Chapitre VIII.

—

Changements de plans de projection.

242. Considérations générales. Tout problème de géométrie, pour être résolu par les procédés de la Géométrie Descriptive, exige un certain nombre de constructions graphiques à exécuter sur les plans de projection. Ces opérations se simplifient et leur nombre se modifie suivant le choix plus ou moins heureux de ces plans.

Les données d'un problème étant déterminées par rapport à ces plans de projection adoptés ou imposés, on peut s'apercevoir que la solution du problème conduit à des constructions très-laborieuses et qu'il eût été préférable de choisir telle autre disposition pour les plans de projection que l'on a reconnu comme présentant quelques avantages sous le rapport de la facilité des constructions.

Les données d'un problème consistent en points, lignes droites ou courbes et plans. Supposons ces éléments invariablement reliés entre eux ; ils formeront un ensemble S, dont aucune partie ne peut se mouvoir isolément.

Changements de plans de projection. En déplaçant le plan P_2, tout en le laissant normal à P_1, on peut arriver à lui donner une position telle, que la projection orthogonale de S sur ce nouveau plan de projection conduise, dans la solution du problème, à des opérations graphiques très-simples, ou même à la suppression de quelques-unes de ces opérations.

On dit que l'on a *changé le plan de projection* P_2. *On a opéré un changement de plan de projection.*

On peut de même *changer le plan de projection* P_1 et le remplacer par un autre plan normal à P_2.

Remarquons toutefois, que si l'on veut changer les deux plans P_1 et P_2 et les remplacer par un nouveau système de plans de projection P_3 et P_4, ces deux nouveaux plans doivent être perpendiculaires entre eux.

On n'arrive à ce résultat qu'en remplaçant le système des plans P_2 et P_1 par les plans P_3 et P_1, puis ces derniers plans par P_3 et P_4. Dans ces changements, le plan P_3 qui remplace P_2 sera perpendiculaire à P_1 et le nouveau plan qui remplace P_1 doit être perpendiculaire à P_3.

Rotations. Parfois la nature de la question s'oppose à un changement de plans de projection. Dans ce cas on peut opérer comme suit :

On suppose S relié invariablement à un axe fixe perpendiculaire à P_2 ou à P_1. Aucun des éléments qui constituent S ne peut tourner séparément autour de l'axe sans entraîner dans ce mouvement tout le système S. En donnant à S un mouvement de rotation autour de cet axe, il peut arriver, qu'à un moment donné, la position de S soit telle vis-à-vis des plans de projection restés fixes, que les nouvelles projections de S sur ces plans se prêtent à des constructions graphiques très-simples.

Evidemment S n'a pas changé de forme et la solution dans l'espace du problème à résoudre sera la même, mais la solution graphique a été simplifiée par le déplacement des données.

On aura *opéré une rotation autour d'un axe perpendiculaire à* P_1 *ou à* P_2.

La première méthode d'opérer constitue *la méthode par changement de plans de projection.*

Dans la deuxième méthode on a opéré *par rotation.*

Remarque. On peut comparer ces deux méthodes d'opération à ce qui se produit quand on regarde l'image d'un objet S (un cristal, un polyédre, etc.), réfléchie par une glace prise pour plan P_2.

En supposant, comme on le fait pour les épures, que le spectateur se trouve à une distance infiniment grande devant P_2, la glace, de manière que les rayons visuels soient parallèles et normaux à la glace, cette image peut être comparée à la projection S'' de S sur la glace P_2.

En déplaçant le glace P_2, tout en la laissant perpendiculaire à P_1, la projection de S sur P_2 change de forme et fait voir, pour une certaine position de P_2, des points, des arêtes, cachés pour la position que P_2 occupait antérieurement.

On aura figuré un changement du plan de projection P_2.

Au lieu de déplacer P_2, on fera tourner S autour d'un axe perpendiculaire à P_1 et une altération des projections de S sur P_2 se produira encore.

On aura figuré une rotation de S autour d'un axe perpendiculaire à P_1.

243. Principes fondamentaux. D'après ce qui précède il s'agit, dans les changements de plans de projection, de trouver les nouvelles projections des données d'un problème sur un nouveau système de deux plans rectangulaires qui a un plan commun avec le système des plans P_1 et P_2 qu'il remplace.

Or, sur ces nouveaux plans P_3 P_1 ou P_3P_2, les projections des éléments jouissent des mêmes propriétés que celles qui les caractérisaient sur P_1 et P_2.

Les deux projections d'un point sont toujours, avec les deux projetantes, dans un plan perpendiculaire à l'axe, donc, après rabattement de P_3 *sur* P_1 *ou de* P_3 *sur* P_2, *les deux projections* a''' *et* a', a''' *et* a'' *du point a de l'espace seront toujours réunies par une perpendiculaire à l'axe.*

Les projections d'une droite sont toujours des droites.

Les traces d'un plan se rencontrent toujours sur l'axe de projection, quelque soit le système de plans de projection que l'on adopte.

Les données d'un problème se composant de points, de droites et de plans, nous appliquerons les changements de plans de projection successivement à un point, à une droite, puis à un plan.

—

Changements de plans de projection appliqués à un point.

—

244. Problème I. *Etant données les deux projections a' et a'' d'un point a sur un système de deux plans rectangulaires* P_1 *et* P_2, *trouver les projections de ce point sur deux plans* P_1 *et* P_3, *rectangulaires aussi, et ayant le plan* P_1 *commun avec le premier système.*

Solution. (**Fig. 163.**) Le plan P_2 étant remplacé par P_3 et le point a ainsi que le plan P_1 étant restés fixes, la première projection a' de a ainsi que sa première hauteur ne changeront pas.

La projection nouvelle a''' sur P_3 sera située au-dessus du nouvel axe à une distance $a'''m = aa' = a''n =$ la deuxième ordonnée du point a.

En rabattant P_3 sur P_1 on voit : (**Ep. 164.**)

1° Que la première projection a' du point a n'a pas changé ;

2° Que la nouvelle projection a''' sur P_3 est liée à a' par une perpendiculaire au nouvel axe de projection ;

3° Que la troisième ordonnée est égale à la deuxième ordonnée du point a, et que c'est cette distance qui séparera la nouvelle projection a''' du nouvel axe.

245. Problème II. *Etant données les deux projections a' et a'' d'un point a sur deux plans rectangulaires* P_1 et P_2, *trouver les nouvelles projections de ce point sur un nouveau système de plans rectangulaires* P_2 P_3, *ayant avec le premier système le plan* P_2 *commun.*

Solution (**Fig. 165.**) La deuxième projection a'' ne change pas ; elle se trouve avec la nouvelle projection a''' dans un plan perpendiculaire au nouvel axe et par suite, après le rabattement de P_3 sur P_2, on voit : (**Ep. 166.**)

1° Que la deuxième projection a'' du point a n'a pas changé ;

2° Que la troisième projection a''' sur P_3 est liée à la deuxième projection a'' par une perpendiculaire au nouvel axe ;

3° Que la troisième ordonnée est égale à la première ordonnée du point a, et que c'est cette distance qui séparera la nouvelle projection a''' du nouvel axe (*).

246. Problème III. *Ayant construit les projections a' et a''' d'un point a sur un système de plans rectangulaires P_1 P_3, trouver les projections sur un nouveau système P_4 P_3, ayant avec $P_1 P_3$ le plan P_3 commun.*

Les problèmes I et II nous prouvent que la projection a''' ne change pas, que la projection a'''' est liée à a''' par une perpendiculaire au nouvel axe A_2, et que la distance de a'''' à A_2 est égale à la distance de a' à l'ancien axe A_1.

De ce qui précède, nous pouvons déduire une loi qui régit les changements de plans de projection appliqués à un point :

Règle pratique. *Si les projections d'un point sur un système de plans rectangulaires sont données, pour avoir les projections de ce même point sur un autre système de plans rectangulaires, ayant avec le premier système un plan commun, il faut opérer comme suit :*

La projection sur le plan commun ne change pas. De cette projection on abaisse une perpendiculaire sur le nouvel axe de projection, et l'on porte sur cette perpendiculaire, et à partir de cet axe, une longueur égale à la distance de la projection qui disparaît à l'ancien axe qui disparaît également.

Le sens dans lequel cette ordonnée doit se porter est indiqué par son signe.

247. Notations. La projection du point a sur un nouveau plan P_3, P_4 etc. se marque par a''', a'''' etc.

Le nouvel axe, trace de P_3 sur P_2 ou sur P_1, se marque, comme l'ancien axe, par un trait fin accompagné du signe $\left\{\begin{matrix}P_2\\P_3\end{matrix}\right.$ ou $\left\{\begin{matrix}P_3\\P_1\end{matrix}\right.$.

Un trait fin et droit marqué $\left\{\begin{matrix}P_4\\P_3\end{matrix}\right.$ indique un axe de projection qui sépare les deux plans de projection rectangulaires P_4 et P_3.

(*) Dans les problèmes des §. § 244 et 245, nous avons désigné le nouveau plan de projection par P_3, malgré que ce nouveau plan remplace P_2 dans §. 244 et P_1 dans §. 235. On fera bien de remarquer, pour éviter toute confusion dans les notations, que P_3 n'indique pas le même plan dans les deux problèmes et qu'il doit toujours être accompagné d'un autre plan pour former un système de plans de projection. Dès lors les deux systèmes P_1 P_3 et P_2 P_3 nous disent suffisamment que dans le premier P_3 remplace P_2 et que dans le second c'est P_1 qui a été remplacé par un plan perpendiculaire à P_2 et que l'on nomme P_3.

Changements de plans de projection appliqués à une droite.

—

248. Problème IV. *Etant données les projections d'une droite sur un système de plans perpendiculaires* P_1 P_2, *trouver les projections de cette droite sur un nouveau système de plans rectangulaires* P_1 P_3, *ayant avec le premier le plan* P_1 *commun.*

Solution. (**Ep. 167.**) Les projections d'une droite sont déterminées par les projections de deux points quelconques de cette droite. On n'a donc qu'à considérer deux points de la droite et leur appliquer le problème I (**244**).

249. Problème V. *Etant données les projections d'une droite sur un système de plans rectangulaires* P_1 P_2, *trouver les projections de cette droite sur un nouveau système de plans rectangulaires* P_3 P_2, *ayant avec le premier le plan* P_2 *commun.*

Solution. (**Ep. 168.**) On appliquera à deux points de la droite la solution du problème II (**245**).

250. Problème VI. *Ayant construit les projections d'une droite sur un système de plans rectangulaires* P_1 P_3, *trouver les projections de cette droite sur un nouveau système de plans rectangulaires* P_4 P_3, *ayant avec le premier le plan* P_3 *commun.*

Solution. (**Ep. 169.**) On appliquera à deux points quelconques de la droite le problème III (**246**).

Remarque. La loi générale qui régit les changements de plans de projection pour un point s'applique également aux changements de plans de projection pour une droite.

—

Changements de plans de projection appliqués à un plan.

—

251. Problème VII. *Etant données les traces* t_1 *et* t_2 *d'un plan* t *sur un système de deux plans rectangulaires* P_1 P_2, *trouver les traces de ce plan sur un nouveau système de plans rectangulaires* P_1 P_3, *ayant avec le premier le plan* P_1 *commun.*

Solution. (Fig. 170.) La nouvelle trace t_3 du plan t est la droite d'intersection du plan t avec P_3. Cette intersection passe par m, point de rencontre du nouvel axe A_1 avec la trace t_1 du plan, et par un deuxième point v, point de rencontre de la trace t_2 du plan t avec la trace sur P_1 du nouveau plan P_3.

Ce point v se trouve donc sur la perpendiculaire élevée à l'ancien axe au point où cet axe est rencontré par le nouvel axe A_1.

En rabattant P_3 sur P_1, le point v viendra en v''', la trace t_3 sera mv''' et la longueur $v'v''' = v'v''$. (**Ep. 171.**)

Donc, *pour trouver la trace* t_3 *du plan* t *sur un nouveau plan de projection* P_3 *perpendiculaire à* P_1, *on prolonge le nouvel axe* A_1 *jusqu'à la rencontre de* t_1 *en* m *et de l'ancien axe en* v'. *En* v' *on élève une perpendiculaire à* A_1, *et l'on porte sur cette perpendiculaire la longueur* $v'v''$. *Les points* v''' *et* m *déterminent* $mv''' = t_3$, *troisième trace cherchée du plan donné* t.

252. Problème VIII. *Etant données les traces* t_1 *et* t_2 *d'un plan* t *sur un système de deux plans rectangulaires* P_1 *et* P_2, *trouver les traces de ce plan sur un nouveau système de plans rectangulaires* $P_2\ P_3$, *ayant avec le premier le plan* P_2 *commun.*

Solution. (Fig. 172.) La nouvelle trace t_3 du plan t sera la droite suivant laquelle P_3 rencontre t. Cette droite passe par m, point de rencontre de la trace t_2 qui ne change pas avec le nouvel axe A_1, et par un deuxième point v situé à la rencontre des plans t et P_3 sur P_1.

Or, ce point est à une distance $v''v'$ du plan P_2, et par suite, en rabattant P_3 avec v sur P_2 qui est fixe, le point v''' restera toujours à la distance $v''v$ du nouvel axe. $v''m$ sera la nouvelle trace t_3 du plan t sur P_3.

(**Ep. 173.**) Donc, *pour trouver la nouvelle trace* t_3 *du plan* t *sur un nouveau plan de projection* P_3 *perpendiculaire à* P_2, *on prolonge le nouvel axe* A_1 *jusqu'à la rencontre de l'ancien axe* A *en* v'' *et de la trace fixe* t_2 *du plan* t. *En* v'' *on élève sur* A_1 *une perpendiculaire* $v''v''' = v''v'$; v''' *et* m *déterminent la trace* t_3 *du plan sur le nouveau plan de projection.*

253. Problème IX. *Ayant construit les traces* t_1 *et* t_3 *du plan* *t sur un système de deux plans rectangulaires* P_1 *et* P_3, *trouver les traces de ce plan sur un nouveau système de plans rectangulaires* P_3 P_4, *ayant avec le premier système le plan* P_3 *commun.*

Solution. D'après les deux problèmes précédents, on prolongera le nouvel axe A_2 jusqu'à la rencontre en n avec t_3 et en w avec A_1. En w on élève une perpendiculaire à A_2 et une autre à l'ancien axe A_1, et l'on prolonge cette dernière jusqu'à la trace t_1 en z. Sur la première perpendiculaire, et à partir de w, on porte $wy = wz$, et la ligne yn sera la trace t_4 du plan t sur P_3.

Des trois problèmes précédents nous déduirons facilement la loi générale suivante qui régit les changements de plans de projection appliqués à un plan :

Règle pratique. *Pour avoir les traces d'un plan sur un nouveau système de plans de projection, ayant avec le système donné un plan commun, on prendra pour nouvel axe de projection la trace du plan nouveau sur le plan commun aux deux systèmes. On prolonge cet axe jusqu'à la rencontre avec l'ancien axe en v et avec la trace fixe du plan donné en n. Au premier point de rencontre v on élève une perpendiculaire à l'ancien axe et on la prolonge jusqu'à la trace mobile du plan, la trace à remplacer. Cette hauteur on la porte sur la perpendiculaire élevée en v au nouvel axe. L'extrémité y de cette perpendiculaire jointe au point n, donne une droite qui est la nouvelle trace du plan donné sur le plan de projection nouveau non commun aux deux systèmes.*

—

Applications. — Problèmes.

—

254. Généralités. Dans la solution des problèmes par la méthode des changements de plans de projection, il est très-utile de savoir immédiatement prévoir quelle est la position la plus favorable des données par rapport aux plans de projection. Un certain coup d'œil qui s'acquiert par l'habitude fera de suite décider du choix des plans à adopter suivant le cas qui se présente. Cette méthode de résoudre les problèmes rend des services réels dans quelques cas de pénétration des corps et dans des problèmes de la théorie des ombres. Nous exposerons, pour chaque problème fondamental, les raisons qui nous guident dans le choix des nouveaux plans de projection et nous considérons les quelques problèmes qui les suivent ainsi que les cas particuliers comme des exercices de cette méthode de solution.

255. Problème I. *Un plan quelconque étant donné par ses deux traces sur* P_1 *et* P_2, *faire en sorte qu'il devienne plan de projection.*

Solution. Si le plan donné *s* devient plan de projection, il faut qu'il soit perpendiculaire à un autre plan qui, avec lui, forment le système des deux plans rectangulaires.

Soit P_1 P_2 le premier système donné.

On prendra pour deuxième système de plans de projection les plans P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à P_1 et normal à la première trace s_1 du plan *s*. Le nouvel axe A_1 est donc perpendiculaire à s_1.

On prendra ensuite pour nouveau système de plans de projection les plans P_3 et S. Ces deux plans sont rectangulaires et donneront pour nouvel axe A_2, la nouvelle trace s_3 de *s* sur P_3.

256. Problème II. *Construire la véritable longueur d'une droite limitée à deux de ses points.*

Solution dans l'espace. Nous prendrons pour nouveau système de plans de projection les plans P_1 et P_3, P_3 étant parallèle à la droite ou passant par la droite.

Dans ce système, la nouvelle projection d''' de *d* sur P_3 sera la véritable longueur de cette droite.

Solution graphique. (Ep. 174.) Le nouvel axe A_1 sera parallèle à d' où se confondra avec cette ligne.

La projection d''' de *d* sur P_3 s'obtient en construisant les nouvelles projections a''' et b''' de deux points *a* et *b* de cette ligne (**248**).

Remarque. L'inspection de l'épure nous montre que d''' ou a''' b''' est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit est $a'b'$ et l'autre la différence des premières hauteurs des points *a* et *b*.

257. Cas particuliers et exercices. *Construire la vraie grandeur d'une droite limitée à deux de ses points :*

1° Lorsque les deux projections se coupent sur l'axe.

2° Lorsque la droite est située dans le quatrième angle dièdre.

3° Lorsqu'elle est située en partie dans deux dièdres différents.

4° Lorsqu'elle est située dans un plan de profil et qu'elle est connue par deux de ses points.

Problème. *Sur une droite donnée, à partir d'un point donné, porter une longueur donnée.*

Solution. On prend pour nouveau système de plans de projection les plans P_3 et P_1, P_3 étant parallèle à la droite.

Exercices. Sur une droite limitée, donnée par ses projections, trouver un point :

1° Egalement éloigné des extrémités de la droite ;

2° Au tiers de cette ligne ;

3° Dont les distances aux deux extrémités soient dans un rapport donné.

258. Problème III. *Construire la distance d'un point à un plan.*

Solution dans l'espace. Si le plan donné s est perpendiculaire à P_2, la distance du point à ce plan s sera parallèle à P_2 et se projette sur P_2 suivant sa véritable longueur.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier favorable, il suffit de prendre pour nouveau système de plans de projection celui formé par P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à la première trace s_1 du plan donné.

Solution graphique. (**Ep. 175.**) Le nouvel axe A_1 sera perpendiculaire à s_1.

La nouvelle trace s_3 du plan s'obtient par les constructions du §. 251 et la projection nouvelle a''' du point à l'aide du §. 244.

Dans ce nouveau système de projections, la distance du point a au plan s se projette sur P_3 suivant sa véritable longueur $a'''b'''$ et suivant la perpendiculaire abaissée de a''' sur s_3 (**58**).

La projection $a'b'$ sera parallèle à l'axe.

Vérifications. La deuxième projection $a''b''$ est perpendiculaire à s_2, et il faut que les ordonnées des points a'' et b'' par rapport à l'axe A soient les mêmes que les ordonnées des points a''' et b''' par rapport au nouvel axe A_1 (**244**).

259. Exercices et cas particuliers. *Construire la distance d'un point à un plan :*

1° Le plan est parallèle à l'axe de projection ;

2° Le plan est déterminé par l'axe et par un point ;

3° Le plan est perpendiculaire au plan bissecteur B_2 ; ses deux traces sont en ligne droite.

260. Problème IV. *Trouver le point de rencontre d'une droite d avec un plan s.*

Solution dans l'espace. Si la droite d était située dans P_2, le point de rencontre de la droite avec le plan s serait à la rencontre de d'' avec s_2.

Pour ramener le cas général qui nous occupe à ce cas particulier favorable, il suffit de prendre pour nouveau système de plans de projection celui des deux plans P_1 et P_3, P_3 passant par la droite d.

Solution graphique. (Ep. 176.) Le nouvel axe A_1 sera la première projection d' de la droite donnée d.

On détermine la nouvelle trace s_3 du plan donné (**251**) ainsi que la nouvelle projection d''' de la droite (**248**).

Le point c''' sera la troisième projection du point de rencontre de la droite d avec le plan s.

Les anciennes projections c' et c'' de ce point sont sur d' et d'', et il faut que la hauteur de c'' au-dessus de l'axe A soit égale à la hauteur du point c''' au-dessus du nouvel axe A_1.

261. Problème V. *Construire la distance d'un point à une droite d.*

Solution dans l'espace. Si la droite d était parallèle à P_2 ou située dans ce plan, la distance du point donné à cette droite devrait se projeter sur P_2 suivant une perpendiculaire à d'' (**49**).

On trouverait donc facilement les deux projections de cette distance et par suite sa véritable longueur.

Solution graphique. (Ep. 177.) On prendra pour nouveau système de plans rectangulaires les plans P_1 et P_3, P_3 normal à P_1 et passant par d. Le nouvel axe A_1 sera donc la première projection d' de la droite d.

On détermine la nouvelle projection d''' de la droite (**248**) et la nouvelle projection a''' du point (**244**).

La distance demandée aura $a'''f'''$ pour troisième projection, $a'f'$ pour la première et $a''f''$ pour la deuxième.

Vérification. Les hauteurs des points a'' et f'' au-dessus de l'axe A sont égales aux hauteurs des points a''' et f''' au-dessus de A_1.

262. Exercices et cas particuliers. I. *Construire la distance d'un point donné :*

1° A l'axe ;

2° A une parallèle à l'axe.

II. *Construire la distance d'un point de l'axe à une droite quelconque.*

263. Problème VI. *Vérifier si deux droites, dont les projections sont données, sont perpendiculaires.*

Solution dans l'espace. La simple inspection des projections de deux droites accuse leur perpendicularité, si l'une de ces lignes est parallèle à l'un des plans de projection.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier favorable, il suffit de prendre pour nouveau système de plans de projection celui formé par P_1 et P_3, P_3 étant parallèle à l'une des droites ; ce qui revient à prendre pour nouvel axe A_1 la première projection de cette droite.

Solution graphique. (**Ep. 173**.) On prendra pour nouvel axe A_1 la première projection d' de la droite d, et l'on construit les troisièmes projections e''' et d''' des deux droites données e et d (**248**).

Les droites d et e de l'espace se rencontrent sous un angle droit si, dans l'épure, l'angle formé par d''' et e''' est droit.

264. Problème VII. *Vérifier si un polygone donné est plan, c'est-à-dire, si tous ses côtés sont situés dans un même plan.*

Solution dans l'espace. Toute figure plane se projette suivant une ligne droite sur un plan perpendiculaire au plan de cette figure.

Coupons le polygone par un plan parallèle à P_1. Ce plan coupera deux côtés quelconques en deux points qui déterminent une droite ab. Si le polygone est plan, cette droite est tout entière dans le plan du polygone, et celui-ci se projette dès lors suivant une ligne droite sur un plan de projection nouveau perpendiculaire à ab.

Solution graphique. (**Ep. 179.**) Le polygone *a c d e f g* sera coupé par le plan *h* parallèle à P_1. Ce plan coupe deux côtés aux points *a* et *b*. On prendra pour nouveau système de plans de projection les deux plans P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à *ab*. Le nouvel axe A_1 sera par conséquent perpendiculaire à la projection $a'b'$ de *ab* sur P_1.

On construit les nouvelles projections a''' b'''..... g''' de tous les sommets du polygone (**244**). Celui-ci sera plan, si les nouvelles projections de ses sommets sont en ligne droite.

265. Problème VIII. *Mener un plan parallèle à un plan donné s, et qui en soit distant d'une longueur donnée h.*

Solution dans l'espace. Si le plan *s* est perpendiculaire à P_2, toute perpendiculaire à *s* se projettera sur P_2 suivant une perpendiculaire à s_2. Cette disposition favorable faciliterait la solution du problème, car on n'aurait qu'à élever en un point de s_2 une perpendiculaire à cette ligne et la prendre égale à *h*. L'extrémité de *h* serait un point de la deuxième trace du plan demandé.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, on prendra pour système de plans de projection celui formé par les deux plans P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à s_1.

Solution graphique. (**Ep. 180.**) On prendra pour nouvel axe A_1 une droite perpendiculaire à s_1 et l'on construit la nouvelle trace s_3 du plan donné (**251**). En un point quelconque de cette trace on mène une perpendiculaire que l'on prend égale à *h* et par *m*, extrémité de *h*, passera t_3, trace sur P_3 du plan demandé parallèle à *s*. Sa première trace sera t_1, parallèle à s_1 et sa deuxième trace la ligne t_2 parallèle à s_2.

266. Problème IX. *Vérifier si une droite donnée d est parallèle à un plan donné s.*

Solution dans l'espace. Si le plan donné est perpendiculaire à P_2, la simple inspection de la projection de la droite sur P_2 suffit pour reconnaître le parallélisme du plan et de la droite *d*. En effet, dans ce cas, la projection d'' est parallèle à s_2.

On ramènera le cas général à ce cas particulier, en prenant pour nouveau système de plans de projection celui formé par les plans P_1 et P_2, P_3 étant perpendiculaire à s_1.

Solution graphique. (Ep. 181.) On prendra pour nouvel axe de projection la ligne A_1 perpendiculaire à s_1, et l'on construit la nouvelle trace s_3 du plan s ainsi que la nouvelle projection d''' de la droite d.

Si d''' est parallèle à s_3, la droite de l'espace d est parallèle au plan donné s.

Deuxième solution. On coupe le plan donné par le premier plan projetant de d. La droite d est parallèle à s si la droite d'intersection du plan projetant avec s est parallèle à d.

Cette solution se simplifie si l'on prend pour nouveau système de plans de projection celui formé par les plans P_1 et P_3, P_3 étant le premier plan projetant de d.

On prendra donc pour nouvel axe A_1 la première projection d_1 de la droite d, et l'on construit la nouvelle trace s_3 du plan s ainsi que la nouvelle projection d''' de la droite d.

La droite d est parallèle au plan s si d''' est parallèle à s_3.

268. Problème X. *Construire l'angle d'un plan avec le premier plan de projection* P_1.

Solution dans l'espace. Si le plan donné s était perpendiculaire à P_2, l'angle de s avec P_1 aurait pour angle plan correspondant l'angle de la deuxième trace s_2 du plan s avec l'axe de projection.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, on prendra pour nouveau système de plans de projection celui formé par les deux plans P_1 et P_3, ce dernier étant perpendiculaire à s_1.

Solution graphique. (Ep. 182.) On prendra pour nouvel axe de projection la droite A_1 perpendiculaire à s_1 et l'on construira la nouvelle trace s_3 du plan.

L'angle aigu formé par s_3 et A_1 est l'angle plan qui mesure le dièdre dont les deux faces sont P_1 et le plan donné s.

269. Problème XI. *Construire l'angle d'un plan avec le deuxième plan de projection* P_2.

Solution dans l'espace. Si le plan s était perpendiculaire à P_1, l'angle plan formé par s_1 et l'axe mesurerait le dièdre formé par s et P_1.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, il suffit de prendre pour nouveau système de plans de projection celui des deux P_2 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à s_2.

Solution graphique. (Ep. 183.) On prendra pour nouvel axe de projection la ligne A_1 perpendiculaire à s_2, et l'on construira la nouvelle trace s_3 de s (**251**). L'angle formé par s_3 et A_1 est l'angle plan correspondant du dièdre formé par s et P_2.

270. Problème XII. *Construire l'angle de deux plans.*

Solution dans l'espace. Le cas le plus simple de ce problème est celui où les deux plans donnés sont tous les deux perpendiculaires à l'un des plans de projection ; l'angle des deux traces des plans, sur ce plan de projection, sera l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans donnés.

Pour ramener le problème à ce cas particulier, il faudrait prendre pour nouveau système de plans de projection un système de plans, dans lequel devrait figurer un plan perpendiculaire à chacun des deux plans donnés s et t, donc perpendiculaire à leur intersection commune. Comme ce plan, en général, est oblique à chacun de deux plans P_2 et P_1 et, comme dans tout changement de plans de projection, le système de plans de projection nouveau doit avoir un plan commun avec le système ancien qu'il remplace, on devra, dans ce problème, opérer d'abord un premier changement de plans de projection.

On prendra pour premier système nouveau de plans de projection celui formé par les deux plans P_1 et P_3, P_3 passant par l'intersection commune des deux plans, ce qui revient à prendre pour nouvel axe la première projection de cette droite d'intersection des deux plans.

Après avoir opéré ce changement, et déterminé la nouvelle trace commune s_3t_3 des deux plans, trace qui sera la troisième projection de la droite d'intersection des deux plans, on prendra pour deuxième système nouveau de plans de projection celui formé par P_3 et P_4, P_4 étant perpendiculaire à la trace commune s_3t_3 des deux plans proposés. Le nouvel axe A_2 sera donc perpendiculaire à cette ligne.

Les traces des deux plans sur le nouveau plan de projection P_4 formeront entre elles un angle qui sera l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans donnés.

Solution graphique. (**Ep. 184.**) **Premier changement.** On prendra pour nouvel axe A_1 la projection d' de la droite d'intersection des deux plans s et t.

Les nouvelles traces des deux plans sur le nouveau plan P_3 se confondent et n'en forment qu'une seule s_3t_3.

Deuxième changement. On prendra pour nouvel axe A_2 une droite perpendiculaire à $s_3\, t_3$ et l'on construira les traces nouvelles s_4t_4 des deux plans donnés sur le nouveau plan P_4 (**253**). La trace s_3t_3 sera perpendiculaire au nouvel axe et les deux plans le sont à P_4.

L'angle formé par les nouvelles traces s_4 et t_4 sera l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans donnés.

271. Exercices et cas particuliers. Résoudre, par la méthode des changements de plans de projection, les dix cas particuliers que comporte le problème de l'angle de deux plans et qui se trouvent énoncés au §. 223.

272. Problème XIII. *Construire la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan.*

Solution dans l'espace. Soient les deux droites d et e. Le cas le plus simple de ce problème est le suivant : La droite e est perpendiculaire à l'un des plans de projection, la droite d est quelconque. Dans ce cas, la plus courte distance, qui est perpendiculaire à e, sera parallèle au plan de projection et se projettera sur ce plan suivant une perpendiculaire à la projection de d (**49**).

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, le système des plans de projection P_1 et P_2 devra être changé, et dans le nouveau système un des plans devra être normal à la droite e.

Comme un tel plan, en général, est oblique par rapport à chacun des deux plans P_1 et P_2 qui constituent l'ancien système de plans de projection, et comme tout nouveau système que l'on adopte doit avoir un plan commun avec l'ancien système qu'il doit remplacer, il faut, dans ce problème, opérer d'abord un premier changement.

On prendra pour premier système nouveau les deux plans P_1 et P_3, P_3 étant le premier plan projetant de la droite e. Par suite de ce changement, e' sera devenu le nouvel axe A_1 et la droite e sera située dans P_3 et aura une troisième projection nouvelle e'''.

Après avoir opéré ce changement, on adoptera un deuxième système nouveau formé par les plans P_3 et P_4, P_4 étant perpendiculaire à e'''. La droite e sera dans P_3 ; elle sera perpendiculaire à P_4 et dans ces conditions favorables, le problème général se simplifiera comme il a été exposé ci-dessus.

Solution graphique. (**Ep. 185.**) **Premier changement.** Le nouvel axe A_1 sera la première projection e' de la droite e. On déterminera les nouvelles projections e''' et d''' des deux droites sur P_3.

Deuxième changement. Le nouvel axe A_2 sera perpendilaire à e'''. La nouvelle projection de e sur P_4 se réduira à un point e''''.

Dans ces nouvelles projections, la plus courte distance se projette sur P_4 suivant la droite f'''', droite perpendiculaire à d'''' et passant par le point e''''. La projection sur P_3 sera f''' parallèle à l'axe A_2.

La véritable longueur f sera égale à f'''' et ses projections dans le système P_1P_2 sont f' et f''.