta + w_2 \quad (4.51b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad (4.51c)$$

mit dem Eingangsrauschen w_u und w_1 und dem Prozessrauschen w_2 , welche jeweils normalverteilt, mittelwertfrei und weiß sind und deren Varianz bekannt sind. Der Ausgangsgröße \mathbf{y} ist das sogenannte *Messrauschen* \mathbf{v} überlagert, welches normalverteilt, mittelwertfrei, weiß und dessen Kovarianzmatrix \mathbf{R}_o bekannt ist.

$$w_u \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{w_u}^2), \quad w_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{w_1}^2), \quad w_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{w_2}^2), \quad \mathbf{v} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_o). \quad (4.52)$$

Die Störung δ wird als konstant modelliert, d.h. es gilt

$$S = 0. \quad (4.53)$$

Für den Kalman-Filter-Entwurf muss das Modell (4.51) in die Form

$$\dot{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{b}}u + \mathbf{w} \quad (4.54a)$$

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z} + \mathbf{v} \quad (4.54b)$$

gebracht werden. Der neue Zustandsvektor \mathbf{z} lautet hierbei

$$\mathbf{z} = [\mathbf{x} \quad \delta]^\top, \quad (4.55)$$

mit der Systemmatrix $\widehat{\mathbf{A}}$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & S \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

dem Eingangsvektor $\widehat{\mathbf{b}}$

$$\widehat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

und der Ausgangsmatrix $\widehat{\mathbf{C}}$

$$\widehat{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} \quad 0]. \quad (4.58)$$

In Gleichung (4.54) ist \mathbf{w} das sogenannte *Prozessrauschen* und \mathbf{v} das *Messrauschen*. Für das Prozessrauschen und das Messrauschen gilt, dass es normalverteilt, weiß und mittelwertfrei ist. Außerdem ist die Kovarianzmatrix \mathbf{Q}_o des Prozessrauschens und die Kovarianzmatrix \mathbf{R}_o des Messrauschens bekannt. Bringt man (4.51) in die obige Form (4.54), so erhält man

$$\dot{\mathbf{z}} = \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \widehat{\mathbf{b}}u + \widehat{\mathbf{b}}w_u + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{b}}_1} w_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{b}}_2} w_2 \quad (4.59a)$$

$$\mathbf{y} = \widehat{\mathbf{C}}\mathbf{z} + \mathbf{v}. \quad (4.59b)$$

Nun stellt sich die Frage, wie man von den bekannten Varianzen der Störungen (4.52) auf die Kovarianzmatrix \mathbf{Q}_o des Prozessrauschens \mathbf{w} kommt. Es stellt sich heraus, dass für ein lineares Modell der Form

$$\mathbf{e} = \mathbf{M}\mathbf{f},$$

mit normalverteiltem \mathbf{f} , $\mathbf{f} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_f, \boldsymbol{\Sigma}_f)$ gilt

$$\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M}\boldsymbol{\mu}_f, \mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}_f\mathbf{M}^\top).$$

Die Kovarianzmatrix des Prozessrauschens \mathbf{Q}_o ergibt sich somit aus (4.59a) zu

$$\mathbf{Q}_o = \widehat{\mathbf{b}}\sigma_{w_u}^2 \widehat{\mathbf{b}}^\top + \widehat{\mathbf{b}}_1\sigma_{w_1}^2 \widehat{\mathbf{b}}_1^\top + \widehat{\mathbf{b}}_2\sigma_{w_2}^2 \widehat{\mathbf{b}}_2^\top. \quad (4.60)$$

Das Messrauschen \mathbf{v} wird als unabhängig angenommen, somit lautet die Kovarianzmatrix des Messrauschens \mathbf{R}_o

$$\mathbf{R}_o = \begin{bmatrix} \sigma_{p_2}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{p_3}^2 \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

mit der Varianz $\sigma_{p_2}^2$ der Messung p_2 und der Varianz $\sigma_{p_3}^2$ der Messung p_3 .

Das Ergebnis des Kalman-Filter-Entwurfs ist aus der Literatur bekannt, vgl. [21, S.365 f.]. Es ergibt sich der Beobachter

$$\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = (\widehat{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\widehat{\mathbf{C}})\widehat{\mathbf{z}} + \widehat{\mathbf{b}}u + \mathbf{L}\mathbf{y}, \quad (4.62)$$

mit der Rückführmatrix \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Pi}\widehat{\mathbf{C}}\mathbf{R}_o^{-1}, \quad (4.63)$$

wobei $\boldsymbol{\Pi}$ die symmetrische, positiv definite Lösung der *Matrix-Riccatigleichung* ist

$$\widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\Pi}\widehat{\mathbf{A}}^\top - \boldsymbol{\Pi}\widehat{\mathbf{C}}^\top\mathbf{R}_o^{-1}\widehat{\mathbf{C}}\boldsymbol{\Pi} + \mathbf{Q}_o = \mathbf{0}. \quad (4.64)$$

Man erkennt sofort die Ähnlichkeit mit dem linear quadratisch (LQ)-Entwurf (4.40) und (4.41).

4.3.3 Geschlossener Regelkreis

Für einen praktischen Einsatz muss eine *immer* bestehende Stellgrößenbeschränkung berücksichtigt werden. Im vorliegenden Fall ist es offensichtlich, dass der Klappenöffnungsgrad nur Werte zwischen 0% und 100% annehmen kann. Da ein integrierender Regler eingesetzt wird muss eine Maßnahme vorgesehen werden um das sogenannten *Integrator-Windup* zu verhindern. Im vorliegenden Fall wird als *Anti-Windup-Maßnahme* (AWM) die Methode des sogenannten *Integrator Clamping* bzw. *Conditional Integration*, nach [34], [14] angewendet. Im Wesentlichen wird hierbei die Integration angehalten, falls die Stellgröße u in der Beschränkung liegt und die zu integrierende Variable und die Stellgröße gleiches Vorzeichen haben

$$\text{stop} = \begin{cases} 1 & (u \neq u_{\text{sat}}) \wedge (u \cdot (r - y)k_I > 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.65)$$

Die Variable stop ist hierbei als Signal zu verstehen, welche die Integration anhält, siehe Abbildung 4.5. Der Vorteil gegenüber anderen Anti-Windup-Maßnahmen ist, dass es keine Entwurfsparameter gibt welche von Reglerparametern abhängen. Nach [34] zeigt sich die Anti-Windup-Maßnahme aus Gleichung (4.65) als sehr zufriedenstellend und im Vergleich zu anderen *Clamping*-Varianten, bei denen das Vorzeichen der zu integrierenden Variable nicht beachtet wird, als die Beste. In Abbildung 4.5 ist der geschlossene Regelkreis, bestehend aus LQI-Regler und Kalman-Störgrößenbeobachter dargestellt.

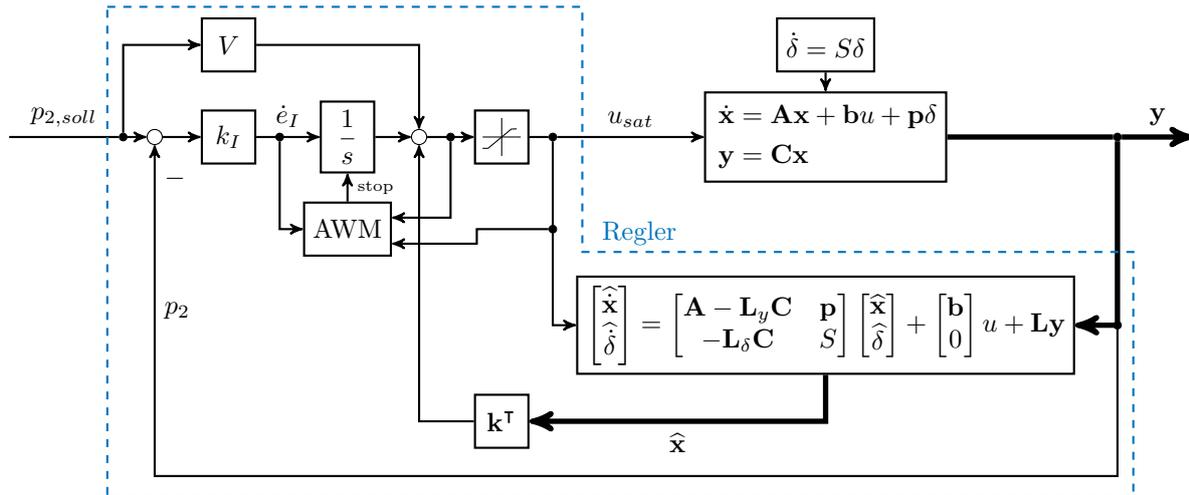


Abbildung 4.5: Blockdiagramm des geschlossenen Regelkreises mit LQI-Regler und Kalman-Störgrößenbeobachter

Das mathematische Modell des gesamten Reglers (ohne Stellgrößenbeschränkung und Anti-Windup-Maßnahme) lautet

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ \dot{\hat{\delta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{L}_y \mathbf{C} + \mathbf{b} \mathbf{k}^\top & \mathbf{p} & \mathbf{b} k_I \\ -\mathbf{L}_\delta \mathbf{C} & S & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\delta} \\ e_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_y \\ \mathbf{L}_\delta \\ -[1 \ 0] \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} V \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (4.66a)$$

$$u = [\mathbf{k}^\top \ 0 \ k_I] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\delta} \\ e_I \end{bmatrix} + V r, \quad (4.66b)$$

mit der Stellgröße u , der Führungsgröße r und den Messgrößen \mathbf{y} , vgl. Abbildung 4.5. Zu beachten ist, dass der gesamte Regler- und Beobachterentwurf für das, in einem Arbeitspunkt

linearisierte Modell durchgeführt wurde. Der Regelkreis (4.66) ist für *Delta-Größen* d.h. für Differenzen zur Ruhelage entworfen worden, d.h.

$$u = \alpha_2 - \alpha_{2,R}, \quad r = p_{2,soll} - p_{2,soll,R}, \quad y_1 = p_2 - p_{2,R}, \quad y_2 = p_3 - p_{3,R} \quad (4.67)$$

und es müssen die dementsprechenden Transformationen bei der Implementierung an der realen Strecke noch durchgeführt werden.

4.4 PI-Mittendruckregelung mit Kalman-Störgrößenbeobachter

Zum Vergleich wird für das System (4.14) im Folgenden ein PI-Regler entworfen. Dabei wird nicht nur der gemessene Druck am Ende des Rohres p_2 für die Regelung verwendet, sondern auch der mittlere Druck im Rohr \bar{p} .

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L x_1(\xi, t) d\xi. \quad (4.68)$$

Da dieser aber real nicht zur Verfügung steht und auch nicht messtechnisch ermittelt werden kann, wird auf einen beobachterbasierten Ansatz zurückgegriffen.

Wie schon im Abschnitt zuvor wird ein Kalman-Störgrößenbeobachter eingesetzt. Der mittlere Druck im Rohr kann dann aus dem geschätzten Zustandsvektor ermittelt werden. Für das mittels FVM ortsdiskretisierte Modell lässt sich der folgende Zusammenhang aufstellen

$$\bar{p} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_{1,i} = \underbrace{\left[\frac{1}{N} \quad 0 \quad \frac{1}{N} \quad 0 \quad \cdots \quad \frac{1}{N} \quad 0 \right]}_{\mathbf{c}_m^\top} \mathbf{x}, \quad (4.69)$$

wobei der Vektor \mathbf{c}_m^\top genau jener Linearkombination entspricht die der Mittelwertbildung für das ortsdiskretisierte Rohr entspricht. Wird das *System reduzierter Ordnung* für den Entwurf verwendet, so muss selbstverständlich der Vektor \mathbf{c}_m^\top zuvor transformiert werden

$$\mathbf{c}_{m,r}^\top = \mathbf{c}_m^\top \mathbf{S}_R. \quad (4.70)$$

Der eigentliche Kalman-Filter-Entwurf ist exakt gleich wie im Abschnitt zuvor.

4.4.1 Geschlossener Regelkreis

Der verwendete PI-Regler ist kein klassischer PI-Regler, da für den Integralteil und den Proportionalteil nicht der gleiche Regelfehler verwendet wird: Um die stationäre Genauigkeit zu gewährleisten wird für den Integralteil der tatsächliche Führungsfehler $e_I = k_I(r-y) = k_I(p_{2,soll} - p_2)$ verwendet. Für den Proportionalteil wird hingegen der Fehler zwischen Führungsgröße und geschätztem mittleren Druck $\hat{\bar{p}}$ verwendet.

In Abbildung 4.6 ist der geschlossene Regelkreis dargestellt. Da es sich um einen integrierenden Regler handelt wird wie schon zuvor eine Anti-Windup-Maßnahme vorgesehen.

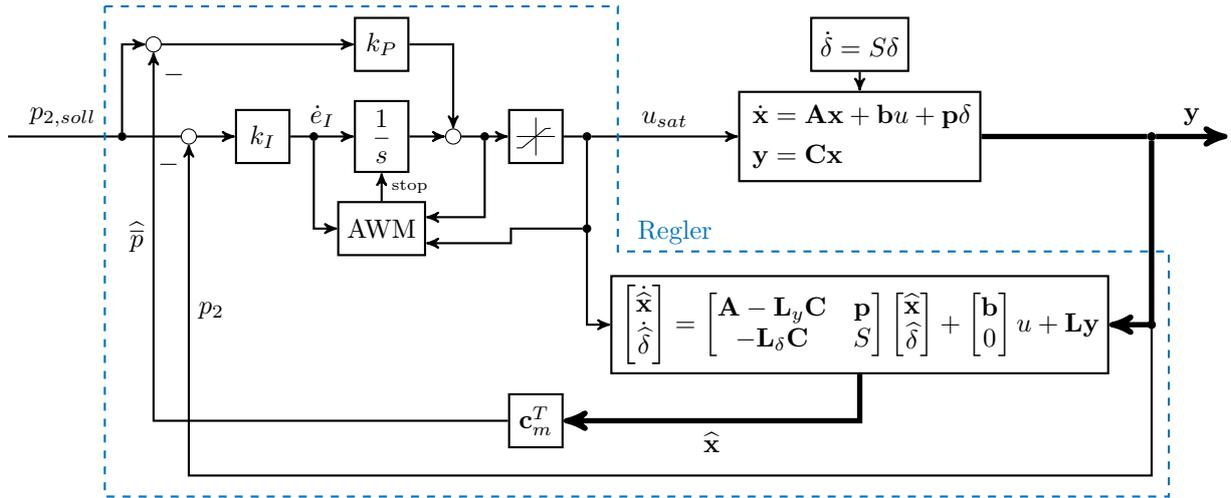


Abbildung 4.6: Blockdiagramm des geschlossenen Regelkreises mit PI-Regler und Kalman-Störgrößenbeobachter

Das mathematische Modell des gesamten Reglers (ohne Stellgrößenbeschränkung und Anti-Windup-Maßnahme) lautet

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ \dot{\hat{\delta}} \\ \dot{e}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{L}_y \mathbf{C} - k_P \mathbf{b} \mathbf{c}_m^T & \mathbf{p} & \mathbf{b} k_I \\ -\mathbf{L}_\delta \mathbf{C} & S & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\delta} \\ e_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_y \\ \mathbf{L}_\delta \\ -[1 \ 0] \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} V \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (4.71a)$$

$$u = [-k_P \mathbf{c}_m^T \ 0 \ k_I] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\delta} \\ e_I \end{bmatrix} + Vr, \quad (4.71b)$$

Vergleicht man den LQI-Ansatz (4.66) mit dem obig dargestellten Regler aus den Gleichungen (4.71), so erkennt man gleich die strukturelle Gemeinsamkeit. Da die Mittelwertbildung einer Linearkombination der Zustände entspricht, handelt es sich auch beim Mittendruckregler im Prinzip um einen PI-Zustandsregler. Zwischen den beiden Reglerstrukturen gilt der folgende Zusammenhang (vgl. Abbildung 4.5 und 4.6)

$$V = k_P \quad (4.72a)$$

$$\mathbf{k}^T = -k_P \mathbf{c}_m^T \quad (4.72b)$$

$$k_I = k_I. \quad (4.72c)$$

Es muss jedoch festgestellt werden, dass die obige Äquivalenz im vorliegenden Fall nicht gilt. Der aus dem LQ-Entwurf stammende Vektor \mathbf{k}^T kann nicht verwendet werden um den Vektor \mathbf{c}_m^T zu berechnen. Allerdings kann mit Hilfe des Vektors \mathbf{k}^T der Wert für k_P berechnet werden

$$k_P = -\frac{\mathbf{c}_m (\mathbf{k}^T)^T}{\mathbf{c}_m \mathbf{c}_m^T}, \quad (4.73)$$

was jedoch nur in einem *Least Squares Sinn* möglich ist. Da bei der Mittendruckregelung lediglich zwei Parameter k_P und k_I als Entwurfsparameter zur Verfügung stehen, kann die Dynamik des geschlossenen Kreises aber nicht im gleichen Maße beeinflusst werden wie beim LQI-Ansatz.

Kapitel 5

Reglerentwurf mittels *Late-Lumping*

Beim sogenannten *Late-Lumping* wird der Regler- bzw. Beobachterentwurf anhand der verteilt parametrischen Streckenbeschreibung durchgeführt. Der so erhaltene Regler ist aber in der Regel nicht implementierbar und muss mittels geeigneter Methoden approximiert werden.

5.1 LQ Entwurf für VPS

Wie schon in Kapitel 4, für den konzentriert parametrischen Fall, wird nun wieder das LQ-Problem auf unendlichem Zeithorizont betrachtet. Ziel ist es das folgende Optimierungsproblem zu lösen

$$\text{minimiere } J(u(t)) = \int_0^\infty \langle \mathbf{z}(t), \mathcal{Q}_c \mathbf{z}(t) \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle u(t), \mathcal{R}_c u(t) \rangle_{\mathcal{Z}} dt \quad (5.1)$$

unter

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathcal{A}\mathbf{z}(t) + \mathcal{B}u(t),$$

mit dem symmetrischen, positiv definiten Operator \mathcal{Q}_c welcher die Zustandsgrößen $\mathbf{z}(t)$ gewichtet und dem positiven Operator \mathcal{R}_c welche die skalare Stellgröße u gewichtet, vgl. [6, S. 292–303], [24]. Die Lösung des Optimierungsproblems (5.1) lautet wie folgt

$$u_{\min}(t) = \mathcal{K}\mathbf{z}(t), \quad (5.2)$$

mit dem linearen *Rückführoperator* \mathcal{K}

$$\mathcal{K} = -\mathcal{R}_c^{-1} \mathcal{B}^* \mathbf{\Pi}. \quad (5.3)$$

Man erkennt die Ähnlichkeit zum linearen, konzentriert parametrischen Fall (siehe Kapitel 4). Der Operator $\mathbf{\Pi}$ ist die selbstadjungierte (d.h. $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^*$), nicht-negative Lösung der folgenden *Operator-Riccati-Gleichung*

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{z}_1, \mathbf{\Pi}\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \mathbf{\Pi}\mathbf{z}_1, \mathcal{A}\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} - \langle \mathcal{B}^* \mathbf{\Pi}\mathbf{z}_1, \mathcal{R}_c^{-1} \mathcal{B}^* \mathbf{\Pi}\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \mathbf{z}_1, \mathcal{Q}_c \mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} = 0 \quad (5.4)$$
$$\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in D(\mathcal{A}).$$

Ein nicht-negativer Operator ist nach [6, Definition A.3.71, S. 606] wie folgt definiert

Definition 5.1 (Nicht-Negativer Operator) Ein selbstadjungierter Operator \mathcal{S} , auf dem Hilbertraum \mathcal{X} ist nicht-negativ falls gilt

$$\langle \mathcal{S}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{X}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D(\mathcal{S}) \quad (5.5)$$

■

Mit Hilfe der Definition 3.5 und unter Verwendung von $\Pi = \Pi^*$, lässt sich die Gleichung (5.4) wie folgt umformen

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{z}_1, \mathcal{A}^* \Pi \mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \mathbf{z}_1, \Pi^* \mathcal{A} \mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} - \langle \mathbf{z}_1, \Pi^* \mathcal{B} \mathcal{R}_c^{-1} \mathcal{B}^* \Pi \mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \mathbf{z}_1, \mathcal{Q}_c \mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} \\ &= \langle \mathbf{z}_1, (\mathcal{A}^* \Pi + \Pi \mathcal{A} - \Pi \mathcal{B} \mathcal{R}_c^{-1} \mathcal{B}^* \Pi + \mathcal{Q}_c) \mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}}, \quad \forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in D(\mathcal{A}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

was äquivalent zur folgenden algebraischen *Operator-Riccati-Gleichung* ist, vgl. [25, S. 25 ff.], [16, S. 3 ff.], [6, S. 287]

$$(\mathcal{A}^* \Pi + \Pi \mathcal{A} - \Pi \mathcal{B} \mathcal{R}_c^{-1} \mathcal{B}^* \Pi + \mathcal{Q}_c) \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in D(\mathcal{A}). \quad (5.7)$$

Die Gleichung (5.4) besitzt eine eindeutige Lösung falls $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *exponentiell stabilisierbar* und $(\mathcal{H}_c, \mathcal{A})$, mit $\mathcal{H}_c^* \mathcal{H}_c = \mathcal{Q}_c$ *exponentiell detektierbar* sind, vgl. [6, S. 292], [24].

Nach [6, Definition 5.2.1, S. 227] gelten für die *exponentielle Stabilisierbarkeit* und *exponentielle Detektierbarkeit* verteilt parametrischer Systeme die folgenden Definitionen.

Definition 5.2 (Exponentiell stabilisierbar) Das Operatorpaar $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ wird *exponentiell stabilisierbar* genannt, falls es einen Operator \mathcal{K} gibt, sodass der Operator $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$ exponentiell stabil ist. ■

Definition 5.3 (Exponentiell detektierbar) Das Operatorpaar $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ wird *exponentiell detektierbar* genannt, falls es einen Operator \mathcal{L} gibt, sodass der Operator $\mathcal{A} - \mathcal{L}\mathcal{C}$ exponentiell stabil ist. ■

Bei den obigen Definitionen erkennt man die Ähnlichkeit zum konzentriert parametrischen Fall. Es stellt sich nun die Frage nach der Stabilität von VPS, im Speziellen nach der *exponentiellen Stabilität*. Diese ist nach [6, Definition 5.1.1, S. 215], [7, S. 46] wie folgt definiert.

Definition 5.4 (Exponentielle Stabilität) Das abstrakte Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{A}\mathbf{x}(t), \quad (5.8)$$

mit dem Systemoperator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, welcher ein infinitesimaler Generator der C_0 -Halbgruppe $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)$ ist, wird *exponentiell stabil* genannt falls es positive Konstanten M und α gibt, sodass

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M \exp(-\alpha t) \|\mathbf{x}(0)\|, \quad (5.9)$$

bzw. über die *Operatornorm* angeschrieben

$$\|\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)\| \leq M \exp(-\alpha t), \quad (5.10)$$

gilt. Die Konstante α wird als *Abklingrate* bezeichnet. Gilt $-\alpha < \beta$, so wird das System auch β -exponentiell stabil genannt. ■

Hierbei wird das *Abklingverhalten* der Lösung betrachtet. Der Begriff der *exponentiellen Stabilität* kann auch für lineare, konzentriert parametrische Systeme über die *Operatornorm* der zugehörigen C_0 -Halbgruppe definiert werden. Wie schon in Kapitel 3 erwähnt ist bei linearen, konzentriert parametrischen Systemen die Transitionsmatrix $\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ die C_0 -Halbgruppe und das System somit *exponentiell stabil* falls gilt

$$\|\Phi(t)\| \leq M \exp(-\alpha t), \quad (5.11)$$

wobei M und α positive Konstanten sind, vgl. [20, S. 412]. Im linearen Fall mit konstanter Matrix \mathbf{A} ist jedes *asymptotisch stabile* System, d.h. jedes System mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t)\| = 0 \quad (5.12)$$

auch exponentiell stabil.

Die obige Definition 5.4 der *exponentiellen Stabilität* für VPS ist im Allgemeinen schwierig zu überprüfen. Wünschenswert wäre ein Stabilitätskriterium, dass wie im konzentriert parametrischen Fall anhand der *Eigenwerte* bzw. des *Spektrums* des Systemoperators \mathcal{A} überprüft werden kann. Das Spektrum eines Operators \mathcal{A} ist jene Menge λ der komplexen Zahlen \mathbb{C} , für die der Operator $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$ nicht beschränkt oder nicht invertierbar ist. Für VPS setzt sich das Spektrum $\sigma(\mathcal{A})$ aus dem *Punktspektrum* $\sigma_p(\mathcal{A})$, dem *kontinuierlichen Spektrum* $\sigma_k(\mathcal{A})$ und dem *Restspektrum* $\sigma_r(\mathcal{A})$ zusammen. Es stellt sich heraus, dass die Stabilität von VPS im Allgemeinen nicht anhand der Eigenwerte überprüft werden kann, es gilt lediglich die folgende Ungleichung

$$\sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A})} \operatorname{Re}(\lambda) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)\|}{t} := \omega_0, \quad (5.13)$$

mit der *Stabilitätsreserve*, bzw. *Wachstumsschranke* ω_0 , welche gleich $-\alpha$ aus Definition 5.4 ist. Das Spektrum des Systemoperators setzt sich wie folgt zusammen

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) \cup \sigma_k(\mathcal{A}) \cup \sigma_r(\mathcal{A}) \quad (5.14)$$

wobei die Eigenwerte des Operators \mathcal{A} die Elemente des Punktspektrums $\lambda_k \in \sigma_p(\mathcal{A})$ sind, vgl. [7, S. 47 f.].

Hat man es allerdings mit einem *Riesz-Spektralsystem* zu tun so gilt immer die sogenannte *Spectrum Determined Growth Condition* und für die obige Ungleichung (5.13) gilt Gleichheit. Die Eigenwerte eines Riesz-Spektralsystem sind die Elemente des Punktspektrums $\sigma_p(\mathcal{A})$, die Häufungspunkte Elemente des kontinuierlichen Spektrums $\sigma_k(\mathcal{A})$ und das Restspektrum $\sigma_r(\mathcal{A})$ ist bei einem Riesz-Spektralsystem leer. Das System ist stabil, falls alle Eigenwerte in der linken offenen Halbebene liegen, vgl. [6, Kapitel 5], [7, S. 46 ff.]. Damit lässt sich für Riesz-Spektralsysteme die *Stabilitätsreserve* ω_0 wie folgt definieren

$$\omega_0 := \sup_k \operatorname{Re}(\lambda_k). \quad (5.15)$$

Das System ist, genau dann exponentiell stabil wenn $\omega_0 < 0$ gilt. Im konzentriert parametrischen Fall gilt, dass das kontinuierliche Spektrum und das Restspektrum immer leer sind, d.h. die Eigenwerte einer Matrix sind gleich dem Spektrum der Matrix, vgl. [6, S. 611].

Auch die obigen Definitionen 5.2 und 5.3 der Stabilisierbarkeit und der Detektierbarkeit sind im Allgemeinen schwierig zu überprüfen. Hat man es mit einem Riesz-Spektralsystem zu tun, so vereinfacht sich die Überprüfung der Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit und es gilt der folgende Satz, vgl. [6, Theorem 5.2.10, S. 239].

Satz 5.1 (β -exponentiell stabilisierbar) Ein Riesz-Spektralsystem ist genau dann β -exponentiell stabilisierbar, wenn es eine Konstante $\varepsilon > 0$ gibt, sodass die Menge

$$\sigma_{\beta-\varepsilon}^+(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \mid \operatorname{Re}(\lambda) \geq \beta - \varepsilon\} \quad (5.16)$$

höchstens endlich viele Eigenwerte enthält und

$$[\langle \mathbf{b}_1, \psi_k \rangle \quad \cdots \quad \langle \mathbf{b}_p, \psi_k \rangle] \neq \mathbf{0}, \quad (5.17)$$

für alle k , sodass $\lambda_k \in \sigma_{\beta-\varepsilon}^+(\mathcal{A})$ gilt. ■

Dies bedeutet, dass \mathcal{A} nur endlich viele Eigenwerte in der abgeschlossenen rechten Halbebene aufweisen darf und die restlichen Eigenwerte und Häufungspunkte der imaginären Achse nicht beliebig nahe kommen dürfen. Für die Eigenwerte aus $\sigma_{\beta-\varepsilon}^+(\mathcal{A})$ darf die *modale Eingangsmatrix* keine Nullzeile haben, man spricht auch von *modaler Steuerbarkeit*, vgl. [7, S. 80 f.]. Die Bedingungen für die exponentielle Detektierbarkeit eines Riesz-Spektralsystems sind dem gleichen Satz [6, Theorem 5.2.10, S. 239] entnommen und lauten analog zur Stabilisierbarkeit wie folgt.

Satz 5.2 (β -exponentiell detektierbar) Ein Riesz-Spektralsystem ist genau dann β -exponentiell detektierbar, wenn es eine Konstante $\varepsilon > 0$ gibt, sodass die Menge $\sigma_{\beta-\varepsilon}^+(\mathcal{A})$ höchstens endlich viele Eigenwerte enthält und

$$\begin{bmatrix} \langle \phi_k, \mathbf{c}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_k, \mathbf{c}_m \rangle \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}, \quad (5.18)$$

für alle k , sodass $\lambda_k \in \sigma_{\beta-\varepsilon}^+(\mathcal{A})$ gilt. ■

Anschaulich bedeutet der obige Satz, dass \mathcal{A} nur endlich viele Eigenwerte in der abgeschlossenen rechten Halbebene aufweisen darf und für diese Eigenwerte die *modale Ausgangsmatrix* keine Nullspalte haben darf, man spricht auch von *modaler Steuerbarkeit*, vgl. [7, S. 202 f.]. Wie im konzentriert parametrischen Fall erkennt man auch hier die Dualität der Steuerbarkeit und Detektierbarkeit eines Systems.

Wie beim LQI-Entwurf in Abschnitt 4.3.1 kann der lineare Regler mit quadratischem Gütemaß um einen Integralteil erweitert werden. Der neue Zustandsvektor besteht dann aus \mathbf{x} und dem Integral des Führungsfehlers $\dot{e}_I = r - y = p_{2,\text{soll}} - p_2$. Man erhält das folgende abstrakte Anfangswertproblem auf dem *erweitertem Zustandsraum* $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus \mathbb{C}$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{e}_I \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathbf{0} \\ -\mathcal{C}_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{K} & k_I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ e_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{B}_2 V \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad (5.19)$$

$$y = \mathcal{C}_1 \mathbf{x}, \quad (5.20)$$

mit $\mathcal{B}_2 u_2(t) = \mathbf{b}_2(\xi) u_2(t)$ und $\mathcal{C}_1 \mathbf{x}(t) = \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{c}_1(\xi) \rangle_{\mathcal{X}}$. Wie in Kapitel 4 ist V der skalare Faktor einer Vorsteuerung. Der neue Zustandsvektor \mathbf{z} ist wie folgt definiert

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ e_I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X} \text{ und } e_I \in \mathbb{C}. \quad (5.21)$$

Da der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ der verteilt parametrischen Strecke nicht messbar ist, ist die Zustandsrückführung (5.2) nicht direkt umsetzbar, weshalb auf einen beobachterbasierten Ansatz zurückgegriffen wird.

5.2 Zustandsbeobachter für VPS

Für unendlich dimensionale Systeme kann ein Beobachter, analog zum konzentriert parametrischen Fall, entworfen werden, vgl. [4], [6, Kapitel 5]. Hierbei wird das abstrakte Anfangswertproblem um das Rauschen g und Messrauschen \mathbf{v} erweitert, vgl. [4], [2, S. 220 f.]

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathcal{A}\mathbf{z} + \mathcal{B}u + \mathcal{F}g \quad (5.22a)$$

$$\mathbf{y} = \mathcal{C}\mathbf{z} + \mathbf{v}. \quad (5.22b)$$

Bei dem Rauschen g handelt es sich um normalverteiltes, mittelwertfreies, weißes Rauschen mit bekannter Varianz σ_g^2 . Der Kovarianzoperator \mathcal{Q}_o des unendlich dimensionalen *Prozessrauschens* $\mathbf{w} = \mathcal{F}g$ auf dem Hilbertraum \mathcal{X} kann wie folgt berechnet werden

$$\mathcal{Q}_o = \mathcal{F}\sigma_g^2\mathcal{F}^*. \quad (5.23)$$

Die Lösung des *Filterproblems* ist ein unendlich dimensionaler Beobachter der Form

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = (\mathcal{A} - \mathcal{L}\mathcal{C})\hat{\mathbf{z}} + \mathcal{B}u + \mathcal{L}\mathbf{y}. \quad (5.24)$$

Dabei ist \mathcal{L} der Rückführoperator

$$\mathcal{L} = \mathbf{\Pi}\mathcal{C}\mathbf{R}_o^{-1}. \quad (5.25)$$

Der Operator $\mathbf{\Pi}$ ist die selbstadjungierte, nicht negative Lösung der folgenden *Operator-Riccati-Gleichung*

$$\langle \mathcal{A}^*\mathbf{z}_1, \mathbf{\Pi}\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \mathbf{\Pi}\mathbf{z}_1, \mathcal{A}^*\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} - \langle \mathcal{C}\mathbf{\Pi}\mathbf{z}_1, \mathbf{R}_o^{-1}\mathcal{C}\mathbf{\Pi}\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \mathbf{z}_1, \mathcal{Q}_o\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} = 0 \quad (5.26)$$

$\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in D(\mathcal{A}).$

Mit einigen Umformungen erhält man aus (5.26) die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{z}_1, \mathcal{A}\mathbf{\Pi}\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{\Pi}\mathcal{A}^*\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} - \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{\Pi}\mathcal{C}^*\mathbf{R}_o^{-1}\mathcal{C}^*\mathbf{\Pi}\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \mathbf{z}_1, \mathcal{Q}_o\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} \\ &= \langle \mathbf{z}_1, (\mathcal{A}\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}\mathcal{A}^* - \mathbf{\Pi}\mathcal{C}^*\mathbf{R}_o^{-1}\mathcal{C}\mathbf{\Pi} + \mathcal{Q}_o)\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}}, \quad \forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in D(\mathcal{A}) \end{aligned} \quad (5.27)$$

welche äquivalent zur folgenden algebraischen *Operator-Riccati-Gleichung* ist

$$(\mathcal{A}\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}\mathcal{A}^* - \mathbf{\Pi}\mathcal{C}^*\mathbf{R}_o^{-1}\mathcal{C}\mathbf{\Pi} + \mathcal{Q}_o)\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in D(\mathcal{A}). \quad (5.28)$$

Man erkennt die Ähnlichkeit zum LQ-Entwurf für VPS aus dem vorherigen Abschnitt. Es stellt sich das gleiche Problem wie schon beim LQ-Entwurf. Die Lösung obiger Operator-Riccati-Gleichung (5.26) ist in den meisten Fällen analytisch nicht berechenbar und man muss wieder auf eine Approximation zurückgreifen, was in Abschnitt 6.1 noch genauer erläutert wird.

Wird wie in Kapitel 4 das Prozessrauschen mit Hilfe einer Stellgröße u überlagerten Eingangsruschens w_u modelliert und das System um eine skalare, unbekannte, nicht messbare Störung δ erweitert, so erhält man die folgende Systembeschreibung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}_2(u + w_u) + \mathcal{P}(\delta + w_1) \quad (5.29a)$$

$$\dot{\delta} = S\delta + w_2 \quad (5.29b)$$

$$\mathbf{y} = \mathcal{C}\mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad (5.29c)$$

welche in die Form (5.22) gebracht werden kann. Hierbei ist $\mathcal{B}_2u_2(t) = \mathbf{b}_2(\xi)u_2(t)$ der Eingangoperator der Stellgröße und $\mathcal{P}u_1(t) = \mathbf{b}_1(\xi)u_1(t)$ der Eingangoperator der Störung. Die

Störungen w_u , w_1 und w_2 sind skalar, normalverteilt, mittelwertfrei und mit bekannter Varianz. Das Messrauschen ist, wie in Kapitel 4, ebenfalls normalverteilt, mittelwertfrei und mit bekannter Kovarianzmatrix \mathbf{R}_o .

Betrachtet man (5.29) so ist der neue Zustandsvektor auf dem *erweitertem Zustandsraum* $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus \mathbb{C}$ wie folgt definiert

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \delta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X} \text{ und } \delta \in \mathbb{C}, \quad (5.30)$$

womit sich (5.29) wie folgt anschreiben lässt

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{P} \\ \mathbf{0} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathcal{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} w_u + \begin{bmatrix} \mathcal{P} \\ 0 \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_2, \quad (5.31a)$$

$$\mathbf{y} = [\mathcal{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \delta \end{bmatrix} + \mathbf{v}. \quad (5.31b)$$

Das erweiterte System für den Beobachterentwurf lautet somit

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{P} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathcal{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \mathbf{w} \quad (5.32a)$$

$$\mathbf{y} = [\mathcal{C} \quad 0] \mathbf{z} + \mathbf{v}. \quad (5.32b)$$

Die Störung δ wird als konstant modelliert, es gilt daher $S = 0$. Für die Lösung der Operator-Riccati-Gleichung (5.26) gelten die Überlegungen für den LQI-Entwurf analog.

5.3 Lösung der Operator-Riccati-Gleichung für Riesz-Spektralsysteme

Die Lösung der Operator-Riccati-Gleichung wird im Folgenden am Beispiel des LQ-Entwurfs für VPS betrachtet. Selbstverständlich gelten die Überlegungen für den Beobachterentwurf analog. Die betrachtete Operator-Riccati-Gleichung (5.4) lautet

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{z}_1, \mathbf{\Pi}\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \mathbf{\Pi}\mathbf{z}_1, \mathcal{A}\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} - \langle \mathcal{B}^* \mathbf{\Pi}\mathbf{z}_1, \mathcal{R}_c^{-1} \mathcal{B}^* \mathbf{\Pi}\mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \mathbf{z}_1, \mathcal{Q}_c \mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Z}} = 0 \quad (5.33)$$

$$\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in D(\mathcal{A}).$$

Es wird angenommen, dass die Lösung $\mathbf{\Pi}$ wie folgt darstellbar ist, vgl. [6, S. 285]

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{z} = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{i,j} \langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\psi}_j \rangle_{\mathcal{Z}} \boldsymbol{\psi}_i. \quad (5.34)$$

Setzt man in (5.34) $\mathbf{z} := \boldsymbol{\phi}_k$ und beachtet die *Biorthonormalitätsrelation* von Riesz-Spektralsystemen (3.24) so erhält man

$$\mathbf{\Pi}\boldsymbol{\phi}_k = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{i,j} \langle \boldsymbol{\phi}_k, \boldsymbol{\psi}_j \rangle_{\mathcal{Z}} \boldsymbol{\psi}_i \quad (5.35a)$$

$$= \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{i,j} \delta_{k,j} \boldsymbol{\psi}_i \quad (5.35b)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{i,k} \boldsymbol{\psi}_i. \quad (5.35c)$$

Da es sich bei \mathcal{A} um einen Riesz-Spektraloperator handelt, dessen Eigenvektoren eine Riesz-Basis bilden, kann die selbstadjungierte Lösung $\mathbf{\Pi}$ wie folgt dargestellt werden

$$\mathbf{\Pi}z = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle z, \mathbf{\Pi}\phi_i \rangle_{\mathcal{Z}} \psi_i. \quad (5.36)$$

Setzt man in (5.36) wieder $z := \phi_k$ erhält man

$$\mathbf{\Pi}\phi_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle \phi_k, \mathbf{\Pi}\phi_i \rangle_{\mathcal{Z}} \psi_i. \quad (5.37)$$

Vergleicht man (5.35c) und (5.37) so erkennt man, dass für den selbstadjungierten Operator $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^*$ folgender Zusammenhang gilt, vgl. [23, S. 12052]

$$\mathbf{\Pi}_{i,j} := \langle \phi_i, \mathbf{\Pi}\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} = \langle \phi_j, \mathbf{\Pi}\phi_i \rangle_{\mathcal{Z}} := \mathbf{\Pi}_{j,i}. \quad (5.38)$$

Da die Lösung von (5.33) für $\forall z_1, z_2 \in D(\mathcal{A})$ gelten muss wird wie in [6, S. 299 f.], [23]

$$z_1 = \phi_i, \quad z_2 = \phi_j, \quad (5.39)$$

gesetzt und man erhält

$$\langle \mathcal{A}\phi_i, \mathbf{\Pi}\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \mathbf{\Pi}\phi_i, \mathcal{A}\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} - \langle \mathcal{B}^*\mathbf{\Pi}\phi_i, \mathcal{R}_c^{-1}\mathcal{B}^*\mathbf{\Pi}\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \phi_i, \mathcal{Q}_c\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} = 0, \quad \forall i, j. \quad (5.40)$$

Mit der Eigenwertgleichung (3.20) ergibt sich

$$0 = \langle \lambda_i\phi_i, \mathbf{\Pi}\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \mathbf{\Pi}\phi_i, \lambda_j\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} - \langle \mathcal{B}^*\mathbf{\Pi}\phi_i, \mathcal{R}_c^{-1}\mathcal{B}^*\mathbf{\Pi}\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \phi_i, \mathcal{Q}_c\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} \quad (5.41a)$$

$$= \lambda_i \langle \phi_i, \mathbf{\Pi}\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} + \bar{\lambda}_j \langle \phi_i, \mathbf{\Pi}^*\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} - \langle \mathcal{B}^*\mathbf{\Pi}\phi_i, \mathcal{R}_c^{-1}\mathcal{B}^*\mathbf{\Pi}\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \phi_i, \mathcal{Q}_c\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}}, \quad \forall i, j. \quad (5.41b)$$

Durch Einsetzen von (5.38) und $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^*$ ergibt sich

$$\lambda_i\mathbf{\Pi}_{i,j} + \mu_j\mathbf{\Pi}_{i,j} - \langle \mathcal{B}^*\mathbf{\Pi}\phi_i, \mathcal{R}_c^{-1}\mathcal{B}^*\mathbf{\Pi}\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} + \mathbf{Q}_{c,i,j} = 0, \quad (5.42)$$

wobei der Skalar $\mathbf{Q}_{c,i,j}$ wie folgt definiert ist

$$\mathbf{Q}_{c,i,j} := \langle \phi_i, \mathcal{Q}_c\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}}. \quad (5.43)$$

Zur Berechnung des mittleren Terms in (5.41b) wird (5.37) jeweils für $\mathbf{\Pi}\phi_i$, bzw. $\mathbf{\Pi}\phi_j$ in die Gleichung eingesetzt und man erhält

$$\langle \mathcal{B}^*\mathbf{\Pi}\phi_i, \mathcal{R}_c^{-1}\mathcal{B}^*\mathbf{\Pi}\phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} = \left\langle \mathcal{B}^* \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \phi_i, \mathbf{\Pi}\phi_k \rangle_{\mathcal{Z}} \psi_k, \mathcal{R}_c^{-1}\mathcal{B}^* \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle \phi_j, \mathbf{\Pi}\phi_l \rangle_{\mathcal{Z}} \psi_l \right\rangle_{\mathcal{Z}} \quad (5.44a)$$

$$= \left\langle \mathcal{B}^* \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{i,k} \psi_k, \mathcal{R}_c^{-1}\mathcal{B}^* \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{l,j} \psi_l \right\rangle_{\mathcal{Z}} \quad (5.44b)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{i,k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{l,j} \langle \mathcal{B}^* \psi_k, \mathcal{R}_c^{-1}\mathcal{B}^* \psi_l \rangle_{\mathcal{Z}} \quad (5.44c)$$

$$= \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{i,k} \mathbf{\Pi}_{l,j} \langle \mathcal{B}^* \psi_k, \mathcal{R}_c^{-1}\mathcal{B}^* \psi_l \rangle_{\mathcal{Z}}. \quad (5.44d)$$

Schlussendlich ergibt sich

$$\lambda_i \mathbf{\Pi}_{i,j} + \mu_j \mathbf{\Pi}_{i,j} - \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{i,k} \mathbf{\Pi}_{l,j} \mathbf{B}_{k,l} + \mathbf{Q}_{c,i,j} = 0, \quad \forall i, j, \quad (5.45)$$

wobei $\mathbf{B}_{k,l}$ wie folgt definiert ist

$$\mathbf{B}_{k,l} := \langle \mathbf{B}^* \psi_k, \mathcal{R}_c^{-1} \mathbf{B}^* \psi_l \rangle_{\mathcal{Z}}. \quad (5.46)$$

Man erhält ein System von unendlich vielen, gekoppelten, skalaren Gleichungen. Das so erhaltene Gleichungssystem ist nur selten analytisch lösbar und man muss in den meisten Fällen die Lösung mit Hilfe einer Approximation berechnen. Betrachtet man endlich viele Elemente der obigen Gleichung (5.45)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mu_{-n} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_n & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{-n,-n} & \cdots & \mathbf{\Pi}_{n,-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Pi}_{n,-n} & \cdots & \mathbf{\Pi}_{n,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{-n,-n} & \cdots & \mathbf{\Pi}_{n,-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Pi}_{n,-n} & \cdots & \mathbf{\Pi}_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{-n} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{-n,-n} & \cdots & \mathbf{\Pi}_{n,-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Pi}_{n,-n} & \cdots & \mathbf{\Pi}_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{-n,-n} & \cdots & \mathbf{B}_{-n,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{n,-n} & \cdots & \mathbf{B}_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{-n,-n} & \cdots & \mathbf{\Pi}_{n,-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Pi}_{n,-n} & \cdots & \mathbf{\Pi}_{n,n} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{c,-n,-n} & \cdots & \mathbf{Q}_{c,-n,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}_{c,n,-n} & \cdots & \mathbf{Q}_{c,n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.47) \end{aligned}$$

so erhält man das selbe Ergebnis wie beim LQ-Entwurf mittels einer modalen Approximation

$$\mathbf{A}^* \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{A} - \mathbf{\Pi} \mathbf{b} r_c^{-1} \mathbf{b}^* \mathbf{\Pi} + \mathbf{Q}_c = \mathbf{0}. \quad (5.48)$$

In einigen Fällen ist es möglich eine analytische Lösung der Operator-Riccati-Gleichung zu berechnen. Dazu wird folgendes Beispiel aus [6, S. 299 f.] betrachtet. Es sei das folgende abstrakte Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \quad (5.49)$$

mit

$$\mathcal{A} = \frac{d^2}{d\xi^2}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{I}, \quad \mathcal{Q}_c = \mathcal{I}, \quad \mathcal{R}_c = \mathcal{I} \quad (5.50)$$

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \mathbf{L}_2(0,1) \mid x \text{ absolut stetig, } \frac{dx}{d\xi} \in \mathbf{L}_2(0,1) \text{ und } \frac{dx}{d\xi}(0,t) = 0, \frac{dx}{d\xi}(1,t) = 0 \right\}. \quad (5.51)$$

gegeben. Es handelt sich hierbei um ein 1D-Wärmeleitungsproblem mit verteiltem Eingriff und isolierten Enden. Das System ist selbstadjungiert, d.h. $\lambda_k = \mu_k$ und $\phi_k = \psi_k$. In Gleichung (5.45) eingesetzt ergibt

$$\lambda_i \mathbf{\Pi}_{i,j} + \lambda_j \mathbf{\Pi}_{i,j} - \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{i,k} \mathbf{\Pi}_{l,j} + \delta_{i,j} = 0. \quad (5.52)$$

Man kann überprüfen, dass die Lösung durch $\mathbf{\Pi}_{i,j} = \langle \phi_i, \mathbf{\Pi} \phi_j \rangle_{\mathcal{Z}} = 0$ für $i \neq j$ gegeben ist. Es ergibt sich die folgende quadratische Gleichung

$$2\lambda_j \mathbf{\Pi}_{j,j} - \mathbf{\Pi}_{j,j}^2 + 1 = 0. \quad (5.53)$$

Womit sich für dieses Beispiel eine geschlossene, nicht negative Lösung angeben lässt

$$\mathbf{\Pi} z = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\lambda_j + \sqrt{\lambda_j^2 + 1} \right) \langle z, \phi_j \rangle \phi_j. \quad (5.54)$$

5.4 Abschließende Bemerkung zum Late Lumping Entwurf

In den obigen Abschnitten wird dargestellt, wie der Regler- und Beobachterentwurf für VPS durchgeführt werden kann. Sowohl beim *Late Lumping* Reglerentwurf als auch beim *Late Lumping* Beobachterentwurf für VPS erkennt man die Ähnlichkeit mit dem linearen, konzentriert parametrischen Fall. Die Lösung kann in beiden Fällen mathematisch *elegant* angeschrieben werden, ist aber praktisch nur schwer lösbar. In den meisten Fällen muss auf eine Approximation zurückgegriffen werden.

Kapitel 6

Zusammenhänge zwischen Early- und Late-Lumping

In diesem Kapitel wird dargestellt, wie die *Operator-Riccati-Gleichungen* aus Kapitel 5 mit Hilfe einer Approximation gelöst werden können. Es stellt sich heraus, dass dieser Ansatz identisch mit dem *Early Lumping* aus Kapitel 4 ist.

6.1 Näherungsweise Lösung der Operator-Riccati-Gleichung für den LQ-Entwurf

Für das abstrakte Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathcal{A}\mathbf{z}(t) + \mathcal{B}u(t) \quad (6.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{C}\mathbf{z}(t), \quad (6.1b)$$

wird die endlich dimensionale Approximation

$$\dot{\mathbf{z}}_n(t) = \mathbf{A}_n\mathbf{z}_n(t) + \mathbf{b}_n u(t) \quad (6.2a)$$

$$\mathbf{y}_n(t) = \mathbf{C}_n\mathbf{z}_n(t), \quad (6.2b)$$

auf einem endlich-dimensionalen Unterraum $\mathcal{Z}_n \subseteq D(\mathcal{A})$, mit der Projektion $\mathbf{P}_n : \mathcal{Z} \mapsto \mathcal{Z}_n$ betrachtet. Für Riesz-Spektralsysteme sieht die Projektion wie folgt aus, vgl. [22, S. 112]

$$\mathbf{P}_n \mathbf{z} = \sum_{k=-n}^n \langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\psi}_k \rangle_{\mathcal{Z}} \boldsymbol{\phi}_k. \quad (6.3)$$

Somit wird aus dem Optimierungsproblem (5.1) das folgende Optimierungsproblem, vgl. [24, S. 210]

$$\text{minimiere } J(u(t)) = \int_0^\infty \langle \mathbf{z}_n(t), \mathbf{Q}_{c,n}\mathbf{z}_n(t) \rangle + \langle u(t), r_{c,n}u(t) \rangle dt \quad (6.4)$$

unter

$$\dot{\mathbf{z}}_n(t) = \mathbf{A}_n\mathbf{z}_n(t) + \mathbf{b}_n u(t).$$

Hierbei ist zu bemerken, dass jetzt im Gegensatz zu (5.1) das Skalarprodukt auf komplexwertige, endlichdimensionale Vektoren angewendet wird. Das approximierte System (6.2) stammt aus einer *modalen Approximation* wie in Kapitel 3. Die Notation wurde allerdings etwas angepasst. Die Lösung des Optimierungsproblems (6.4) lautet wie folgt

$$u_{\min}(t) = \mathbf{k}_n^\top \mathbf{z}_n(t), \quad (6.5)$$

mit dem *Rückführvektor* \mathbf{k}_n^\top

$$\mathbf{k}_n^\top = -r_{c,n}^{-1} \mathbf{b}_n^* \mathbf{\Pi}_n. \quad (6.6)$$

Hierbei ist die Matrix $\mathbf{\Pi}_n$ die eindeutige, symmetrische, positiv definite Lösung der *Matrix-Riccati-Gleichung*

$$\mathbf{A}_n^* \mathbf{\Pi}_n + \mathbf{\Pi}_n \mathbf{A}_n - \mathbf{\Pi}_n \mathbf{b}_n r_{c,n}^{-1} \mathbf{b}_n^* \mathbf{\Pi}_n + \mathbf{Q}_{c,n} = \mathbf{0}. \quad (6.7)$$

Die Gleichung (6.7) besitzt eine eindeutige Lösung falls $(\mathbf{A}_n, \mathbf{b}_n)$ stabilisierbar und $(\mathbf{H}_{c,n}, \mathbf{A}_n)$, mit $\mathbf{H}_{c,n}^* \mathbf{H}_{c,n} = \mathbf{Q}_{c,n}$ detektierbar sind. Die Lösung des LQ-Problems (6.5) wird dann für die Regelung des Originalsystems

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathcal{A} \mathbf{z}(t) + \mathcal{B} u(t) \quad (6.8)$$

benutzt. Es stellt sich nun die Frage ob die approximierte Lösung $\mathbf{\Pi}_n$ der Matrix-Riccati-Gleichung (6.7) zur Lösung $\mathbf{\Pi}$ der Operator-Riccati-Gleichung (5.4) konvergiert. Im wesentlichen müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein, vgl. [25, S. 27]. Für jedes $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$, auf jedem Intervall $[t_0, t_1]$ muss gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|\mathbf{T}_n(t) \mathbf{P}_n \mathbf{z} - \mathcal{T}(t) \mathbf{z}\| = 0, \quad (6.9)$$

wobei $\mathbf{T}_n(t)$ die Transitionsmatrix des approximierten Systems (6.2) ist und $\mathcal{T}(t)$ der Transitionoperator des abstrakten Anfangswertproblems (6.1). Somit ist die Konvergenz der Zustandslösung sicherstellt. Die Konvergenz der Lösung der Riccati-Gleichung und die Konvergenz des Reglers wird mit den folgenden Bedingungen sichergestellt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{\Pi}_n \mathbf{P}_n \mathbf{z} - \mathbf{\Pi} \mathbf{z}\| = 0 \quad (6.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{k}_n^\top \mathbf{P}_n \mathbf{z} - \mathcal{K} \mathbf{z}\| = 0. \quad (6.11)$$

Es stellt sich heraus, dass die *modale Approximation* diese Bedingungen häufig erfüllt, vgl. [24], [25].

Zur näherungsweise Lösung der Operator-Riccati-Gleichung muss zuerst die modale Approximation des erweiterten Systems (5.19) berechnet werden. Hierzu werden die Eigenwerte und Eigenfunktionen benötigt. Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen des erweiterten Systems wird das Eigenwertproblem, mit dem erweiterten Systemoperator \mathcal{A}_e

$$\mathcal{A}_e = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathbf{0} \\ -\mathcal{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

betrachtet. Wie in Kapitel 3 kann das folgende Eigenwertproblem angeschrieben werden

$$\mathcal{A}_e \begin{bmatrix} \phi_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \lambda_k^e \begin{bmatrix} \phi_k \\ \varphi_k \end{bmatrix}, \quad \phi_k \in \mathcal{X}, \varphi_k \in \mathbb{C}. \quad (6.13)$$

Die Eigenfunktionen des erweiterten Systemoperators können aus den bereits berechneten Eigenfunktionen des Operators \mathcal{A} berechnet werden. Man betrachte hierzu das folgende Eigenwertproblem

$$\mathcal{A} \phi_k = \lambda_k^e \phi_k \quad (6.14)$$

$$-\mathcal{C}_1 \phi_k = \lambda_k^e \varphi_k. \quad (6.15)$$

Die Eigenwerte λ_k^e des erweiterten Systemoperators (6.12) ist die Menge der Eigenwerte des Systemoperators \mathbf{A} und ein Eigenwert bei Null

$$\{\lambda_k^e\} = \{\lambda_k\} \cup \{0\}. \quad (6.16)$$

Somit ergeben sich die Eigenfunktionen des erweiterten Systemoperators wie folgt (siehe Anhang A.6)

$$\phi_k^e = \begin{bmatrix} \phi_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & k = 0 \\ \begin{bmatrix} \phi_n \\ -\frac{1}{\lambda_n} \mathbf{C}_1 \phi_n \end{bmatrix} & k \geq 1, n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \end{cases}, \quad (6.17)$$

mit ϕ_n aus (3.73) und λ_n aus (3.71). Der adjungierten Operator \mathbf{A}_e^* des erweiterten Systemoperators (6.12) kann einfach berechnet werden und lautet wie folgt (siehe Anhang A.7)

$$\mathbf{A}_e^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & -\mathbf{C}_1^* \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Die dazugehörigen *biorthonormalen* Eigenfunktionen werden analog zu den Eigenfunktionen ϕ_k^e berechnet (vgl. Anhang A.6) und lauten

$$\psi_k^e = \begin{cases} \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{C}_1^* \\ 1 \end{bmatrix} & k = 0 \\ \begin{bmatrix} \psi_n \\ 0 \end{bmatrix} & k \geq 1, n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \end{cases}. \quad (6.19)$$

Mit Hilfe des *Resolventenoperators* $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ nach [6, Theorem 2.3.5, S.41]

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \langle \mathbf{x}, \psi_k \rangle_{\mathcal{X}} \phi_k, \quad (6.20)$$

kann (6.19) weiter vereinfacht werden

$$\psi_k^e = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \langle \mathbf{C}_1^*, \phi_n \rangle_{\mathcal{X}} \psi_n \\ 1 \end{bmatrix} & k = 0 \\ \begin{bmatrix} \psi_n \\ 0 \end{bmatrix} & k \geq 1, n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \end{cases}. \quad (6.21)$$

Für die Berechnung der Eigenfunktionen wird noch der adjungierte Ausgangsoperator \mathbf{C}_1^* benötigt, welcher in Anhang A.8 berechnet wird. Mit den oben berechneten Eigenwerten und Eigenfunktionen kann die modale Approximation des erweiterten Systems für die näherungsweise Lösung der Operator-Riccati-Gleichung, berechnet werden (siehe Anhang A.9) und anhand dieser dann die näherungsweise Lösung der Operator-Riccati-Gleichung für den linear quadratisch integral (LQI)-Entwurf.

Bemerkenswert ist, dass die modale Approximation des erweiterten Systems (siehe Anhang A.9) zur näherungsweisen Lösung der Operator-Riccati-Gleichung (5.4) und die folgende *Early-Lumping* modale Approximation

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_1^* & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2^* \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.22)$$

$$y = [\mathbf{C}_1^* \quad 0] \mathbf{z}, \quad (6.23)$$

mit den Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B}_2^* und \mathbf{C}_1^* nach Kapitel 3 identische Streckenbeschreibungen liefern. Dies ist allerdings nur dann der Fall, wenn für die Berechnung der Eigenfunktionen ψ_k^e der Reihenabbruch mit der gleichen Anzahl von Elementen, wie bei der Berechnung der modalen Approximation in Kapitel 3, durchgeführt wird. In Abbildung 6.1 ist der Vergleich zwischen der *Early Lumping* und *Late Lumping* Streckenbeschreibung für den LQI-Entwurf dargestellt.

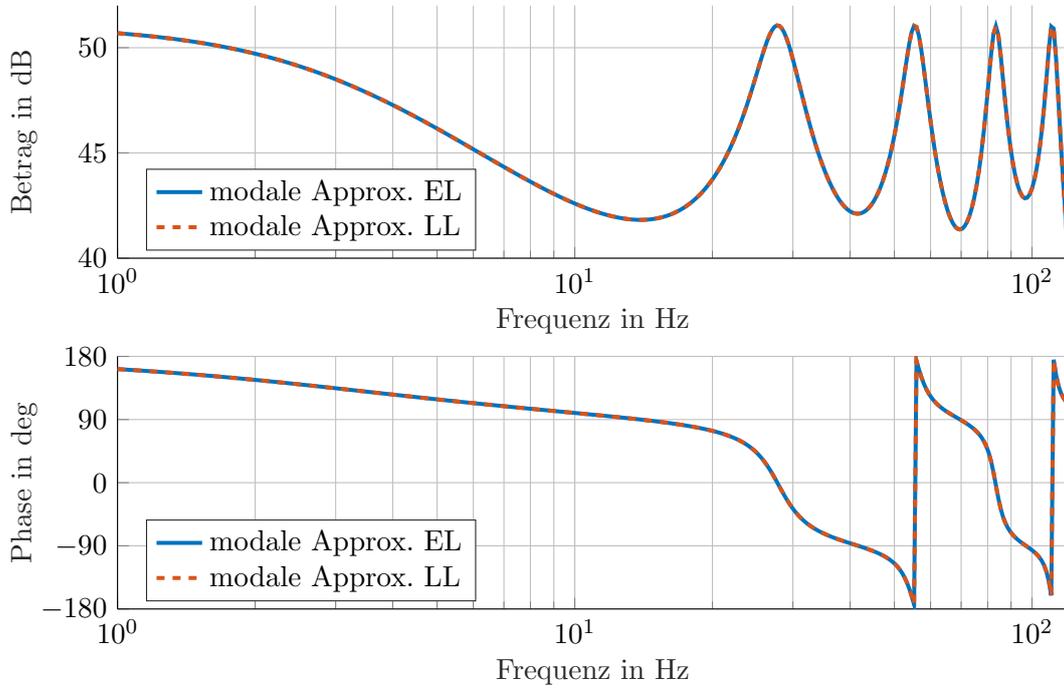


Abbildung 6.1: Vergleich zwischen Early- und Late Lumping Approximation für den LQI-Entwurf

Wie man erkennt, sind die beiden Kurven identisch. Aus dem obigen Ergebnis lässt sich schließen, dass der in Kapitel 3 diskutierte Early Lumping LQI-Entwurf anhand einer modalen Approximation der Strecke und der Late Lumping LQI-Entwurf durch näherungsweise Lösung der Operator-Riccati-Gleichung, wie hier bzw. in Kapitel 4 diskutiert, mit Hilfe einer modalen Approximation das selbe Ergebnis liefern und somit gleichwertig sind.

6.2 Näherungsweise Lösung der Operator-Riccati-Gleichung für den Beobachter-Entwurf

Im Folgenden wird die Vorgangsweise aus dem vorherigen Abschnitt auf die Operator Riccati-Gleichung für den Beobachterentwurf übertragen. Die Vorgehensweise ist gleich wie zuvor beim LQ-Entwurf. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen des erweiterten Systems (5.32) können mit Hilfe der bereits berechneten Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators \mathcal{A} (3.13) berechnet werden. Der Systemoperator des erweiterten Systems lautet

$$\mathcal{A}_e = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{P} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Wie in Kapitel 3 kann das folgende Eigenwertproblem angeschrieben werden

$$\mathcal{A}_e \begin{bmatrix} \phi_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \lambda_k^e \begin{bmatrix} \phi_k \\ \varphi_k \end{bmatrix}, \quad \phi_k \in \mathcal{X}, \quad \varphi_k \in \mathbb{C}. \quad (6.25)$$

Den erweiterten Systemoperator (6.24) in das Eigenwertproblem (6.25) eingesetzt liefert

$$\mathcal{A}\phi_k + \mathcal{P}\varphi_k = \lambda_k^e \phi_k \quad (6.26)$$

$$0 = \lambda_k^e \varphi_k. \quad (6.27)$$

Die Eigenwerte des erweiterten Systemoperators (6.24) lauten wie folgt

$$\{\lambda_k^e\} = \{\lambda_k\} \cup \{0\}, \quad (6.28)$$

wobei λ_k die Eigenwerte des Systemoperators \mathcal{A} sind. Somit ergeben sich die Eigenfunktionen des erweiterten Systemoperators wie folgt

$$\phi_k^e = \begin{bmatrix} \phi_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{P} \\ 1 \end{bmatrix} & k = 0 \\ \begin{bmatrix} \phi_n \\ 0 \end{bmatrix} & k \geq 1, n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \end{cases}, \quad (6.29)$$

mit ϕ_n aus (3.73) und λ_n aus (3.71). Wieder lässt sich eine Vereinfachung mittels des *Resolventenoperators* (6.20) durchführen

$$\phi_k^e = \begin{bmatrix} \phi_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \langle \mathcal{P}, \psi_n \rangle_{\mathcal{X}} \phi_n \\ 1 \end{bmatrix} & k = 0 \\ \begin{bmatrix} \phi_n \\ 0 \end{bmatrix} & k \geq 1, n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \end{cases}. \quad (6.30)$$

Die dazugehörigen *biorthonormalen* Eigenfunktionen lauten

$$\psi_k^e = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & k = 0 \\ \begin{bmatrix} \psi_n \\ \frac{1}{\mu_n} \mathcal{P}^* \psi_n \end{bmatrix} & k \geq 1, n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \end{cases}, \quad (6.31)$$

mit ψ_n aus (3.75), μ_n aus (3.74). Hier wird auch deutlich warum in Kapitel 3 der Eingangs- und Ausgangsraum aus den komplexen Zahlen gewählt wurde. Sonst könnte der adjungierte Operator \mathcal{P}^* nicht auf die im Allgemeinen komplexwertigen Eigenfunktionen ψ_k angewendet werden. Der adjungierten Operator \mathcal{A}_e^* lautet wie folgt

$$\mathcal{A}_e^* = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathcal{P}^* & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Der adjungierte Eingangsoperator der Störung \mathcal{P}^* wird in Anhang A.10 berechnet. Zur Lösung der Operator-Riccati-Gleichung mit Hilfe der modalen Approximation muss diese für das erweiterte System (5.32) berechnet werden (siehe Anhang A.11).

Wie schon beim LQI-Entwurf ist das Bemerkenswerte, dass die modale Approximation des erweiterten Systems (siehe Anhang A.11) zur näherungsweise Lösung der Operator-Riccati-Gleichung (5.26) und die folgende *Early-Lumping* modale Approximation

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & \mathbf{B}_1^* \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2^* \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.33)$$

$$y = [\mathbf{C}^* \quad \mathbf{0}] \mathbf{z}, \quad (6.34)$$

mit den Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B}_1^* , \mathbf{B}_2^* und \mathbf{C}_1^* nach Kapitel 3 identische Streckenbeschreibungen liefern. In den Abbildungen 6.2 und 6.3 ist der Vergleich zwischen der *Early Lumping* und *Late Lumping* Streckenbeschreibung für den Beobachterentwurf dargestellt.

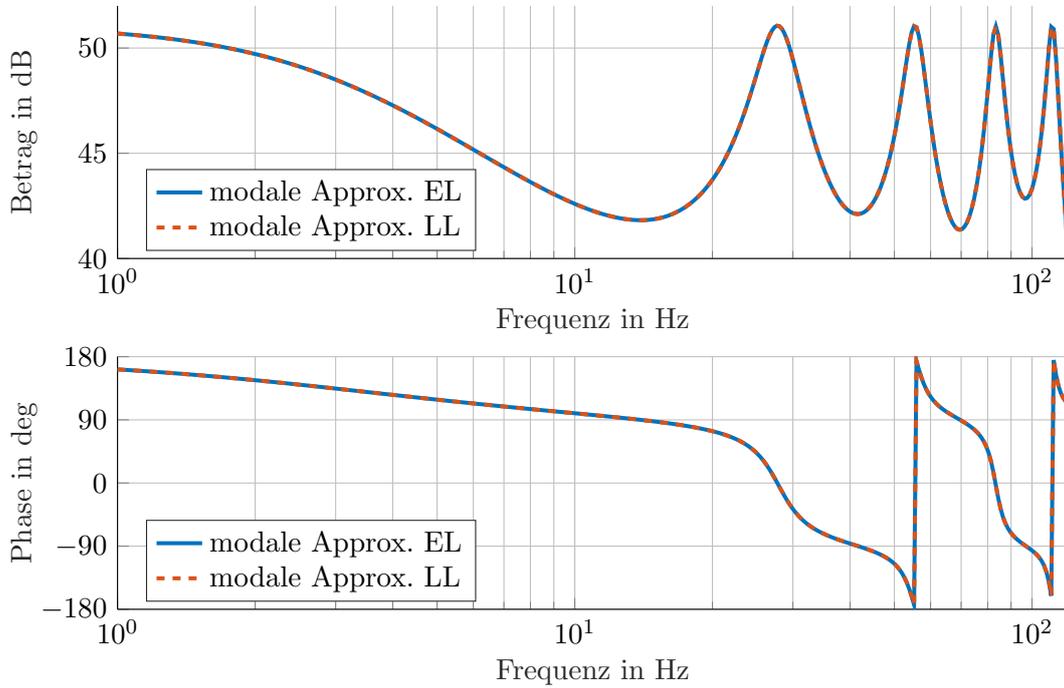


Abbildung 6.2: Vergleich zwischen Early- und Late Lumping Approximation für den Beobachterentwurf, jeweils für den Frequenzgang von u nach p_2

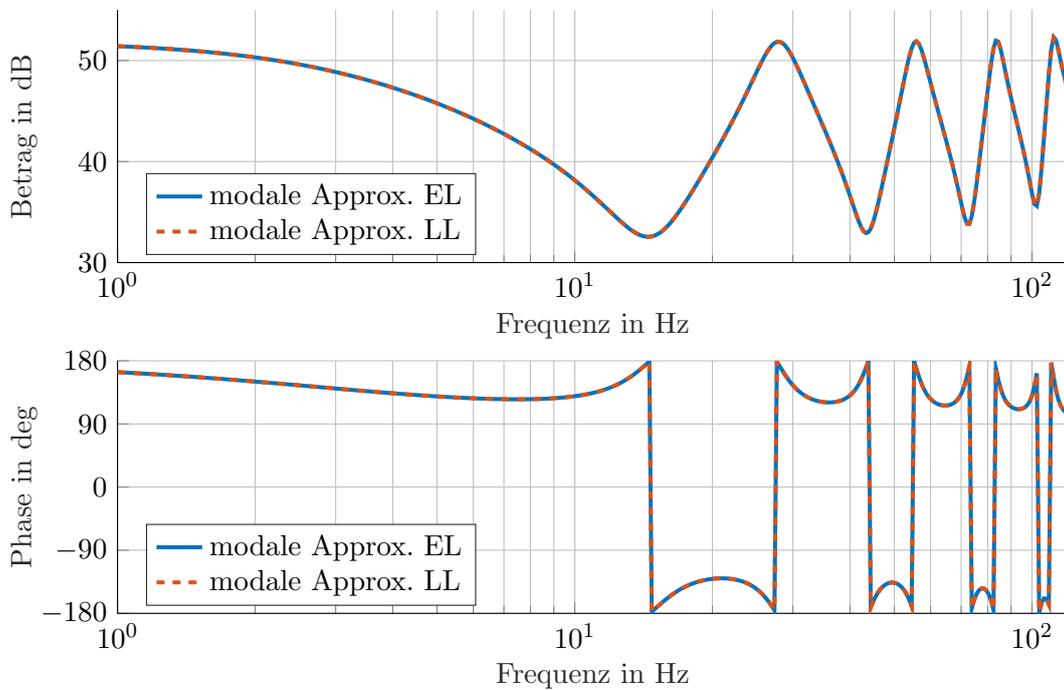


Abbildung 6.3: Vergleich zwischen Early- und Late Lumping Approximation für den Beobachterentwurf, jeweils für den Frequenzgang von u nach p_3

Wie man erkennt sind die beiden Systembeschreibungen identisch, was darauf schließen lässt, dass in diesem Fall der Early Lumping Entwurf anhand einer modalen Approximation der Strecke und der Late Lumping Entwurf durch näherungsweise Lösung der Operator-Riccati-Gleichung identische Ergebnisse liefern.

Kapitel 7

Experimentelle Verifikation

Im folgenden Kapitel werden die in Kapitel 4 und 5 entworfenen Regler in der Simulation und am realen Prüfstand verifiziert. Die Regler werden an zwei unterschiedlichen Prüfstandskonfigurationen getestet: einem Rohr mit konstantem Querschnitt und einem Aufbau bestehend aus mehreren Rohrsegmenten unterschiedlicher Querschnitte.

7.1 Implementierung

Die entworfen, zeitkontinuierlichen Regler wurden auf einem Echtzeitsystem der Firma *dSPACE* implementiert. Hierzu wurden die Regler mit Hilfe des *Rückwärts-Euler-Verfahren* zeitdiskretisiert. Die Abtastrate betrug hierbei 10 kHz. In Abbildung 7.1 ist der Prüfstandsaufbau dargestellt.

7.2 Rohr mit konstantem Querschnitt

Als erstes Experiment wird ein Reglerentwurf, wie in Kapitel 4 und 5 vorgestellt, an einem Rohr mit konstantem Querschnitt durchgeführt. In Abbildung 7.2 ist der Prüfstandsaufbau schematisch dargestellt.

Der Aufbau soll die Druckreglung des Abgaspfad simulieren. Die Störung durch die Verbrennungskraftmaschine (VKM) wird durch die linke Ventilklappe α_1 simuliert und der Stelleingriff erfolgt über die rechte Ventilklappe α_2 . Die Regelgröße ist der Druck p_2 am linke Ende des Rohrs. Das verteilt parametrische Rohr ist durch seinen Querschnitt A , die Gesamtlänge L und die Schallgeschwindigkeit im Arbeitspunkt a_0 charakterisiert. Die Versuchsparameter sind Anhang B.3 aufgelistet.

Es werden jeweils zwei *Testzyklen* untersucht. Die Versuchsergebnisse am Prüfstand sind gemeinsam mit den Simulationsergebnissen in den folgenden Abbildungen dargestellt. Es werden vier Reglerkonfigurationen getestet: LQI-Entwurf mit modaler Approximation, PI-Mittendruckregler mit modaler Approximation, LQI-Entwurf mit FVM Approximation und PI-Mittendruckregler mit FVM Approximation.



(a) Kompressor

(b) Stellventil

Abbildung 7.1: vereinfachter Prüfstands Aufbau

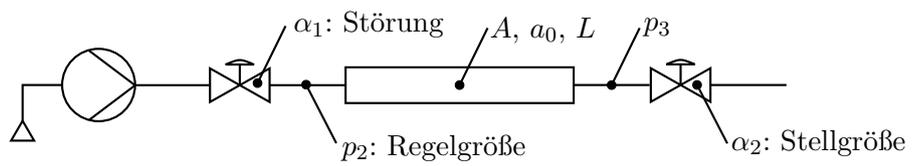


Abbildung 7.2: schematischer Aufbau der zu regelnden Strecke

7.2.1 Testzyklus 1

In Abbildung 7.3 sind die gemessenen Massenströme für die vier Reglerkonfigurationen dargestellt. Diese können nicht mit der notwendigen Dynamik gemessen werden, sondern werden anhand der Ventilkennlinien und der gemessenen Drücken berechnet.

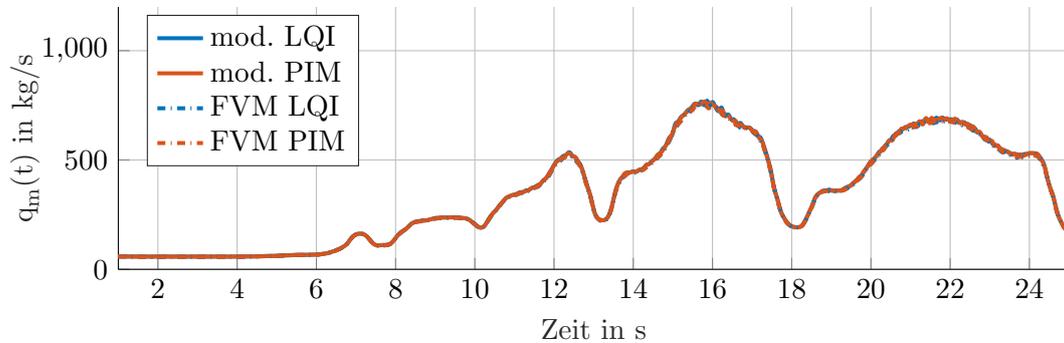


Abbildung 7.3: Massenstrom, Testzyklus 1

Im Wesentlichen besteht kein Unterschied zwischen den resultierenden Massenströmen für die verschiedenen Regler. In Abbildung 7.4 sind die Messergebnisse und Simulationsergebnisse für die Reglerkonfigurationen mit modaler Approximation dargestellt.

Hierbei erkennt man, dass es praktisch keinen Unterschied zwischen den beiden Reglerstrukturen (LQI-Regler und PI-Mittendruckregler) gibt. Am Prüfstand zeigte die Konfiguration mit FVM Approximation keine ausreichende Dämpfung und es wurde die erste Resonanzfrequenz des Rohrs angeregt. Um dieses Problem zu beheben wurde der Entwurf im Vergleich zur modalen Approximation etwas angepasst. Im Speziellen wurde die Gewichtung der Stellgröße r_c vervierfacht und die Gewichtung der Zustände um das 25-fache verringert. Die Gewichtung des Integralteils wurde beibehalten (siehe Anhang B.3.2). In Abbildung 7.5 ist das ganze noch einmal für die Reglerkonfiguration mit FVM Approximation dargestellt.

Auch hier zeigt sich kein Unterschied zwischen den beiden Reglerstrukturen. Allerdings ist das Ergebnis der Reglerkonfiguration mit FVM Approximation im Vergleich zur modalen Approximation schlechter, was durch die unterschiedliche Reglerparametrierung erklärbar ist.

In den Abbildungen 7.4 und 7.5 erkennt man bei allen Reglerkonfigurationen eine brauchbare Störunterdrückung und die Gewährleistung der stationären Genauigkeit. Ebenso ist aus den obigen Abbildungen zu erkennen, dass die Simulationsergebnisse und die Messergebnisse eine relativ gute Übereinstimmung aufweisen, allerdings scheint die Simulation eine höhere Dämpfung aufzuweisen. Dies ist dadurch zu erklären, dass die Simulation mittels der finiten Volumen Methode durchgeführt wird und diese eine höhere, sogenannte *numerische* Dämpfung aufweist, vgl. Abbildung 4.2. Der selbe Effekt führt auch dazu, dass die Regelung anhand der FVM Approximation eine geringere Dämpfung aufweist, da diese ja bereits in der Entwurfsstrecke vorhanden ist.

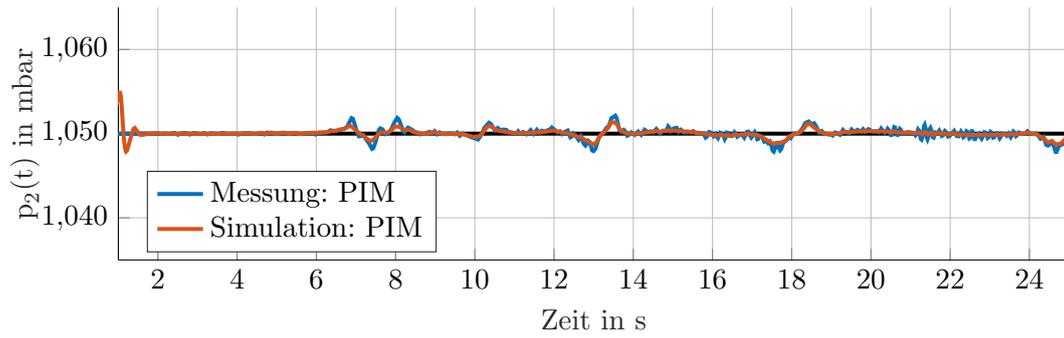
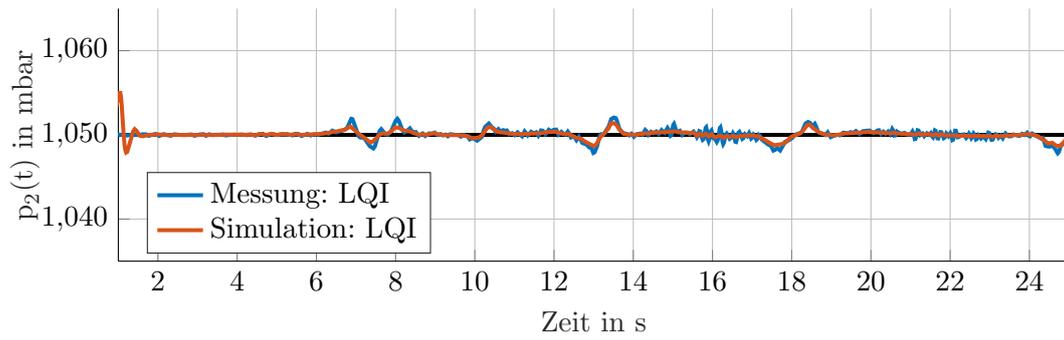


Abbildung 7.4: Modale Approximation, Testzyklus 1

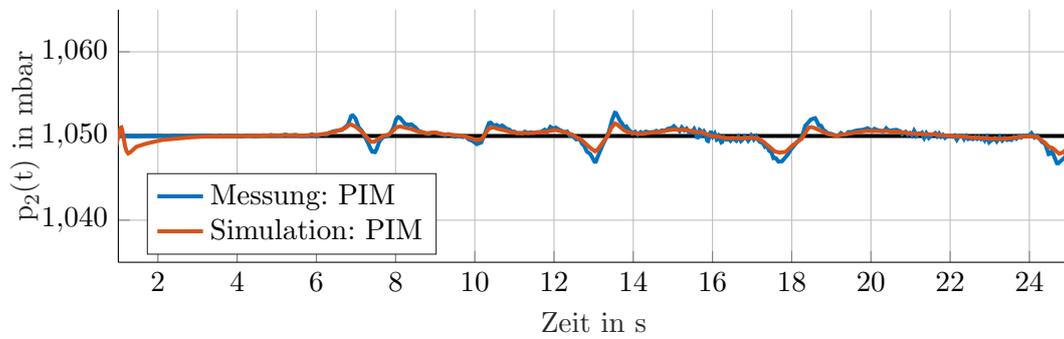
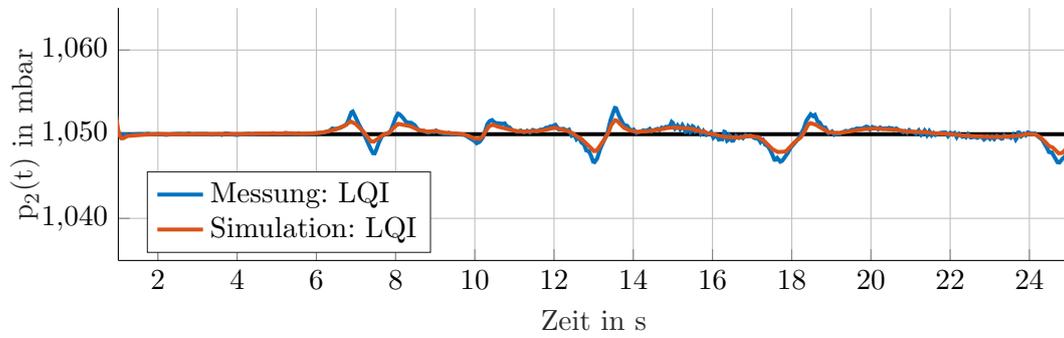


Abbildung 7.5: FVM Approximation, Testzyklus 1

7.2.2 Testzyklus 2

Im Vergleich zum 1. Testzyklus ist der 2. Testzyklus deutlich dynamischer, im Speziellen beinhaltet dieser drei relativ große Störsprünge. In Abbildung 7.6 sind wieder die berechneten Massenströme der vier Konfigurationen dargestellt.

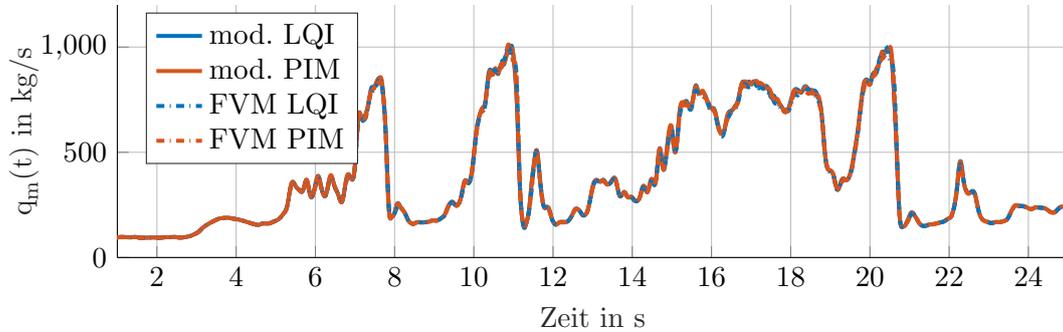


Abbildung 7.6: Massenstrom, Testzyklus 2

Wiederum erkennt man kaum einen Unterschied zwischen den Reglerkonfigurationen. In Abbildung 7.7 ist der zu regelnde Druck am linken Ende des Rohrs $p_2(t)$, für die modale Approximation dargestellt.

Wie schon beim 1. Testzyklus ist zwischen den Ergebnissen mit LQI-Regler und mit PI-Mittendruckregler kein Unterschied festzustellen. In Abbildung 7.8 sind die Simulationsergebnisse und die Messergebnisse für die Reglerkonfigurationen mit FVM Approximation dargestellt.

Auch hier erkennt man keine großen Unterschiede zwischen den beiden Reglerstrukturen. Im Vergleich zur modalen Approximation weist die FVM Approximation größere negative Ausreißer auf, dafür aber etwas geringere in positive Richtung. Dies ist jedoch auf die unterschiedliche Reglerparametrierung zurückzuführen. Im Schnitt zeigen die Ergebnisse für den 2. Testzyklus ein stabiles Verhalten, allerdings ist die Störunterdrückung in der Simulation wesentlich besser als am Prüfstand. Wünschenswert wäre die Einhaltung eines 10 mbar Bandes um die Referenzgröße. Dies wird von der Reglerkonfiguration mit modaler Approximation fast eingehalten, vgl. Abbildung 7.7. Denkbar wäre, dass dieses Ziel, mit dieser Konfiguration und einer besseren Einstellung der Reglerparameter erreicht werden kann. Diese wurden lediglich empirisch mittels der oben beschriebenen Testzyklen eingestellt.

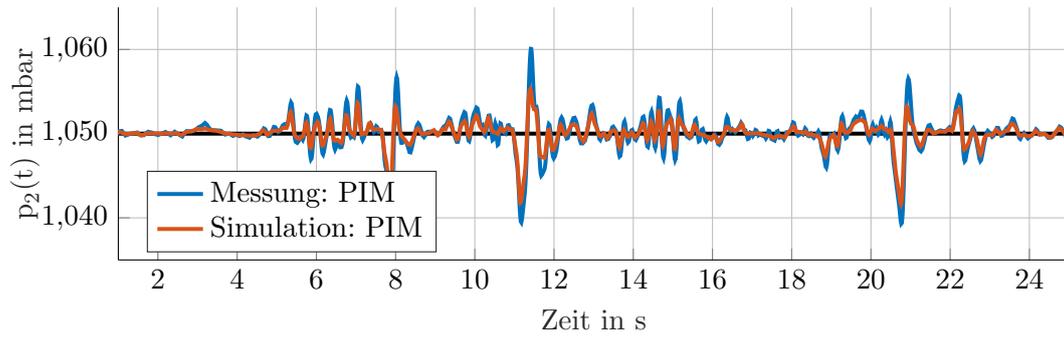
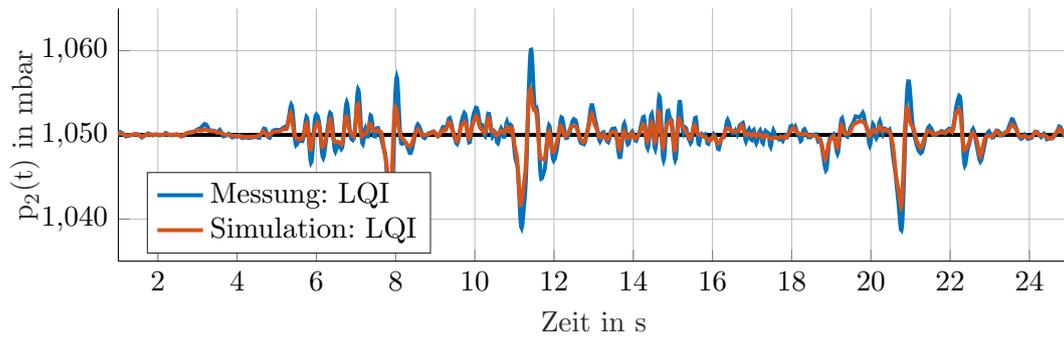


Abbildung 7.7: Modale Approximation, Testzyklus 2

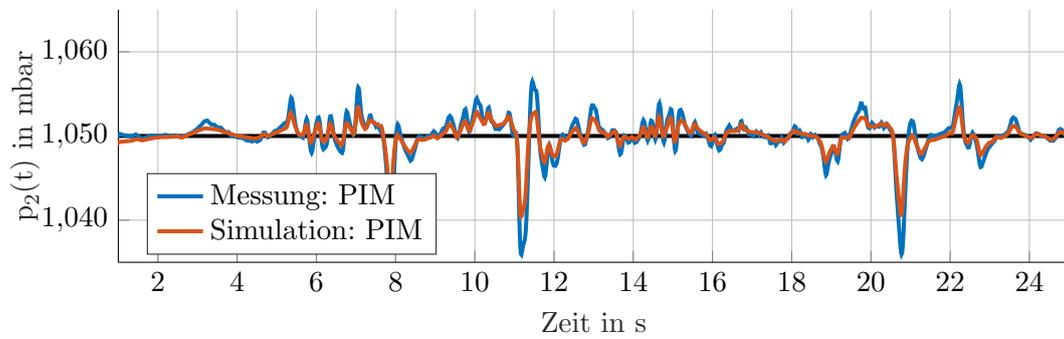
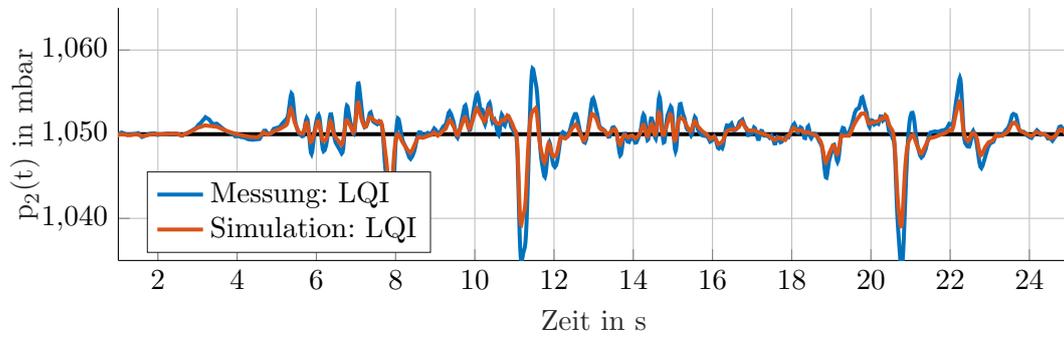


Abbildung 7.8: FVM Approximation, Testzyklus 2

7.3 Rohr mit variablem Querschnitt

Um die *Robustheit* der Regelung gegenüber Modellunsicherheiten zu testen wird die Regelung an einem Aufbau ausprobiert, der aus mehreren Rohrsegmenten unterschiedlichen Querschnitts und nicht mehr aus einem Rohr mit konstantem Querschnitt besteht. Der Reglerentwurf wird allerdings trotzdem anhand eines Rohrs mit konstantem Querschnitt durchgeführt. Die Versuchssparameter sind Anhang B.4 aufgelistet. In Abbildung 7.9 ist der Prüfstands Aufbau mit den vier unterschiedlichen Rohrsegmenten schematisch dargestellt.

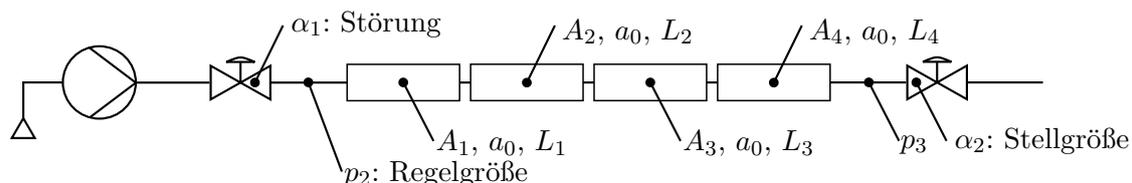


Abbildung 7.9: schematischer Aufbau der zu regelnden Strecke

Die Länge L ist hierbei die Summe der Segmentlängen

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \quad (7.1)$$

und die Querschnittsfläche A ist der mit der Segmentlänge gewichtete Mittelwert der einzelnen Querschnitte

$$A = \frac{1}{L} (A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_3 L_3 + A_4 L_4), \quad (7.2)$$

wodurch sichergestellt ist, dass das Gesamtvolumen $AL = \sum_i A_i L_i$ gleich bleibt. Der Eigentliche Reglerentwurf ist dann gleich wie für den Aufbau mit konstantem Querschnitt. Wieder werden die Regler an zwei Testzyklen getestet.

7.3.1 Testzyklus 1

In Abbildung 7.10 sind die aus den Ventilkennlinien und den gemessenen Drücken berechneten, Massenströme für den ersten Testzyklus dargestellt.

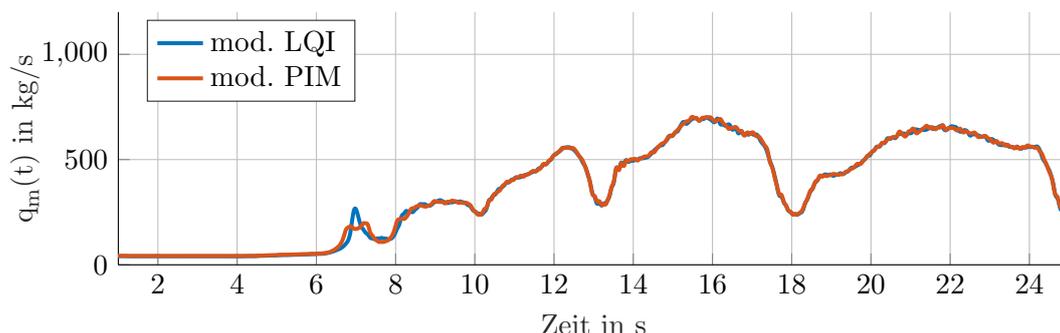


Abbildung 7.10: Massenstrom, Testzyklus 1

Bis auf eine Abweichung bei 7 s gibt es keine Unterschiede zu erkennen. Allerdings die Abweichung durch die unterschiedlichen Druckverläufe in Abbildung 7.11 erklärbar. In Abbildung 7.11 ist wieder der Vergleich zwischen dem LQI-Regler und dem PI-Mittendruckregler dargestellt.

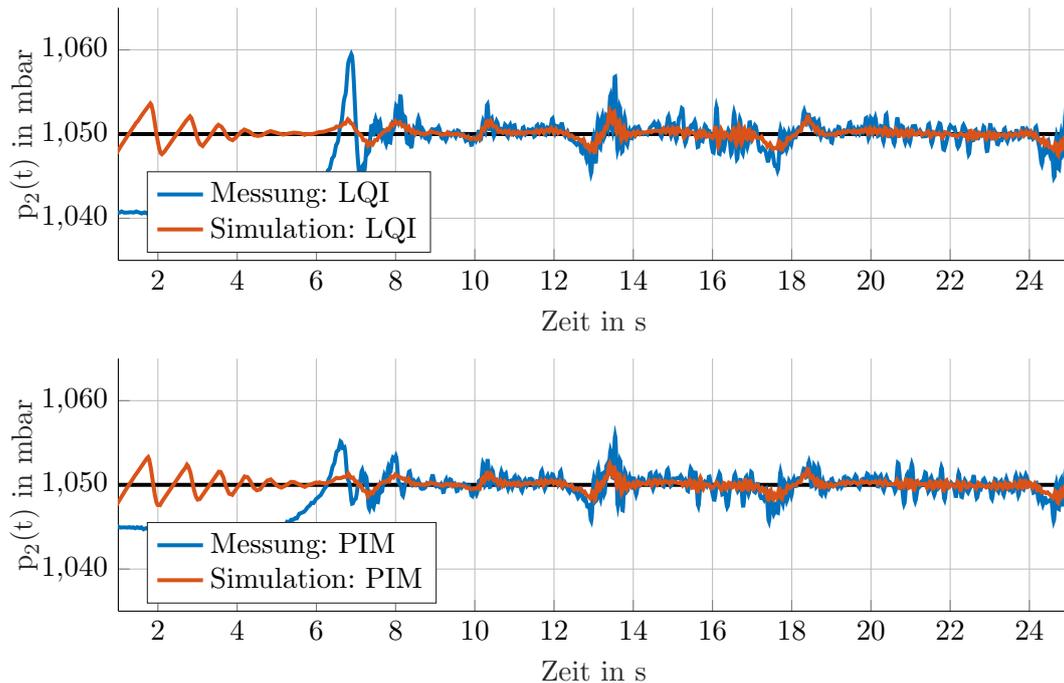


Abbildung 7.11: Modale Approximation, Testzyklus 1

Man erkennt eine relativ große Abweichung zu Beginn. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die verwendete *Regelklappe* α_1 am Prüfstand eine Leckage aufweist. Es dauert ca. 7 s bis sich trotz Leckage der vorgegebene Referenzdruck einstellt. Bis auf dieses Verhalten zu Beginn, welches nicht modelliert wurde, zeigen die Simulation und Messung eine gute Übereinstimmung. Man erkennt, dass die Störunterdrückung trotz des offensichtlich nur angenäherten Modells in beiden Fällen gut ist und mit den Ergebnissen aus dem vorherigen Versuch vergleichbar ist, siehe Abbildung 7.4 und 7.5.

7.3.2 Testzyklus 2

In Abbildung 7.12 ist wieder der berechnete Massenstrom für den zweiten Testzyklus dargestellt.

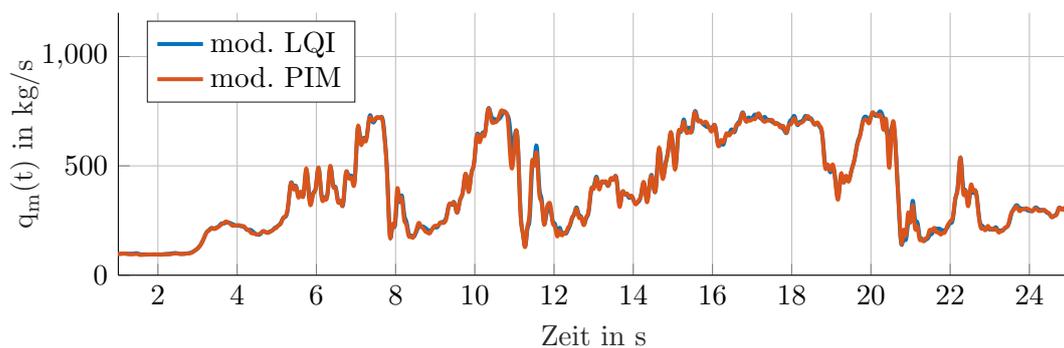


Abbildung 7.12: Massenstrom, Testzyklus 2

Hierbei ist zu bemerken, dass im Vergleich zum ersten Testzyklus darauf geachtet wurde, dass sich der Druck im Rohr vor dem Start des Zyklus aufgebaut hat und so die Leckage der Stellklappe nicht ins Gewicht fällt. In Abbildung 7.13 sind die Ergebnisse für den zweiten Testzyklus, unter Verwendung der Reglerkonfiguration mit modaler Approximation dargestellt.

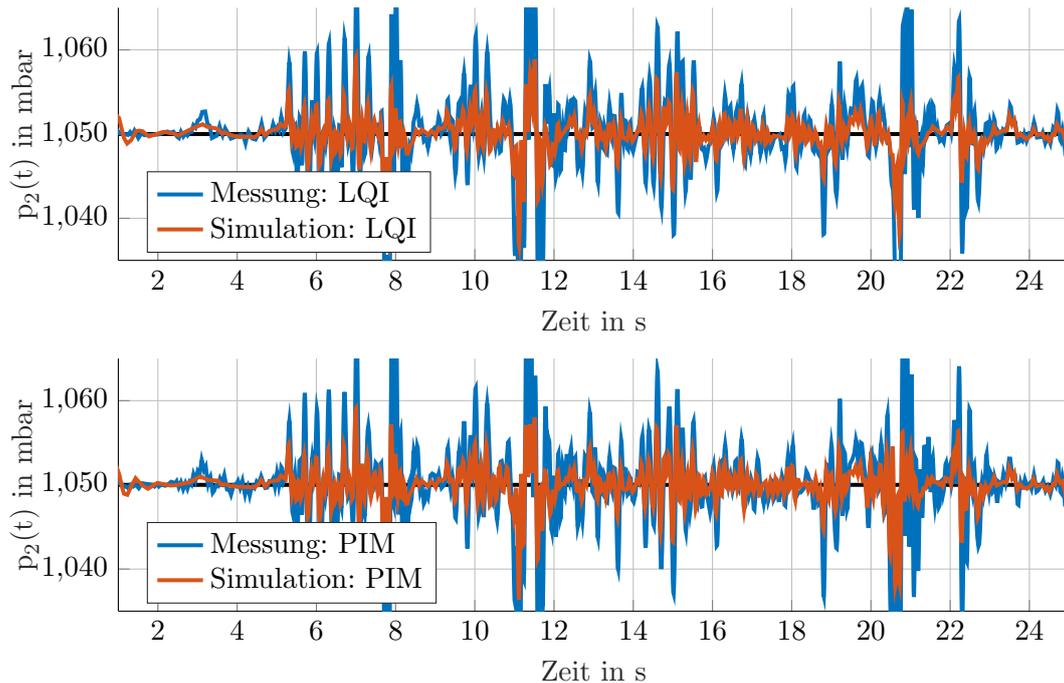


Abbildung 7.13: Modale Approximation, Testzyklus 2

Man erkennt, dass die Simulationsergebnisse wesentlich besser sind als die Messergebnisse. Allerdings zeigen die obigen Abbildungen die Robustheit der Regelung gegenüber Modellunsicherheiten. Zwar ist das Ergebnis für den zweiten Testzyklus nicht mehr wirklich zufriedenstellend, allerdings wird der Regler auch nicht instabil und zumindest für den ersten Testzyklus ist das Ergebnis zufriedenstellend.

7.4 Simulationsstudie: Einbindung eines dritten Drucksensors

Bei allen getesteten Reglern werden lediglich zwei Drucksensoren verwendet. Diese sind jeweils an den Rohrenden angebracht. Mit Hilfe einer Simulationsstudie wird der Einfluss eines zusätzlichen Drucksensor p_5 in der Mitte des Rohrs untersucht. Die Einbindung dieses zusätzlichen Sensors in den Regler- und Beobachterentwurf ist trivial und wird hier nicht näher erläutert. Alle notwendigen Methoden und Ergebnisse wurden in den obigen Kapiteln bereits behandelt.

In Abbildung 7.14 sind die Ergebnisse einer Simulationsstudie dargestellt, in welcher ein Reglerentwurf anhand der modalen Approximation mit 3 Drucksensoren getestet wird. Durch die bessere Schätzung des Zustandsvektors kann der Reglerentwurf angepasst werden. Im Speziellen wurde die Gewichtung des Integralteils vergrößert (siehe Anhang B.5).

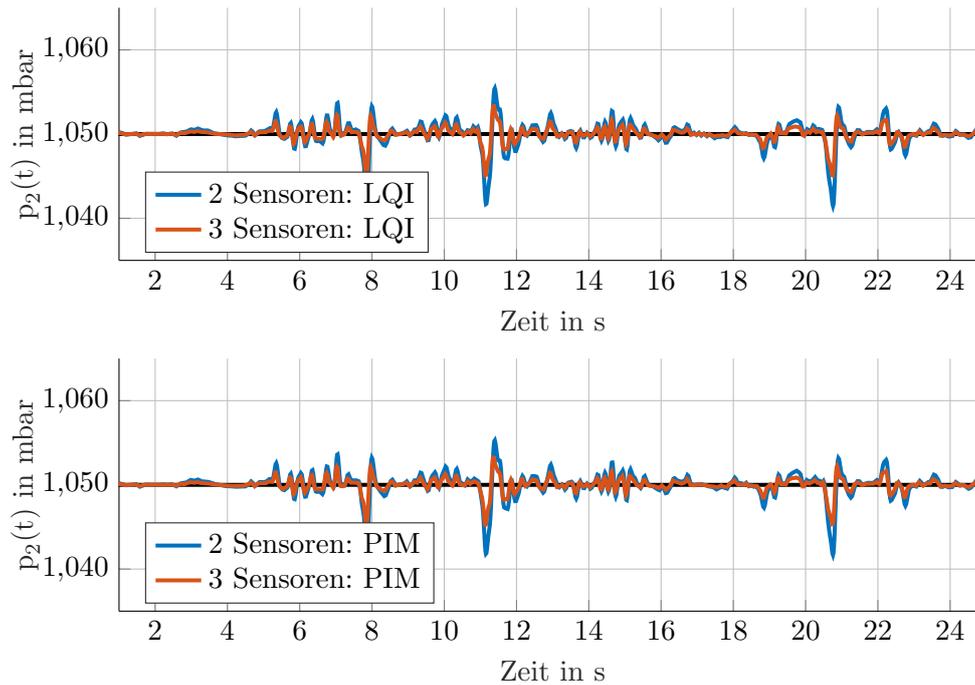


Abbildung 7.14: Vergleich zwischen 2 und 3 Drucksensoren, Testzyklus 2

Es zeigt sich, zumindest in der Simulation, eine deutliche Verbesserung gegenüber dem Einsatz von lediglich zwei Drucksensoren, wobei dieser Effekt hauptsächlich auf die veränderten Reglerparameter zurückzuführen ist. Auf die Untersuchung des Einflusses bei Verwendung der FVM Approximation wird hier verzichtet, es lässt sich jedoch ein ähnlicher Effekt vermuten.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Dieses Kapitel gibt eine kurze Zusammenfassung der Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit gegeben. Außerdem wird ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen und zukünftige Fragestellungen gegeben.

8.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden, am Beispiel einer Druckregelung für Motor-Prüfstände, Methoden zur Regelung und Beobachtung des Druckverlaufs in einem Rohr betrachtet. Ausgehend von der physikalischen Modellbildung wird anhand partieller Differentialgleichungen ein mathematisches Modell zur Beschreibung des Druckverlaufs aufgestellt. Als eine effektive Methode zur numerischen Simulation des Modelles wird die Finite Volumen Methode (FVM) verwendet.

Anhand der Systembeschreibung mittels partieller Differentialgleichungen wird die in diesem Gebiet weit verbreitete Darstellung anhand eines abstrakten Anfangswertproblems untersucht und auf das vorliegende System angewendet. Die Darstellung als abstraktes Anfangswertproblem beruht größtenteils auf der Operatorschreibweise des Problems, was eine sehr kompakte Schreibweise ermöglicht. Viele der Eigenschaften und Methoden für verteilt parametrische Systeme sind denen für konzentriert parametrische Systeme sehr ähnlich. Insbesondere die Synthese und Analyse anhand der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Systemoperators weisen deutliche Gemeinsamkeiten zum konzentriert parametrischen Fall auf. Im vorliegenden Fall handelt es sich überdies um ein Riesz-Spektralsystem, was die weitere Analyse wesentlich vereinfacht.

Mit Hilfe der Operatorschreibweise werden die partiellen Differentialgleichungen als abstraktes Anfangswertproblem angeschrieben. Diese Darstellung erlaubt die Berechnung einer sogenannten modalen Approximation des Systems, welche anschließend für einen Regler- und Beobachterentwurf verwendet wird. Ebenso wird die FVM Approximation für einen Regler- und Beobachterentwurf verwendet. Allerdings liefert die Approximation mit Hilfe der FVM eine Systembeschreibung von relativ hoher Ordnung. Diese wird daher vor einem praktischen Einsatz noch reduziert.

Der Regler- und Beobachterentwurf für VPS kann auf zwei Arten erfolgen: mittels Early Lumping oder mittels Late Lumping. Diese Herangehensweisen werden jeweils separat betrachtet.

Es stellt sich heraus, dass der Late Lumping Ansatz, zumindest unter Verwendung der modalen Approximation, die selben Ergebnisse liefert wie der Early Lumping Ansatz. Es werden jeweils zwei verschiedene Reglerstrukturen entworfen: Ein linearer Zustandsregler mit quadratischem Gütemaß, welcher um einen Integralteil erweitert wird und eine beobachterbasierte Regelung des mittleren Drucks im Rohr. Die beiden Strukturen sind einander sehr ähnlich und zeigten auch in der Simulation und am Prüfstand vergleichbare Ergebnisse.

Sowohl in der Simulation als auch bei den Messungen am Prüfstand zeigen die entworfenen Regler eine ausreichende Regelgüte unter Einhaltung der stationären Genauigkeit. Speziell die mit der modalen Approximation entworfenen Regler zeigen eine bessere Performance als die mittels der FVM Approximation entworfenen Regler.

8.2 Ausblick

Die Analyse und Synthese anhand der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Systemoperators zeigt sich als mathematisch sehr aufwendig. Im vorliegenden Fall wird die zu beschreibende Geometrie mittels eines sehr einfachen Modells angenähert, was die analytische Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen überhaupt erst möglich macht. Speziell aus einem praktischen Standpunkt heraus kann in zukünftigen Arbeiten untersucht werden in wie fern hier auch *numerische Methoden* zum Einsatz kommen können.

Bei allen getesteten Reglern werden lediglich zwei Drucksensoren verwendet, welche an den beiden Rohrenden positioniert sind. Mittels einer Simulationsstudie konnte gezeigt werden, dass zusätzliche Sensoren die Regelgüte verbessern. Es stellt sich die Frage wie viele Sensoren und welche Positionierung dieser zum besten Ergebnis führt.

Im Zuge dieser Arbeit wird immer von einer zeitkontinuierlichen Implementierung ausgegangen und keinerlei Augenmerk auf die Zeitdiskretisierung gelegt. Man spricht in so einem Fall auch von einem *quasi-kontinuierlichen* Entwurf, was für sehr kleine Abtastzeiten typischerweise zu keinem Problem führt. Eine mögliche Verbesserung kann dadurch erreicht werden, dass die zeitdiskrete Implementierung schon beim Entwurf berücksichtigt wird.

Anhang A

Mathematische Ergänzungen

A.1 Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen

Es wird das folgende Eigenwertproblem

$$\mathcal{A}\phi_k = \lambda_k \phi_k, \quad (\text{A.1})$$

für den Operator (3.64), mit dem Definitionsbereich (3.66) betrachtet. Mit den nichttrivialen Eigenfunktionen

$$\phi_k = \begin{bmatrix} \phi_{1,k}(\xi) \\ \phi_{2,k}(\xi) \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}, \quad (\text{A.2})$$

ergibt sich das folgende Randwertproblem

$$-\frac{a_0^2}{A} \frac{d}{d\xi} \phi_{2,k}(\xi) = \lambda_k \phi_{1,k}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq L \quad (\text{A.3a})$$

$$-A \frac{d}{d\xi} \phi_{1,k}(\xi) = \lambda_k \phi_{2,k}(\xi) \quad (\text{A.3b})$$

$$\phi_{2,k}(0) - c_{1,p} \phi_{1,k}(0) = 0 \quad (\text{A.3c})$$

$$\phi_{2,k}(L) - c_{2,p} \phi_{1,k}(L) = 0. \quad (\text{A.3d})$$

Bestimmung der Eigenwerte

Die allgemeine Lösung des obigen Problems lautet

$$\phi_{1,k}(\xi) = k_1 \cosh\left(\frac{\xi \lambda_k}{a_0}\right) - k_2 \frac{a_0}{A} \sinh\left(\frac{\xi \lambda_k}{a_0}\right) \quad (\text{A.4a})$$

$$\phi_{1,k}(\xi) = -k_1 \frac{a_0}{A} \sinh\left(\frac{\xi \lambda_k}{a_0}\right) - k_2 \cosh\left(\frac{\xi \lambda_k}{a_0}\right), \quad (\text{A.4b})$$

mit den noch zu bestimmenden Konstanten k_1 und k_2 . Die obigen Gleichungen in die Randbedingungen (A.3c) und (A.3d) eingesetzt ergibt

$$c_{1,p} k_1 - k_2 = 0 \quad (\text{A.5a})$$

$$(A^2 k_1 - a_0^2 k_2 c_{2,p}) \sinh\left(\frac{\lambda_k L}{a_0}\right) + A a_0 (k_1 c_{2,p} - k_2) \cosh\left(\frac{\lambda_k L}{a_0}\right) = 0, \quad (\text{A.5b})$$

bzw. in Matrixform angeschrieben

$$\Theta(\lambda_k) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.6})$$

mit der Koeffizientenmatrix $\Theta(\lambda_k)$

$$\Theta(\lambda_k) = \begin{bmatrix} c_{1,p} & -1 \\ A \left(a_0 c_{2,p} \cosh\left(\frac{L\lambda_k}{a_0}\right) + A \sinh\left(\frac{L\lambda_k}{a_0}\right) \right) & -a_0 \left(A \cosh\left(\frac{L\lambda_k}{a_0}\right) + a_0 c_{2,p} \sinh\left(\frac{L\lambda_k}{a_0}\right) \right) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Die nichttriviale Lösung von (A.3) muss also die folgende Bedingung erfüllen

$$\det(\Theta(\lambda_k)) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Somit ergibt sich die Lösung für λ_k zu

$$\lambda_k = \frac{a_0(jk\pi + \beta)}{L}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (\text{A.9})$$

mit der reellen Konstante β

$$\beta = \ln \left(\frac{\sqrt{A + a_0 c_{1,p}} \sqrt{A - a_0 c_{2,p}}}{\sqrt{(A - a_0 c_{1,p})(A + a_0 c_{2,p})}} \right). \quad (\text{A.10})$$

Bestimmung der Eigenfunktionen

Formt man (A.5a) auf k_1 um und setzt dann in (A.4a) ein, so erhält man

$$\phi_{1,k}(\xi) = k_2 \left(\frac{1}{c_{1,p}} \cosh\left(\frac{\xi\lambda_k}{a_0}\right) - \frac{a_0}{A} \sinh\left(\frac{\xi\lambda_k}{a_0}\right) \right). \quad (\text{A.11})$$

Diese Lösung nach ξ abgeleitet und in (A.3b) eingesetzt, ergibt als Lösung für $\phi_{2,k}(\xi)$

$$\phi_{2,k}(\xi) = k_2 \left(\cosh\left(\frac{\lambda_k \xi}{a_0}\right) - \frac{A}{a_0 c_{1,p}} \sinh\left(\frac{\lambda_k \xi}{a_0}\right) \right). \quad (\text{A.12})$$

Somit ergeben sich die *nicht normierten Eigenfunktionen* ϕ_k zu

$$\phi_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{1,p}} \cosh\left(\frac{\lambda_k \xi}{a_0}\right) - \frac{a_0}{A} \sinh\left(\frac{\lambda_k \xi}{a_0}\right) \\ \cosh\left(\frac{\lambda_k \xi}{a_0}\right) - \frac{A}{a_0 c_{1,p}} \sinh\left(\frac{\lambda_k \xi}{a_0}\right) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (\text{A.13})$$

A.2 Beweis der Riesz-Basis Eigenschaft

Es soll gezeigt werden, dass es sich bei den Eigenfunktionen (3.73) um eine Riesz-Basis, nach Definition 3.6 handelt, vgl. [36].

Die Eigenfunktionen (3.73), bzw. (A.13) lassen sich mit (3.71) wie folgt anschreiben

$$\phi_k = \sqrt{\frac{L}{2}} \begin{bmatrix} \frac{A + a_0 c_{1,p}}{A c_{1,p}} \exp\left(-\frac{\beta}{L} \xi\right) & \frac{A - a_0 c_{1,p}}{A c_{1,p}} \exp\left(\frac{\beta}{L} \xi\right) \\ \frac{A + a_0 c_{1,p}}{A c_{1,p}} \exp\left(-\frac{\beta}{L} \xi\right) & -\frac{A + a_0 c_{1,p}}{A c_{1,p}} \exp\left(\frac{\beta}{L} \xi\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2L}} \exp\left(-\frac{jk\pi}{L} \xi\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2L}} \exp\left(\frac{jk\pi}{L} \xi\right) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Somit konnte eine Beschreibung der Form

$$\phi_k = \mathcal{T} \mathbf{e}_k \quad (\text{A.15})$$

gefunden werden. Der linearen Operator $\mathcal{T}\mathbf{x}$ lautet hierbei wie folgt

$$\mathcal{T}\mathbf{x} = \sqrt{\frac{L}{2}} \begin{bmatrix} \frac{A + a_0 c_{1,p}}{A c_{1,p}} \exp\left(-\frac{\beta}{L}\xi\right) & \frac{A - a_0 c_{1,p}}{A c_{1,p}} \exp\left(\frac{\beta}{L}\xi\right) \\ \frac{A + a_0 c_{1,p}}{A c_{1,p}} \exp\left(-\frac{\beta}{L}\xi\right) & \frac{-A + a_0 c_{1,p}}{A c_{1,p}} \exp\left(\frac{\beta}{L}\xi\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Die Folge \mathbf{e}_k stellt hierbei, mit dem Skalarprodukt (3.63), eine orthonormalen Basis im Zustandsraum \mathcal{X} dar.

$$\mathbf{e}_k = \frac{1}{\sqrt{2L}} \begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{jk\pi}{L}\xi\right) \\ \exp\left(\frac{jk\pi}{L}\xi\right) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (\text{A.17})$$

Es handelt sich bei \mathbf{e}_k also um eine *Riesz-Basis*. Wie sich leicht überprüfen lässt ist der Operator \mathcal{T} invertierbar und beschränkt.

Nach [6, Definition A.3.5, S. 583] wird ein Operator invertierbar genannt, falls gilt.

Definition A.1 (Invertierbarer Operator) linearer Operator $\mathcal{T} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ist *invertierbar*, wenn es einen Operator $\mathcal{S} : D(\mathcal{S}) \subset \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ gibt, sodass gilt

$$\mathcal{S}\mathcal{T}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in D(\mathcal{T}) \quad (\text{A.18})$$

$$\mathcal{T}\mathcal{S}\mathbf{y} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in D(\mathcal{S}). \quad (\text{A.19})$$

\mathcal{S} wird dann *algebraische Inverse* von \mathcal{T} genannt

$$\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{S}. \quad (\text{A.20})$$

■

Da es sich beim Operator \mathcal{T} aus (A.16) um eine Matrix handelt und diese $\forall \xi$ invertierbar ist, falls gilt

$$A + a_0 c_{1,p} \neq 0 \quad (\text{A.21})$$

und Matrizen immer beschränkt sind, handelt es sich bei ϕ_k um eine *Riesz-Basis*, nach Definition 3.6. ■

A.3 Berechnung des adjungierten Operators

Es soll der *adjungierte Operator* \mathcal{A}^* zu \mathcal{A} (3.64), mit dem Definitionsbereich (3.66) berechnet werden. Nach Definition 3.5 gilt die folgende Beziehung

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathcal{A}^*\mathbf{y} \rangle. \quad (\text{A.22})$$

Setzt man in die diese Beziehung den Operator (3.64) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \int_0^L \left(-\frac{a_0^2}{A} \frac{d}{d\xi} x_2 \bar{y}_1 \right) d\xi + \int_0^L \left(-A \frac{d}{d\xi} x_1 \bar{y}_2 \right) d\xi \\ &= \left[-\frac{a_0^2}{A} x_2 \bar{y}_1 \right] \Big|_0^L - \int_0^L \left(-\frac{a_0^2}{A} x_2 \frac{d}{d\xi} \bar{y}_1 \right) d\xi + \left[-A x_1 \bar{y}_2 \right] \Big|_0^L - \int_0^L \left(-A x_1 \frac{d}{d\xi} \bar{y}_2 \right) d\xi \\ &= \underbrace{\left[-\frac{a_0^2}{A} x_2 \bar{y}_1 \right] \Big|_0^L + \left[-A x_1 \bar{y}_2 \right] \Big|_0^L}_{J(\mathbf{x}, \mathbf{y})} + \int_0^L \left(\frac{a_0^2}{A} x_2 \frac{d}{d\xi} \bar{y}_1 \right) d\xi + \int_0^L \left(A x_1 \frac{d}{d\xi} \bar{y}_2 \right) d\xi = \langle \mathbf{x}, \mathcal{A}^*\mathbf{y} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Betrachtet man in (A.23) die beiden Integralteile so erkennt man, dass der adjungierte Operator wie folgt lauten muss

$$\mathcal{A}^* \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & A \frac{d}{d\xi} \\ \frac{a_0^2}{A} \frac{d}{d\xi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Zur Bestimmung der *adjungierten Randbedingungen* betrachtet man den ersten Term in (A.23), welcher unabhängig von \mathbf{x} verschwinden muss

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left[-\frac{a_0^2}{A} x_2 \overline{y_1} \right] \Big|_0^L + [-Ax_1 \overline{y_2}] \Big|_0^L \\ &= -\frac{a_0^2}{A} \left(x_2(L) \overline{y_1(L)} - x_2(0) \overline{y_1(0)} \right) - A \left(x_1(L) \overline{y_2(L)} - x_1(0) \overline{y_2(0)} \right) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Setzt man in die obige Gleichung die Randbedingungen

$$x_2(0) - c_{1,p} x_1(0) = 0 \quad (\text{A.26a})$$

$$x_2(L) - c_{2,p} x_1(L) = 0 \quad (\text{A.26b})$$

aus dem Definitionsbereich des Operators \mathcal{A} , ein so ergibt sich

$$x_1(0) \left(a_0^2 c_{1,p} \overline{y_1(0)} + A^2 \overline{y_2(0)} \right) + x_1(L) \left(a_0^2 c_{2,p} \overline{y_1(L)} + A^2 \overline{y_2(L)} \right) \stackrel{!}{=} 0, \quad (\text{A.27})$$

womit man die adjungierten Randbedingen ablesen kann

$$x_2(0) - \frac{a_0^2 c_{1,p}}{A^2} x_1(0) = 0 \quad (\text{A.28a})$$

$$x_2(L) - \frac{a_0^2 c_{2,p}}{A^2} x_1(L) = 0. \quad (\text{A.28b})$$

Für den Definitionsbereich des adjungierten Operators \mathcal{A}^* gelten die selben Überlegungen wie für den Definitionsbereich des Operators \mathcal{A} (3.66), somit ergibt sich

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}^*) &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid x_1, x_2 \text{ absolut stetig, } \frac{dx_1}{d\xi}, \frac{dx_2}{d\xi} \in \mathbf{L}_2(0, L) \right. \\ &\quad \left. \text{und } x_2(0) - \frac{a_0^2 c_{1,p}}{A^2} x_1(0) = 0, x_2(L) - \frac{a_0^2 c_{2,p}}{A^2} x_1(L) = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Mit Hilfe des adjungierten Operators können nun dessen Eigenfunktionen ψ_k und die dazugehörigen Eigenwerte μ_k berechnet werden.

A.4 Berechnung der biorthogonalen Folge

Es sollen die Eigenwerte μ_k und die dazugehörigen Eigenfunktionen ψ_k des adjungierten Operators \mathcal{A}^* bestimmt werden.

Mit Hilfe der Beziehung (3.27) und des in A.2 hergeleiteten Operators \mathcal{T} kann die biorthogonale Folge ψ_k zu ϕ_k bestimmt werden, ohne diese explizit mit Hilfe des adjungierten Operator \mathcal{A}^* zu berechnen. Allerdings muss der adjungierte Operator \mathcal{T}^* zu \mathcal{T} bestimmt werden. Dies ist jedoch im vorliegenden Fall einfach möglich, da es sich beim Operator \mathcal{T} um eine Matrix handelt. Der

adjungierte Operator ist in diesem Fall lediglich die transponierte, konjugiert komplexe Matrix, vgl. [7, S. 249]

$$\mathcal{T}^* \mathbf{x} = \sqrt{\frac{L}{2}} \begin{bmatrix} \frac{A + a_0 c_{1,p}}{A c_{1,p}} \exp\left(-\frac{\beta}{L} \xi\right) & \frac{A + a_0 c_{1,p}}{A c_{1,p}} \exp\left(-\frac{\beta}{L} \xi\right) \\ \frac{A - a_0 c_{1,p}}{A c_{1,p}} \exp\left(\frac{\beta}{L} \xi\right) & \frac{-A + a_0 c_{1,p}}{A c_{1,p}} \exp\left(\frac{\beta}{L} \xi\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

Beim adjungierten Operator \mathcal{T}^* handelt es sich wieder um einen beschränkten, invertierbaren Operator und somit kann ψ_k wie folgt berechnet werden

$$\psi_k = (\mathcal{T}^*)^{-1} \mathbf{e}_n. \quad (\text{A.31})$$

Führt man die Matrixmultiplikation aus, erhält man

$$\psi_k = \begin{bmatrix} \frac{A^2 c_{1,p}}{(A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2) L} \cos\left(\frac{\xi(k\pi + j\beta)}{L}\right) + \frac{A a_0 c_{1,p}^2}{(A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2) L} j \sin\left(\frac{\xi(k\pi + j\beta)}{L}\right) \\ \frac{a_0^2 c_{1,p}^2}{(-A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2) L} \cos\left(\frac{\xi(k\pi + j\beta)}{L}\right) + \frac{A a_0 c_{1,p}}{(-A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2) L} j \sin\left(\frac{\xi(k\pi + j\beta)}{L}\right) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

Was nach einigen Umformungen auf die folgenden Beziehungen führt

$$\mu_k = \frac{a_0(-jk\pi + \beta)}{L}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (\text{A.33})$$

mit der reellen Konstante β (3.72) und den Eigenfunktionen ψ_k

$$\psi_k = \begin{bmatrix} \frac{A^2 c_{1,p}}{(A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2) L} \cosh\left(\frac{\mu_k \xi}{a_0}\right) - \frac{A a_0 c_{1,p}^2}{(A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2) L} \sinh\left(\frac{\mu_k \xi}{a_0}\right) \\ -\frac{a_0^2 c_{1,p}^2}{(A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2) L} \cosh\left(\frac{\mu_k \xi}{a_0}\right) + \frac{A a_0 c_{1,p}}{(A^2 - a_0^2 c_{1,p}^2) L} \sinh\left(\frac{\mu_k \xi}{a_0}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

A.5 Beweis der Abgeschlossenheit

Es soll gezeigt werden, dass es sich bei dem Systemoperator (3.64) um einen *abgeschlossenen Operator* handelt. Der Beweis kann anhand des *inversen Operators* \mathcal{A}^{-1} zu \mathcal{A} geführt werden, da nach dem Satz aus [6, Theorem A.3.46, S. 596] die *Abgeschlossenheit* eines linearen Operators aus der Existenz des dazugehörigen *inversen Operators* folgt. Somit muss nur gezeigt werden, dass (3.64) einen *inversen Operator* besitzt.

Man betrachtet hierzu die folgende Operatorgleichung, vgl. [7, S. 259 ff.]

$$\mathcal{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in D(\mathcal{A}), \quad \mathbf{y} \in \mathcal{X}, \quad (\text{A.35})$$

mit dem Systemoperator \mathcal{A} aus (3.64). Es ergibt sich das folgende Randwertproblem

$$-\frac{a_0^2}{A} \frac{d}{d\xi} x_2(\xi) = y_1(\xi), \quad 0 < \xi < L \quad (\text{A.36a})$$

$$-A \frac{d}{d\xi} x_1(\xi) = y_2(\xi) \quad (\text{A.36b})$$

$$x_2(0) - c_{1,p} x_1(0) = 0 \quad (\text{A.36c})$$

$$x_2(L) - c_{2,p} x_1(L) = 0. \quad (\text{A.36d})$$

Der inverse Operator ist dann durch den folgenden *Integraloperator* gegeben

$$(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y})(\xi) = \int_0^L \mathbf{g}(\xi, \zeta)\mathbf{y}(\zeta)d\zeta, \quad (\text{A.37})$$

wobei $\mathbf{g}(\xi, z)$ die *Greensche Funktion* zu \mathcal{A} ist, vgl. [7, S. 260]. Diese lässt sich durch das folgende Randwertproblem berechnen

$$-\frac{a_0^2}{A} \frac{d}{d\xi} g_2(\xi, \zeta) = \delta(\xi - \zeta), \quad 0 < \xi < L \quad (\text{A.38a})$$

$$-A \frac{d}{d\xi} g_1(\xi, \zeta) = \delta(\xi - \zeta) \quad (\text{A.38b})$$

$$g_2(0, \zeta) - c_{1,p}g_1(0, \zeta) = 0 \quad (\text{A.38c})$$

$$g_2(L, \zeta) - c_{2,p}g_1(L, \zeta) = 0, \quad (\text{A.38d})$$

welches die folgende allgemeine Lösung liefert

$$g_1(\xi, \zeta) = k_1 - \frac{1}{A}\Phi(\zeta - \xi) \quad (\text{A.39a})$$

$$g_2(\xi, \zeta) = k_2 - \frac{A}{a_0^2}\Phi(\zeta - \xi), \quad (\text{A.39b})$$

mit den noch zu bestimmenden Konstanten k_1 und k_2 . $\Phi(x)$ ist hierbei die Einheitsprungfunktion. Die allgemeine Lösung (A.39) in die Randbedingungen (A.38c) und (A.38d) eingesetzt und nach den Konstanten aufgelöst ergibt

$$k_1 = \frac{A^2 - a_0^2 c_{2,p}}{A a_0^2 (c_{1,p} - c_{2,p})} \quad (\text{A.40a})$$

$$k_2 = \frac{(A^2 - a_0^2 c_{2,p})c_{1,p}}{A a_0^2 (c_{1,p} - c_{2,p})}, \quad (\text{A.40b})$$

womit sich die folgende spezielle Lösung ergibt

$$\mathbf{g}(\xi, \zeta) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{A^2 - a_0^2 c_{1,p}}{A a_0^2 (c_{1,p} - c_{2,p})} \\ \frac{(A^2 - a_0^2 c_{1,p})c_{2,p}}{A a_0^2 (c_{1,p} - c_{2,p})} \\ \frac{A^2 - a_0^2 c_{2,p}}{A a_0^2 (c_{1,p} - c_{2,p})} \end{bmatrix} & 0 \leq \zeta - \xi \\ \begin{bmatrix} \frac{A^2 - a_0^2 c_{2,p}}{A a_0^2 (c_{1,p} - c_{2,p})} \\ \frac{(A^2 - a_0^2 c_{2,p})c_{1,p}}{A a_0^2 (c_{1,p} - c_{2,p})} \\ \frac{A^2 - a_0^2 c_{1,p}}{A a_0^2 (c_{1,p} - c_{2,p})} \end{bmatrix} & \text{sonst} \end{cases} . \quad (\text{A.41})$$

Somit konnte der inverse Operator \mathcal{A}^{-1} gefunden werden. Nach dem oben beschriebenen Satz ist \mathcal{A} ein abgeschlossener Operator. ■

A.6 Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen für den *Late Lumping* LQI-Entwurf

Es sollen die Eigenwerte und Eigenfunktionen des folgenden Eigenwertproblems berechnet werden

$$\mathcal{A}\phi_k = \lambda_k^e \phi_k \quad (\text{A.42})$$

$$-\mathcal{C}_1 \phi_k = \lambda_k^e \varphi_k. \quad (\text{A.43})$$

Betrachtet man die Gleichung (A.42), so erkennt man, dass es sich um das Eigenwertproblem (A.1) handelt. Daraus folgt, dass die Eigenwerte λ_k^e des erweiterten Systemoperators (6.12) die Menge der Eigenwerte des Systemoperators \mathcal{A} und ein Eigenwert bei Null sind

$$\{\lambda_k^e\} = \{\lambda_k\} \cup \{0\}. \quad (\text{A.44})$$

Im Fall $\lambda_k^e = 0$, muss $\phi_k = 0$ und $\varphi_k = 1$ gelten. Gilt $\lambda_k^e = \lambda_k$ so lautet das zu lösende Eigenwertproblem

$$\mathcal{A}\phi_k = \lambda_k\phi_k \quad (\text{A.45})$$

$$-\mathcal{C}_1\phi_k = \lambda_k\varphi_k. \quad (\text{A.46})$$

Wobei die erste Gleichung genau dem Eigenwertproblem (A.1) entspricht und somit ϕ_k mit (A.13) bereits berechnet ist. Formt man die zweite Gleichung auf φ_k um, so erhält man schlussendlich das Folgende Ergebnis

$$\phi_k^e = \begin{bmatrix} \phi_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & k = 0 \\ \begin{bmatrix} \phi_n \\ -\frac{1}{\lambda_n}\mathcal{C}_1\phi_n \end{bmatrix} & k \geq 1, n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

mit ϕ_n aus (3.73) und λ_n aus (3.71).

A.7 Berechnung des adjungierten Systemoperators für den *Late Lumping* LQI-Entwurf

Es soll der adjungierte Operator des erweiterten Systemoperators (6.12) berechnet werden. Der adjungierte Operator muss die Definition 3.5 erfüllen, somit gilt

$$\langle \mathcal{A}_e \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{Z}} = \langle \mathbf{x}, \mathcal{A}_e^* \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{Z}}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus \mathbb{C}. \quad (\text{A.48})$$

Den erweiterten Systemoperator (6.12) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathbf{0} \\ -\mathcal{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{Z}} &= \langle \mathcal{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \rangle_{\mathcal{X}} + \langle -\mathcal{C}_1 x_1, y_2 \rangle, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in \mathcal{X}, x_2, y_2 \in \mathbb{C} \\ &= \langle \mathbf{x}_1, \mathcal{A}^* \mathbf{y}_1 \rangle_{\mathcal{X}} + \langle \mathbf{x}_1, -\mathcal{C}_1^* y_2 \rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{A}^* & -\mathcal{C}_1^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{Z}}. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Somit lautet der adjungierte Operator \mathcal{A}_e^* wie folgt

$$\mathcal{A}_e^* = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^* & -\mathcal{C}_1^* \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.50})$$

A.8 Berechnung des adjungierten Ausgangsoperators für den *Late Lumping* LQI-Entwurf

Es soll der adjungierte Operator des folgenden linearen Operators berechnet werden

$$\mathcal{C}_1 \mathbf{x}(t) = \langle \mathbf{x}(t), \begin{bmatrix} \overline{c_1(\xi)} \\ 0 \end{bmatrix} \rangle_{\mathcal{X}}, \quad \mathcal{C}_1 : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{C} \quad (\text{A.51})$$

Der adjungierte Operator muss die Definition 3.5 erfüllen, somit gilt

$$\langle \mathbf{C}_1 \mathbf{x}, y \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{C}_1^* y \rangle_{\mathcal{X}}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad y \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.52})$$

Mit der Definition des Operators 3.58e ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{C}_1 \mathbf{x}, y \rangle &= \left(\int_0^L c_1(\zeta) x_1(\zeta, t) d\zeta \right) \overline{y(t)} \\ &= \int_0^L x_1(\zeta, t) c_1(\zeta) \overline{y(t)} d\zeta = \langle \mathbf{x}, \mathbf{C}_1^* y \rangle_{\mathcal{X}}. \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Der adjungierte Operator kann somit einfach abgelesen werden und lautet wie folgt

$$\mathbf{C}_1^* x(t) = \begin{bmatrix} c_1(\xi) \\ 0 \end{bmatrix} x(t), \quad \mathbf{C}_1^* : \mathbb{C} \mapsto \mathcal{X} \quad (\text{A.54})$$

Man erkennt, dass es sich bei dem adjungierten Operator $\mathbf{C}_1^* x(t)$ um einen Eingangoperator der Form (3.11) handelt.

A.9 Berechnung der modalen Approximation für den *Late Lumping* LQI-Entwurf

Es soll die *modale Approximation* des erweiterten Systems (5.19), für den Late Lumping LQI-Entwurf berechnet werden. Die Berechnung erfolgt analog zur Berechnung in Kapitel 3. Um den Berechnungsaufwand gering zu halten wird allerdings auf die Approximation des Punkteingriffs und Punktmessung verzichtet und der Grenzübergang für $(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{b}_k^*{}^\top$ (3.80), bzw. $\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathbf{c}_k^*$ (3.82)) durchgeführt, auch wenn dies mathematisch nicht ganz korrekt ist (siehe Kapitel 3).

Das zu approximierende System lautet, vgl. (5.19)

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{A.55})$$

$$y = [\mathbf{C}_1 \quad 0] \mathbf{z}. \quad (\text{A.56})$$

Somit ergibt sich die folgende *modale Approximation*

$$\dot{\mathbf{z}}^*(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{z}^*(t) + \mathbf{B}^* u(t) \quad (\text{A.57a})$$

$$y^*(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{z}^*(t), \quad (\text{A.57b})$$

mit der *modalen Systemmatrix* $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{-n} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.58})$$

der *modalen Eingangsmatrix* \mathbf{B}^*

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \frac{Ac_{2,a}}{c_{2,p}} \psi_{-n,2}^e(L) \\ \vdots \\ \frac{Ac_{2,a}}{c_{2,p}} \psi_{n,2}^e(L) \\ \frac{Ac_{2,a}}{c_{2,p}} \psi_{0,2}^e(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{-n,2}^*{}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n,2}^*{}^\top \\ \frac{Ac_{2,a}}{c_{2,p}} \left(- \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \phi_{k,1}(\xi_{y1}) \psi_{k,2}(L) \right) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

In obiger Gleichung kann die unendliche Reihe im Allgemeinen nicht mehr analytisch berechnet werden und muss ebenso mit endlich vielen Reihenelementen approximiert werden. Dies kann beliebig genau erfolgen ohne die Systemordnung zu beeinflussen. Die *modalen Ausgangsmatrix* \mathbf{C}^* lautet

$$\mathbf{C}^* = [\phi_{-n,1}^e(\xi_{y_1}) \quad \cdots \quad \phi_{n,1}^e(\xi_{y_1}) \quad 0] \quad (\text{A.60})$$

$$= [\mathbf{c}_{-n,1}^* \quad \cdots \quad \mathbf{c}_{n,1}^* \quad 0]. \quad (\text{A.61})$$

Wie man erkennt muss zur Berechnung der modalen Approximation des erweiterten Systems nur zwei Entwicklungskoeffizienten neu berechnet werden, die restlichen Entwicklungskoeffizienten wurden bereits in Kapitel 3 berechnet.

A.10 Berechnung des adjungierten Störoperators für den *Late Lumping* Beobachter-Entwurf

Für den linearen Operator

$$\mathcal{P}u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1(\xi) \end{bmatrix} u(t), \quad \mathcal{P} : \mathbb{C} \mapsto \mathcal{X} \quad (\text{A.62})$$

soll der dazugehörige *adjungierte Operator* \mathcal{P}^* berechnet werden. Dieser muss die Definition 3.5 erfüllen. Somit muss die folgende Bedingung gelten

$$\langle \mathcal{P}x, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{X}} = \langle x, \mathcal{P}^*\mathbf{y} \rangle, \quad x \in \mathbb{C}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}. \quad (\text{A.63})$$

Den Operator (A.62) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}x, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{X}} &= \int_0^L b_1(\xi) x(t) \overline{y_2(\xi, t)} d\xi \\ &= x(t) \int_0^L b_1(\xi) \overline{y_2(\xi, t)} d\xi = \langle x, \mathcal{P}^*\mathbf{y} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Der adjungierte Operator \mathcal{P}^* lautet somit

$$\mathcal{P}^*\mathbf{x}(t) = \int_0^L b_1(\xi) x_2(\xi, t) d\xi = \left\langle \mathbf{x}(t), \begin{bmatrix} 0 \\ b_1(\xi) \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}}, \quad \mathcal{P}^* : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{C}. \quad (\text{A.65})$$

Beim adjungierten Operator $\mathcal{P}^*\mathbf{x}(t)$ handelt es sich um einen Ausgangsoperator der Form (3.13).

A.11 Berechnung der modalen Approximation für den *Late Lumping* Beobachter-Entwurf

Wie schon beim für den Late Lumping LQI-Entwurf soll die modale Approximation des erweiterten Systems (5.32) berechnet werden. Die Berechnung der modalen Approximation wurde bereits mehrfach gezeigt, siehe Kapitel 3 und Anhang A.9. Um den Berechnungsaufwand gering zu halten wird wieder auf die Approximation des Punkteingriffs, bzw. der Punktmessungen verzichtet, auch wenn diese Vorgehensweise mathematisch nicht ganz korrekt ist, vgl. Kapitel 3. Mit Hilfe der, in Kapitel 5 berechneten Eigenwerte und Eigenfunktionen des erweiterten Systems

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathcal{P} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{A.66a})$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{C} \quad 0] \mathbf{z}. \quad (\text{A.66b})$$

kann die Berechnung der modalen Approximation einfach durchgeführt werden. Es ergibt sich die folgende *modale Approximation*

$$\dot{\mathbf{z}}^*(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{z}^*(t) + \mathbf{B}^* u(t) \quad (\text{A.67a})$$

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{z}^*(t), \quad (\text{A.67b})$$

mit der *modalen Systemmatrix* $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{-n} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.68})$$

der *modalen Eingangsmatrix* \mathbf{B}^*

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \frac{Ac_{2,a}}{c_{2,p}} \psi_{-n,2}^e(L) \\ \vdots \\ \frac{Ac_{2,a}}{c_{2,p}} \psi_{n,2}^e(L) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{-n,2}^{*\top} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n,2}^{*\top} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.69})$$

und der *modalen Ausgangsmatrix* \mathbf{C}^*

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \phi_{-n}^e(\xi_{y_1}) & \cdots & \phi_n^e(\xi_{y_1}) & -\frac{Ac_{1,a}}{c_{1,p}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \psi_{k,2}(\xi_{y_1}) \phi_k(L) \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.70})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{-n}^* & \cdots & \mathbf{c}_n^* & -\frac{Ac_{1,a}}{c_{1,p}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \psi_{k,2}(\xi_{y_1}) \phi_k(L) \right) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.71})$$

Wie schon bei der Berechnung der modalen Approximation in A.9 muss die unendliche Reihe durch eine Approximation berechnet werden. Außerdem müssen auch hier lediglich zwei Entwicklungskoeffizienten neu berechnet werden, vgl. A.9.

Anhang B

Parameter

B.1 Ventilkennlinie

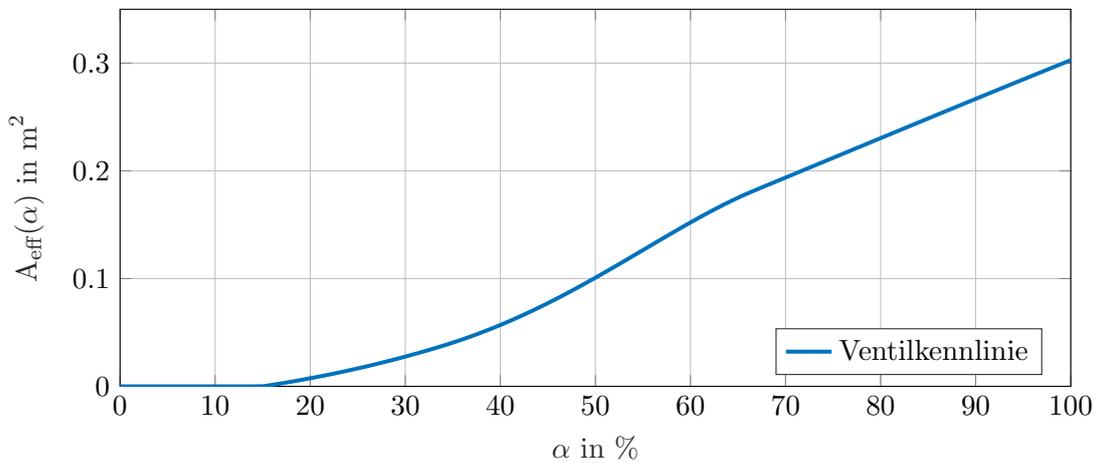


Abbildung B.1: Ventilkennlinie

B.2 Allgemeine Parameter

$$R = 287 \text{ J/kg}\cdot\text{K}, \quad \gamma = 1.37, \quad T_0 = 313.15 \text{ }^\circ\text{K} \quad (\text{B.1})$$

B.3 Rohr mit konstantem Querschnitt

$$A = 0.0585 \text{ m}^2, \quad L = 6 \text{ m}, \quad a_0 = 410 \text{ m/s} \quad (\text{B.2})$$

B.3.1 Modale Approximation

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} 0.04 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0.04 & \\ & & & 0.04 \end{bmatrix}, \quad r_c = 1 \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma_{p_2} = 50 \text{ Pa}, \quad \sigma_{p_3} = 50 \text{ Pa}, \quad \sigma_{w_1} = 0.1 \%, \quad \sigma_{w_2} = 10 \%, \quad \sigma_{w_u} = 0.1 \% \quad (\text{B.4})$$

B.3.2 FVM Approximation

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} 0.0016 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0.0016 & \\ & & & 0.04 \end{bmatrix}, \quad r_c = 4 \quad (\text{B.5})$$

$$\sigma_{p_2} = 50 \text{ Pa}, \quad \sigma_{p_3} = 50 \text{ Pa}, \quad \sigma_{w_1} = 0.1 \%, \quad \sigma_{w_2} = 10 \%, \quad \sigma_{w_u} = 0.1 \% \quad (\text{B.6})$$

B.4 Rohr mit variablem Querschnitt

$$A_1 = 0.0057 \text{ m}^2, \quad L_1 = 6 \text{ m}, \quad a_0 = 410 \text{ m/s} \quad (\text{B.7})$$

$$A_2 = 0.0133 \text{ m}^2, \quad L_2 = 3 \text{ m} \quad (\text{B.8})$$

$$A_3 = 0.0314 \text{ m}^2, \quad L_3 = 3.5 \text{ m} \quad (\text{B.9})$$

$$A_4 = 0.3848 \text{ m}^2, \quad L_4 = 1.3 \text{ m}, \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} 0.0001 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0.0001 & \\ & & & 0.04 \end{bmatrix}, \quad r_c = 1 \quad (\text{B.11})$$

$$\sigma_{p_2} = 50 \text{ Pa}, \quad \sigma_{p_3} = 50 \text{ Pa}, \quad \sigma_{w_1} = 0.1 \%, \quad \sigma_{w_2} = 10 \%, \quad \sigma_{w_u} = 0.1 \% \quad (\text{B.12})$$

B.5 Drei Drucksensoren

$$A = 0.0585 \text{ m}^2, \quad L = 6 \text{ m}, \quad a_0 = 410 \text{ m/s} \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} 0.04 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0.04 & \\ & & & 0.25 \end{bmatrix}, \quad r_c = 1 \quad (\text{B.14})$$

$$\sigma_{p_2} = 50 \text{ Pa}, \quad \sigma_{p_3} = 50 \text{ Pa}, \quad \sigma_{p_5} = 50 \text{ Pa}, \quad \sigma_{w_1} = 0.1 \%, \quad \sigma_{w_2} = 10 \%, \quad \sigma_{w_u} = 0.1 \% \quad (\text{B.15})$$

Abkürzungsverzeichnis

FVM Finite Volumen Methode

VKM Verbrennungskraftmaschine

CFL Courant, Friedrichs und Lewy

VPS verteilt parametrisches System

DPS distributed parameter system

LQI linear quadratisch integral

LQ linear quadratisch

PI proportional integral

Literaturverzeichnis

- [1] Automotive Research Association of India: *Chapter 3: Test procedure for measurement of gaseous pollutants from Diesel engines*. https://www.araiindia.com/CMVR_TAP_Documents/Part-05/Part-05_Chapter03.pdf, besucht: 10.09.2017.
- [2] Benner, Peter und Sabine Hein: *MPC/LQG for infinite-dimensional systems using time-invariant linearizations*. In: *IFIP Conference on System Modeling and Optimization*, Seiten 217–224. Springer, 2011.
- [3] Böswirth, Leopold: *Technische Strömungslehre*. Vieweg+Teubner, 2010.
- [4] Curtain, Ruth: *A semigroup approach to the LQG problem for infinite-dimensional systems*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 25(9):713–721, 1978.
- [5] Curtain, Ruth und Kirsten Morris: *Transfer functions of distributed parameter systems: A tutorial*. *Automatica*, 45(5):1101–1116, 2009.
- [6] Curtain, Ruth und Hans Zwart: *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, Band 21. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] Deutscher, Joachim: *Zustandsregelung verteilt-parametrischer Systeme*. Springer-Verlag, 2012.
- [8] Green, Michael und David JN Limebeer: *Linear robust control*. Courier Corporation, 2012.
- [9] Guaily, Amr G. und Marcelo Epstein: *Boundary conditions for hyperbolic systems of partial differential equations*. *Journal of advanced research*, 4(4):321–329, 2013.
- [10] Hasan, Agus und Lars Imsland: *Moving horizon estimation in managed pressure drilling using distributed models*. In: *Control Applications (CCA), 2014 IEEE Conference on*, Seiten 605–610. IEEE, 2014.
- [11] Heinz Herwig, Christian Kautz und Andreas Moschallski: *Technische Thermodynamik*. Springer, 2016.
- [12] Himpe, Christian und Mario Ohlberger: *Cross-Gramian-Based Model Reduction: A Comparison*. arXiv preprint arXiv:1606.03954, 2016.
- [13] Hirsch, Charles: *Numerical computation of internal and external flows*, Band 2. John Wiley and sons, 1994.
- [14] Hodel, A. Scottedward und Charles E. Hall: *Variable-structure PID control to prevent integrator windup*. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48(2):442–451, 2001.
- [15] Horn, Martin und Nicolaos Dourdoumas: *Regelungstechnik*. Pearson Studium, 2004.

- [16] Koshkin, Sergiy: *Positive semigroups and algebraic Riccati equations in Banach spaces*. Positivity, 20(3):541–563, 2016.
- [17] Lecheler, Stefan: *Numerische Strömungsberechnung*. Springer, 2014.
- [18] Lemos, A.C.: *Numerical Methods for Singular Differential Equations*. 2002.
- [19] Liou, Meng Sing und Christopher J. Steffen: *A new flux splitting scheme*. Journal of Computational physics, 107(1):23–39, 1993.
- [20] Lunze, Jan: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 2016.
- [21] Lunze, Jan: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Springer-Verlag, 2016.
- [22] Meurer, Thomas: *Regelung verteilt-parametrischer Systeme*. Vorlesungsunterlagen, 2016. Technischen Universität, Wien.
- [23] Mohammadi, Leily, Ilyasse Aksikas, Stevan Dubljevic und J. Fraser Forbes: *Linear quadratic optimal boundary control of a diffusion-convection-reaction system*. IFAC Proceedings Volumes, 44(1):12048–12053, 2011.
- [24] Morris, Kirsten: *LQ-optimal actuator location and norm convergence of Riccati operators*. In: *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, Seiten 209–214. IEEE, 2008.
- [25] Morris, Kirsten: *Control of systems governed by partial differential equations*. The Control Theory Handbook, 2010.
- [26] Petrova, Radostina: *Finite Volume Method – Powerful Means of Engineering Design*. In-Tech, 2012.
- [27] Safonov, M.G. und R.Y. Chiang: *A Schur method for balanced model reduction*. In: *American Control Conference, 1988*, Seiten 1036–1040. IEEE, 1988.
- [28] Santos, Miguel Ferreira: *Analysis of transient flow in natural gas transmission network*.
- [29] Sonnendrücker, Eric: *Numerical methods for hyperbolic systems*. Vorlesungsunterlagen, 2013. Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und Zentrum Mathematik, TU München.
- [30] Steger, Joseph L. und R.F. Warming: *Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods*. Journal of computational physics, 40(2):263–293, 1981.
- [31] Stockar, Stephanie: *Model-Order Reduction for Nonlinear Distributed Parameter Systems with Application to Internal Combustion Engine Modeling and Simulation*. Dissertation, The Ohio State University, 2013.
- [32] The European Commission: *ANNEX to the Commission Delegated Regulation (EU) supplementing Regulation (EU) 2016/XXX of the European Parliament and of the Council with regard to technical and general requirements relating to emission limits and type-approval for internal combustion engines for non-road mobile machinery*. <https://ec.europa.eu/transparency/regdoc/rep/3/2016/EN/C-2016-8381-F1-EN-ANNEX-4-PART-1.PDF>, besucht: 10.09.2017.

- [33] Van Leer, Bram: *Flux-vector splitting for the Euler equation*. In: *Upwind and High-Resolution Schemes*, Seiten 80–89. Springer, 1997.
- [34] Visioli, Antonio: *Modified anti-windup scheme for PID controllers*. IEE Proceedings-Control Theory and Applications, 150(1):49–54, 2003.
- [35] Watter, Holger: *Hydraulik und Pneumatik*. Auflage. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden, 2008.
- [36] Xu, Gen Qi und Siu Pang Yung: *The expansion of a semigroup and a Riesz basis criterion*. Journal of Differential Equations, 210(1):1–24, 2005.